Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

On dit qu'un opérateur différentiel linéaire du second ordre L est *elliptique* s'il agit sur des fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ sous la forme suivante :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x),$$

où $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice à coefficients bornés satisfaisant la propriété d'ellipticité : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Comme la matrice hessienne $D^2u = (\partial_{ij}^2 u)_{1\leq i,j\leq N}$ est symétrique, on peut se restreindre au cas de matrices $A(x)$ qui sont symétriques, auquel cas la condition d'ellipticité est équivalente au fait que la matrice $A(x)$ est définie positive et que sa plus petite valeur propre est plus grande que $\lambda > 0$.

Un cas particulier est celui des *opérateurs sous forme divergence*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)).$$

En écrivant

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i a_{ij}(x)\partial_j u(x),$$

on retrouve la forme précédente avec $b_j = \sum_{i=1}^N \partial_i a_{ij}$ et la condition d'ellipticité reste la même. Cependant, on ne peut pas se restreindre au cas de matrices $A(x)$ qui sont symétriques.

On appelle équation elliptique *linéaire* une équation de la forme

$$Lu = f,$$

où f est une fonction donnée (appelé *terme source* ou *second membre*) et L est linéaire par rapport à u. On dit que l'équation est *semi-linéaire* si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à u, i.e.,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u(x) = f(x, u, \nabla u).$$

On dit que l'équation est *quasi-linéaire* si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à la dérivée de u d'ordre le plus élevé. Pour les équations d'ordre 2, elles sont du type

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, u, \nabla u)\partial^2_{ij}u(x) = f(x, u, \nabla u).$$

La classe générale des équations complètement non linéaires est de la forme

$$F(x, u, \nabla u, D^2u) = 0.$$

La condition d'ellipticité est alors que $M \mapsto F(x, z, \xi, M)$ est monotone, i.e. pour tout $(x, s, \xi, M) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times N}$ et toute matrice P définie positive,

$$F(x, s, \xi, M + P) \geq F(x, s, \xi, M).$$

L'opérateur elliptique le plus important est le *Laplacien.* Il correspond à la matrice $A = I$:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{ii}u.$$

1.2 Quelques exemples

L'équation de Poisson

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On cherche une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette équation intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et de ses applications. Par exemple, en dimension $N = 3$, si f représente une densité de charge électrique présente dans Ω, alors $-u$ est le potentiel électrique dans Ω quand le bord de Ω est parfaitement conducteur. Le gradient de $-u$ est le champ électrique. Plus généralement, ce problème intervient dans les questions relatives au potentiel newtonien.

En dimension $N = 2$, il s'agit de l'équation de la membrane élastique : f représente une densité volumique de forces et u représente le déplacement vertical d'une membrane qui occupe la position $\overline{\Omega}$ au repos. La condition limite $u = 0$ sur $\partial\Omega$ signifie que la membrane est fixée sur le bord.

Elasticité linéaire

De manière plus générale, le système de l'élasticité linéaire (dit système de Lamé) permet de décrire la position d'équilibre d'un milieu élastique homogène et isotrope lorsque l'on fait l'hypothèse que les déplacements par rapport à l'état naturel sont petits. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ représente la configuration de référence d'un milieu élastique linéaire soumis à une densité volumique de forces $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et fixé sur le bord, le déplacement $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -(\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div} u) - \mu\Delta u = f & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les coefficients λ et μ sont des paramètres d'élasticité appelés coefficients de Lamé qui doivent satisfaire les conditions

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0$$

assurant le caractère elliptique du système d'EDP précédent.

Système de Stokes

Les équations de Stokes sont des équations de la mécanique des fluides qui régissent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible qui occupe le volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ au repos. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ désigne une densité volumique de forces agissant sur le fluide, on cherche la vitesse du fluide $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et la pression $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} -\mu\Delta v = \nabla p + f & \text{dans } \ \Omega, \\ \mathrm{div} v = 0 & \text{dans } \ \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La deuxième équation traduit l'incompressibilité du fluide.