Calculus PCST

Formules et dessins

Frédéric Le Roux et Thierry Ramond
Mathématiques
Université Paris Sud
e-mail: frederic.le-roux@ math.u-psud.fr et thierry.ramond@math.u-psud.fr

version du 16 octobre 2008

Table des matières

A modifier :
- Formules de trigo : formulaire à établir progressivement, au fur et à mesure des besoin, à savoir ! !
- Plan d'étude des courbes,
- Preuve de Taylor-Young,
- composition des DLs : insister sur les cas simples, pas de technique
- Découper en leçon, et intégrer les exos,
- Expliciter ce qui ne fait pas l'objet d'exos : Accroissements finis, courbes en polaires ?

Première partie

Courbes et fonctions d'une variable

Chapitre 1

Introduction

1.1 Lettres et courbes : les courbes de Bézier

Pour commencer, nous vous proposons d'étudier l'affirmation suivante.

La géométrie, ça ne sert à rien !

Pour cela, nous proposons de la regarder d'un peu plus près en zoomant sur l'écran de l'ordinateur :

La géométrie, ça ne sert à rien !

Vous êtes-vous déjà demandé comment l'ordinateur dessine les lettres que l'on voit à l'écran ? Dans les années 1980, quand les ordinateurs personnels commençaient tout juste à se répandre, l'ordinateur avait en mémoire un dessin de chacune des 26 lettres de l'alphabet (sans compter les lettres accentuées). Une lettre était stockée sous la forme d'une grille 8×8 dans laquelle chaque case était allumée ou éteinte (noire ou blanche, ce qui en mémoire correspond au symbole 0 ou 1). Par exemple, le "e" pouvait ressembler au dessin de gauche de la figure **??**.

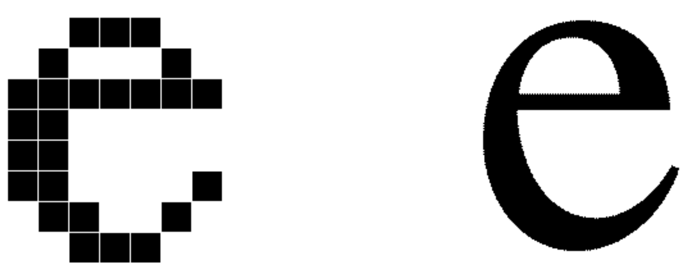


Fig. 1.1 – Zoom sur un "e" : à gauche, avec un ordinateur des années 1980 ; à droite, avec un ordinateur actuel

Cette méthode avait de nombreux inconvénients. En particulier, si l'on voulait grossir le texte à l'écran, l'ordinateur ne pouvait que grossir la grille, et on voyait apparaître les gros carrés qui définissaient la lettre, exactement comme sur le dessin ci-dessus. En comparaison, avec un ordinateur actuel, on peut zoomer "à l'infini" sans voir apparaître de gros carrés ; pourtant, l'écran lui-même est toujours une grille de pixels (ici, 1024 sur 768) : c'est donc que le “e” sur lequel on a zoomé n'est pas obtenu à partir d'une lettre de taille normale en effectuant un pur agrandissement (une homothétie !), sans quoi les carrés apparaîtraient assez vite. Il semble que les lettres ne soient plus définies au moyen d'une grille, mais à l'aide de courbes lisses, et que l'ordinateur recalcule des détails supplémentaires à chaque nouvel agrandissement. *Quelles sont les courbes utilisées pour produire ces lettres, et comment sont-elles définies ?*

Une recherche rapide nous apprend que ces courbes sont des *courbes de Bézier*. La plupart des logiciels de dessin permettent de tracer de telles courbes. On voit que ces courbes sont définies très facilement : on donne un point de départ, et une vitesse en ce point ; et un point d'arrivée, et une vitesse au point d'arrivée ; et le logiciel nous trace la courbe de Bézier correspondante. La figure **??** montre comment la lettre “e” peut être fabriquée en assemblant un certain nombre de courbes de Bézier. La géométrie se glisse parfois à des endroits inattendus... Notre affirmation de départ paraît maintenant se contredire elle-même, en tout cas si on pense à la façon dont elle est écrite !

Comment sont définies mathématiquement ces courbes de Bézier, et comment l'ordinateur les dessine ? cf plus loin (et TD).

[1]

1.2 Courbes en physique

Des courbes apparaissent aussi en mécanique du point : la trajectoire physique que suit un point matériel est modélisée par une courbe (en général, dans un espace à trois dimension). Un exemple important est celui des planètes. Ainsi, la première loi de Kepler dit que les planètes du système solaire suivent des ellipses dont le soleil est l'un des foyers. Avec un logiciel, on peut tracer une famille d'ellipses (avec le soleil à l'origine) en faisant varier ce qu'on appelle l'excentricité. La Terre a une trajectoire qui est presque un cercle (excentricité $0,016$, proche de 0). Pluton vient d'être déchue de son statut de planète, en partie pour cause de trop grande excentricité $(0,25)$. Quand $a > 1$, les courbes deviennent des hyperboles, ce ne sont plus des courbes fermées et elles ne peuvent donc plus correspondre à des trajectoires de planètes ; par contre, certaine comètes,

[1] **Histoire de Bézier (liocity.free.fr)** Au début des années 60, les machines numériques ne savaient usiner de façon précise que des courbes simples comme des paraboles ou des ellipses. Une seconde catégorie d'objets, au contraire, offrait une forme a priori peu précise, déterminée expérimentalement. Les hélices d'avions, les coques de bateaux et les carrosseries de voitures étaient tracées à main levée, sans que l'on puisse décrire leurs formes par une formule mathématique.

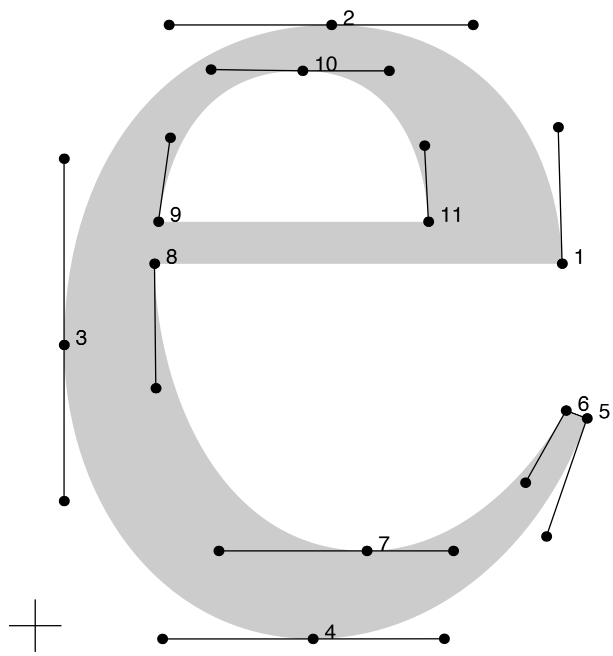
Pierre Bézier, ingénieur français diplômé du Conservatoire national des arts et métiers, poursuivait, une carrière à la Régie Renault, atteignant le poste de directeur des méthodes mécaniques.

Les machines à commande numérique de cette époque offraient une programmation limitée. Il fallait les alimenter avec des nombres, ce que l'on savait faire pour des déplacements élémentaires comme des droites, des arcs de cercle, et à la rigueur des ellipses. Mais il n'était pas question de programmer des courbes quelconques, tracées à la main, faute d'une définition numérique de celles-ci. Pierre Bézier chercha donc comment traduire mathématiquement une courbe, puis une surface, dessinées à main levée. Il lui fallait concevoir un système capable de gérer des courbes gauches, c'est-à-dire de manipuler des surfaces en 3D, d'o˘ la nécessité de définir un modèle mathématique qui ne soit pas limité à des courbes en deux dimensions. Enfin, l'ingénieur entendait inventer un système complet pour créer un objet en volume à partir d'un dessin, le tout avec une rapidité d'exécution suffisante, et compréhensible intuitivement.

Mais ses recherches n'étaient pas entièrement originales. Dès 1958, un mathématicien employé par Citroen, Paul de Casteljau, s'était attaqué au même problème. Paul de Casteljau était chargé de numériser une courbe, une fois celle-ci tracée, sans se poser la question d'une correction a posteriori. Il définissait ses courbes comme caractérisées par des pôles, d'une façon nettement moins parlante que les points de contrôle de Bézier.

L'aventure de Pierre Bézier aurait pu s'arrêter là. Mais un groupe de développeurs liés à Apple créa un langage adapté à la future imprimante laser conçue pour le Mac. Il s'agissait de trouver un moyen de définir mathématiquement une courbe, comme le tracé d'un caractère, avant de l'envoyer à l'imprimante. L'un de ces développeurs connaissait le travail du Français. Tout naturellement, il choisit les courbes de Bézier comme base du langage PostScript et fonda la société Adobe. Microsoft adopta à son tour les polices true-type à partir de Windows 3.1. Ces polices utilisent les courbes de Bézier pour définir les caractères aux formes arrondies.

24 *Jacques André*




```
\e{
402 276 moveto                    % départ point 1
399 380 334 458 226 458 curveto  % courbe de 1 à 2
102 458 22 356 22 214 curveto    % courbe de 2 à 3
22 95 97 -10 212 -10 curveto     % courbe de 3 à 4
312 -10 390 68 421 158 curveto   % courbe de 4 à 5
405 164 lineto                   % droite de 5 à 6
374 109 319 57 253 57 curveto    % courbe de 6 à 7
140 57 92 181 91 276 curveto     % courbe de 7 à 8
closepath                        % fermer contour extérieur
94 308 moveto                    % départ au point 9
103 372 134 424 204 423 curveto  % courbe de 9 à 10
270 423 297 366 300 308 curveto  % courbe de 10 à 11
closepath} def                   % fermer contour intérieur
```

FIGURE 15 – *Un caractère est défini par quelques points de contrôle et tangentes. En haut, le schéma d'un « e » ; en bas, le programme PostScript le décrivant.*

FIG. 1.2 – Extrait de l'article *Caractères numériques : introduction*, de Jacques André

qui traversent le système solaire sans être capturée, ont ce type de trajectoire.

1.3 Courbes mathématiques

cf exemples dans Grapher.

Bien sûr, il y a un type de courbes très particulier que vous connaissez déjà bien, il s'agit des graphes de fonctions. Les fonctions les plus simples sont les fonctions *affines* : $f(x) = ax + b$, dont le graphe est une droite. Quel est le sens géométrique des paramètres a et b ? Si on fixe $b = 0$ (droite passant par l'origine) et que l'on fait varier a, ... Si on fait varier b à a constant, on obtient une famille de droites paralèlles. Ainsi le nombre a caractérise la pente de la droite. Ceci est un exemple de relation très claire entre la formule et le dessin.

