Examen "Chaînes de Markov"

Mercredi 23 Octobre 2020 de 9h00 à 12h00

- Les résultats seront **encadrés**, et toute réponse devra être justifiée (sauf exception).
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- Le barème est donné à titre indicatif, pour vous permettre de proportionner vos efforts. Il pourra être marginalement modifié. Noter que la somme excède 20.
- Le sujet comporte 4 pages.
- Le devoir dure 3h00.
- Les téléphones sont rangés éteints dans les sacs ; en guise d'aide mémoire, vous avez droit au recto d'une feuille manuscrite (par vos soins, pas de photocopie) sur la table.

Exercice 1. [Renversement du temps, 8 points]

Soit P une matrice de transition irréductible sur Ω, et π son unique mesure de probabilité stationnaire. On définit une matrice $\hat{P}$ par :

$$\forall x, y \in \Omega,\ \hat{P}(x,y) = \frac{\pi(y)P(y,x)}{\pi(x)}.$$

1. Montrer que $\hat{P}$ est bien définie et qu'il s'agit d'une matrice stochastique.
2. Que vaut $\hat{P}$ si P est réversible par rapport à π ? En déduire l'unique mesure de probabilité stationnaire de $\hat{P}$ dans ce cas. Vérifier que cette mesure de probabilité est encore l'unique mesure de probabilité stationnaire de $\hat{P}$ si l'on ne suppose pas la réversibilité de P.

Dans toute la suite on choisit $\Omega = \{0, \ldots, n\}$, et, avec la notation $x \wedge y = \min\{x, y\}$:

$$P(x,y) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{\{y=(x+1)\wedge n\}} + \mathbb{1}_{\{y=0\}}\right),$$

3. Calculer l'unique mesure de probabilité stationnaire π de P.
4. Donner la matrice de transition $\hat{P}$. (On pourra faire un dessin des transitions possibles sur un graphe).
5. Montrer que $\hat{P}(0, \cdot) = \pi$.
6. Calculer $\hat{P}^t(x, \cdot)$ pour tout $0 \leq t \leq x \leq n-1$.
7. Déduire sans calcul de ce qui précède $\hat{P}^t(x, \cdot)$ pour $t > x$, $0 \leq x \leq n-1$.
8. Soit $\hat{X}$ la chaîne de Markov de matrice de transition $\hat{P}$. On note

$$\tau_{n-1}(\hat{X}) = \min\{t \geq 0 : \hat{X}_t = n-1\}$$

le temps d'atteinte de $n-1$ par cette chaîne, calculer $\mathbb{P}_n(\tau_{n-1}(\hat{X}) = k)$ et reconnaître cette loi.

9. Soit $t \le n$. En déduire $\hat{P}^t(n, n-1)$ puis plus généralement $\hat{P}^t(n, \cdot)$. Reconnaître en particulier la mesure de probabilité $\hat{P}^n(n, \cdot)$.
10. Déduire sans calcul de ce qui précède $\hat{P}^t(n, \cdot)$ pour tout $t > n$. Commenter ce résultat.

Exercice 2. [Marche aléatoire biaisée : temps d'atteinte, 10 points]

Soit deux réels $p, q \in]0,1[$ tels que $p + q = 1$, avec $p \neq q$. On considère sur $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ la marche aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ biaisée avec des conditions au bord de type réflexion, de matrice de transition :

$$\begin{cases} P(x,y) = p\mathbb{1}_{\{y=x+1\}} + q\mathbb{1}_{\{y=x-1\}} & \text{si } x \in \{1, \ldots, n-1\}, y \in \{0, \ldots, n\} \\ P(0,1) = P(n, n-1) = 1 \end{cases}$$

On rappelle que $\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ désigne le temps d'atteinte de x. On pose $f(x) = \mathbb{E}_x[\tau_n] \in [0, \infty]$ pour $x \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Construire un réseau $\{G, c\}$ dont la marche aléatoire associée est la chaîne de Markov $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$
2. À l'aide de l'identité du temps de transport, calculer la valeur du temps de transport

$$t_{0 \leftrightarrow n} := \mathbb{E}_0[\tau_n] + \mathbb{E}_n[\tau_0].$$

On note que le temps de transport donne une borne supérieure sur $\mathbb{E}_0[\tau_n]$. Les questions qui suivent visent à établir une borne inférieure.

3. Justifier l'identité en loi suivante :

$$\tau_n \text{ sous } \mathbb{P}_0 \;=\; \sum_{i=1}^{G-1} T_i + R,$$

où
— G est une variable Géométrique (sur $\mathbb{N}^\star$) de paramètre $p = \mathbb{P}_0(\tau_0^+ > \tau_n)$
— $T_1, T_2, \ldots$ dont des variables i.i.d. de loi $\mathbb{P}_0(\tau_0^+ \in \cdot | \tau_0^+ < \tau_n)$
— R suit la loi $\mathbb{P}_0(\tau_n \in \cdot | \tau_0^+ > \tau_n)$,
ces variables étant toutes indépendantes. (Si $G = 1$, on convient que la première somme est nulle). On ne demande pas une démonstration rigoureuse. On sera concis et on pourra faire un dessin.

