# Chapitre 3

# Géométrie différentielle

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la généralisation des courbes et des surfaces dans l'espace Euclidien qui conduit l̀a notion de sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^N$.

## 3.1 Quelques rappels de calcul différentiel

Nous rappelons les résultats suivants de calcul différentiel qui seront centraux dans les arguments qui suivent.

**Théorème 3.1.1 (d'inversion locale).** *Soient $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert et $\varphi : U \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $x_0 \in U$ tel que $d\varphi(x_0) \in \mathscr{L}(E)$ est inversible. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant $x_0$ et un ouvert $W \subset E$ contenant $\varphi(x_0)$ tels que $\varphi$ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $V$ sur $W$.*

Le théorème d'inversion locale ne donne qu'un critère permettant de montrer qu'une fonction est difféomorphisme local. Le théorème d'inversion global permet en revanche de montrer, sous des hypothèses plus fortes, qu'une fonction est un difféomorphisme global.

**Théorème 3.1.2 (d'inversion globale).** *Soient $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert, $\varphi : U \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $\varphi$ est injective sur $U$ et que $d\varphi(x) \in \mathscr{L}(E)$ est iversible pour tout $x \in U$. Alors $\varphi(U)$ est un ouvert et $\varphi$ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $U$ sur $\varphi(U)$.*

Le théorème des fonctions implicites permet de résoudre localement une équation cartésienne $f(x, y) = 0$ sous la forme $y = y(x)$. Autrement dit, il permet (localement) de montrer qu'un ensemble de niveau peut s'écrire comme le graphe d'une fonction.

Si $E$, $F$, et $G$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et $g : E \times F \to G$, nous considérerons par la suite les différentielles partielles $d_y g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(E, G)$ et $d_z g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(F, G)$ de $f$ en $x_0 = (y_0, z_0) \in E \times F$ qui correspondent aux différentielles des fonctions partielles $y \in E \mapsto g(y, z_0)$ et $z \in F \mapsto g(y_0, z)$ en $y_0$ et $z_0$, respectivement. Si $g$ est différentiable en $(y_0, z_0)$, nous avons alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in E \times F$,

$$dg(y_0, z_0)(h_1, h_2) = d_y g(y_0, z_0)(h_1) + d_z g(y_0, z_0)(h_2).$$

**Théorème 3.1.3 (des fonctions implicites).** *Soient $E$, $F$, et $G$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie tels que* $\dim(F) = \dim(G)$, *$U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts et $g : U \times V \to$*

*$G$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $x_0 = (y_0, z_0) \in U \times V$ tel que*

$$\begin{cases} g(y_0, z_0) = 0, \\ d_z g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(F, G) \text{ est inversible.} \end{cases}$$

*Alors, il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant $y_0$, un ouvert $V' \subset V$ contenant $z_0$ et une fonction $a : U' \to V'$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que*

$$\begin{cases} (y, z) \in U' \times V', \\ g(y, z) = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in U', \\ z = a(y). \end{cases}$$

## 3.2 Sous-variétés

**Définition 3.2.1.** Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Un sous ensemble $M$ de $\mathbb{R}^N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^p$ si, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ de $U$ sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

La définition précédente en terme de <u>carte locale</u> signifie que localement, $M$ est $\mathcal{C}^p$-difféomorphe à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$. Dans le résultat suivant, nous donnons d'autres caractérisations dont les preuves reposent sur les Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Par la suite, si $E$ et $F$ désignent des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et $N - k$ tels que $\mathbb{R}^N = E \oplus F$, nous identifierons $\mathbb{R}^N$ et $E \times F$ via l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N = E \oplus F & \to & E \times F, \\ x = y + z & \mapsto & (y, z). \end{array}$$

Par abus de notation, nous écrirons tout $x \in \mathbb{R}^N$ sous la forme $x = (y, z) \in E \times F$.

