Chapitre 2

La mesure de Lebesgue

L'objet de ce chapitre est de montrer l'existence et l'unicité d'une mesure de Radon $\mathcal{L}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant

1. $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$;
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}^N(x+B) = \mathcal{L}^N(B)$.

La mesure $\mathcal{L}^N$ s'appelle la *mesure de Lebesgue*.

2.1 On règle une fois pour toute la question de l'unicité

Soient λ et μ deux mesures de Radon invariantes par translation telles que $\lambda([0,1]^N) = \mu([0,1]^N) = 1$. Montrons que $\lambda = \mu$.

Etape 1. Montrons tout d'abord que si $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors $\lambda(\{x_i = a\}) = 0$. Nous supposons pour simplifier que $i = 1$ et $a = 0$. Alors

$$\lambda(\{x_1 = 0\}) = \lambda\left(\{x_1 = 0\} \cap \bigcup_{n \geq 1} [-n,n]^N\right) = \lim_{n \to \infty} \lambda\left(\{x_1 = 0\} \cap [-n,n]^N\right). \tag{2.1.1}$$

On définit $E_n := \{x_1 = 0\} \cap [-n,n]^N$ et on observe que

$$[-n,n]^N = \bigcup_{y_1 \in [-n,n]} (y_1 e_1 + E_n) \supset \bigcup_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} (y_1 e_1 + E_n),$$

où les ensembles Boréliens $\{y_1 e_1 + E_n\}_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}}$ sont disjoints deux à deux. Comme λ est finie sur les compacts, il vient en utilisant l'invariance par translation que

$$\sum_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} \lambda(E_n) = \sum_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} \lambda(y_1 e_1 + E_n) = \lambda\left(\bigcup_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} (y_1 e_1 + E_n)\right) \leq \lambda([-n,n]^N) < \infty,$$

ce qui n'est possible que si $\lambda(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, en vertu de (2.1.1), on obtient que $\lambda(\{x_1 = 0\}) = 0$. On montre de même que $\mu(\{x_1 = 0\}) = 0$.

Etape 2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[0,1[^N = \bigcup_{k \in \{0,\ldots,n-1\}^N} \left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right),$$

où les ensembles Boréliens dans l'union précédente sont deux à deux disjoints. Il vient alors que

$$\begin{aligned}1 = \lambda([0,1]^N) = \lambda([0,1[^N) &= \lambda\left(\bigcup_{k\in\{0,\dots,n-1\}^N}\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right)\right)\\ &= \sum_{k\in\{0,\dots,n-1\}^N}\lambda\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right) = \sum_{k\in\{0,\dots,n-1\}^N}\lambda\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right) = n^N\lambda\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right),\end{aligned}$$

d'où $\lambda([0,1/n[^N) = n^{-N}$. On montre de même que $\mu([0,1/n[^N) = n^{-N}$.

Etape 3. Montrons à présent que λ et μ coïncident sur les pavés de côtés rationnels. Soit $Q := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ avec a_i et $b_i \in \mathbb{Q}$ et $a_i < b_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$. Alors il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$, α_i et $\beta_i \in \mathbb{Z}$ tels que $a_i = \alpha_i/n$ et $b_i = \beta_i/n$. Par conséquent,

$$Q = \left(\frac{\alpha_1}{n},\dots,\frac{\alpha_N}{n}\right) + \prod_{i=1}^N\left[0,\frac{q_i}{n}\right],$$

avec $q_i = \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$. En vertu de l'invariance par translation de λ, on en déduit que

$$\lambda(Q) = \lambda\left(\prod_{i=1}^N\left[0,\frac{q_i}{n}\right[\right).$$

Par ailleurs,

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^N\left[0,\frac{q_i}{n}\right[\right) = \lambda\left(\prod_{i=1}^N\left(\bigcup_{k_i=0}^{q_i-1}\left[\frac{k_i}{n},\frac{k_i+1}{n}\right[\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{k\in K}\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right)\right),$$