1.4 Quelques définitions (rappels)

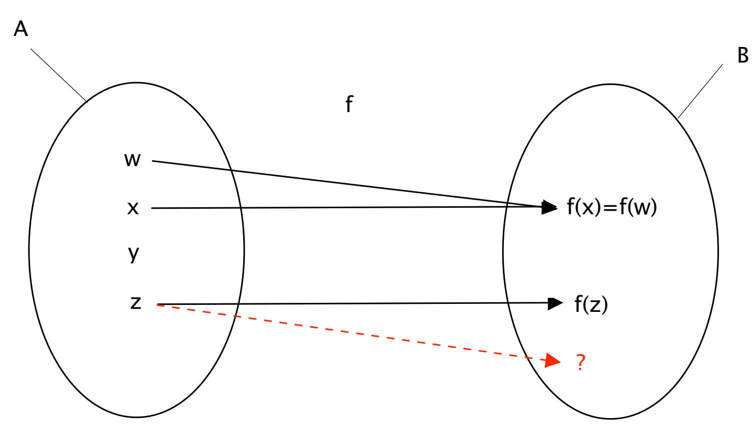
1.4.1 Les fonctions et leurs graphes

Bien sûr, vous connaissez déjà plein de fonctions : cf la première feuille de TD pour vous rafraichir la mémoire sur les fonctions les plus courantes.

• Au fait, qu'est-ce qu'une fonction ? Discussion : y a-t-il une fonction dont le graphe est un cercle ? Pour se mettre d'accord, on se donne une définition de ce qu'est une fonction.

Définition 1.4.1 Une fonction f de A dans B est un procédé qui, à tout élément de x de l'ensemble A, permet d'associer au plus un élément de l'ensemble B, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de A qui ont une image par f forment *l'ensemble (ou domaine) de définition* de f, que l'on note $\mathcal{D}_f$.

Ainsi, le cercle ne représente pas une fonction, parce qu'à certains "x" correspond deux "y".

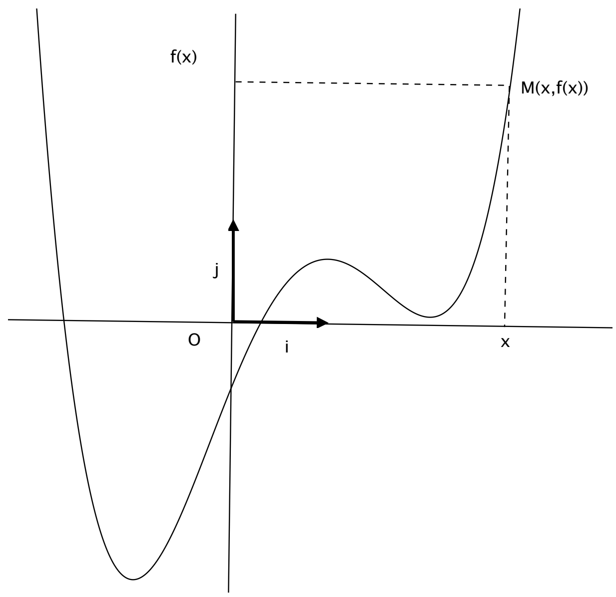


Dans cette partie, on considèrera toujours des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, données la plupart du temps par une formule permettant de calculer $f(x)$. Dans ce cas, le domaine de définition est simplement l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ pour lesquels la formule a un sens. Par exemple on parlera de la fonction $f : x \mapsto 1/\sqrt{x}$, dont l'ensemble de définition est naturellement $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

Définition 1.4.2 On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f, l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = f(x)$:

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathcal{D}_f, y = f(x)\}.$$

On a supposé bien sùr implicitement que le plan est muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Voici le graphe de $f : x \mapsto 1/\sqrt{x}$ (DESSIN). Comment voit-on l'ensemble de définition sur le dessin ? *Un nombre x est dans l'ensemble de définition de f ssi la droite verticale d'abscisse x rencontre le graphe.* Comment voit-on qu'il s'agit bien d'un graphe de fonction ? *Un ensemble $\mathcal{C}$ de points du plan est un graphe de fonction ssi toute droite verticale rencontre $\mathcal{C}$ en au plus un point.* Remarquez que le graphe de notre fonction f découpe chaque droite verticale en deux parties : les points (x, y) sous le graphe vérifient $y < f(x)$, ceux au-dessus vérifient $y > f(x)$. Le dessin lui-même est ainsi partagé en deux zones dont la frontière commune est le graphe de f (DESSIN).

• Test : les demi-cercles sont-ils des graphes de fonctions ? Tous, certains ?

1.4.2 Fonctions affines

(cf plus haut, animations avec grapher). Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine ; son graphe est une droite Δ. Le nombre a est le *coefficient directeur*, ou *pente* de Δ. Remarquez que

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{accroissement de la fonction}}{\text{accroissement de la variable}}$$

(comme on a une droite, ça ne dépend pas de l'endroit où on le calcule). On a vu tout à l'heure son sens géométrique :

$$a = 0 \Leftrightarrow ..., \quad a < 0 \Leftrightarrow ..., \quad a > 0 \Leftrightarrow ...,$$

a est très grand signifie...

• Test : quelle est la fonction dont le graphe est la droite verticale ?

1.5 Quelques définitions nouvelles

On a vu sur des dessins que certaines courbes ne sont pas des graphes de fonctions (cercle, ellipses, certaines courbes de Bézier...). On est donc conduit à définir une nouvelle sorte de courbes.

1.5.1 Définition

Commençons par nous demander quel objet mathématique correspond à ces dessins. Pour comprendre la définition qui suit, on peut imaginer qu'une courbe correspond à la trajectoire d'un point M qui se déplace dans le plan. Comme la position de M dépend du temps, on la note comme une fonction du temps : $M(t)$. On note I l'intervalle de temps pendant lequel a lieu le mouvement. Exemple : on prend $I = [0, 2\pi]$ et $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$, quand t varie de 0 à 2π, le point M décrit un cercle.

Définition 1.5.1 On appelle courbe paramétrée du plan une fonction $M : t \mapsto M(t)$ d'un intervalle $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Lorsque $t \mapsto M(t)$ est une telle courbe paramétrée, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan défini par

$$\mathcal{C} = \{M(t)\ ,\ t \in I\}$$

est l'*image* de la courbe paramétrée (on dit aussi *courbe géométrique* associée à la courbe paramétrée).

En général on se donne $M(t)$ par ses deux coordonnées : $M(t) = (x(t), y(t))$. Ainsi, une courbe correspond à la donnée de deux fonctions.

• Exemple et animation Grapher : parcours d'une ellipse ; le paramétrage ne respecte pas la deuxième loi de Kepler.

DESSIN (courbe avec position en différent temps).

Par exemple, la courbe paramétrée d'équation

$$x(t) = \frac{\cos(t)}{1 + 0,5\cos(t)}, y(t) = \frac{\sin(t)}{1 + 0,5\cos(t)},$$

pour t variant entre 0 et 2π, est une ellipse.

L'exemple des planètes permet d'illustrer la différence entre la courbe géométrique, qui est un sous-ensemble du plan, et la courbe paramétrée, qui est une fonction d'un intervalle dans le plan. Ainsi, la première loi de Kepler dit que la courbe géométrique tracée dans le plan de l'ecliptique par la Terre est une ellipse dont le Soleil est l'un des foyer. Par contre, elle ne dit pas comment (à quelle vitesse) cette trajectoire est décrite. Les deux autres lois de Képler permettent de retrouver la paramétrisation de cette ellipse correspondant au mouvement de la Terre. En particulier, la planète se déplace plus rapidement sur son ellipse lorsqu'elle est plus proche du Soleil. Ainsi, la courbe paramétrée dans le logiciel *ne correspond pas* au mouvement d'une planète avec le soleil à l'origine.

1.5.2 Un exemple de tracé

Comment dessiner une courbe paramétrée ? Nous allons voir cela sur un exemple. Considérons la courbe définie pour $t \in [0, 1]$ par

$$x(t) = 3t^2 - 2t^3 \text{ et } y(t) = 3t(1 - t).$$

À quoi ressemble-t-elle ? On va obtenir une idée de plus en plus précise de son allure. Commençons par dresser les tablos de variations des fonctions x et y (fonctions de la variable t). On voit déjà que la courbe part (au temps $t = 0$) du point $A_0 = (0, 0)$ et arrive (au temps $t = 1$) au point $A_3 = (1, 0)$. Que fait-elle entre temps ? On voit déjà que x varie entre 0 et 1, et y entre 0 et $3/4$; ainsi, on sait que la courbe est contenue dans un rectangle. Soyons plus précis. La coordonnée x est croissante sur tout l'intervalle de temps considéré, par contre y croît sur $[0, 1/2]$ puis décroît sur $[1/2, 1]$. Le point correspondant au temps $t = 1/2$ joue donc un rôle particulier, on le place sur le dessin (coordonnées $(1/2, 3/4)$). Entre les temps $t = 0$ et $t = 1/2$, les deux coordonnées augmentent (la courbe se dirige donc vers le Nord-Est !) Par contre entre les temps $t = 1/2$ et $t = 1$, x augmente pendant que y diminue.

Pour être encore plus précis, il faut connaître la direction de la courbe aux points remarquables (temps $t = 0, 1/2, 1$). Pour cela, on calcule le vecteur vitesse[2], $\vec{V}(t) = M'(t) = (x'(t), y'(t))$. On voit que la courbe est dirigée vers le haut en $t = 0$, vers la droite en $t = 1/2$ et vers le bas en $t = 1$.

DESSINS SUCCESSIFS.

On peut vérifier en demandant à un ordinateur de tracer la courbe. Cette courbe est en fait la courbe de Bézier associée aux points $A_0 = (0, 0), A_1 = (0, 1), A_2 = (1, 1)$ et $A_3 = (1, 0)$ (voir le TD).

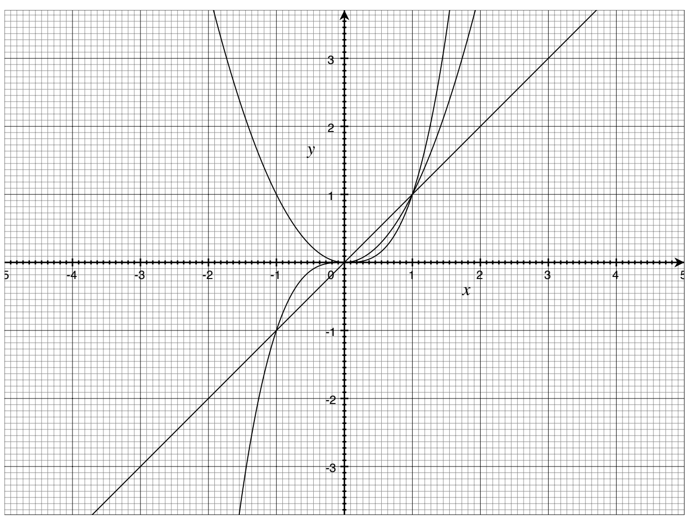
[2]Nous reviendrons sur le vecteur vitesse dans le chapitre sur les tangentes.