**Théorème 3.2.2.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $M$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^p$ ;*

*(ii) <u>Fonction implicite :</u> pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et*

$$M \cap U = \{x \in U : \; g(x) = 0\};$$

*(iii) <u>Graphe :</u> il existe deux sous-espaces de vectoriel $E$ et $F$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et $N - k$, respectivement tels que si $x_0 = (y_0, z_0) \in M$ (avec $y_0 \in E$, $z_0 \in F$), il existe un voisinage ouvert $V$ de $y_0$ dans $E$, un voisinage ouvert $W$ de $z_0$ dans $F$ et une fonction $a : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que*

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \; y \in V\};$$

*(iv) <u>Nappe paramétrée :</u> pour tout $x_0 \in M$, il existe un sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$, un voisinage ouvert $U$ de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage ouvert $V$ de $0_E$ dans $E$ et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective et $f$ réalise un homéomorphisme de $V$ sur $M \cap U$.*

**Remarque 3.2.3.** 1) La caractérisation (ii) d'une sous-variété $M$ en terme de fonction implicite signifie que, localement, $M$ est l'ensemble de niveau 0 d'une fonction $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-k}$. Une fonction $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ contenant $x_0$ et telle que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective s'appelle une *submersion* de classe $\mathcal{C}^p$ en $x_0$.

2) La caractérisation (iii) d'une sous-variété $M$ en terme de graphe signifie que localement, $M$ est le graphe d'une fonction $a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{N-k}$.

3) La caractérisation (iv) d'une sous-variété $M$ en terme de nappe paramétrée signifie que, localement, $M$ est l'image d'une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$. Une telle fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^k$ contenant 0 telle que $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective s'appelle une *immersion* de classe $\mathcal{C}^p$ en 0.

*Démonstration du Théorème 3.2.2.* Carte locale $\Longrightarrow$ Fonction implicite : Soient $x_0 \in M$, $U$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $U$ sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

On définit $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ par

$$g(x) = (\varphi_{k+1}(x), \dots, \varphi_N(x)) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

La fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et d'après le théorème de différentiation des fonctions composées, on a pour tout $x \in U$,

$$dg(x)(h) = (d\varphi_{k+1}(x)(h), \dots, d\varphi_N(x)(h)) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N.$$

Comme $\varphi$ est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme local au voisinage de $x_0$, on en déduit que $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$ et donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^{N-k}$ il existe un unique $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $d\varphi(x_0)(h) = (0_{\mathbb{R}^k}, v)$, ce qui montre que

$$dg(x_0)(h) = v$$

et donc que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective. On a donc montré que $g$ est une submersion de classe $\mathcal{C}^p$ en $x_0$. Enfin,

$$\begin{aligned} x \in M \cap U &\iff x \in U \text{ et } \varphi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\} \\ &\iff x \in U \text{ et } g(x) = 0. \end{aligned}$$

Fonction implicite $\Longrightarrow$ Graphe : Soient $x_0 \in M$, $U$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$

Comme $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective on a $\mathrm{rg}(dg(x_0)) = N - k$ et le Théorème du rang montre que $E = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$. Soit $F = E^\perp$ le supplémentaire orthogonal à $E$ dans $\mathbb{R}^N$ (qui est un sous espace vectoriel de dimension $N - k$). Nous identifions $\mathbb{R}^N$ à $E \times F$ de sorte que $x_0 = (y_0, z_0) \in E \times F$. Quitte à réduire $U$, nous pouvons supposer que $U = V \times W$ où $V$ est un voisinage ouvert de $y_0$ dans $E$ et $W$ est un voisinage ouvert de $z_0$ dans $F$. Considérons l'application partielle

$$g(y_0, \cdot\,) : W \to \mathbb{R}^{N-k}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^p$. Sa différentielle en $z_0$ est donnée par $d_z g(y_0, z_0) = dg(x_0)|_{\{0_E\} \times F} \in \mathscr{L}(F; \mathbb{R}^{N-k})$. Si $v \in F$ est tel que $d_z g(y_0, z_0)(v) = dg(x_0)(0, v) = 0$, alors $v \in \mathrm{Ker}(dg(x_0)) = E$ ce qui montre que