où $K := \{k \in \mathbb{N}^N : 0 \le k_i \le q_i - 1 \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,N\}\}$. En utilisant de nouveau l'invariance par translation de λ, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda\left(\prod_{i=1}^N\left[0,\frac{q_i}{n}\right[\right) = \sum_{k\in K}\lambda\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right) &= \sum_{k\in K}\lambda\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right)\\ &= \frac{1}{n^N}\mathrm{Card}(K) = \frac{1}{n^N}\prod_{i=1}^N q_i = \prod_{i=1}^N(b_i-a_i).\end{aligned}$$

On obtient finalement que $\lambda(Q) = \prod_{i=1}^N(b_i - a_i)$ et on montre de même que $\mu(Q) = \prod_{i=1}^N(b_i - a_i)$.

Etape 4. Montrons enfin que λ et μ coïncident sur tous les pavés. Soit $Q := \prod_{i=1}^N[a_i, b_i]$ avec a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ avec $a_i < b_i$ pour $i \in \{1,\dots,N\}$. Il existe des suites $\{a_i^n\}_{n\ge1}$ et $\{b_i^n\}_{n\ge1} \subset \mathbb{Q}$ telles que $a_i^n \searrow a_i$ et $b_i^n \nearrow b_i$ quand $n \to \infty$, quelque soit $i \in \{1,\dots,N\}$. Comme $\{\prod_{i=1}^N[a_i^n, b_i^n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés fermés dont l'union est le pavé ouvert $\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right) &= \lambda\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\prod_{i=1}^N [a_i^n, b_i^n]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^N (b_i^n - a_i^n) \\
&= \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\prod_{i=1}^N [a_i^n, b_i^n]\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la classe monotone montre finalement que $\lambda(B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2.2 Deux constructions

2.2.1 Première approche par mesure extérieure

La première approche de nature purement géométrique consiste à voir la mesure de Lebesgue comme une généralisation naturelle celle de volume. Il convient donc d'étudier au préalable la notion de volume pour la classe élémentaires d'ensembles que sont les pavés.

Définition 2.2.1. Le *volume* d'un pavé ouvert ou fermé $P = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i)$ est donné par

$$|P| = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

Notons que si P est un pavé fermé tel que, pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, N\}$, on a $a_{i_0} = b_{i_0}$, alors $|P| = 0$.

Le premier résultat ci-dessous montre que l'application volume est additive sur la classe des pavés d'intérieurs deux à deux disjoints.

Lemme 2.2.2. *Soit $P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ un pavé fermé. Si, pour tout $1 \le i \le N$, chaque intervalle $[a_i, b_i]$ est subdivisé en k_i sous-intervalles*

$$a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < \cdots < a_{i,k_i} = b_i,$$

alors P se décompose comme la réunion de $\prod_{i=1}^N k_i$ pavés

$$P_{j_1,\dots,j_N} := [a_{1,j_1-1}, a_{1,j_1}] \times \cdots \times [a_{N,j_N-1}, a_{N,j_N}]$$

d'intérieurs deux à deux disjoints

$$P = \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \cdots \bigcup_{j_N=1}^{k_N} P_{j_1,\dots,j_N},$$

tels que

$$|P| = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{k_N} |P_{j_1,\dots,j_N}|.$$

Démonstration. Pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$b_i - a_i = \sum_{j_i=1}^{k_i} (a_{i,j_i} - a_{i,j_i-1})$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
|P| &= (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N) \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{k_1} (a_{1,j_1} - a_{1,j_1-1}) \right) \cdots \left(\sum_{j_N=1}^{k_N} (a_{N,j_N} - a_{1,j_N-1}) \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{k_N} (a_{1,j_1} - a_{1,j_1-1}) \cdots (a_{N,j_N} - a_{N,j_N-1}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{k_N} |P_{j_1,\dots,j_N}|,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $P_{j_1,\dots,j_N} := [a_{1,j_1-1}, a_{1,j_1}] \times \cdots \times [a_{N,j_N-1} - a_{N,j_N}]$. □

On montre à présent que l'application volume est sous-additive sur la classe des pavés.