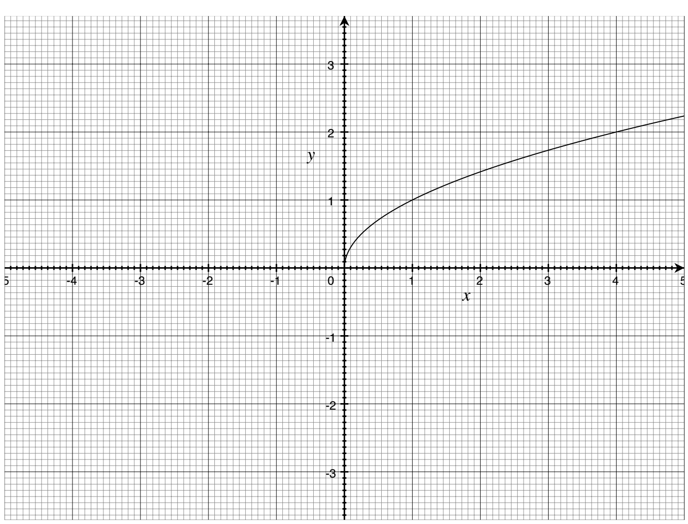
Feuille d'Exercices 0

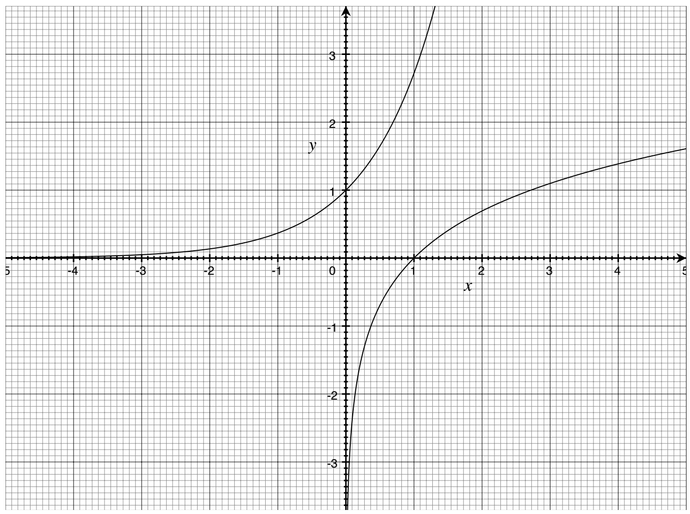
Graphes des fonctions usuelles (amphi d'accueil, corriger rapidement au TD1a)

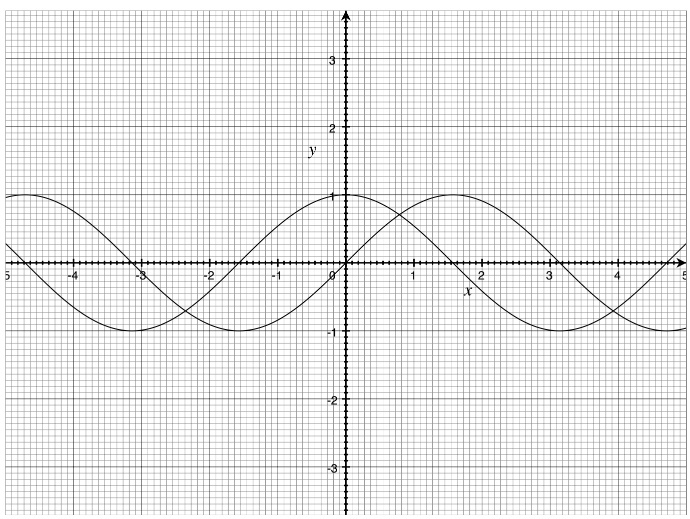
Exercice 0.1.— Pour chacun des dessins suivants, indiquez le nom des différentes fonctions usuelles dont le graphe est tracé. Donner les domaines de définition, et la dérivée de chaque fonction. Indiquer les points remarquables sur le dessin.

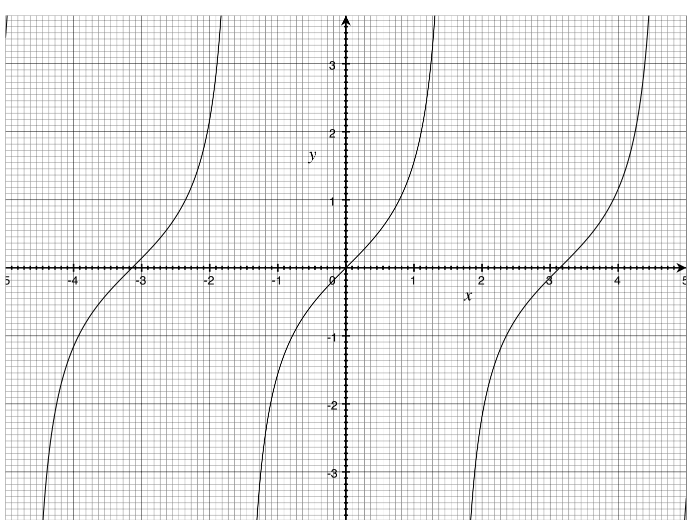
Indication : les neuf fonctions représentées sont (dans le désordre) : $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$.






y
x
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
3 2 1 -1 -2 -3


y
x
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
3 2 1 -1 -2 -3


y
x
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
3 2 1 -1 -2 -3

Feuille d'Exercices 1

Fonctions : graphes, ensembles de définition (TD1a)

Exercice 1.1.— Soit f la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$. On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Dessiner le graphe $\mathcal{C}$ de f.

2. **a.** Dessiner l'image $\mathcal{C}_1$ du graphe de cette courbe par la symétrie d'axe Ox. **b.** Donner la fonction f_1 dont elle est le graphe. **c.** Pouvez-vous exprimer cette nouvelle fonction à l'aide de la fonction f ?

3. *(M)* Mêmes questions avec la symétrie d'axe Oy.

Exercice 1.2.—

1. Tracer rapidement le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$. Représenter sur le dessin les deux ensembles

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \sin(x)\} \text{ et } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sin(x)\}.$$

2. Dessiner de même les ensembles suivants.

$$\begin{array}{ll} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x + 3\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x^3\} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}. & \end{array}$$

Exercice 1.3.— Montrer que cercle trigonométrique (centré sur l'origine, et de rayon 1) est la réunion de deux graphes de fonctions. Donner des formules pour ces fonctions.

Exercice 1.4.— *(M)* Pour chacune des formules suivantes, décrire le domaine de définition de la fonction définie par cette formule.

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2 + 3x}{5 - 2x}}, \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \qquad f_3(x) = \ln(4x + 3),$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^3 - 3}, \qquad f_5(x) = \ln(x - 1)^2(x + 2)^4, \qquad f_6(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - 2).$$

Chapitre 2

Tangentes et fonctions dérivées (I)

– Définition,
– Calcul.

2.1 À propos de la notion de limite

On voudrait définir le plus précisément possible la notion de limite, plus spécialement la propriété : "$f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0".

2.1.1 Définition

Pour fixer les idées, prenons $f(x) = 100x$. J'affirme que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Ce qui signifie : *je prétend que je peux rendre $f(x)$ aussi proche de 0 que vous voulez, si vous m'autorisez à prendre x aussi proche de 0 que je veux.*

On peut tester mon affirmation. C'est d'abord à vous de jouer : vous me donnez une certaine précision, qu'on va noter ε : par exemple, $\varepsilon = 0,01$. Maintenant, c'est à moi : j'ai le droit de choisir une autre précision, disons $\delta > 0$. J'ai gagné si : lorsque x est proche de 0 à δ près ("aussi proche que je veux"), $f(x)$ est proche de 0 à ε près ("aussi proche que vous vouliez"). Remarquez que $\delta = 0,01$ ne marche pas... Mais j'ai le droit de choisir δ comme je veux, même plus petit que votre ε. Je choisis $\delta = 0,0001$... et ça marche. Vous voulez rejouer ?...

Résumons : *à chaque fois que vous choisissez un $\varepsilon > 0$, je peux choisir un $\delta > 0$ tel que, dès que x est plus petit que mon δ, $f(x)$ est plus petit que votre ε.* C'est presque la définition de Weierstrass (il faut juste enlever les "vous" et les "je"). Remarquez qu'il est très important que ce soit vous qui jouiez en premier, et moi ensuite ; si je devais choisir mon δ avant votre ε, je perdrais !

On considère une fonction f définie dans un voisinage $]-a, a[$ de 0, sauf peut-être en 0.

Définition 2.1.1 (limite) *On dira que* $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \neq 0$ dans l'intervalle $]-\delta, +\delta[$, le nombre $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon, +\varepsilon[$.*

On écrit

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \text{ ou même } \lim_{0} f = 0.$$

DESSIN.

Pour simplifier, on a donné un cas très particulier (le plus simple !). Mais il y a de multiples variantes sur cette définition : on pourrait en particulier définir
– $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 où ℓ et x_0 sont des nombres réels quelconques ;
– même chose avec $\ell = +\infty, -\infty$ (ce n'est plus un nombre !), ou $x_0 = +\infty, -\infty$;
– notion de limite à droite, à gauche.

2.1.2 Continuité

Rappelons que la notion de limite permet en particulier de définir ce qu'est une fonction *continue*.

Définition 2.1.2 *Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

1. *$f(x)$ admet une limite (finie !) quand $x \to x_0$,*
2. *cette limite est $f(x_0)$.*

On peut aussi définir la notion de continuité à droite ou à gauche en un point.

(Les fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$, $\exp, \log, \sin, \cos, \tan...$ sont continues sur leur ensemble de définition. Noter que $\sqrt{}$ est continue à droite en 0. Toutes les fonctions intéressantes sont-elles continues ?) [1]

2.1.3 Opérations sur les limites.

Pour calculer la limite d'une fonction f en un point, on utilise la plupart du temps les règles "limites et opérations" ci-dessous. Il s'agit de reconnaître dans l'expression $f(x)$ des sommes, des produits ou des quotients de fonctions de référence. Il faut retenir la

Proposition 2.1.3 Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies dans un voisinage $]x_0 - a, x_0 + a[$ de x_0, sauf peut-être en x_0. On a alors les résultats suivants :

$\lim\limits_{x_0} f_1$	$\lim\limits_{x_0} f_2$	$\lim\limits_{x_0}(f_1 + f_2)$	$\lim\limits_{x_0}(f_1 f_2)$
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$
$+\infty$	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x_0} f_1$	$\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f_1}$
$\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$	$1/\ell$
0	?
0, et $f(x) > 0$ pour tout x	$+\infty$
0, et $f(x) < 0$ pour tout x	$-\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Attention : dans ces tableaux, la présence d'un **?** signale qu'il n'y a pas de résultat général possible, et qu'il faut étudier chacune de ces formes indéterminées cas par cas. Pour "lever l'indétermination", on peut parfois se ramener à des limites connues, comme celles qui figurent dans le tableau de la Section **??** ci-dessous.

[1] Attention, on n'a pas défini le prolongement par continuité

Le tableau dit qu'il est très facile de calculer la limite d'une fonction élémentaire à partir des fonctions de base, *sauf* dans les cas des formes indéterminés. Presque toutes les limites intéressantes sont des formes indéterminées, à commencer par celle qui intervient dans la notion de dérivée (chapitre suivant). Plus tard, on apprendra à résoudre la plupart des indéterminations au moyen des "développements limités".

Test Écrire un exemple pour chaque case ; pour les cases indéterminée, donner différents exemples pour illustrer l'indétermination.

2.1.4 Histoire

Cauchy (1821) : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*".

C'est encore un peu flou, mais l'idée est là. Elle a été précisée par Weierstrass (1840-1860), qui a écrit la définition moderne.

2.2 Tangente et nombre dérivé

2.2.1 Pente et taux d'acroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et $a+h$ deux nombres dans I. La droite sécante au graphe de f aux points d'abscisses a et $a+h$ a pour pente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(accroissement de la fonction divisé par l'accroissement de la variable). Ce nombre s'appelle *taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.*

(DESSIN).