$v = 0$. Par conséquent, $d_z g(y_0, z_0)$ est injective et donc bijective puisque $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^{N-k}) = N - k$. On en déduit que $d_z g(y_0, z_0)$ est inversible de sorte que nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions implicites. Il existe donc un ouvert $V' \subset V$ contenant $y_0$, un ouvert $W' \subset W$ contenant $z_0$ et une fonction $a : V' \to W'$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$\begin{cases} (y,z) \in V' \times W', \\ g(y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \in V', \\ z = a(y). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$M \cap (V' \times W') = \{(y, a(y)) : \ y \in V'\}.$$

Graphe $\Longrightarrow$ Carte locale : On suppose que $\mathbb{R}^N = E \times F$ où $E$ (resp. $F$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ (resp. $N-k$). Soient $x_0 = (y_0, z_0) \in M$ avec $y_0 \in E$, $z_0 \in F$, $V$ un voisinage ouvert de $y_0$ dans $E$, $W$ un voisinage ouvert de $z_0$ dans $F$ et $a : V \to W$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \ y \in V\}.$$

Soit $\varphi : V \times W \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \varphi(y,z) = (y, z - a(y)) \quad \text{pour tout } x = (y,z) \in V \times W.$$

La fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $V \times W$. De plus $\varphi$ est clairement bijective de $V \times W$ sur son image $\varphi(V \times W)$ d'inverse donné par

$$\varphi^{-1}(y', z') = (y', z' + a(y')) \quad \text{pour tout } (y', z') \in \varphi(V \times W).$$

Par ailleurs, pour tout $x = (y,z) \in V \times W$ et tout $h = (h_1, h_2) \in E \times F$, on a

$$d\varphi(x)(h) = (h_1, h_2 - da(y)(h_1)),$$

de sorte que $d\varphi(x) \in GL_N(\mathbb{R})$. Le Théorème d'inversion globale montre que $\varphi$ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $V \times W$ sur son image (qui est ouverte).

Enfin,

$$\begin{aligned} x = (y,z) \in M \cap (V \times W) &\iff (y,z) \in V \times W \text{ et } z = a(y) \\ &\iff \varphi(x) \in \varphi(V \times W) \text{ et } \varphi_{k+1}(x) = \cdots = \varphi_N(x) = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\varphi(M \cap (V \times W)) = \varphi(V \times W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

Graphe $\Longrightarrow$ Nappe paramétrée : Soient $E$ et $F$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et $N-k$, respectivement, tels que si $x_0 = (y_0, z_0) \in M$ (avec $y_0 \in E$, $z_0 \in F$), il existe un voisinage ouvert $V$ de $y_0$ dans $E$, un voisinage ouvert $W$ de $z_0$ dans $F$ et une fonction $a : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^p$ avec

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \ y \in V\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} f : V - y_0 &\to \mathbb{R}^N \\ y &\mapsto (y_0 + y, a(y_0 + y)) \end{aligned}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ouvert $V - y_0$. Par conséquent, $V' = f^{-1}(V \times W)$ est un ouvert de $V - y_0$ contenant $0_E$ puisque $f(0_E) = (y_0, a(y_0)) = (y_0, z_0) \in V \times W$. On a de plus

$df(0)(h) = (h, da(y_0)(h))$ pour tout $h \in E$. Par conséquent, $df(0)(h) = 0$ implique que $h = 0$, ce qui montre que $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective et donc que $f$ est une immersion de classe $\mathcal{C}^p$ en 0.

