Chapitre 1

Construction de mesures

1.1 Quelques éléments de théorie de la mesure

On rappelle les définitions suivantes. Etant donné un ensemble X, on désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.1.1. Une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur X est une sous famille $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(iii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

Définition 1.1.2. Une *mesure* est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ qui satisfait
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

On rappelle les propriétés suivantes des mesures, qui seront utilisées systématiquement par la suite.

Proposition 1.1.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{A}$. Alors*

1.
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n);$$

2. si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n);$$

3. si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mu(A_0) < \infty$,
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Si X est un espace topologique, on désigne par $\mathcal{B}(X)$ la *tribu Borélienne* sur X, *i.e.* la plus petite tribu contenant les ouverts de X. Une mesure définie sur la tribu $\mathcal{B}(X)$ s'appelle une *mesure Borélienne.* Une mesure Borélienne finie sur les compacts s'appelle une *mesure de Radon.*

Les mesures de Radon jouissent de propriétés de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par la mesure d'ouverts ou de fermés.

Proposition 1.1.4. *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) : \ K \subset A, \, K \ \textit{compact}\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : \ A \subset U, \, U \ \textit{ouvert}\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On suppose tout d'abord que $\mu(A) < \infty$ et on pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On considère la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ := \ \Big\{ & B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} \\ & \text{un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \Big\}. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C\right) = \nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \le \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, comme ν est une mesure finie, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{m} C_n\right)\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \\ &\le \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) \le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pour m assez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^{m} C_n$

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, C' étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrons que U est l'union dénombrables de fermés. Pour ce faire, on considère la famille $\mathcal{F}$ des boules fermées $\overline{B}(x,r)$ dans $\mathbb{R}^N$ centrées en $x \in \mathbb{Q}^N$ et de rayon $r \in \mathbb{Q}^+$. La famille $\mathcal{F}$ est dénombrable et U étant ouvert, on a

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F},\, B\subset U} B \subset U.$$

Pour montrer l'autre inclusion, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit donc $x \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{B}(x,R) \subset U$. Il existe alors $\bar{x} \in \mathbb{Q}^N \cap \overline{B}(x,R/4)$ et $\bar{r} \in \mathbb{Q}^+$ tels que $R/4 < \bar{r} < R/2$ de sorte que $x \in \overline{B}(\bar{x},\bar{r}) \subset \overline{B}(x,R) \subset U$, ce qui montre que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F},\ B\subset U} B \supset U$$

et donc l'égalité. On en déduit que $\mathcal{F}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} :\ {}^cB \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans $\mathcal{G}$, on en déduit que la tribu $\mathcal{G}$ contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B\backslash C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A\backslash C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0,n)$ qui est un compact inclu dans A. Comme $\mu(C) \leq \mu(A) < \infty)$, on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour n assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Si $\mu(A) = \infty$, on décompose $A = \bigcup_j (A \cap C_j)$ où $C_j = \{x \in \mathbb{R}^N :\ j \leq |x| < j+1\}$. Comme μ est une mesure de Radon, $\mu(A \cap C_j) < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par ce qui a été montré précédemment, il existe un compact $K_j \subset A \cap C_j$ tel que $\mu(K_j) \geq \mu(A \cap C_j) - 2^{-j}$. Par convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=0}^n K_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(K_j) \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\mu(A\cap C_j) - \frac{1}{2^j}\right) = \infty = \mu(A).$$

Comme $\bigcup_{j=0}^n K_j$ est compact, on obtient ainsi l'approximation intérieure par des compacts.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. Si $\mu(A) = \infty$, il suffit de considérer l'ouvert $U = \mathbb{R}^N$. On peut donc supposer que $\mu(A) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $B(0,n) \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car μ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset B(0,n) \setminus A$ tel que

$$\mu((B(0,n) \setminus A) \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Posons $U_n = B(0,n) \setminus C_n$ qui est un ouvert avec $B(0,n) \cap A \subset U_n$ et tel que

$$\mu(U_n \setminus (A \cap B(0,n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et

$$\mu(U \setminus A)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus (A \cap B(0,n)) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la propriété de régularité extérieure. □

1.2 Pourquoi ne peut-on pas mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$?

Une mesure priviliégiée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ est la mesure de Lebesgue qui correspond intuitivement à la notion de volume. Nous démontrerons au chapitre 2 son existence de diverses manières. Avant cela, il convient de noter que cette mesure, temporairement notée λ en dimension $N = 1$, doit satisfaire certaines propriétés comme l'invariance par translation ainsi que la formule usuelle pour la longueur d'un intervalle $\lambda([a, b]) = b - a$.