2.2.2 Nombre dérivé et fonction dérivée

Nous nous intéressons maintenant aux notions liées à la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Nous insistons sur l'aspect géométrique (d'ailleurs élémentaire) de ces notions en considérant comme intuitive l'idée de tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction définie dans un voisinage $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ du point a, avec $\alpha > 0$. On suppose le plan muni d'un repère et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère.

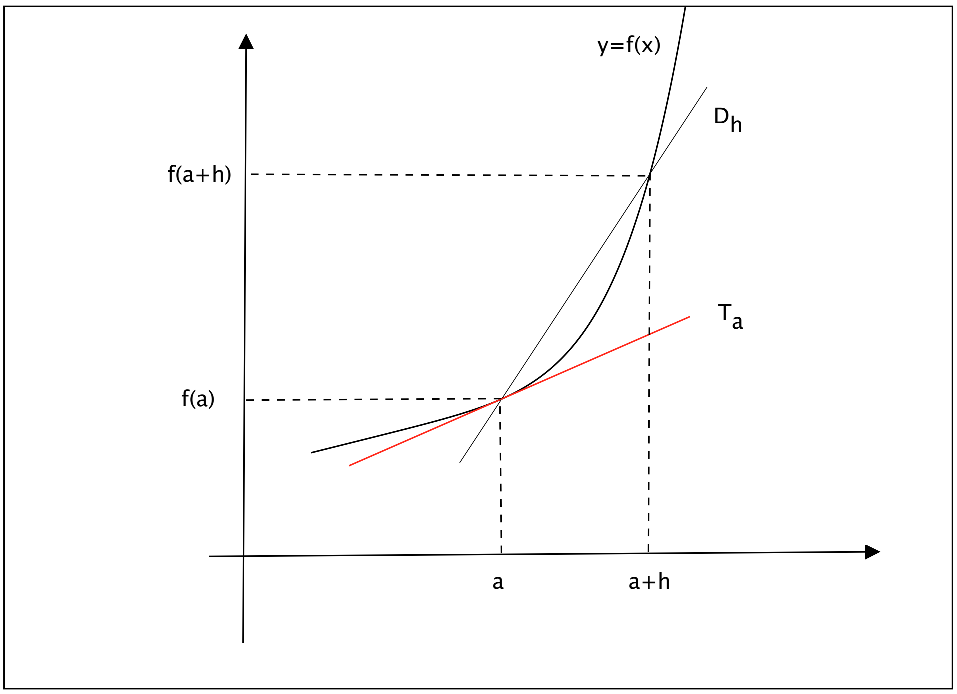
Définition 2.2.1 La fonction f est dérivable au point a si $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une tangente non-verticale. Le nombre dérivé de f au point a est alors le coefficient directeur de cette droite ; on le note $f'(a)$.

En traçant les secantes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point d'abscisse a et les points d'abscisses $a+h$ ou $a-h$ avec $h>0$ de plus en plus petit, comme sur la figure ci-dessous, on obtient immédiatement la

Proposition 2.2.2 La fonction f est dérivable au point a si et seulement si le *taux d'accroissement* de f en a, défini pour h dans un voisinage de 0 (pas en 0) par

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a une limite finie quand h tend vers 0, cette limite étant alors le nombre dérivé de f au point a.



Remarquons tout de suite que si f est dérivable au point a de nombre dérivée $f'(a)$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

2.2.3 Développement limité à l'ordre 1

DESSIN qui illustre la relation $f(a+h) = f(a) + f'(a)h +$ "reste". Que peut-on dire du reste lorsque $h \to 0$? Il tend vers 0, bien sûr ; en fait on a mieux : on a

$$\text{reste} = h.\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right] = h.\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$. Ceci signifie que le reste "tend vers 0 plus vite que h".

Proposition 2.2.3 La fonction f est dérivable au point a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ et un réel A_1 tels que

1. $\forall h \in]-\alpha, \alpha[, f(a+h) = f(a) + A_1 h + h\varepsilon(h)$,
2. $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, on dit que f admet un *Développement Limité (D.L.) à l'ordre 1 au point* a (ou encore : une *approximation affine*). On a alors $f'(a) = A_1$.

2

Exemple 2.2.4 *1) On prend* $f(x) = x^2$ *et* $a = 1$. *On a* $f(1+h) = 1+2h+h^2$ *; Ici le reste est très simple : c'est* h^2, *il tend bien vers* 0 *plus vite*[3] *que* h *: il est bien de la forme* $h.\varepsilon(h)$ *avec* $\varepsilon(h) = h$ *qui tend vers* 0.

2) on prend $f(x) = \sqrt{x}$, *on peut vérifier que* $\varepsilon(h)$ *tend vers* 0*...*

Il découle tout de suite de la Proposition précédente que toute fonction dérivable au point a est nécessairement continue en ce point : le membre de droite de l'égalité (1) tend vers $f(a)$ quand $h \to 0$.

Exemple 2.2.5 *Montrer que la fonction* $x \mapsto |x|$ *est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.*

2.3 Calculs de fonctions dérivées

2.3.1 Fonction dérivée

Définition 2.3.1 On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ si elle est dérivable en chacun des points de I. On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ lorsque f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Si f est dérivable sur un intervalle I on définit sur I une fonction f' appelée *(fonction) dérivée* de f qui associe à tout point de I le nombre dérivé de f en ce point. On dit que f est deux fois dérivable sur I si la foction f' est dérivable sur I. On note alors f'' la dérivée de f' et l'on parle de la dérivée seconde de f...

2.3.2 Règles de calculs

Nous énonçons maintenant sans démonstration les règles usuelles de calcul de nombres dérivés. Le lecteur consciencieux utilisera plutôt la Proposition 2.2.3 ci-dessus pour prouver ces résultats.

Proposition 2.3.2 Soit f et g deux fonctions dérivables au point a. Alors $f + g$, fg, f^n, $\dfrac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont dérivables au point a et l'on a

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$	$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
$(f^n)'(a) = nf'(a)f^{n-1}(a)$	$(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Voir le livre de L'Hopital.

[2]Que faire pour les aider à comprendre le cgt de variable $x = a + h$? Lien avec translation de graphes...Mais ça correspond plutôt à translater le repère.

[3]Attention, quand h est petit, h^2 est plus petit que h !

2.3.3 Dérivées usuelles

Les dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant (a, x, x^2, x^n, $\sqrt{x}$, x^α, exp, log, sin, cos).

• Test : comment se rappeler des signes dans les formules de dérivation des fcts trigos ?

2.4 Exemples de grandeurs dérivées

– Vitesse : cf plus loin ;
– débit ;
– densité ponctuelle ;
– coût marginal...

2.5 Histoire

Histoire

Le calcul des dérivées, ou calcul infinitésimal, est apparu avec Newton (1664-1670) et Leibniz (1675). Voici la page de titre du premier traité sur le sujet, publié en 1696 par le Marquis de L'Hospital, et la page qui donne la règle de dérivation des produits.

Les règles données ressemblent beaucoup à celle du cours (opérations sur les dérivées, liens avec les tangentes, les maxima). Par contre, les définitions sont très différentes, basées sur les "infiniment petits". Cauchy les remplacera par des définitions basées sur la limite.

Feuille d'Exercices 2

Tangentes et dérivées (TD1b)

Exercice 2.1.— (Exercice à faire chez soi). Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois pour quels nombres x le calcul est valide.

$$f_1(x) = \frac{9x^2 - 4}{8x^3 + 6}, \quad f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}.$$

Réponses : les dérivées sont

$$f_1'(x) = -3\,\frac{x\left(6\,x^3 - 9 - 8\,x\right)}{\left(4\,x^3 + 3\right)^2},\ f_2'(x) = \frac{5x^3 - 9x^2 + 3x - 1}{2x\sqrt{x}}.$$

Exercice 2.2.— (M) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x$.

Exercice 2.3.—

1. (M) À l'aide des techniques de Terminale, étudier les limites suivantes. On explicitera les limites classiques utilisées.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}.$$

$$\lim_{x\to 0,1,+\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{-4x^3 + 3x + 1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{3x^4+2} e^x, \quad \lim_{x\to+\infty} (3x^4 - 2x^2)e^{-x}.$$

2. Écrire les développements limités à l'ordre 1 (approximations affines) des fonctions suivantes :

1. sinus au point $a = 0$;
2. tangente au point $a = 0$;
3. racine carrée au point $a = 1$;
4. (M) exponentielle au point $a = 0$;
5. (M) logarithme au point $a = 1$.

3. Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}.$$

DL1 et approximations ?

Feuille d'Exercices 3

Courbes paramétrées (TD2a)

Exercice 3.1.— Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation conjoint est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
	4								4
$x(t)$		$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	
					0				
			2						2
$y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	
	-2						-2		
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

Exercice 3.2.— **1.** Rappeler rapidement les tableaux de variations des fonctions Sinus et Cosinus. **2.** Construire le tableau de variation de la fonction $t \mapsto \sin(4t)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 3.3.— On considère la courbe paramétrée définie par $M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \sin(4t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. On se restreint pour l'instant aux valeurs de t dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

a. Donner le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$.

b. Tracer les tangentes à la courbes aux points $M(0)$, $M(\frac{\pi}{4})$, $M(\frac{\pi}{2})$.

c. Tracer la portion de courbe obtenue lorsque t décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$. On note $\mathcal{C}$ cet ensemble. L'ensemble $\mathcal{C}$ est-il le graphe d'une fonction ?

d. (*) Calculer $\sin(4t)$ en fonction de $\sin(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire la fonction f dont le graphe est l'ensemble $\mathcal{C}$.

2. On voudrait tracer le reste de la courbe.

a. Calculer $M(-t)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? En déduire le tracé de la courbe correspondant à $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

b. De même, calculer $M(t + \pi)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? Quelle portion de courbe peut-on maintenant tracer ?

c. Finir le tracé de la courbe.

3. *(optionnelle)* Calculer les *points doubles* de la courbe, c'est-à-dire les points M pour lesquels il existe deux temps $t_0, t_1 \in [0, 2\pi]$ tels que $M(t_0) = M(t_1) = M$. Vérifier que le résultat est compatible avec le dessin.

Exercice 3.4.— (M) Quand on trace avec une calculatrice la courbe paramétrée d'équation $\gamma(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, on trouve le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

1. Expliquer pourquoi l'image de cette courbe paramétrée γ est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$.

2. Donner le tableau de variation conjoint de γ. Quelle partie du cercle $\mathcal{C}$ est décrite ?

Exercice 3.5.— Tracer les courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$ données par les formules suivantes. On cherchera notamment la direction de la tangente aux points où la vitesse s'annule (*points de rebroussements)*, et le comportement lorsque $x(t)$ ou $y(t)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$ (branches asymptotiques).

1. $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$.

2. $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \dfrac{1+2t}{t^2}$.

3. $x(t) = \cos^2(t)$, $y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$. On pourra utiliser le graphe de la fonction Cosinus pour trouver le signe de $\cos^2(x) - \frac{3}{4}$.

4. (M) $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \frac{t}{2} + \sin(t)$. Tracer d'abord la portion de courbe pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer ensuite $M(t+2\pi)$ en fonction de $M(t)$, et interpréter géométriquement la formule obtenue. En déduire le reste du tracé.

5. (M) $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$. S'inspirer de l'exercice 2.2.

6. (M) $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$. Comment se comporte la courbe quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$? Avec quelle direction s'approche-t-elle du point limite ?