Montrons que $f : V' \to M \cap U$ est bijective. Tout d'abord, si $y_1$ et $y_2 \in V'$ sont tels que $f(y_1) = f(y_2)$, on en déduit que $(y_0 + y_1, a(y_0 + y_1)) = (y_0 + y_2, a(y_0 + y_2))$ ce qui montre que $y_1 = y_2$ et donc que $a$ est injective sur $V'$. Par ailleurs, pour tout $x = (y, z) \in M \cap U$, on a $z = a(y)$, donc en posant $\bar{y} := y - y_0$, on a $f(\bar{y}) = (y_0 + \bar{y}, a(y_0 + \bar{y})) = (y, z) = x \in U$ ce qui implique que $\bar{y} \in V'$ et $f(\bar{y}) = x$. Ceci implique que $f$ est surjective de $V'$ sur $M \cap U$ et donc que $f$ réalise une bijection de $V'$ sur $M \cap U$. Remarquons que l'application réciproque $f^{-1} : M \cap U \to V$ est donnée par

$$f^{-1}(x) = ((x - x_0)_1, \dots, (x - x_0)_k) \quad \text{pour tout } x \in M \cap U \tag{3.2.1}$$

qui définit bien une fonction continue sur $M \cap U$. Nous avons finalement montré que $f : V' \to M \cap U$ est un homéomorphisme.

Nappe paramétrée $\Longrightarrow$ Graphe : Soit $x_0 \in M$, $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$, $U$ un voisignage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$, $V$ un voisinage ouvert de $0_E$ dans $E$ et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}^N)$ est injective et $f$ réalise un homéomorphisme de $V$ sur $U \cap M$.

Comme $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective, $F_1 := \mathrm{Im}(df(0))$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$. Soit $F_2 = F_1^\perp$ le supplémentaire orthogonal à $F_1$ dans $\mathbb{R}^N$ (qui est un sous espace vectoriel de dimension $N - k$). En identifiant $\mathbb{R}^N$ à $F_1 \times F_2$, on a $x_0 = (y_0, z_0) \in F_1 \times F_2$. On note $P_1 : \mathbb{R}^N \to F_1$ (resp. $P_2 : \mathbb{R}^N \to F_2$) la projection sur $F_1$ (resp. $F_2$) et on définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} J : V & \to & F_1 \\ y & \mapsto & P_1(f(y)). \end{array}$$

La fonction $J$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $V$ et on a $dJ(0)(h) = P_1 \circ df(0)(h)$ pour tout $h \in E$. De plus si $dJ(0)(h) = 0$ on en déduit que $df(0)(h) \in \mathrm{Ker}(P_1) = F_1^\perp = \mathrm{Im}(df(0))^\perp$ ce qui implique que $df(0)(h) = 0$, soit $h = 0$ puisque $df(0)$ est injective. On en déduit que $dJ(0) \in \mathscr{L}(E, F_1)$ est injective puis, comme $\dim(E) = \dim(F_1) = k$, que $dJ(0)$ est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $V_0 \subset V$ de $0_E$ dans $E$ et un voisinage ouvert $V_{y_0}$ de $y_0$ dans $F_1$ tels que $J$ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $V_0$ sur $V_{y_0}$.

Soit $\tilde{U} = f(V_0)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ puisque $V_0$ est ouvert dans $\mathbb{R}^k$ et $f^{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ est continue d'après (3.2.1). Alors

$$\begin{aligned} x = (y, z) \in M \cap \tilde{U} &\iff \text{il existe } y' \in V_0 \text{ tel que } x = f(y') \\ &\iff \text{il existe } y' \in V_0 \text{ tel que } y = J(y') \text{ et } z = P_2(f(y')) \\ &\iff y \in V_{y_0},\ y' = J^{-1}(y) \text{ et } z = P_2(f(y')) \\ &\iff y \in V_{y_0} \text{ et } z = P_2(f(J^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Soit $a : V_{y_0} \to F$ la fonction définie par $a(y) = P_2 \circ f \circ J^{-1}(y)$ pour tout $y \in V_{y_0}$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$. On a bien montré que $M \cap \tilde{U} = \{(y, a(y)) :\ y \in V_{y_0}\}$. □

**Exemple 3.2.4.** 1) Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert. Alors $M = V \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il suffit de choisir pour tout $x_0 \in M$ l'ouvert $U = V \times B_{\mathbb{R}^{N-k}}(0, r)$ (avec $r > 0$ arbitraire) et $\varphi = \mathrm{id}$.