Nous allons montrer qu'une telle mesure, si elle existe, ne peut pas être définie sur toutes les partie de $\mathbb{R}$. L'exemple suivant, dû à Vitali, montre en fait l'existence d'un ensemble non Lebesgue mesurable.

Pour ce faire, on introduit la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ par

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

On note $[x]$ la classe d'équivalence de x qui est un sous-ensemble de $[0, 1]$. L'ensemble des classes d'équivalences définit une partition de $[0, 1]$. A l'aide de l'axiome de choix, on construit un sous-ensemble V de $[0, 1]$, appelé *ensemble de Vitali*, qui ne contient qu'un et un seul élément de chaque classe d'équivalence.

Soit $D := \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ qui est dénombrable. Pour $q \in D$, on pose $V_q = q + V$ de sorte que $V_q \subset [-1, 2]$. Pour tout $y \in [0, 1]$, par définition de V, il existe un unique $x \in V$ tel que $y \in [x]$. Par conséquent, il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $y - x = q$. De plus comme x et $y \in [0, 1]$, on a que $q \in [-1, 1]$ ce qui montre que $q \in D$ et $y = q + x \in V_q$. On en déduit alors que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in D} V_q \subset [-1, 2].$$

Supposons maintenant que V est Lebesgue mesurable de sorte que chaque V_q l'est aussi pour tout $q \in D$. Par passage à la mesure de Lebesgue λ dans les inclusions précédentes, il vient

$$1 \leq \lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) \leq 3. \tag{1.2.1}$$

Notons que si q et $q' \in D$ sont tels que $q \neq q'$, alors $V_q \cap V_{q'} = \emptyset$. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait $y \in V_q \cap V_{q'}$ et donc des éléments x et $x' \in E$ tels que

$$y = q + x = q' + x'.$$

On en déduirait alors que $x - x' = q' - q \in \mathbb{Q}$ ce qui impliquerait que $x = x'$ puisque V contient un unique élément de chaque classe d'équivalence. Par suite, on obtiendrait que $q = q'$ ce qui est absurde. Les ensembles V_q étant donc deux à deux disjoints, il vient que

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) = \sum_{q \in D} \lambda(V_q) = \sum_{q \in D} \lambda(q + V) = \sum_{q \in D} \lambda(V),$$

où l'on a utilisé l'invariance par translation de λ. Si $\lambda(V) > 0$, on obtient alors que

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) = \infty,$$

ce qui contredit la deuxième inégalité de (1.2.1). Si, en revanche, $\lambda(V) = 0$ on obtient alors que

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) = 0,$$

ce qui contredit la première inégalité de (1.2.1). Dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce implique que l'ensemble V ne peut être Lebesgue mesurable.

1.3 Mesures extérieures

Pour pouvoir "mesurer" toutes les parties d'un ensemble, il convient d'affaiblir la notion de mesure en celle de mesure extérieure. Dans cette section, on désigne par X un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.3.1. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$ tels que $A \subset B$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^* \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre μ^* à une tribu sur laquelle μ^* est une mesure.

Définition 1.3.2. Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit μ^**-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble A est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$.

Théorème 1.3.3. (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables est une tribu et la restriction de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si A_1 et A_2 sont μ^*-mesurables, par sous-additivité de μ^*, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}),
\end{aligned}$$

car les A'_n sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_n). \tag{1.3.1}$$

Les ensembles B_n étant μ^*-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (1.3.1) et croissance de μ^* ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure μ^*, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{1.3.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (1.3.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que μ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$. $\square$

Si à présent (X, d) est un espace métrique (que l'on peut donc munir de la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(X)$, engendrée par les ouverts), le résultat suivant donne un critère assurant la μ^*-mesurabilité des ensembles Boréliens de X.