7. (M) $x(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$, $y(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}$.

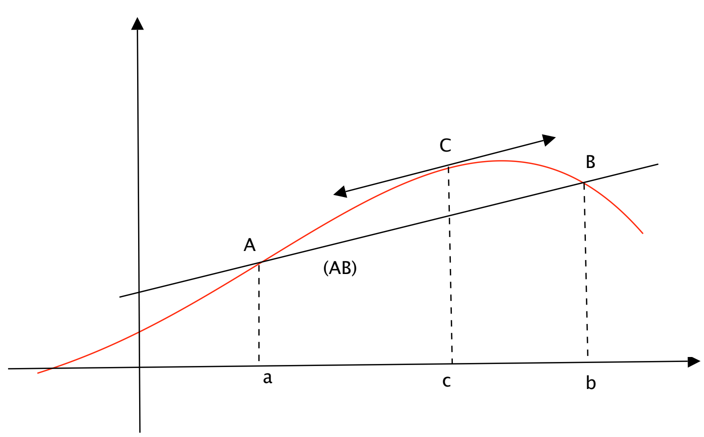
Chapitre 3

Tangentes et fonctions dérivées (II)

– Accroissements finis, applications,
– vitesse d'une courbe paramétrée.

3.1 Les accroissements finis

3.1.1 Le théorème



Sur la figure ci-dessus, le lecteur pourra se convaincre qu'il existe un point sur la courbe $\mathcal{C}_f$ entre A et B où la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite (AB). C'est un phénomène tout à fait général, qui porte le nom de Théorème des accroissements finis (T.A.F) :

Proposition 3.1.1 (Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (au moins !). Il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

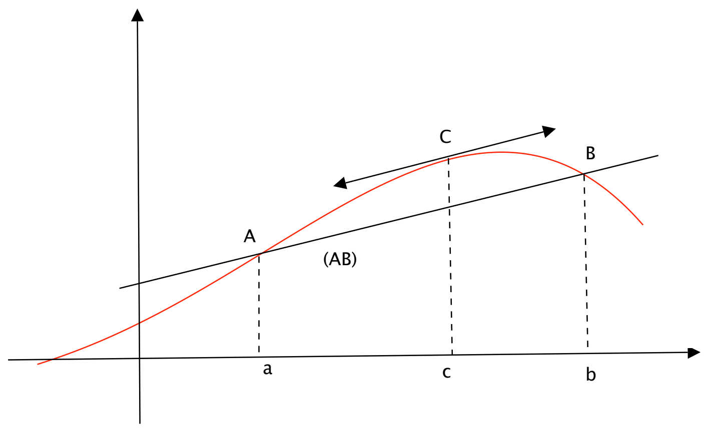
Voici un exemple d'utilisation de ce théorème dans un situation quotidienne : Si j'ai parcouru en voiture 50 km en une demi-heure, mon compteur a forcément indiqué à un instant donné que ma vitesse était de 100 km/h.

Remarque 3.1.2 Dans le cas où $f(a) = f(b)$, le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ ou la dérivée s'annule. Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Rolle.

Le Théorème des Acroissements Finis

Version géométrique

Soit f une fonction dont le graphe relie le point $A = (a, f(a))$ au point $B = (b, f(b))$. Alors il existe (au moins) une droite D, tangente au graphe de f, et parallèle à la droite (AB).



Version analytique

Théoreme 3.1.3 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.* ***Il existe un nombre*** *c* ***dans*** *$]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Un cas particulier :

Théoreme 3.1.4 (de Rolle) *Sous les mêmes hypothèses, si $f(a) = f(b)$, on obtient un point du graphe où la tangente est horizontale, c-à-d un nombre c tel que $f'(c) = 0$.*

3.1.2 Applications

Ce théorème est souvent très utile pour comprendre le comportement des fonctions. Voici un exemple.

Question : Majorer la quantité $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ (remarque : c'est un nombre positif).

Pour répondre, on applique le TAF à la fonction $f = \sqrt{}$ entre x et $x+1$. On a $f' = \frac{1}{2\sqrt{}}$, on obtient donc : il existe un nombre $c \in]x, x+1[$ tel que $\frac{1}{2\sqrt{c}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$. Il ne reste plus qu'à majorer la nombre $\frac{1}{2\sqrt{c}}$: puisque $c \in]x, x+1[$, en particulier $c \geq x$, et donc $\frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Finalement, pour tout $x \geq 0$, on a

$$0 \leq \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vous voyez que dans ce calcul, le nombre c n'a été qu'un intermédiaire : il n'apparaît ni dans la question, ni dans la réponse ; on l'obtient par le TAF et **on s'en débarrasse** en utilisant qu'il est compris entre x et $x+1$.

Par exemple si $x = 16$, on a obtenu

$$0 \leq \sqrt{17}-4 \leq \frac{1}{8},$$

d'où $\sqrt{17} \in]4, 4,125[$.

Ceci permet aussi de calculer la limite de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$...

Exercice.—

1. Soit $x > 0$. Appliquer l'égalité des accroissements finis entre x et $x+1$ pour la fonction ln.

2. En déduire une majoration de $\ln(x+1)-\ln(x)$.

3. En déduire la limite de cette quantité quand x tend vers $+\infty$.

4. Comment s'interprète ce résultat sur le graphe de a fonction ln ?

3.1.3 Dérivée et sens de variation

Voici une des multiples applications du théorème des accroissements finis, sous la forme d'un principe bien connu du lecteur reliant le signe de la dérivée d'une fonction à son sens de variation.

Proposition 3.1.5 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $I =]a, b[$. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors f est croissante sur I. De plus f' est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I.

Remarque 3.1.6 – *Rappel des defs.*

– *De même si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors f est décroissante sur I, et si la dérivée de f est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I.*

– *Si une fonction f n'est pas croissante sur un intervalle I, alors elle est décroissante sur I ? ? ? ? ?*

– *Attention la réciproque de la deuxième partie de la proposition est fausse. Pensez par exemple à la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien que sa dérivée s'annule en 0.*

3.2 Dérivation composée

Intermède : fonctions composées

– def de $g \circ f$; dessin f puis g.

– continuité ?

3.2.1 Formule de dérivation composée

Exemple.

Exercice.— Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois pour quels nombres x le calcul est valide.

$$f_3(x) = x^3 e^{\sin x}, \quad f_4(x) = \ln(\ln(x)).$$

Réponses : les dérivées sont

$$f_3'(x) = (3x^2 + \cos x)e^{\sin x}, \; f_4'(x) = \frac{1}{x \ln x}\cdot$$

Dans la section suivante, on va appliquer cette formule aux courbes paramétrées.

3.3 Application aux courbes paramétrées

3.3.1 Vitesse et tangente (cette section, ainsi que l'exemple d'étude, est à raconter au TD2a)

Définition 3.3.1 Soit $M : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, où $M(t)$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t))$. On appelle vecteur vitesse (instantanée) à l'instant $t \in I$ le vecteur $\vec{v}(t)$ de coordonnées $(x'(t), y'(t))$. On le note parfois

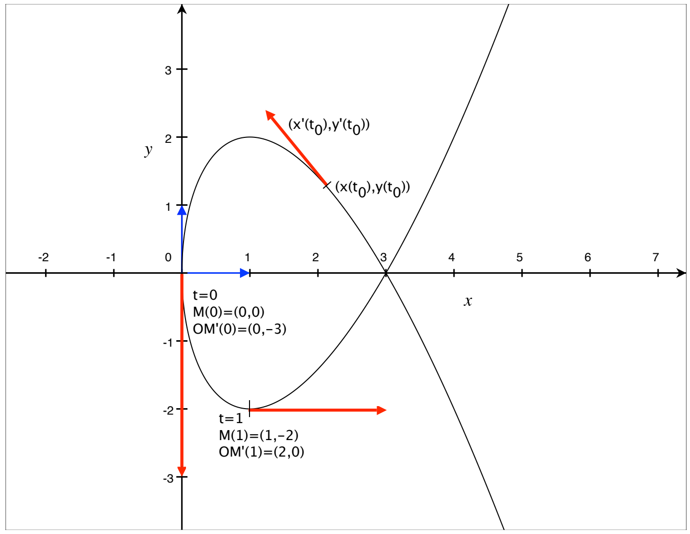
$$\vec{v}(t) = M'(t) = \overrightarrow{OM}'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM}(t).$$

La norme du vecteur $\vec{v}(t)$ est appelée vitesse instantanée au point t : c'est le réel $v(t)$ donné par

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Exemple 3.3.2 *On reprend la courbe paramétrée de l'Exemple **??** : $M(t) = (t^2, t^3 - 3t)$. le vecteur vitesse à l'instant t est $\vec{v}(t) = (2t, 3t^2 - 3)$. La vitesse à l'instant t est donc*

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 3t)^2}.$$



Remarque sur les unités En maths, on ne met pas d'unité dans les relations ; du coup, elles marchent quelles que soient le sunités choisies de façon compatible. Par exemple, si x et y sont en mètres et t en secondes, la vitesse $v(t)$ sera donnée en m/s.

Tangente

Proposition 3.3.3 Soit $M : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On suppose que $M(t) = (x(t), y(t))$ avec des fonctions x et y dérivables. Si la vitesse au temps t_0 n'est pas nulle, alors la courbe admet une tangente T : T est la droite qui passe par le point $M(t_0)$ et qui a pour vecteur directeur le vecteur vitesse $\vec{v}(t_0)$.

Remarquons que la courbe paramétrée $s \mapsto M(t_0) + s.\overrightarrow{OM}'(t_0)$ est le paramétrage de la droite T à vitesse constante $\vec{v}(t_0)$. On dit qu'on a une *représentation paramétrique* de la droite T. On peut aussi en donner une équation cartésienne, puisqu'il s'agit de la droite de pente $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ passant par le point de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$.

Test : écrire cette équation.

Exemple : tangente au temps $t = 2$ pour la courbe de l'exemple précédent : il s'agit de la droite passant par le point $M(1) = (4, 2)$, et de vecteur directeur $\vec{v}(1) = (4, 9)$. On obtient la paramétrisation $s \mapsto (4 + 4s, 2 + 9s)$. Puisque la pente est $\frac{9}{4}$, une équation cartésienne est $y - 2 = \frac{9}{4}(x - 4)$. Vérification...

3.3.2 Exemple d'étude d'une courbe

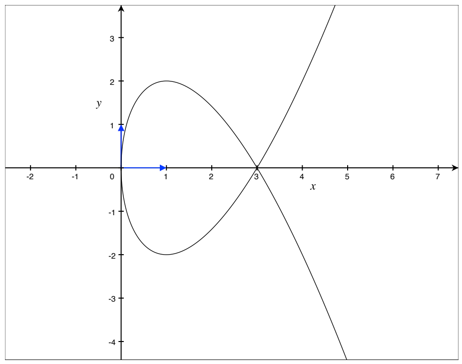
On étudie la courbe $M : t \mapsto ????$.

Plan d'étude
- Dresser le tableau de variation conjoint (y compris les limites aux bornes des intervalles de définitions).
- (*cf.* plus tard) Déterminer la tangente aux points de rebroussements éventuels.
- (*cf.* plus tard) Déterminer les directions asymptotiques éventuelles (lorsque $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $\pm\infty$).
- Dessiner la courbe.

