Exercices Algèbre - Groupes I

Exercice 1 — Groupe symétrique I. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'indice n.

1. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_3$? de $\mathfrak{S}_4$? de $\mathfrak{S}_5$? de $\mathfrak{S}_n$?
2. Donner le treillis des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, en précisant à chaque fois lesquels des sous-groupes sont distingués. Répéter l'exercice avec le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
3. Soit G un groupe fini. Rappeler pourquoi il existe $n \in \mathbf{N}$ et un homomorphisme injectif de G dans $\mathfrak{S}_n$.
En déduire qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et un homomorphisme injectif de G dans $\mathfrak{A}_n$ et qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et un homomorphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}_n(k)$ pour tout corps k.
4. Une *partition de n* est une suite $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r$ d'entiers tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Montrer que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection avec les partitions de n. Que dire des classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$?
5. Montrer qu'un sous-groupe H d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ (on pourra penser à restreindre l'action de G sur G/H à H).

Exercice 2 — Groupe diédral. On considère les deux transformations suivantes du plan euclidien : la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et la symétrie σ par rapport à l'axe des abscisses. Le groupe *diédral* D_4 est le sous-groupe des isométries du plan engendré par ρ et σ.

1. Calculer l'ordre de σ et de ρ. Décrire l'isométrie $\sigma\rho\sigma^{-1}$.
2. Montrer que D_4 contient 8 éléments; caractériser ces éléments géométriquement.
3. Déterminer les classes de conjugaison dans D_4.
4. Donner le treillis des sous-groupes de D_4, en précisant les sous-groupes distingués.
5. Pour un entier $n > 0$, le groupe diédral D_n est le sous-groupe des isométries du plan engendré par σ et par la rotation ρ' de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Montrer que D_n contient $2n$ éléments et correspond au groupe des isométries du plan préservant le polygone régulier du plan à n côtés de sommet les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 3. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini m. On note G/H l'ensemble des classes de G modulo H (ceci n'est pas un groupe en général). Pour $g \in G$, on note $h_g : G/H \longrightarrow G/H$ l'application $aH \mapsto gaH$.

1. Montrer que h_g est une bijection, et que l'application h qui envoie g sur h_g est un homomorphisme de G dans $\mathfrak{S}(G/H)$.
2. Montrer que $[G : \mathrm{Ker}(h)]$ divise $m!$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(h)$ est contenu dans H.
4. Montrer que $[H : \mathrm{Ker}(h)]$ divise $(m-1)!$.
5. Application 1 : montrer que si H est d'indice 2 dans G, alors H est distingué dans G.
6. Application 2 : montrer que si G est un p-groupe, et si H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.
7. Application 3 : Supposons que G est fini et que $m = [G : H]$ est le plus petit diviseur premier de l'ordre de G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 4 — Quaternions et groupes d'ordre 8. On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ de la forme

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

On pose $H^* = H - \{0\}$.

1. Montrer que H^* est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.
2. On note 1 la matrice identité, et on pose $I := M_{i,0}$, $J = M_{0,1}$, $K = M_{0,i}$. Soit $\mathbf{H}_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Montrer que $\mathbf{H}_8$ est un sous-groupe non commutatif de cardinal 8 de H^* (on observera que $IJ = K = -JI$, avec des relations analogues par permutations circulaires de I, J, K).
3. Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de $\mathbf{H}_8$ sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.
4. Montrer que l'abélianisé de $\mathbf{H}_8$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.
5. Justifier que $\mathbf{H}_8$ n'est pas un produit semi-direct et déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 8.
6. Est-ce qu'un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est nécessairement abélien ?

Exercice 5. Faire la liste, à isomorphisme près, des groupes de cardinal $\leqslant 7$.

Exercice 6. Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué K de G, contenu dans H, tel que $[G:K]$ divise $n!$. (On pourra considérer l'action de G sur G/H).
2. On suppose que G est fini. Montrer que G n'est pas la réunion des conjugués gHg^{-1} de H.
3. Montrer que **2.** reste vrai si G est infini.
4. Est-ce que **2.** reste vrai si on ne suppose plus que $[G:H]$ est fini ?
5. Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $\#X \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X.
6. Soit $k \geqslant 5$ un entier et soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ d'indice compris entre 2 et $k-1$. Montrer que $H = \mathfrak{A}_k$. On admettra le fait que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_k$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{S}_k$.