Lemme 2.2.3. *Soient P, $P_1, \dots, P_m$ des pavés tels que*

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Alors

$$|P| \leq \sum_{i=1}^{m} |P_i|.$$

Démonstration. Comme l'intersection de deux pavés reste un pavé et que l'application volume est croissante pour l'inclusion, on ne restreint pas la généralité en supposant que

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

On prolonge chaque pavé à l'infini et on obtient ainsi $n \geq m$ sous-pavés $\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_n$ de P d'intérieurs deux à deux disjoints tels que, pour tout $1 \leq i \leq m$, chaque P_i satisfait

$$P_i = \bigcup_{j \in J_i} \widetilde{P}_j, \quad P = \bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{P}_j,$$

avec $J_1 \cup \cdots \cup J_m = \{1, \dots, n\}$. D'après le Lemme 2.2.2, on a

$$|P_i| = \sum_{j \in J_i} |\widetilde{P}_j|, \quad |P| = \sum_{j=1}^{n} |\widetilde{P}_j|.$$

Par conséquent, on a

$$|P| = \sum_{i=1}^{m} |P_i|,$$

ce qui montre le résultat voulu. □

Nous pouvons à présent introduire la mesure (extérieure) de Lebesgue. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on pose

$$\mathcal{L}^N_*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^\infty |Q_i| : \ A \subset \bigcup_{i=0}^\infty Q_i, \ Q_i \text{ cubes ouverts} \right\}.$$

A l'aide de la méthode I de construction de Carathéodory, on montre que $\mathcal{L}^N_*$ est une mesure extérieure. On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ la tribu des ensembles $\mathcal{L}^N_*$-mesurables et $\mathcal{L}^N$ la restriction de $\mathcal{L}^N_*$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ qui est donc une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ en vertu du Théorème de Carathéodory. Notons tout d'abord que le volume d'un cube étant invariant par translation, on en déduit que $\mathcal{L}^N_*$ (et donc aussi $\mathcal{L}^N$) est invariant par translation.

Montrons à présent que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ contient la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^N$. Pour ce faire, établissons que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathcal{L}^N_*(A) = \mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^\infty |Q_i| : \ A \subset \bigcup_{i=0}^\infty Q_i, \ Q_i \text{ cubes ouverts, } \mathrm{diam}(Q_i) \le \delta \right\}. \tag{2.2.1}$$

Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{L}^N_*(A) \le \mathcal{L}^N_{*,\delta}(A)$. Pour montrer l'autre inégalité, considérons des cubes ouverts $Q_i = x_i +]-\frac{r_i}{2}, \frac{r_i}{2}[^N$, $i \in \mathbb{N}$, tels que $A \subset \bigcup_i Q_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2\sqrt{N}/k \le \delta$, on décompose $\overline{Q}_i$ en l'union de cubes fermés $\overline{Q}_{ij} = x_{ij} + [-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}]^N$, $j \in J_i$, de côté $1/k$ et d'intérieurs deux à deux disjoints. D'après le Lemme 2.2.2, on a

$$\frac{\mathrm{Card}(J_i)}{k^N} = r_i^N.$$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on introduit le cube ouvert $Q^\varepsilon_{ij} = x_{ij} +]-\frac{1+\varepsilon}{2k}, \frac{1+\varepsilon}{2k}[^N$ de sorte que $Q_i \subset \bigcup_{j\in J_i} Q^\varepsilon_{ij}$ et $\mathrm{diam}(Q^\varepsilon_{ij}) \le \sqrt{N}(1+\varepsilon)/k \le 2\sqrt{N}/k \le \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) \le \sum_{i=0}^\infty \sum_{j\in J_i} |Q^\varepsilon_{ij}| = \sum_{i=0}^\infty \mathrm{Card}(J_i) \left(\frac{1+\varepsilon}{k}\right)^N = (1+\varepsilon)^N \sum_{i=0}^\infty r_i^N = (1+\varepsilon)^N \sum_{i=0}^\infty |Q_i|.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les cubes $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) \le (1+\varepsilon)^N \mathcal{L}^N_*(A)$ puis, ε étant arbitraire $\mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) \le \mathcal{L}^N_*(A)$.