3.3.3 Plusieurs paramétrisations pour une courbe géométrique

La distinction entre courbe paramétrée et courbe est réellement utile, puisqu'une courbe donnée peut correspondre à de nombreuses courbes paramétrées : on peut facilement imaginer des mobiles qui décrivent la même trajectoire mais en se déplaçant avec des vitesses différentes.

Exemple 3.3.4 *(GRAPHER) La fonction $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui à s associe le point $N(s)$ de coordonnées $(x(s), y(s))$ données par $x(s) = s^6 + 2s^3 + 1$ et $y(s) = s^9 + 3s^6 - 2$ est une courbe paramétrée, et sa courbe associée est la même que celle de l'Exemple* **??** *ci-dessus.*



On comprend que si l'on n'est intéressé que par la courbe géométrique, on choisira une paramétrisation la plus simple possible. Voici comment passer d'une paramétrisation à une autre :

Proposition 3.3.5 Soit $M : I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée, et $t : J \to I$ une bijection. Si N est la courbe paramétrée $N : J \to \mathbb{R}^2$ définie par changement de paramètre $N(s) = M(t(s))$, les courbes géométriques correspondant à M et N sont identiques.

Exemple 3.3.6 *On obtient la courbe paramétrée de l'Exemple* **??** *en effectuant le changement de paramètre $t(s) = (s^3 + 1)$ dans celle de l'Exemple* **??**.

Changement de paramètre et vitesse Pour une courbe géométrique donnée, la notion de vecteur vitesse instantané n'a pas de sens : encore une fois, il faut penser à deux mobiles qui se déplacent sur la même trajectoire avec des vitesses différentes. Pourtant pour une courbe géométrique "régulière" on peut certainement parler de droite tangente en chacun de ses points : autrement dit la direction du vecteur vitesse, elle, ne doit pas dépendre de la paramétrisation choisie.

C'est en effet le cas : si $N(s) = (a(s), b(s))$ et $N(s) = M(t(s))$ avec $M(t) = (x(t), y(t))$, alors $a'(s) = x'(t(s)).t'(s)$ et $b'(s) = y'(t(s)).t'(s)$, donc

$$\overrightarrow{ON}'(s) = t'(s).\overrightarrow{OM}'(t(s)),$$

ce qui montre que les vecteurs vitesses instantanées calculés dans chacune des paramétrisations sont colinéaires.

On vient de voir que la norme du vecteur vitesse instantanée dépend de la paramétrisation choisie. Une façon de simplifier l'étude d'une courbe géométrique est de trouver, si c'est possible, une paramétrisation pour laquelle la norme de ce vecteur est constante, et tant qu'à faire, égale à 1.

Exemple d'une vitesse double Soit $t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée. La courbe définie par $N(s) = M(2s)$ parcourt la même courbe géométrique, avec une vitesse deux fois plus grande.

Dessin : $N(0) = M(0)$, $N(1/2) = M(1)$, ...

Ceci est cohérent avec le calcul de la vitesse : $N'(s) = 2M'(2s)$.

3.3.4 Points de rebroussement (à raconter au TD3a ?)

Question : trouver la tangente à la courbe $M(t) = (t^2, t^3)$ au temps $t_0 = 0$.

On calcule $\vec{v}(t) = (2t, 3t^2)$, donc $\vec{v}(0) = 0$, et la méthode habituelle ne s'applique pas.

Revenons à la définition de la tangente comme limite des sécantes. Notons D_t la sécante aux points $M(0)$ et $M(t)$ pour $t \neq 0$. DESSIN. On peut calculer la pente de cette sécante :

$$p(t) = \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{t^3 - 0}{t^2 - 0} = t.$$

Lorsque t tend vers 0, la pente $p(t)$ tend vers 0 ; par conséquent la sécante D_t "tend vers" la droite de pente nulle (c-à-d horizontale) passant par $M(0)$. On vérifie avec GRAPHER.

Soit $t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée, définie au temps t_0.

Proposition 3.3.7 *Soit $p(t)$ la pente de la droite sécante $(M(t_0)M(t))$.*

1. *Si $p(t)$ admet une limite finie p lorsque t tend vers t_0, alors la courbe M admet comme tangente la droite de pente p et passant par le point $M(t_0)$.*
2. *Si $\mid p(t) \mid$ tend vers $+\infty$, alors la courbe M admet comme tangente la droite verticale passant par le point $M(t_0)$.*

Remarquons que ceci n'est utile que lorsque la vitesse s'annule ou n'existe pas (lorsque la fonction $t \mapsto M(t)$ n'est pas dérivable). Il y a deux difficultés :

1. lorsque le point $M(t_0) \neq 0$ (risque de calculer $\frac{y(t)}{x(t)}$ au lieu de la bonne pente) ;
2. lorsque $t_0 \neq 0$: risque de prendre la limite à $t = 0$ et non pas à $t = t_0$. On fait alors un changement de variable pour se ramener à un paramètre 0, en posant $t = t_0 + h$: alors "t tend vers t_0" correspond à "h tend vers 0".

Autre exemple Soit $x(t) = 3t - 6t^2 + 4t^3, y(t) = 3t(1-t)$ (courbe de Bézier associé aux quatre sommets d'un carré). La vitesse s'annule en $t = 1/2$ (calcul). Pour se ramener à un paramètre 0, on pose $t = 1/2 + h$: "t tend vers 1/2" correspond à "h tend vers 0". On calcule
- $y(1/2 + h) = \frac{3}{4} - 3h^2$,
- $x(1/2 + h) = \frac{1}{2} + 0.h + 0.h^2 + 4h^3$.

On a $\mid p(1/2+h) \mid = \frac{3}{4|h|}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. On a donc une tangente verticale. Vérification avec GRAPHER...

3.3.5 Direction asymptotique

Comment faire pour déterminer l'allure de la courbe lorsque $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $\pm\infty$? On cherche s'il existe une *direction asymptique.*

Définition 3.3.8 *Supposons que $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque t tend vers une certaine valeur t_0. Si la pente $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers une valeur $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on dit que la courbe admet une direction asymptotique de pente p au paramètre t_0.*

Rappelons que le quotient $\frac{y(t)}{x(t)}$ donne la pente de la droite passant par l'origine et le point $M(t)$. La direction asymptotique nous dit donc sous quel angle limite un observateur placé à l'origine voit le point $M(t)$ lorsque t tend vers t_0.

Exemple : $t \mapsto (t^2, t^3)$ pour $t_0 = +\infty$.

Feuille d'Exercices 4

Les courbes de Bézier

Exercice 4.1.— Définition des courbes de Bézier

On se donne quatre points A_0, A_1, A_2, A_3 dans le plan, et on cherche à définir une courbe paramétrée
– qui part de A_0 et arrive en A_3 ;
– qui est tangente en A_0 à la droite (A_0A_1),
– qui est tangente en A_3 à la droite (A_2A_3).
Pour cela, on définit les quatre polynômes (dits *polynômes de Bernstein* de degré 3)

$$p_0(t) = (1-t)^3, \quad p_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad p_2(t) = 3t^2(1-t), \quad p_3(t) = t^3.$$

Soit α la courbe paramétrée définie, pour $t \in [0,1]$, par les formules suivantes, où $A_0 = (x_0, y_0)$, *etc.*.

$$\begin{cases} x(t) &= x_0p_0(t) + x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) \\ y(t) &= y_0p_0(t) + y_1p_1(t) + y_2p_2(t) + y_3p_3(t) \end{cases}$$

1. Cas particulier On considère ici les points $A_0 = (0,0), A_1 = (0,1), A_2 = (1,1), A_3 = (1,0)$. Dans ce cas, expliciter les formules définissant la courbe α. Vérifier qu'il s'agit d'une courbe étudiée en cours. Rappeler le dessin de la courbe.

2. Cas général

On considère ici quatre points quelconques A_0, A_1, A_2, A_3.

a. Montrer que la courbe α définie plus haut répond au problème.

On l'appellera *courbe de Bézier associée aux quatre points* $A_0, \ldots, A_3$. On pourra faire le calcul à l'aide du tableau suivant.

$p_0(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$x(t)$	$y(t)$
$p_0(0) =$	$p_1(0) =$	$p_2(0) =$	$p_3(0) =$	$x(0) =$	$y(0) =$
$p_0(1) =$	$p_1(1) =$	$p_2(1) =$	$p_3(1) =$	$x(1) =$	$y(1) =$
$p_0'(0) =$	$p_1'(0) =$	$p_2'(0) =$	$p_3'(0) =$	$x'(0) =$	$y'(0) =$
$p_0'(1) =$	$p_1'(1) =$	$p_2'(1) =$	$p_3'(1) =$	$x'(1) =$	$y'(1) =$

b. Que vaut le vecteur $\alpha'(0)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{A_0A_1}$? et $\alpha'(1)$ en fonction de $\overrightarrow{A_2A_3}$?

3. Calculer la vitesse de α au point $t = 1/2$, et exprimer cette vitesse à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_3}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$.

4. *(optionnelle)* Donner *sans calculs* la courbe de Bézier associée aux quatre points $A_0' = (0,0), A_1' = (1,0), A_2' = (1,1), A_3' = (0,1)$.

Exercice 4.2.— Tracé récursif d'une courbe de Bézier : l'algorithme de Casteljau

Description géométrique de l'algorithme À partir des quatre points A_0, A_1, A_2, A_3, on construit les points B_0, B_1, B_2, B_3 et C_0, C_1, C_2, C_3 en prenant des milieux successifs comme sur le dessin de la figure **??** : $B_0 = A_0$; B_1 est le milieu des points A_0 et A_1 ; B_2 est le milieu de B_1 et du milieu de A_1 et A_2 ; *etc.*.

La remarque de Paul de Casteljau[1] est la suivante : *la courbe de Bézier α associée aux quatres points $A_0, \ldots, A_3$ s'obtient en concaténant[2] la courbe de Bézier associée à $B_0, \ldots, B_3$ et la courbe de Bézier associée à $C_0, \ldots, C_3$*. Nous allons essayer de vérifier cette remarque.

1. a. Trouver les coordonnées du point B_3 en fonction de celles des quatres points initiaux $A_0, \ldots, A_3$.

b. Montrer que ce point appartient bien à l'image de la courbe α.

2. Soit $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée obtenue en partant de $\alpha(0)$ à $t = 0$ et en parcourant l'image de la courbe α deux fois moins rapidement.

a. Donner une formule pour la courbe β en fonction de la courbe α. *Aide : que vaut $\beta(1)$? $\beta(1/2)$? $\beta(t)$?*

b. En déduire $\beta'(0)$ et $\beta'(1)$.

c. Montrer que la courbe β vérifie bien les propriétés de la courbe de Bézier associée à $B_0, \ldots, B_3$ (voir l'exercice précédent) :

$$\beta(0) = B_0, \quad \beta(1) = B_3 \quad \beta'(0) = 3.\overrightarrow{B_0B_1} \quad \beta'(1) = 3.\overrightarrow{B_2B_3}.$$

3. *(optionnelle)* De même, donner une formule pour la courbe paramétrée $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui part de $\alpha(1/2)$ au temps $t = 0$ et arrive en $\alpha(1)$ à $t = 1$ en parcourant α deux fois moins rapidement. *On montrerait comme avant que γ vérifie les propriétés de la courbe de Bézier associée à $C_0, \ldots, C_3$. On admet que β et γ sont bien des courbes de Bézier.*[3]

4. On considère à nouveau la courbe de Bézier associée aux quatre points $A'_0 = (0,0), A'_1 = (1,0), A'_2 = (1,1), A'_3 = (0,1)$, on la note α. En utilisant la remarque de Casteljau (et non pas la formule définissant α), déterminer les coordonnés du point $\alpha(1/2)$. De même, déterminer les points $\alpha(1/4)$ et $\alpha(3/4)$.