2) La sphère $\mathbb{S}^{N-1} = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N :\ x_1^2 + \dots + x_N^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N - 1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^N x_j^2 - 1 \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$dg(x)(h) = 2x \cdot h \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui montre que $dg(x)$ est surjective pour tout $x \in \mathbb{S}^{N-1}$. De plus $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \ g(x) = 0\}$.

## 3.3 Espace tangent

La notion d'espace tangent pour les sous-variétés généralise celle de droite tangente pour les courbes.

**Définition 3.3.1.** Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'espace tangent à $M$ en $x_0$, noté $T_{x_0}M$, est défini par

$$T_{x_0}M := \Big\{ v \in \mathbb{R}^N : \quad \text{il existe un intervalle ouvert } I \text{ contenant } 0 \text{ et} \\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \gamma(I) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v \Big\}.$$

Nous allons voir que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$.

**Théorème 3.3.2.** *Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'espace tangent à $M$ en $x_0$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$. De plus, on a les caractérisations suivantes :*
*(i) Carte locale :* $T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$ *;*
*(ii) Nappe paramétrée :* $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0))$.
*(iii) Graphe :* $T_{x_0}M = \{(h, da(x_0)(h)) : \ h \in E\}$ *;*
*(iv) Fonction implicite :* $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$.

*Démonstration.* Fixons un point $x_0 \in U$.

(i) Carte locale : Soit $U$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U$ sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

Montrons tout d'abord que $T_{x_0}M \subset d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$. Soit $v \in T_{x_0}M$, alors il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une application $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle $I$, on peut supposer que $\gamma(I) \subset U$. On peut alors définir $\tilde{\gamma}(t) = \varphi(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$ de sorte que $\tilde{\gamma}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Comme $\gamma(t) \in M \cap U$ pour tout $t \in I$, alors $\tilde{\gamma}(t) \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$ et donc $\tilde{\gamma}'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(x_0)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$. On en déduit que $v \in d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$.

Pour montrer l'autre inclusion, fixons un élément $w \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$. Comme $\varphi(U)$ est ouvert contenant $\varphi(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(U)$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ & \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tw) \end{array}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$, on en déduit que $\gamma(t) \in M \cap U$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. De plus $\gamma(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on doit avoir que $\gamma'(0) = d(\varphi^{-1})(\varphi(x_0))(w) = d\varphi(x_0)^{-1}(w) \in T_{x_0}M$. On a donc bien établi que $d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}) \subset T_{x_0}M$.

Comme $T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$ et $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$, on en déduit que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$.

(ii) Nappe paramétrée : Soit $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$, $U$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$, $V$ un voisinage ouvert de $0_E$ dans $E$ et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective et $f$ réalise un homéomorphisme de $V$ sur $M \cap U$.

Soit $w \in E$, comme $V$ est un ouvert de $E$ contenant 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $tw \in V$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ & \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & f(tw). \end{array}$$

Comme $f(V) = M \cap U$, on en déduit que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. De plus, la fonction $\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait $\gamma(0) = f(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on a $\gamma'(0) = df(0)(w) \in T_{x_0}M$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(df(0)) \subset T_{x_0}M$. Comme $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective, $\mathrm{Im}(df(0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$. Comme $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$, on en déduit que $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0))$.

