Calcul différentiel

1 Différentiabilité

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas continue en ce point.

Exercice 2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dérivable en a suivant v si

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{existe.}$$

Dans ce cas, ce nombre est appelé dérivée de f en a suivant v et est noté $\partial_v f(a)$. On suppose dans la suite que f est dérivable en a suivant v.

1. À quoi correspondent les dérivées partielles de f ?
2. Supposons f différentiable en a. Montrer que, pour tout vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$,

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \nabla f(a) \cdot v.$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $v \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\partial_v f(0,0)$. L'application f est-elle différentiable ?
4. Soit $\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne. On suppose que f est différentiable en a. Notons

$$M = \sup_{v\in\mathbb{S}^{n-1}} \partial_v f(a).$$

   Que vaut M ? Pour quel vecteur v cette valeur est-elle atteinte ? Donner une interprétation géométrique.
5. Vous êtes sur une montagne dont la surface est donnée par l'équation $z = \max(-x^2 - y^2 + 1800, 0)$, au point A de coordonnées $(20, 20, 1000)$. Quelle direction devez-vous choisir pour atteindre le sommet au plus vite ?

Exercice 3. Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $(x,y) \in U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$.

1. Expliquez pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
2. On rappelle que le Laplacien de f est défini, pour tout $(x,y) \in U$ par $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. Montrer que pour tout $(x,y) \in U$,
$$\Delta f(x,y) = g''(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
3. En déduire que $\Delta f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$ si et seulement si $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg'(r)) = 0$ pour tout $r > 0$.
4. Montrer alors que $\Delta f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$ si et seulement si
$$f(x,y) = a\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + b \qquad \text{pour tout } (x,y) \in U,$$
où a et b sont des réels.

Exercice 4. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles secondes en $(0,0)$?

Exercice 5. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(A) = \det(A)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa differentielle.

Exercice 6. Soit $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathbb{R}^n$ dans lui même muni de la norme d'opérateur et $GL_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ constitué des éléments inversibles.

1. Montrer que $GL_n(E)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que l'application inv : $u \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto u^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

2 Difféomorphismes, inversion locale et fonctions implicites

Exercice 7. Montrer que les fonctions suivantes sont des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes globaux

$$\begin{array}{rcl}\Phi :]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2\backslash([0,+\infty[\,\times\{0\}) \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\Psi :]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3\backslash([0,+\infty[\,\times\{0\}\times\mathbb{R}) \\ (r,\theta,z) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, z).\end{array}$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, mais que ça n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Exercice 9. (Folium de Descartes) Soit

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$$

Cette équation définit-elle y comme fonction implicite de x ? Si oui, calculer la dérivée de la fonction implicite et écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

3 Recherche d'extrema

Exercice 10. Soit : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f, mais que ce n'est pas un extremum local.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extrema locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 12. (Principe du maximum) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω et continue sur le fermé $\overline{\Omega}$ telle que

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{x_1}$.

1. Pourquoi les fonctions u et u_ε atteignent-elle leur maximum sur $\overline{\Omega}$?
2. Montrer que $\Delta u_\varepsilon(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$.
3. Soit $x_\varepsilon \in \overline{\Omega}$ un point de maximum de u_ε sur $\overline{\Omega}$. Montrer que $x_\varepsilon \in \partial\Omega$.
4. En déduire que le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur le bord.
5. Montrer que si u_1 et $u_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ sont deux fonctions harmoniques sur Ω telles que $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1 = u_2$ sur $\overline{\Omega}$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On s'intéresse à la recherche d'extrema locaux de f sur la sphère $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

1. On considère une paramétrisation de S donnée par $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$. Rappeler l'expression du vecteur tangent à S au point $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que si $(x_0, y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$ est un extremum local de f sur S, alors $g'(t_0) = 0$.
3. En déduire que
$$-\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t_0, \sin t_0) \sin t_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t_0, \sin t_0) \cos t_0 = 0.$$
4. Etablir alors que le vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal au vecteur tangent à S en (x_0, y_0). En déduire l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$