Pour établir que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, montrons que $\mathcal{L}^N_*(A \cup B) = \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B)$ pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ tels que $d = \mathrm{dist}(A, B) > 0$. Soit $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ des cubes ouverts de diamètre plus petit que $d/3$ et tels que $A \cup B \subset \bigcup_i Q_i$. On pose

$$I_A = \{i \in \mathbb{N} : \ A \cap Q_i \neq \emptyset\}, \quad I_B = \{i \in \mathbb{N} : \ B \cap Q_i \neq \emptyset\}$$

de sorte que $I_A \cap I_N = \emptyset$, $A \subset \bigcup_{i\in I_A} Q_i$ et $B \subset \bigcup_{i \in I_B} Q_i$. Donc

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |Q_i| \ge \sum_{i\in I_A} |Q_i| + \sum_{i \in I_B} |Q_i| \ge \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les cubes $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, il vient d'après (2.2.1)

$$\mathcal{L}^N_*(A \cup B) = \mathcal{L}^N_{*,d/3}(A \cup B) \ge \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B).$$

L'autre inégalité étant toujours satisfaite par sous-additivité de la mesure extérieure $\mathcal{L}^N_*$, on obtient bien que $\mathcal{L}^N_*(A \cup B) = \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B)$. Nous sommes alors en position d'appliquer la Proposition

1.3.4 qui montre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, autrement dit, (la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ de) $\mathcal{L}^N$ est une mesure Borélienne. Comme elle est de plus finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N$ est une mesure de Radon.

Il s'agit enfin de montrer que $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$. En remarquant que $[0,1]^N \subset Q_\varepsilon :=]-\varepsilon, 1+\varepsilon[^N$ pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit par définition que

$$\mathcal{L}^N([0,1]^N) = \mathcal{L}^N_*([0,1]^N) \leq |Q_\varepsilon| = (1+2\varepsilon)^N,$$

puis, par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{L}^N([0,1]^N) \leq 1$.

Pour montrer la deuxième inégalité, on considère un recouvrement dénombrable de $[0,1]^N$ par des cubes ouverts $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$[0,1]^N \subset \bigcup_{i=0}^{m} Q_i.$$

D'après le Lemme 2.2.3, on en déduit que

$$1 = |[0,1]^N| \leq \sum_{i=0}^{m} |Q_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |Q_i|.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvements de $[0,1]^N$ par des cubes ouverts, on en déduit que $1 \leq \mathcal{L}^N([0,1]^N)$.

2.2.2 Deuxième approche par intégrale de Riemann

On définit $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ par

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx,$$

où l'intégrale précédente est prise au sens de Riemann. Clairement L est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure de Radon positive $\mathcal{L}^N$ telle que

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\,d\mathcal{L}^N \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

On définit, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f_n(x) := \prod_{i=1}^N \varphi_n^{a_i,b_i}(x_i)$, où

$$\varphi_n^{a_i,b_i}(x_i) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_i \notin [a_i, b_i], \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in \left[a_i + \frac{1}{n}, b_i - \frac{1}{n}\right], \\ n(x_i - a_i) & \text{si} \quad x_i \in \left[a_i, a_i + \frac{1}{n}\right], \\ -n(x_i - b_i) & \text{si} \quad x_i \in \left[b_i - \frac{1}{n}, b_i\right]. \end{cases}$$

