Université Paris Saclay | L3 Magistère
Année 2024-2025 | Analyse, Mesure, Géométrie

TD3: Géométrie différentielle

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$:
- La sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
- L'hyperboloïde à deux nappes $\mathbb{H}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$;
- L'hyperboloïde à une nappe $\mathbb{H}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$;
- Le tore à un trou $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 2. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
1. Le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \det M = 1\}$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$;
2. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ M^T M = \mathrm{I}\}$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 3. On considère le cône

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2\}$$

et on pose $C_0 := C \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Montrer que C_0 est une sous sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension 2, mais que C n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. (Le fibré tangent) Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \geq 2$) et de dimension k. On définit le fibré tangent par

$$TM := \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^N : \ v \in T_x M\}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et de dimension $2k$.

1. Soit $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ une application linéaire (avec $1 \leq k \leq N$). Montrer que L est injective si et seulement si $\det(L^T L) \neq 0$.
2. Montrer que pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ contenant x_0, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^k$ contenant 0 et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(z)$ est injective pour tout $z \in V$ et $f : V \to M \cap U$ est un homéomorphisme.
3. Montrer que pour tout $z \in V$, $T_{f(z)} M = \mathrm{Im}(df(z))$.
4. Soit $(x_0, v_0) \in TM$, montrer qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $df(0)(u_0) = v_0$.
5. On définit $F : V \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par

   $$F(z, u) = (f(z), df(z)(u + u_0)) \quad \text{pour tout } (z, u) \in V \times \mathbb{R}^k.$$

   Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $V \times \mathbb{R}^k$, $F(0, 0) = (x_0, v_0)$ et $dF(0, 0) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ est injective.
6. Montrer que F réalise une bijection de $V \times \mathbb{R}^k$ dans $TM \cap (U \times \mathbb{R}^N)$.

7. Montrer que $F^{-1} : TM \cap (U \times \mathbb{R}^N) \to V \times \mathbb{R}^k$ est continue.
8. Conclure.

Exercice 5 (Voisinage tubulaire). Soit M une hypersurface compacte de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit
$$V_\varepsilon(M) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, M) < \varepsilon\}.$$
Montrer que $V_\varepsilon(M)$ est un voisinage ouvert de M.
2. Pour $x \in M$, on pose
$$N_\varepsilon(x) = \{x + v : \ v \in (T_xM)^\perp, \ \|v\| < \varepsilon\}.$$
En appliquant le théorème des extremas liés à la fonction $x \in M \mapsto \|y - x\|^2$ (où $y \in V_\varepsilon(M)$ est fixé), montrer que
$$V_\varepsilon(M) = \bigcup_{x \in M} N_\varepsilon(x).$$
3. Soit $x_0 \in M$. Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ contenant x_0 et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\nabla g(x) \neq 0$ pour tout $x \in M \cap U$ et
$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$
4. En déduire qu'il existe une application $\nu : U \to \mathbb{S}^{N-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, que l'on explicitera en fonction de g, telle que le vecteur $\nu(x)$ est orthogonal à T_xM pour tout $x \in M \cap U$.
5. Soient $V \subset \mathbb{R}^{N-1}$ un ouvert contenant 0 et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une paramétrisation locale de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $M \cap U$. On définit $F : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ par
$$F(y, t) := f(y) + t\nu(f(y)) \quad \text{pour tout } (y, t) \in V \times \mathbb{R}.$$
Montrer l'existence d'un ouvert $W \subset V$ contenant 0 et $\delta > 0$ tels que F réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $W \times]-\delta, \delta[$ sur son image $F(W \times]-\delta, \delta[)$ qui est un ouvert contenant x_0 .
6. En déduire que
$$N_\delta(x) \cap N_\delta(x') = \emptyset \quad \text{pour tout } x, \, x' \in M \cap F(W \times]-\delta, \delta[) \text{ avec } x \neq x'.$$
7. En utilisant la compacité de M, montrer qu'il existe $\varepsilon < \delta$ tel que
$$N_\varepsilon(x) \cap N_\varepsilon(x') = \emptyset \quad \text{pour tout } x, \, x' \in M \text{ avec } x \neq x'.$$
L'ensemble $V_\varepsilon(M)$ s'appelle alors un voisinage tubulaire de M.
8. En déduire que pour tout $y \in V_\varepsilon(M)$, il existe un unique $x \in M$ tel que
$$\mathrm{dist}(y, M) = \|y - x\|.$$

Exercice 6. (Inégalité de Hadamard)

1. Justifier l'existence de $M = \max\{\det(u_1, \ldots, u_N) : \ \|u_1\| = \cdots = \|u_N\| = 1\}$.

2. Soit $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^N$ tels que $\|v_i\| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et $M = \det(v_1, \ldots, v_N)$. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer l'existence de $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, h, v_{i+1}, \ldots, v_N) = 2\lambda_i \langle v_i, h \rangle \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N.$$

3. Montrer que $\{v_1, \ldots, v_N\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$.
4. Quelle est la valeur de M ?
5. En déduire l'inégalité de Hadamard

$$|\det(u_1, \ldots, u_N)| \leq \|u_1\| \cdots \|u_N\| \quad \text{pour tout } u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}^N$$

6. Interpréter géométriquement ce résultat.