TD4: Mesures de Hausdorff

Exercice 1. (Mesure de Hausdorff sphérique) Soient $s \geq 0$, $\delta > 0$ et $A \subset \mathbb{R}^N$. On définit

$$\mathcal{S}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \omega_s \sum_{i \in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(B_i)}{2} \right)^s \right\},$$

où l'infimum est pris parmi tous les ensembles $I \subset \mathbb{N}$ et tous les recouvrements $\{B_i\}_{i\in I}$ de A par des boules ouvertes de diamètre plus petit que δ. On pose ensuite

$$\mathcal{S}^s(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{S}^s_\delta(A).$$

Montrer que

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{S}^s(A) \leq 2^s \mathcal{H}^s(A).$$

Exercice 2. (Mesure de comptage) Montrer que $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 3. (Mesures Hausdorff et de Lebesgue en dimension 1**)** Montrer que $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ en tant que mesures extérieures sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (Longueur d'une courbe) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ une fonction Lipschitzienne et injective. On pose $\Gamma = \gamma([0,1])$ et on définit la longueur de γ sur $[a,b] \subset [0,1]$ par la quantité

$$\ell(\Gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| : \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1 \right\}.$$

1. Montrer que si γ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\| \, dt.$$

2. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ et posons $\Gamma_i = \gamma([t_i, t_{i+1}])$.
   (a) Montrer que $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{m-1} \Gamma_i$ et que $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{H}^1(\Gamma_i)$.
   (b) Soit $p_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la projection orthogonale sur la droite passant par les points $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$. Montrer que $p_i(\Gamma_i)$ contient le segment $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$.
   (c) En déduire que

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|,$$

   puis que $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \ell(\Gamma)$.
3. On suppose maintenant que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\dot\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

(a) Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $\phi(t) = \int_0^t \|\dot\gamma(s)\|\, ds$. Montrer que ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0, \ell(\Gamma)]$.

(b) On pose $\theta = \gamma \circ \phi^{-1}$ (c'est la paramétrisation de Γ par longueur d'arc). Montrer que θ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\|\dot\theta\| = 1$ sur $[0, \ell(\Gamma)]$.

(c) En utilisant le fait que $\Gamma = \theta([0, \ell(\Gamma)])$, montrer que

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \le \ell(\Gamma).$$

Exercice 5. (Dimension de Hausdorff d'une sous variété de $\mathbb{R}^N$) Soient k et N deux entiers tels que $1 \le k \le N$. On identifie $\mathbb{R}^N$ à l'espace produit $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné et $f : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction Lipschitizienne ($k \le N$). On définit le graphe de f par

$$G_f := \{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^{N-k} : \ y = f(x)\}.$$

1. A l'aide de la projection canonique $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ définie par $P(x,y) = x$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, montrer que
$$\mathcal{H}^k(G_f) \ge \mathcal{L}^k(U) > 0$$
et en déduire que la dimension de Hausdorff de G_f est plus grande que k.

2. On décompose $\mathbb{R}^k$ en une union dénombrable de cubes fermés $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de côté égal à $1/n$ et d'intérieurs deux à deux disjoints.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \{i \in \mathbb{N} : \ \overline{U} \cap Q_i \neq \emptyset\}$. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de n telle que
   $$\#(I_n) \le C_1 n^k.$$

   (b) Si $i \in \mathbb{N}$ est tel que $\overline{U} \cap Q_i \neq \emptyset$ et $1 \le j \le N-k$, on pose
   $$a_i^j = \inf_{U\cap Q_i} f_j, \quad b_i^j = \sup_{U\cap Q_i^n} f_j.$$
   Montrer que $0 \le b_i^j - a_i^j \le \sqrt{k} L/n$ où $L > 0$ est la constante de Lipschitz de f.

   (c) On pose $A_i = Q_i \times \prod_{j=1}^{N-k} [a_i^j, b_i^j] \subset \mathbb{R}^N$. Montrer que $\mathrm{diam}(A_i) \le C_2/n$, où $C_2 > 0$ est une constante indépendante de n et i, et
   $$G_f \subset \bigcup_{i \in I_n} A_i.$$

   (d) En déduire que
   $$\mathcal{H}^k_{C_2/n}(G_f) \le \omega_k C_1 \left(\frac{C_2}{2}\right)^k,$$
   puis que la dimension de Hausdorff de G_f est plus petite que k.

3. En déduire qu'une sous-variété M de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension k a une dimension de Hausdorff égale à k.

Exercice 6. (Dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor) On considère l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0,1]$. On souhaite montrer que la dimension de Hausdorff de C est égale à $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

1. On rappelle que $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$ où C_k est l'union disjointe de 2^k intervalles fermés $I_1^k, \dots I_{2^k}^k$, deux à deux disjoints de longueur 3^{-k}.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(C_k) \leq \omega_s 2^k \frac{3^{-ks}}{2^s}.$$
   (b) En déduire que $\mathcal{H}^s(C) \leq \frac{\omega_s}{2^s}$.
2. Pour montrer une borne inférieure sur $\mathcal{H}^s(C)$, nous allons utiliser la mesure de Hausdorff sphérique. Soit $\delta \in]0,1]$ et $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de C par des intervalles ouverts de diamètre plus petit que δ.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $C \subset \bigcup_{i=0}^m B_i$.
   (b) Montrer qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $C_k \subset \bigcup_{i=0}^m B_i$ et $\mathrm{diam}(B_i) \geq 3^{-(k+1)}$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et tout $k \geq k_0$.
   (c) On fixe $k \geq k_0$. Pour $0 \leq j \leq k$, on pose
   $$J_j := \{i \in \{0, \dots, m\} : \; 3^{-(j+1)} \leq \mathrm{diam}(B_i) < 3^{-j}\}.$$
      i. Soit $i \in J_j$. Montrer par récurrence que B_i intersecte au plus 2^{k-j} composantes connexes de C_k.
      ii. Montrer l'inégalité
      $$2^k \leq \sum_{j=0}^{k} 2^{k-j} \#(J_j).$$
      iii. En déduire que
      $$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_i)^s \geq \frac{1}{2},$$
      puis que $\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}\omega_s 4^{-s}$.
3. Conclure.