Alors $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\chi_{\overline{Q}_n} \leq f_n \leq \chi_Q$ où $\overline{Q}_n := \prod_{i=1}^N [a_i + 1/n, b_i - 1/n]$ et $Q = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$, en intégrant ces inégalités par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, il vient

$$\mathcal{L}^N(\overline{Q_n}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f_n\,d\mathcal{L}^N = \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx \leq \mathcal{L}^N(Q). \tag{2.2.2}$$

Comme $\{\overline{Q}_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fermés dont l'union est Q, on en déduit que $\mathcal{L}^N(\overline{Q}_n) \to \mathcal{L}^N(Q)$. Par ailleurs, par construction de f_n, son intégrale de Riemann peut être calculée explicitement

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx = \int_Q f_n(x)\,dx = \prod_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \varphi_n^{a_i,b_i}(x_i)\,dx_i = \prod_{i=1}^N \left(b_i - a_i - \frac{1}{n}\right).$$

Par passage à la limite dans (2.2.2), on obtient

$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N]a_i,b_i[\right)=\prod_{i=1}^N (b_i-a_i). \tag{2.2.3}$$

Montrons que pour tout $i\in\{1,\dots,N\}$ et tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}^N(\{x_i=a\})=0. \tag{2.2.4}$$

On suppose pour simplifier que $i=1$ et $a=0$. Alors, pour tout $k\geq 1$, on a $\{x_1=0\}\cap\,]-n,n[^N\subset\,]-1/k,1/k[\,\times\,]-n,n[^{N-1}$. D'après (2.2.3), on a

$$\mathcal{L}^N(\{x_1=0\}\cap\,]-n,n[^N)\leq\frac{2^N n^{N-1}}{k}.$$

Pour $n\geq 1$ fixé, on fait d'abord tendre $k\to\infty$ ce qui donne $\mathcal{L}^N(\{x_1=0\}\cap\,]-n,n[^N)=0$, puis par passage à la limite quand $n\to\infty$, on obtient $\mathcal{L}^N(\{x_1=0\})=0$.

Comme

$$\prod_{i=1}^N [a_i,b_i]\setminus\prod_{i=1}^N]a_i,b_i[\subset\bigcup_{i=1}^N(\{x_i=a_i\}\cup\{x_i=b_i\})$$

on en déduit que

$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N [a_i,b_i]\setminus\prod_{i=1}^N]a_i,b_i[\right)=0$$

de sorte que

$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N [a_i,b_i]\right)=\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N]a_i,b_i[\right)=\prod_{i=1}^N (b_i-a_i).$$

En particulier, en prenant $a_i=0$ et $b_i=1$ pour tout $i\in\{1,\dots,N\}$, on obtient $\mathcal{L}^N([0,1]^N)=1$.

Il reste à montrer que $\mathcal{L}^N$ est invariante par translation. Soit $x\in\mathbb{R}^N$ et $V\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert. Comme la translation $\tau_x:y\in\mathbb{R}^N\mapsto x+y$ est un homéomorphisme (d'inverse $(\tau_x)^{-1}=\tau_{-x}$), alors $x+V$ est ouvert et, par définition de $\mathcal{L}^N$ sur les ouverts, on a

$$\mathcal{L}^N(x+V)=\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,dy : f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\ \mathrm{Supp}(f)\subset x+V\right\}.$$