Proposition 1.3.4. *Si, pour tout A, $B \subset X$ avec $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \tag{1.3.3}$$

alors $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Puisque la tribu Borélienne $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les fermés, il suffit de montrer que tous les fermés de X sont μ^*-mesurables. De plus, par sous-additivité de μ^*, il suffit d'établir que si $C \subset X$ est fermé,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{pour tout } E \subset X \text{ tel que } \mu^*(E) < \infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(E \setminus C_n, E \cap C) \geq 1/n > 0$, l'hypothèse montre que

$$\mu^*(E \setminus C_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_n) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{1.3.4}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in E : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j-i| \geq 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k}\right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

et

$$\sum_{k=0}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{m} R_{2k+1}\right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(E) < \infty$. Comme C est fermé, on a $E \setminus C = (E \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(E \setminus C_n) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, $\mu^*(E \setminus C_n) \to \mu^*(E \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (1.3.4), il vient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$$

ce qui montre effectivement la μ^*-mesurabilité de C. $\square$

1.4 Les mesures par dualité

On désigne par $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dont le support, noté

$$\operatorname{Supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : \ f(x) \neq 0\}},$$

est un ensemble compact. Toute mesure de Radon μ définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu$$

est bien définie puisque, en notant $K = \operatorname{Supp}(f)$, on a

$$\int_K |f| \, d\mu \leq \mu(K) \max_K |f| < \infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu$$

définit une forme linéaire positive $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f,\, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \text{ et tout } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{1.4.1}$$

$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \text{ avec } f \geq 0. \tag{1.4.2}$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

Théorème 1.4.1 (de représentation de Riesz). *Soit $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (1.4.1) et (1.4.2)). Alors, il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^N$ telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N). \tag{1.4.3}$$

Pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^N$, on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) : \ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset V\}. \tag{1.4.4}$$

Si $U \subset V$, alors $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$ de sorte que l'on peut étendre μ^* à n'importe quel ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ en posant

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(V) : \ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\} \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{1.4.5}$$

Lemme 1.4.2. *La fonction d'ensemble* $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,+\infty]$ *est une mesure extérieure.*

Démonstration. On a évidemment que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et μ^* est une fonction croissante d'ensemble, *i.e.* si $E \subset F$, alors $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$. Il s'agit à présent de montrer que μ^* est dénombrablement sous-additive, *i.e.*, pour toute suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Montrons d'abord que si V_1 et V_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \tag{1.4.6}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$. Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) \subset V_2$ et $f_1 + f_2 = 1$ sur $\mathrm{Supp}(g)$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, $f_i g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $g = f_1 g + f_2 g$ de sorte que, par linéarité de L et la définition de μ^*,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en g, on obtient $\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$.

Si $\mu(E_n) = \infty$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors le résultat suit. Sinon, si $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V_n tel que $E_n \subset V_n$ et $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_n V_n$ et on considère $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=0}^{p} V_n$. En itérant (1.4.6), il vient

$$L(f) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{p} V_n\right) \leq \sum_{n=0}^{p} \mu^*(V_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, et $\bigcup_n E_n \subset V$, on en déduit que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \mu^*(V) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. $\square$

D'après le Théorème de Carathéodory (voir le Théorème 1.3.3), la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables, *i.e.*, l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}^N$ qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \mathbb{R}^N,$$

est une tribu sur $\mathbb{R}^N$, et la restriction $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ de μ^* à cette tribu est une mesure. De plus, pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ avec $\mathrm{dist}(A,B) > 0$, on a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

En effet, par sous-additivité de μ^*, il suffit de montrer que $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Soit $W \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $A \cup B \subset W$. Comme $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, il existe des ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V \subset W$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Soient f et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ des fonctions telles que $\operatorname{Supp}(f) \subset U$ et $\operatorname{Supp}(g) \subset V$. Comme $\operatorname{Supp}(f) \cap \operatorname{Supp}(g) = \emptyset$, la fonction $f + g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ satisfait $\operatorname{Supp}(f+g) \subset U \cup V$, et par définition de μ^* sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U \cup V) \geq L(f+g) = L(f) + L(g).$$

Par passage au supremum par rapport à f et g, on en déduit que

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U) + \mu^*(V) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts $W \supset A \cup B$, on obtient le résultat voulu. Une application immédiate de la Proposition 1.3.4 montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{A}$. Par conséquent, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est une mesure Borélienne. Montrons à présent que μ est une mesure de Radon.

Lemme 1.4.3. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mu(K) = \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

En particulier, $\mu(K) < \infty$.