(iii) Graphe : Soient $E$ et $F$ deux sous-espaces de vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et $N-k$, respectivement, et $y_0 \in E$, $z_0 \in F$ tels que si $x_0 = (y_0, z_0) \in M$. Soit $V$ un voisinage ouvert de $y_0$ dans $E$, $W$ un voisinage ouvert de $z_0$ dans $F$ et $a : V \to W$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \ y \in V\}.$$

Comme les fonctions $f$ et $a$ sont reliées par la relation

$$f(y) = (y_0 + y, a(y_0 + y)) \quad \text{pour tout } y \in V - y_0,$$

on en déduit que

$$T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0)) = \{df(0)(h) : \ h \in E\} = \{(h, da(x_0)(h)) : \ h \in E\}.$$

(iv) Fonction implicite : Soit $U$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$

Soit $v \in T_{x_0}M$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle $I$, on peut supposer que $\gamma(t) \in U$ pour tout $t \in I$. Par conséquent, $g(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, puis en dérivant, il vient

$$dg(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En particulier, pour $t = 0$, on a $dg(x_0)(v) = 0$ ce qui montre que $v \in \mathrm{Ker}(dg(x_0))$ et donc que $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$. Par ailleurs, la surjectivité de $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ montre que $\mathrm{Ker}(dg(x_0))$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$, tout comme $T_{x_0}M$. Par conséquent, $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$. □

## 3.4 Extrema liés

Soit $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$. Si $f$ admet un extremum local en $x_0 \in U$, alors $x_0$ est un point critique de $f$, ce qui signifie

$$df(x_0) = 0. \tag{3.4.1}$$

Il s'agit d'un résultat propre à un ouvert de $\mathbb{R}^N$ car dans ce cas, on a le droit de faire toutes les variations infinitésimales autour de $x_0$ pour montrer que la différentielle s'annule en ce point.

Nous allons nous intéresser maintenant au cas d'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage ouvert d'une sous-variété $M$. Dans ce cas, nous allons montrer que si $f$ admet un extremum local sur $M$ en $x_0$, alors $f$ satisfait une condition d'optimalité d'ordre 1, similaire à (3.4.1). Le fait de travailler sur un espace ambiant qui n'est pas "plat" impose de faire des variations infinitésimales autour de $x_0$ dans l'espace tangent à $M$ en $x_0$, ce qui se manifeste par l'apparition de multiplicateurs de Lagrange.

**Théorème 3.4.1.** *Soient $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage ouvert de $M$. On suppose que $f$ admet un extremum local sur $M$ en $x_0$, i.e. il existe un ouvert $U$ contenant $x_0$ tel que*

$$f(x_0) \leq f(y) \quad \textit{pour tout } y \in M \cap U$$

*ou*

$$f(x_0) \geq f(y) \quad \textit{pour tout } y \in M \cap U.$$

*Alors $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$.*

*Démonstration.* Soit $v \in T_{x_0}M$, il existe donc un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle $I$, on peut supposer que $\gamma(t) \in U$ pour tout $t \in I$. On en déduit que la fonction $t \in I \mapsto f(\gamma(t))$ admet un extremum local sur l'intervalle ouvert $I$ en $t = 0$, ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = 0$$

ou encore $df(x_0)(v) = 0$. On en déduit que $v \in \mathrm{Ker}(df(x_0))$. □

**Remarque 3.4.2.** Si $V \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert, on montre en utilisant la définition par carte locale que $V$ est une sous-variété de dimension $N$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^N$ (il suffit de prendre $U = V$ et $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$). De plus, l'espace tangent $T_{x_0}V = \mathbb{R}^N$ pour tout $x_0 \in V$ (il suffit de considérer la courbe $\gamma(t) = x_0 + tv$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit et $v \in \mathbb{R}^N$ arbitraire). Dans ce cas, si $x_0 \in V$ est un point d'extremum local de $f$ sur $V$, on a $\mathrm{Ker}(df(x_0)) = \mathbb{R}^N$ et donc $df(x_0) = 0$.

Le résultat général précédent se précise quand on écrit la sous-variété sous la forme d'une fonction implicite.