FIG. 3.1 – Construction de Casteljau

---

[1] Mathématicien, embauché à la fin des années 1950 par Citroën pour trouver une méthode permettant de définir numériquement les courbes dessinées par le bureau d'étude, afin d'assurer une transmission précise à l'atelier de fabrication. Il est le co-inventeur des courbes de Bézier et de leur application à l'automobile.

[2] Concaténer, c'est mettre bout-à-bout.

[3] Pour montrer ceci, on utiliserait le fait que si l'on se donne quatre nombres x_0, x'_0, x_1, x'_1, il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 tel que $p(0) = x_0, p'(0) = x'_0, p(1) = x_1, p'(1) = x'_1$.

Exercice 4.3.— (M) Quand on trace avec une calculatrice la courbe paramétrée d'équation $\gamma(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, on trouve le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

1. Expliquer pourquoi l'image de cette courbe paramétrée γ est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$.

2. Donner le tableau de variation conjoint de γ. Quelle partie du cercle $\mathcal{C}$ est décrite ?

Exercice 4.4.— Tracer les courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$ données par les formules suivantes. On cherchera notamment la direction de la tangente aux points où la vitesse s'annule, et le comportement lorsque $x(t)$ ou $y(t)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$.

2. $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \dfrac{1+2t}{t^2}$.

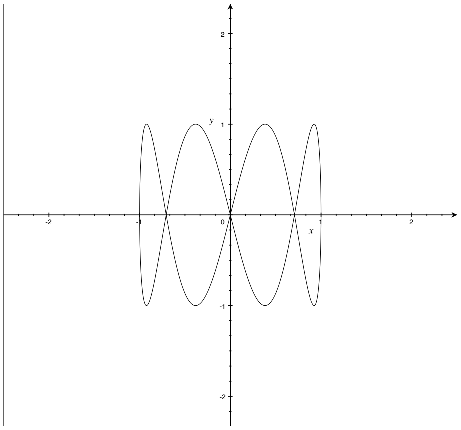
3. $x(t) = \cos^2(t)$, $y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$. On pourra utiliser le graphe de la fonction Cosinus pour trouver le signe de $\cos^2(x) - \frac{3}{4}$.

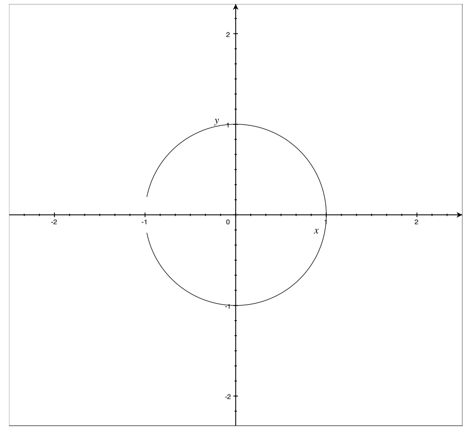
4. (M) $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \frac{t}{2} + \sin(t)$. Tracer d'abord la portion de courbe pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer ensuite $M(t+2\pi)$ en fonction de $M(t)$, et interpréter géométriquement la formule obtenue. En déduire le reste du tracé.

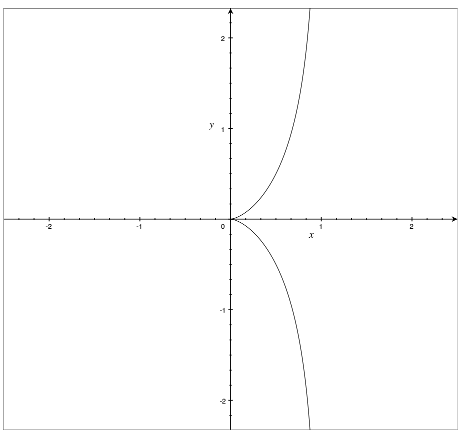
5. (M) $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$. S'inspirer de l'exercice 2.2.

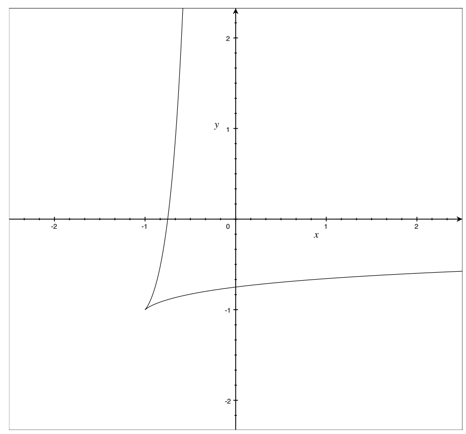
6. (M) $x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}$. Comment se comporte la courbe quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$? Avec quelle direction s'approche-t-elle du point limite ?

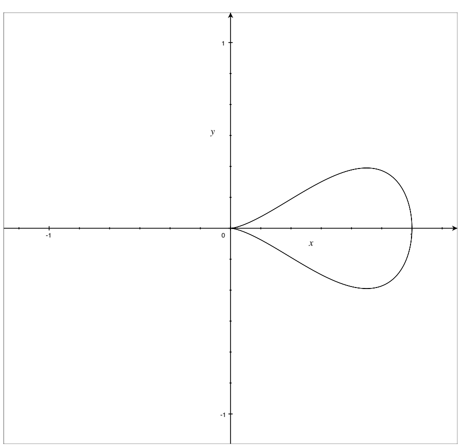
7. (M) $x(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$, $y(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}$.

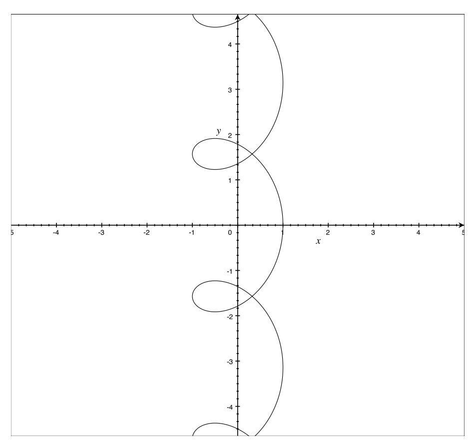

y
x
-2
-1
0
2
2
1
-1
-2

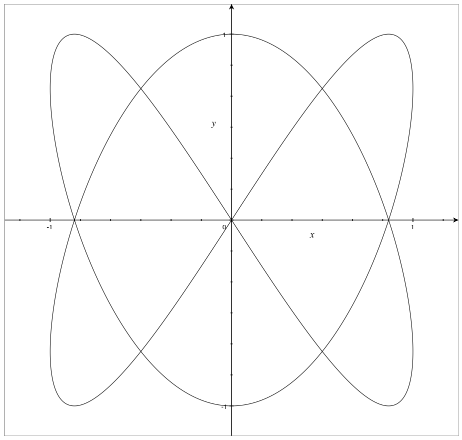

y
x
-2
-1
0
2
2
1
-1
-2

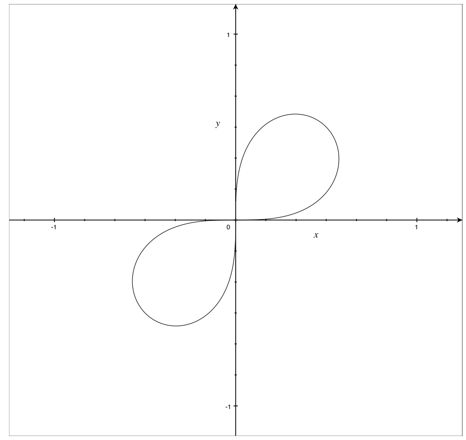

y
x
-2
-1
0
1
2
2
1
-1
-2

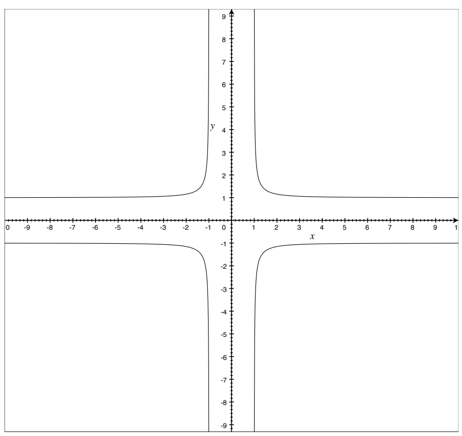

y
x
-2
-1
0
1
2
2
1
-1
-2

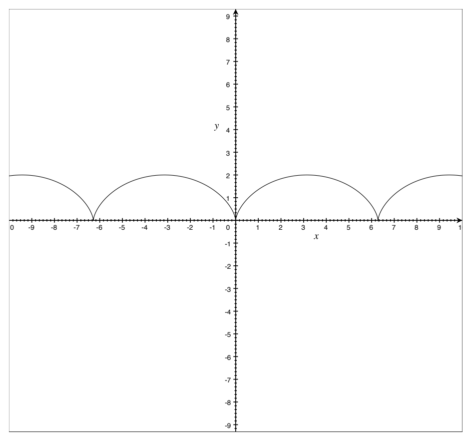

y
x
-1
0
1
-1

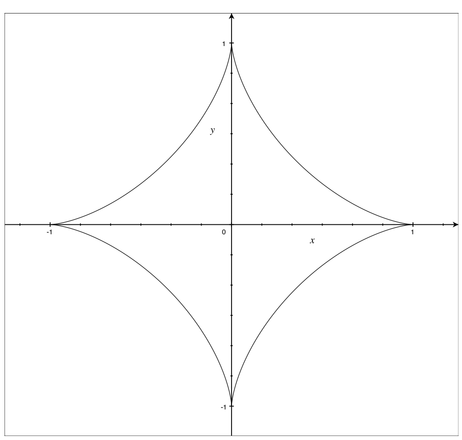

y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

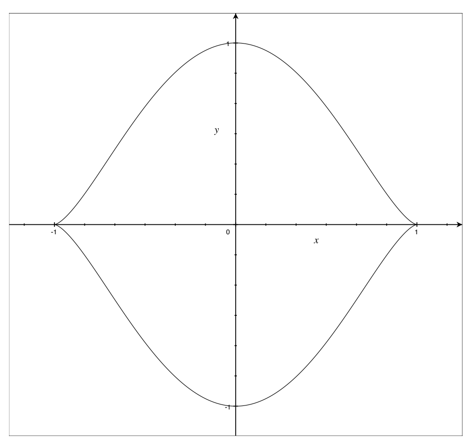

y
x
-1
0
1
-1


y
x
1
-1
0
1
-1


y
x


y
x


y
x
1
-1
0
1
-1


y
x
1
-1
0
1
-1

Chapitre 4

Développements limités (I)

– Formule de Taylor
– Calculs

4.1 Intro

- **But** : analyser le comportement local d'une quantité $f(x)$, au voisinage de $x = 0$. Exemples :

1. Comment trouver la **position** du graphe d'une fonction par rapport à sa tangente en un point donné ? (par exemple pour la fonction $\ln(1 + x + x^2)$ au point d'abscisse $x = 0$: cf exo de TD).
2. Comment résoudre la plupart des problèmes de **limites** avec des formes indéterminées ? (par exemple, trouver la limite de $\frac{\sin(x)-x}{1-\cos(x)}$ quand x tend vers 0 : ici les deux fonctions tendent vers 0 ; il faut savoir "à quelle vitesse elles tendent vers 0").