4. En déduire :

$$\mathbb{E}_0[\tau_n] = \left(\frac{1}{\mathbb{P}_0(\tau_0^+ > \tau_n)} - 1 \right) \mathbb{E}_0[\tau_0^+ | \tau_0^+ < \tau_n] + \mathbb{E}_0[\tau_n | \tau_0^+ > \tau_n]$$

5. Calculer $\mathbb{E}_0[\tau_0^+]$ et $\mathbb{P}_0(\tau_0^+ > \tau_n)$ à l'aide de relations vue en cours.
6. On admet que $\mathbb{E}_0[\tau_0^+ | \tau_0^+ < \tau_n] \to \mathbb{E}_0[\tau_0^+]$ quand $n \to \infty$. Déduire de ce qui précède un équivalent simple de $\mathbb{E}_0[\tau_n]$ dans le cas $p < q$ (cet équivalent ne nécessite pas de calculer $\mathbb{E}_0[\tau_n | \tau_0^+ > \tau_n]$).

La suite de l'exercice est indépendante de ce qui précède. Elle vise à calculer de façon exacte

$$f : \{0, \ldots, n\} \to [0, \infty],\; k \mapsto f(k) = \mathbb{E}_k[\tau_n]$$

à l'aide de la méthode à un pas.

7. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Donner un lien entre $\tau_n \circ \theta(X)$ et $\tau_n(X)$ sous $\mathbb{P}_k$ la loi de la chaîne issue de k[1], et en déduire à l'aide de la propriété de Markov une expression de $f(k)$ en fonction de $f(k-1)$ et $f(k+1)$.
8. Exprimer $f(0)$ en fonction de $f(1)$. Donner aussi $f(n)$.
9. On pose $\ell(k) = f(k+1) - f(k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que $\ell(k)$ satisfait une équation de récurrence du type $\ell(k) = \alpha \ell(k-1) + \beta$, $1 \leq k \leq n-1$, pour des paramètres α et β que l'on précisera.
10. On rappelle que la solution de la récurrence affine précédente est de la forme

$$\ell(k) = \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha^k \left(\ell(0) - \frac{\beta}{1-\alpha}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Calculer la fonction ℓ dans notre cas et en déduire la fonction f.
11. Donner des équivalents de $\mathbb{E}_0[\tau_n]$ quand $n \to \infty$ dans les deux cas suivants :
(i) $p > q$
(ii) $p < q$
où p, q sont indépendants de n.
12. On pose, pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixé, $q_n = 1 - p_n = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{n}$. Montrer qu'il existe alors $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que l'on précisera, tel que, quand $n \to \infty$:

$$\mathbb{E}_0[\tau_n] \sim n^2 \varphi(\lambda).$$

Exercice 3. [Transformations de chaîne de Markov, 6+1 point]

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans Ω fini, de matrice de transition P de mesure stationnaire π. On pose

$$\begin{cases} \eta(X) = \min\{s \in \mathbb{N} : X_s \neq X_0\} \\ \eta_0(X) = 0, \quad \eta_{t+1}(X) = \eta_t(X) + \eta \circ \theta_{\eta_t}(X) \quad t \geq 0 \end{cases}$$

puis $Y_t = X_{\eta_t(X)}$ pour tout entier $t \in \mathbb{N}$.

1. Décrire brièvement en toute lettres comment la chaîne Y est construite à partir de X.
2. Calculer $\mathbb{P}_x(\eta \geq t)$ et en déduire $\mathbb{P}_x(\eta < \infty) = 1$. Observer que $(\mathbb{P}_x(X_\eta = y))_{x,y \in \Omega}$ est une matrice stochastique, en donner une expression à l'aide de P.
3. Montrer que, pour $y_0, y_1, \dots, y_t \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(Y_0 = y_0, \dots, Y_{t-1} = y_{t-1}, Y_t = y_t) = \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \dots, Y_{t-1} = y_{t-1}) Q(y_{t-1}, y_t)$$

avec

$$Q(x, y) = \frac{P(x,y)}{1 - P(x,x)} \mathbb{1}_{x \neq y},$$

et en déduire que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est encore une chaîne de Markov.
4. Montrer que

$$\left(\frac{\pi(x)(1 - P(x,x))}{\sum_y \pi(y)(1 - P(y,y))} \right)_{x \in \Omega}$$

est l'unique mesure de probabilité stationnaire de la chaîne $(Y_t)_{t \geq 0}$.

1. on rappelle que θ est l'opérateur de translation : $\theta(X)_t = X_{t+1}$, et plus généralement, $\theta_s(X)_t = X_{t+s}$, $t, s \in \mathbb{N}$

Soit de plus $A \subset \Omega$. On pose

$$\begin{cases} \tau^+(X) = \tau_A^+(X) = \min\{s \geq 1 : X_s \in A\} \\ \tau_0^+(X) = 0, \quad \tau_{t+1}^+(X) = \tau_t^+(X) + \tau^+ \circ \theta_{\tau_t^+}(X) \quad t \geq 0 \end{cases}$$

puis $Z_t = X_{\tau_t^+}$ pour tout entier $t \in \mathbb{N}$. (On pose $\tau^+ = \tau_A^+$ à la première ligne pour ne pas alourdir la notation sachant que A est fixé, et aussi pour éviter la confusion avec le cas d'un indice entier τ_t^+ ensuite défini).

5. Reprendre les questions 1 et 3, jusqu'à obtenir que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov pour une certaine matrice de transition R que l'on précisera.
6. (Bonus, plus difficile, à ne traiter que s'il vous reste du temps). Montrer que

$$\left(\frac{\pi(x)}{\pi(A)}\right)_{x\in A}$$

est l'unique mesure de probabilité stationnaire de la chaîne $(Z_t)_{t\geq 0}$. On pourra commencer par montrer que, pour tout $t \geq 1, y \in A$:

$$\sum_{x\in A} \pi(x)\mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y, \tau_A^+ \leq t) + \sum_{x\notin A} \pi(x)\mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y, \tau_A^+ = t) = \pi(y).$$