Soit $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f)\subset x+V$. En posant $g(z):=f(x+z)$, on obtient que $g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ satisfait $\mathrm{Supp}(g)\subset V$ et donc, par définition de $\mathcal{L}^N(V)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^N} g(y-x)\,dy=\int_{\mathbb{R}^N} g(y)\,dy\leq\mathcal{L}^N(V).$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions f, il vient $\mathcal{L}^N(x+V)\leq\mathcal{L}^N(V)$. Par conséquent, $\mathcal{L}^N(V)=\mathcal{L}^N(-x+(x+V))\leq\mathcal{L}^N(x+V)$, ce qui montre que $\mathcal{L}^N(x+V)=\mathcal{L}^N(V)$. Par suite, en utilisant la régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, on obtient que pour tout $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^N(x+B) &= \inf\{\mathcal{L}^N(V):\ x+B\subset V,\ V \text{ ouvert}\}\\
&= \inf\{\mathcal{L}^N(-x+V):\ B\subset -x+V,\ V \text{ ouvert}\}\\
&\geq \inf\{\mathcal{L}^N(U):\ B\subset U,\ U \text{ ouvert}\}\\
&= \mathcal{L}^N(B).
\end{aligned}$$

Pour établir l'autre inégalité, on remarque que $\mathcal{L}^N(B)=\mathcal{L}^N(-x+(x+B))\geq\mathcal{L}^N(x+B)$.

2.3 Points de Lebesgue

Dans la suite, nous allons considérer des familles $\mathcal{F}$ de boules ouvertes qui recouvrent un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$.

Théorème 2.3.1 (Recouvrement de Vitali). *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borélien et $\mathcal{F}$ un recouvrement de A par des boules ouvertes. Pour tout $\alpha < \mathcal{L}^N(A)$, il existe des boules $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\alpha.$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.1.4, il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mathcal{L}^N(K) > \alpha$. Puisque $\mathcal{F}$ est un recouvrement ouvert du compact K, il existe un sous-recouvrement fini, i.e., des boules $\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n \in \mathcal{F}$ telles que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$. Soit $B_1 \in \{\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon, $B_2 \in \{\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon disjointe de B_1, $B_3 \in \{\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon disjointe de $B_1 \cup B_2$. On continue cette procédure un nombre fini m de fois avec $m \leq n$. Si $\widetilde{B}_i \notin \{B_1, \dots, B_m\}$, alors par construction, il existe $1 \leq j \leq m$ tel que $\widetilde{B}_i \cap B_j \neq \emptyset$. Par ailleurs, si j est le plus petit tel indice, on a forcément que $\operatorname{diam}(\widetilde{B}_i) \leq \operatorname{diam}(B_j)$ et donc, en notant $B_j = B(x_j, r_j)$, on a $\widetilde{B}_i \subset B(x_j, 3r_j)$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{j=1}^m B(x_j, 3r_j)$ et

$$\alpha < \mathcal{L}^N(K) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}^N(B(x_j, 3r_j)) = 3^N \sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_j),$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Corollaire 2.3.2 ("Presque-recouvrement" de Vitali). *Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{L}^N(U) < \infty$. Pour tout $\delta > 0$, il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de boules ouvertes deux à deux disjointes telles que $B_i \subset U$ et $\operatorname{diam}(B_i) \leq \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et*

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = 0.$$

Démonstration. On pose

$$\mathcal{F}_1 := \{\text{boules ouvertes } B \subset U,\ \operatorname{diam}(B) \leq \delta\}$$

ce qui définit un recouvrement de U. D'après le Théorème de Recouvrement de Vitali, il existe $B_1, \dots, B_{m_1} \in \mathcal{F}_1$ deux à deux disjointes telles que

$$\sum_{i=1}^{m_1} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\mathcal{L}^N(U)(1-\delta).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i\right) = \mathcal{L}^N(U) - \sum_{i=1}^{m_1} \mathcal{L}^N(B_i) \leq [1-3^{-N}(1-\delta)]\mathcal{L}^N(U) = \theta\mathcal{L}^N(U),$$

où l'on a posé $\theta := 1 - 3^{-N}(1-\delta) \in]0,1[$. On définit l'ouvert $U_2 := U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i$ et

$$\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F}_1 :\ B \subset U_2,\ \operatorname{diam}(B) \leq \delta\}.$$

Le même argument que précédemment montre l'existence de boules $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2} \in \mathcal{F}_2$ deux à deux disjointes telles que