**Théorème 3.4.3 (des extrema liés).** *Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f, g_1, \ldots, g_p : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ($p \leq N$). On pose*

$$\Sigma := \{x \in U : \ g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\}.$$

*Soit $x_0 \in \Sigma$ un extremum local de $f$ sur $\Sigma$ tel que la famille $\{dg_1(x_0), \ldots, dg_p(x_0)\}$ est libre. Alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que*

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dg_i(x_0).$$

*Démonstration.* Soit $g : U \to \mathbb{R}^p$ le champ de vecteur défini par

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_p(x)) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

Comme les vecteurs $dg_1(x_0), \dots, dg_p(x_0)$ sont linéairement indépendants, la matrice jacobienne $J_g(x_0)$ admet un sous-déterminant d'ordre $p$ non nul. Par continuité du déterminant, il existe un voisinage ouvert $U_{x_0}$ de $x_0$ tel que cette propriété subsiste pour tout $x \in U_{x_0}$. Autrement dit, les vecteurs $dg_1(x), \dots, dg_p(x)$ sont linéairement indépendants, ce qui montre que l'application linéaire $dg(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ est surjective pour tout $x \in U_{x_0}$. D'après la caractérisation d'une sous-variété par fonction implicite, ceci implique que $M := \Sigma \cap U_{x_0}$ est une sous-variété de dimension $k := N - p$ de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le Théorème 3.4.1, on en déduit que $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$. La sous-variété $M$ étant défini par fonction implicite, le Théorème 3.3.2 montre que $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0)) = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(dg_i(x_0))$. La conclusion provient du résultat suivant d'algèbre linéaire. □

**Lemme 3.4.4 (des noyaux).** *Soient $\{L_1, \dots, L_p\}$ une famille libre dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Alors*

$$\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(L_i) \subset \mathrm{Ker}(L)$$

*si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que*

$$L = \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i. \tag{3.4.2}$$

*Démonstration.* Il est clair que si $L$ est de la forme (3.4.2), alors on a $\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(L_i) \subset \mathrm{Ker}(L)$. Réciproquement, montrons par récurrence qu'il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_p \in \mathbb{R}^N$ tels que $\langle L_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $i$, $j \in \{1, \dots, p\}$.

(i) Si $p = 1$, l'hypothèse signifie que $\mathrm{Ker}L_1 \subset \mathrm{Ker}L$. Dans le cas $L_1 = 0$, alors $\mathrm{Ker}L_1 = \mathrm{Ker}L = \mathbb{R}^N$ et donc $L = 0$. Sinon, il existe un $e \in \mathbb{R}^N$ tel que $L_1(e) = 1$. Par conséquent, $x - L_1(x)e \in \mathrm{Ker}L_1$ et donc, par hypothèse, $x - L_1(x)e \in \mathrm{Ker}L$ soit $L(x) = L(e)L_1(x)$ et le résultat suit.

(ii) Supposons le résultat vrai au rang $p-1$ pour un certain entier $p \geq 1$. Comme la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est libre, alors $L_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrons que pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ker}L_j \not\subset \mathrm{Ker}L_i$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\bigcap_{j \neq i_0} \mathrm{Ker}L_j \subset \mathrm{Ker}L_{i_0}$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, des réels $\{\lambda_j\}_{j \neq i_0}$ tels que $L_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} \lambda_j L_j$ ce qui impliquerait que la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est liée et donc on aboutirait à une contradiction. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ il existe un $e_i \in \mathrm{Ker}L_j$ pour tout $j \neq i$ tel que $e_i \notin \mathrm{Ker}L_i$. Après renormalisation, on peut supposer que $L_i(e_i) = 1$ et $L_j(e_i) = 0$ pour tout $j \neq i$.

Si $x \in \mathbb{R}^N$, alors $x - \sum_{j=1}^p L_j(x)e_j \in \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}L_i$ et donc par hypothèse $x - \sum_{j=1}^p L_j(x)e_j \in \mathrm{Ker}L$, soit $L(x) = \sum_{j=1}^p L_j(x)L(e_j)$, ce qui établit le résultat en posant $\lambda_j = L(e_j)$. □