Démonstration. Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Pour tout $0 < t < 1$, l'ensemble $V_t := \{g > t\}$, qui est ouvert, satisfait $K \subset V_t$ et $f \leq t^{-1} g$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ avec $\operatorname{Supp}(f) \subset V_t$. Par conséquent, la croissance de L montre que

$$\mu(K) \leq \mu(V_t) = \sup\{L(f) : \ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ \operatorname{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1} L(g) < \infty.$$

En faisant tendre $t \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(g)$ et donc, par passage à l'infimum en g,

$$\mu(K) \leq \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire $U \subset \Omega$ contenant K. Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ est une fonction telle que $\operatorname{Supp}(f) \subset U$ et $f = 1$ sur K, il vient par définition de μ^* sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à U, que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu(K),$$

ce montre la deuxième inégalité. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du théorème de représentation de Riesz.

Démonstration du théorème 1.4.1. Il reste à établir la propriété de représentation (1.4.3). Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, par linéarité de L, il suffit d'établir que

$$L(f) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu. \tag{1.4.7}$$

Soit $K := \operatorname{Supp}(f)$ et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui contient $f(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 < a = y_1 < \cdots < y_n = b$ et $\max_{1 \leq i \leq n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. On définit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$B_i := f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme f est continue, les ensembles B_i constituent une partition Borélienne de K. D'après la propriété de régularité extérieure (1.4.5), il existe un ouvert V_i contenant B_i tel que $\mu(V_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$. Par ailleurs, l'ouvert $W_i = f^{-1}(]y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contenant B_i, on obtient en posant $U_i = V_i \cap W_i$ un ouvert contenant B_i et satisfaisant

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \leq y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Comme $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est un recouvrement ouvert du compact K, on peut trouver une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.* des fonctions $h_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K et

$$0 \leq \sum_{i=1}^n h_i \leq 1 \quad \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$ et $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ dans $\mathbb{R}^N$, puis par linéarité et croissance de L, il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ est telle que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K, le Lemme 1.4.3 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \geq \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de μ^* sur les ouverts (et donc de μ) montre $L(h_i) \leq \mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$, de sorte que

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\left(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K).$$

Comme $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de K, on en déduit que

$$\begin{aligned}
L(f) &\leq \sum_{i=1}^n y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.4.7), le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

Etablissons enfin l'unicité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon satisfaisant la conclusion du théorème de représentation de Riesz. Soient $A \subset \mathbb{R}^N$ un Borélien, $K \subset A$ un compact et $V \supset A$ un ouvert. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$ d'où $\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_V$. Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_K \, d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu_1 = L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu_2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_V \, d\mu_2 = \mu_2(V).$$

Par régularité intérieure de μ_1 et régularité extérieure de μ_2, il vient $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$. En inversant les rôles de μ_1 et μ_2, on en déduit que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. $\square$

1.5 Théorème de la classe monotone : unicité de mesures

Définition 1.5.1. On appelle *classe monotone* sur X toute famille $\mathscr{C}$ de parties de X vérifiant :
(i) $X \in \mathscr{C}$;
(ii) Si A, $B \in \mathscr{C}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathscr{C}$;
(iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{P}(X)$ (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Une tribu est toujours une classe monotone, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 1.5.2. (de la classe monotone) *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{C}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ et $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$. Comme $\mathscr{T}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$. Il s'agit maintenant de montrer l'autre inclusion.

Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie. Soit $E \in \mathcal{E}$ fixé et

$$\mathscr{C}_E := \{A \in \mathscr{C} : \ A \cap E \in \mathscr{C}\}.$$

Comme $E = X \cap E \in \mathcal{E}$, on en déduit que $X \in \mathscr{C}_E$. Par ailleurs, si A, $B \in \mathscr{C}_E$ et $A \subset B$, alors $A \cap E \in \mathscr{C}$, $B \cap E \in \mathscr{C}$ et $A \cap E \subset B \cap E$, ce qui implique que $(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \mathscr{C}$ et donc que $B \setminus A \in \mathscr{C}_E$. Enfin si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_E$, alors on a $A_n \cap E \in \mathscr{C}$ et $A_n \cap E \subset A_{n+1} \cap E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(\bigcup_n A_n) \cap E = \bigcup_n (A_n \cap E) \in \mathscr{C}$, soit $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}_E$. On en déduit que $\mathscr{C}_E$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$, i.e.

$$A \cap E \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{C} \text{ et tout } E \in \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $B \in \mathscr{C}$ et

$$\mathscr{C}_B := \{A \in \mathscr{C} : \ A \cap B \in \mathscr{C}\}.$$

On montre de même que $\mathscr{C}_B$ est une classe monotone qui, d'après ce qui précède, contient $\mathcal{E}$. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_B$, ce qui signifie que

$$A \cap B \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A, B \in \mathscr{C}.$$