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_2} \overline{B}_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_2} B_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U_2 \setminus \bigcup_{i=m_1+1}^{m_2} B_i\right) \leq \theta\mathcal{L}^N(U_2) \leq \theta^2\mathcal{L}^N(U).$$

Notons que les boules $B_1, \dots, B_{m_1}, B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2}$ sont deux à deux disjointes. On montre ainsi par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des boules ouvertes $B_1, \dots, B_{m_k} \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_k} B_i\right) \leq \theta^k\mathcal{L}^N(U).$$

Le résultat suit par passage à la limite quand $k \to \infty$ puisque $\theta \in]0, 1[$ et $\mathcal{L}^N(U) < \infty$. $\square$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on définit la *fonction maximale de Hardy-Littlewood* par

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy.$$

Lemme 2.3.3. *La fonction Mf est Borélienne sur $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. On constate tout d'abord que la fonction

$$(x, r) \mapsto \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy$$

est continue sur $\mathbb{R}^N \times\,]0, +\infty[$. En effet, on a d'abord que $(x, r) \mapsto \mathcal{L}^N(B_r(x)) = \omega_N r^N$ est bien continue sur $\mathbb{R}^N \times\,]0, +\infty[$. Par ailleurs, si $(x_j, r_j) \to (x, r)$, on a que $\mathbf{1}_{B_{r_j}(x_j)}(y) \to \mathbf{1}_{B_r(x)}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus \partial B_r(x)$ avec $\mathcal{L}^N(\partial B_r(x)) = 0$. Par convergence dominée, on en déduit alors que

$$\int_{B_{r_j}(x_j)} |f(y)|\, dy \to \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy.$$

On peut alors écrire que

$$Mf(x) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

ce qui permet de montrer que Mf est un supremum dénombrable de fonctions continues. C'est en particulier une fonction Borélienne. $\square$

Proposition 2.3.4. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $t > 0$*

$$\mathcal{L}^N(\{Mf > t\}) \leq \frac{3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dy.$$

Démonstration. On considère l'ensemble Borélien $A = \{Mf > t\}$. Par définition de la fonction maximale, pour tout $x \in A$, il existe un $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mathcal{L}^N(B_{r_x}(x))} \int_{B_{r_x}(x)} |f(y)|\, dy > t.$$

La famille $\mathcal{F} = \{B_{r_x}(x),\, x \in A\}$ forme un recouvrement A par des boules ouvertes. Le Théorème de recouvrement de Vitali montre alors que pour tout $\alpha < \mathcal{L}^N(A)$, il existe un nombre fini de boules $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\alpha.$$

Par conséquent,

$$\alpha < 3^N \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) \le \frac{3^N}{t} \sum_{i=1}^{m} \int_{B_i} |f(y)|\, dx \le \frac{3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dx,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Théorème 2.3.5 (Différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

En particulier,

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy.$$

Démonstration. Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy \le \varepsilon.$$

Comme g est uniformément continue, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |g(y) - g(x)|\, dy = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\le \limsup_{r\to 0} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - g(y)|\, dy + \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |g(y) - g(x)|\, dy + |g(x) - f(x)| \right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \le M(f-g)(x) + |g(x) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Il vient alors par la Proposition 2.3.4 et l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^N \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy > t \right\} \right) \\
&\qquad \le \mathcal{L}^N(\{M(f-g) > t/2\}) + \mathcal{L}^N(\{|f-g| \ge t/2\}) \\
&\qquad\qquad \le \frac{2 \cdot 3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy + \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy \le \frac{2\varepsilon(3^N + 1)}{t}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient que pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}^N\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\,dy > t\right\}\right) = 0,$$

puis, par passage à la limite quand $t \to 0$,

$$\mathcal{L}^N\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\,dy > 0\right\}\right) = 0,$$

ce qui montre effectivement le résultat voulu. $\square$