Exercice 7.

1. Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est cyclique. Rappeler pourquoi G est abélien. Le résultat tient-il toujours si l'on suppose seulement que $G/Z(G)$ est abélien ?
2. Montrer qu'un p-groupe d'ordre p^n possède des sous-groupes d'ordre p^i pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.
3. Soient p un nombre premier et P un p-Sylow de G. Montrer que $P \cdot Z(G)$ est un sous-groupe de G, et que $(P \cdot Z(G))/Z(G)$ est un p-Sylow de $G/Z(G)$.
4. Montrer que ceci induit une bijection entre les p-Sylow de G et les p-Sylow de $G/Z(G)$.

Exercice 8 — Exposant d'un groupe. On définit *l'exposant* d'un groupe abélien fini G et on note $\exp(G)$, comme le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $g^n = 1$ pour tout $g \in G$.

1. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs $\omega(x)$ et $\omega(y)$ premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre $\omega(x)\omega(y)$.
2. A-t-on sans hypothèse que l'ordre de xy est donné par $\mathrm{ppcm}(\omega(x), \omega(y))$?
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que z soit d'ordre $\exp(G)$.
4. Retrouver alors qu'un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

Exercice 9.

1. Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien et donner des exemples de tels groupes.
2. Pour quels entiers e, un groupe d'exposant e est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 10. Soit $P_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui ont exactement k points fixes. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$ (cette dernière question était un exercice des olympiades de La Havane en 1987...).

Exercice 11. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g \cdot x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire*, *i.e.* pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

1. Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p (on pourra utiliser la classification des groupes abéliens finis, ou encore le théorème de Sylow).
2. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g \cdot x = x$.
3. On ne suppose plus A fini. Soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g \cdot a, g \in G\}$ est fini.
4. En déduire que le résultat de **2.** vaut encore sans l'hypothèse A fini.

Exercice 12.

1. Combien y a-t-il d'opérations du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
2. Soient G et X deux groupes. On dit que G *opère par automorphismes* sur X si on s'est donnée une opération $(g, x) \mapsto g.x$ de G sur X telle que pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ soit un automorphisme de X. L'opération de G sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ? Même question pour l'opération par conjugaison.
3. On prend $G = (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +)$ et $X = (\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}, +)$. Combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ? Même question en remplaçant $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 13. Soit G un groupe. Soit $x_0 \in G$. On appelle *centralisateur* de x_0 l'ensemble G_{x_0} des éléments x de G vérifiant $xx_0 = x_0x$.

1. Montrer que G_{x_0} est un sous-groupe de G. Est-il toujours distingué ?
2. On suppose G fini. Soit C la classe de conjugaison de x_0. Trouver une relation entre $\#G$, $\#C$, et $\#G_{x_0}$.
3. Justifier que la probabilité que deux éléments d'un groupe non abélien commutent est $\leqslant frac58$.

Exercice 14. On considère le groupe $G = \mathfrak{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

1. Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subset V_4$ (on observera que G/V_4 est de cardinal 3).
2. Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2.
3. En déduire que $D(G) = V_4$.
4. Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini A, alors $H \lhd A$ (regarder les classes à gauche et à droite suivant G).
5. Soit H un sous-groupe de $G = \mathfrak{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subset H$ (on considérera G/H) et aboutir à une contradiction en utilisant **3**. Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.
6. Montrer au contraire que pour tout $d \in \mathbf{N}^\times$ tel que d divise 24, le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe de cardinal d.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 5$. Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ par un groupe abélien quelconque ? Et si on prend $n = 4$?

Exercice 16. Soit G un groupe admettant une partie génératrice finie. Montrer que G est fini ou dénombrable. Est-il vrai réciproquement que tout groupe dénombrable admet une partie génératrice finie ?

Exercice 17. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G. Que dire en particulier si l'action est transitive ? De la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?

Exercice 18 — Lemme de Cauchy. Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant le cardinal de G. En utilisant une action convenable de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur l'ensemble

$$X = \left\{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \ : \ g_1 g_2 \cdots g_p = 1\right\},$$

établir que G admet un élément d'ordre p (sans utiliser les théorèmes de Sylow !).

Exercice 19. Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ?

Exercice 20. Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.