Montrons à présent que $\mathscr{C}$ est une tribu. On sait déjà que $\mathscr{C}$ contient X et que $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire et intersection finie. Il s'ensuit que $\mathscr{C}$ est également stable par union finie. Il reste à montrer que $\mathscr{C}$ est stable par union dénombrable. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_n.$$

Comme $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie, il vient $B_n \in \mathscr{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et $\mathscr{C}$ étant une classe monotone, on en déduit que $\bigcup_n B_n \in \mathscr{C}$. Finalement, comme $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ on en déduit que $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Comme $\mathscr{C}$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$, on obtient l'autre inclusion $\mathscr{T} \subset \mathscr{C}$. □

On introduit maintenant la notion de pavé dans $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.5.3. Un *pavé* ouvert (resp. fermé) $P \subset \mathbb{R}^N$ est le produit cartésien de N intervalles ouverts (resp. fermés) bornés de $\mathbb{R}$:

$$P = \prod_{i=1}^{N}]a_i, b_i[\qquad \left(\text{resp. } P = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \right),$$

avec $a_i < b_i$ (resp. $a_i \le b_i$) pour tout $1 \le i \le N$.

En particulier, les boules $B_\infty(x, r)$ pour la norme

$$\|y\|_\infty := \max_{1 \le i \le N} |y_i|, \quad y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$$

sont des pavés de $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 1.5.4. *Soient λ et μ deux mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$ qui coïncident sur les pavés ouverts. Alors $\lambda = \mu$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ la famille des pavés ouverts dans $\mathbb{R}^N$. Clairement $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Montrons que la tribu $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathcal{E}$ est la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^N$. En effet, on a tout d'abord l'inclusion $\mathscr{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'autre inclusion, on considère un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ et le sous ensemble dénombrable de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{F}_U := \{(B_\infty(a, r) \subset U : \ a \in U \cap \mathbb{Q}^N \text{ et } r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

de boules (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de centre rationnel et de rayon rationnel, incluses dans U. Si $x \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{B_\infty(x, R)} \subset U$, alors il existe $a \in U \cap \mathbb{Q}^N$ tel que $\|x - a\|_\infty < R/4$. De plus, il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $R/4 < r < R/2$, ce qui implique que $x \in B_\infty(a, r)$ et $B_\infty(a, r) \subset B_\infty(x, R) \subset U$. On a donc montré que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{F}_U} B$$

et donc que $U \in \mathscr{T}$. Comme la tribu Borélienne est engendrée par les ouverts, on en déduit l'autre inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{T}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\lambda_n(B) := \lambda(B \cap]-n, n[^N), \quad \mu(B \cap]-n, n[^N) =: \mu_n(B).$$

Comme λ et μ sont des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$, on en déduit que λ_n et μ_n sont des mesures Boréliennes finies sur $\mathbb{R}^N$. On définit

$$\mathscr{C}_n = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \ \lambda_n(A) = \mu_n(A)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Alors $\mathbb{R}^N \in \mathscr{C}_n$ car $\lambda_n(\mathbb{R}^N) = \lambda(]-n, n[^N) = \mu(]-n, n[^N) = \mu_n(\mathbb{R}^N)$ puisque $]-n, n[^N \in \mathcal{E}$. Ensuite si $A, B \in \mathscr{C}_n$ sont tels que $A \subset B$, alors $\lambda_n(B \setminus A) = \lambda_n(B) - \lambda_n(A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) = \mu_n(B \setminus A)$ ce qui montre que $B \setminus A \in \mathscr{C}_n$. Enfin si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_n$, alors $\lambda_n(A_k) = \mu_n(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis passage à la limite quand $k \to \infty$,

$$\lambda_n \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \lim_{k \to \infty} \lambda_n(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu_n(A_k) = \mu_n \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right),$$

ce qui montre que $\bigcup_k A_k \in \mathscr{C}_n$. On a donc établi que $\mathscr{C}_n$ est une classe monotone. Comme par hypothèse $\mathscr{C}_n$ contient $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C}_n$ contient la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ qui, en vertu du théorème de la classe monotone, coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$, i.e. la tribu Borélienne. On a donc établi que $\mathscr{C}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, i.e. $\lambda_n(B) = \mu_n(B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ou encore

$$\lambda(B \cap]-n, n[^N) = \mu(B \cap]-n, n[^N).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, il vient $\lambda(B) = \mu(B)$. $\square$