- **Idée** : approcher les fonctions par des polynômes.

Exemple : la fonction exponentielle en 0. On a déjà défini une tangente : on sait approcher f par une fonction affine (polynôme de degré 1) :

$$f(x) = 1 + x + x\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon \to 0.$$

On peut imaginer avoir une meilleure approximation avec un polynôme de degré 2. **Expérimentalement** (GRAPHER), on voit que $1 + x + cx^2$ avec $c = 0,4$ ou $c = 0,5$ semble bien marcher.

Plan du chapitre :
– Comment définir précisément ce qu'est une "bonne approximation par un polynôme" ? (ce qu'on appellera un DL)
– Étant donnée une fonction, comment trouver son DL ? (formule de Taylor)
– Comment utiliser les DLs ? (applications)
On va tout expliquer au voisinage de $x_0 = 0$, on expliquera ensuite comment faire avec un x_0 quelconque.

4.2 La formule de TY

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

1. On dit que f est de classe C^1 sur I si elle est dérivable en tout point de I, et si la fonction f' est continue sur I ;

2. On dit que f est de classe C^2 sur I si de plus la fonction f' est dérivable sur I, et la fonction f'' est continue sur I ;
3. *etc.*.

4.2.1 DL : définition

Soit f une fonction définie, au moins, sur un voisinage $]-a, a[$ de 0.

Définition 4.2.1 On dit que f admet un *développement limité (D.L.) à l'ordre* n *en* 0 lorsqu'il existe des nombres $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie sur un voisinage de 0 tels que

1. pour tout h dans un voisinage de 0 on a

$$f(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h).$$

2. $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$,

Le polynôme $P(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n$ s'appelle alors *partie principale* du DL.

Rappel important Lorsque $h \in]0, 1[$, on a la hiérarchie

$$1 > h > h^2 > h^3 > ... > 0.$$

Dans l'écriture du DL, $f(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$, les termes sont rangés du plus grand au plus petit. Le terme d'erreur s'écrit "h^n multiplié par quelquechose qui tend vers 0", il est donc bien plus petit que les précédent quand h est assez proche de 0.

Remarque 4.2.2 Si f admet un D.L. à l'ordre n en 0, celui-ci (i.e. les coefficients et la fonction ε) est unique. Par exemple, montrons que la fonction $\exp$ ne peut pas avoir comme DL en 0 à l'ordre 2 à la fois $1 + x + 0,4x^2$ et$1 + x + 0,5x^2$...

4.2.2 La formule de TY

On a déjà rencontré les DL d'ordre 1 : dans le chapitre précédent, on a vu que l'existence d'un D.L. à l'ordre 1 est équivalent au fait que la fonction est dérivable au point considéré, le DL étant alors donné par la fonction affine dont le graphe est la tangente en 0, et s'exprimant à l'aide de $f(0)$ et $f'(0)$: $f(h) = f(0) + hf'(0) + h\varepsilon(h)$. La formule de Taylor généralise ceci à tout ordre.

Proposition 4.2.3 *(admise)* Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de 0, alors f admet un D.L. à l'ordre n en 0 :

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + h^n \varepsilon(h)$$

avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.
Sa partie principale s'appelle le *polynôme de Taylor* de f en 0 à l'ordre n.

(def de $n!$, de $f^{(n)}$).

Remarque 4.2.4

– *Exemple de* exp.

– *le DL est donné par le polynôme P dont les dérivées jusqu'à l'ordre n en 0 coincident avec celles de f (d'où le terme en $n!$).*

4.3 Calcul de D.L.

4.3.1 D.L. de référence en 0

Voici une liste de D.L. en $x_0 = 0$, que l'on peut établir à l'aide du théorème de Taylor-Young, et qu'il est indispensable de connaître sur le bout des doigts...

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + a(a-1)\dots(a-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

Test : écrire le DL à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Test des formules GRAPHER ?

4.3.2 Opérations et D.L.

Proposition 4.3.1 *(admise)* Si f_1 et f_2 sont deux fonctions qui admettent un D.L. à l'ordre n en $x_0 = 0$, de partie principale $P_1(x)$ et $P_2(x)$ respectivement, alors

1. La fonction $f_1 + f_2$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, dont la partie principale s'obtient en ajoutant les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$
2. La fonction $f_1 f_2$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, dont la partie principale s'obtient en calculant le polynôme produit $Q(x) = P_1(x)P_2(x)$ et en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $Q(x)$.

Attention ! Si f_1 admet un D.L. à l'ordre 5, et f_2 un D.L. à l'ordre 3, les règles ci-dessus ne donnent rien de mieux qu'un D.L. de la somme $f_1 + f_2$ et du produit $f_1 f_2$ à l'ordre 3. Si vous écrivez des termes d'ordre 4 ou 5, l'égalité que vous donnez a de grandes chances d'être fausse.

Exemple 4.3.2

1. *Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 2 des fonctions $e^x + \ln(1+x)$ et $e^x\ln(1+x)$...*
2. *Justifier les règles sur $e^x + \sqrt{1+x}$ et produit, à l'ordre 1...*

3. *Vérifier avec GRAPHER...*

Voici maintenant une règle qui donne le D.L. de la composée de deux fonctions. Comme d'habitude, les hypothèses et la formule sont un peu plus difficiles pour cette opération là.

Proposition 4.3.3 *(admise)* Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction qui admet un D. L. en $x_0 = 0$ à l'ordre n, de partie principale $P(x)$, et $u \mapsto g(u)$ une fonction qui admet un D.L. en $f(x_0) = 0$ à l'ordre n, de partie principale $Q(u)$. Alors $x \mapsto g \circ f(x)$ admet un D.L. à l'ordre n en x_0, dont la partie principale s'obtient en calculant $R(x) = Q(P(x))$ et en ne conservant que les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $R(x)$.

Exemple 4.3.4 *Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 3 de la fonction* $e^{\sin x}$.

Il est utile de noter que si f ne s'annule pas en $x_0 = 0$, on peut calculer le D.L. de $1/f$ en x_0 à l'aide de cette règle de compostion et du D.L. de la fonction $g : u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ vu plus haut.

Exemple 4.3.5 *On veut calculer le D.L. à l'ordre 3 en 0 de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$*... (rép :* $1 + \frac{x^2}{2}$*).*

Bilan : deux démarches possibles pour calculer le DL d'une fonction f donnée par une formule : calculer des dérivées et appliquer TY, ou bien utiliser les opérations. Le deuxième méthode est beaucoup plus efficace...

4.3.3 Comment calculer un D.L. en $x_0 \neq 0$?

On utilise la remarque suivante : étudier la fonction f en x_0, cela revient à étudier la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ en 0. On est donc conduit à poser $x = x_0 + h$ (c'est un changement de variable !), et à chercher un D.L. en 0 de la fonction $h \mapsto f(h + x_0)$.

Exemple 4.3.6 *On veut calculer le D.L. à l'ordre 3 en* $x_0 = \pi/2$ *de la fonction* sin. *On pose* $x = \pi/2 + h$*, et on écrit*

$$\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + h) = \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^3\epsilon(h) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + (x - \frac{\pi}{2})^3\epsilon(x - \frac{\pi}{2}),$$

o˘ ϵ *est une fonction qui tend vers 0 en 0.*

Attention ! Il est inutile, et même désastreux, de développer les puissances de $(x - x_0)$ dans le D.L. obtenu, puisque l'on veut connaître le comportement de $f(x)$ pour x proche de x_0.

On peut aussi, par la même démarche, écrire une formule de Taylor en x_0 :

Proposition 4.3.7 *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de x_0, alors f admet un D.L. à l'ordre n en x_0 :*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0).$$

Chapitre 5

Développements limités (II)

– Applications

5.1 Applications

5.1.1 Limites

Pour commencer, résolvons le problème posé en introduction : trouvons la limite en 0 de $\frac{\sin(x)-x}{1-\cos(x)}$...

5.1.2 Signe d'une fonction au voisinage d'un point

Toutes les autres applications vont découler du fait suivant : on peut lire le signe d'une fonction sur un DL (au voisinage du point où on a le DL). On pourra ainsi comparer localement deux fonctions f et g, en étudiant le signe de $f-g$. En particulier, on pourra comparer une fonction f à son approximation affine, et obtenir ainsi la position du graphe de f par rapport à sa tangente en un point donné.

Proposition 5.1.1 *Supposons qu'on ait un DL d'une fonction f au voisinage de x_0, à un ordre n, avec exactement un terme non nul :*

$$f(x_0+h) = C.h^n + h^n\varepsilon(h),$$

avec $c \neq 0$**.** *Alors il existe un voisinage $I =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ de x_0 sur lequel $f(x_0+h)$ a le signe de $C.h^n$.*

Exemples (tests de la règle) Signe de $\cos(h)$, de $\cos(h)-1$. Signe de $\ln(x)$ pour x voisin de 1, de $\ln(x)-(x-1)$.

Justification de la règle sur un exemple On fait la justification pour la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$. Ici on choisit $n=1$, puisqu'on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+h) &= 0 + h + h\varepsilon(h)\\
&= h(1+\varepsilon(h))\\
&= h \times \text{ quelquechose qui tend vers 1}
\end{aligned}$$

Pour h assez petit, le “quelquechose qui tend vers 1” est dans l'intervalle $]0,9;1,1[$ (on a utilisé la définition de la limite avec $\varepsilon = 0,1$!). Le nombre $f(x)$ vaut alors h multiplié par une quantité positive, il a le signe de h (et dans ce cas $f(x)$ change de signe au voisinage de 1).

5.1.3 Position par rapport à la tangente

Les DLs permettent de déterminer le signe d'une fonction. En étudiant $f - g$, on peut donc aussi comparer les fonctions f et g (toujours localement, au voisinage du point où on a fait le DL). En particulier, on va pouvoir dire si le graphe d'une fonction est au-dessus ou au-dessous de sa tangente.

On reprend l'exemple de la fonction exponentielle. On veut vérifier sur les formules ce qu'on voit graphiquement, à savoir que le graphe de f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. On a

$$\begin{array}{rcl}\exp(x) & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ & = & T(x) + D(x)\end{array}$$

où $T(x)$ est l'approximation affine de l'exponentielle en 0, et $D(x) = \exp(x) - T(x)$ est la différence entre la fonction et son approximation. On applique la règle du paragraphe précédent : pour tout x assez petit, de $D(x) = x^2\frac{1}{2} + x^2\varepsilon(x))$ a le même signe que x^2 : il est positif, donc $\exp(x) \geq T(x)$, et le graphe de exp est au-dessus de sa tangente.

Autre exemple, à l'ordre 3 : vérifier que le DL de tan en 0 est cohérent avec son graphe (cf TD).

Finalement : *quand on a un DL à l'ordre 2,*

$$f(h) = a + bh + ch^2 + h^2\varepsilon(h),$$

le début du DL donne l'équation de la tangente, le terme ch^2 donne la position (si $c \neq 0$) ; si $c = 0$, il faut chercher un DL à un ordre plus grand.

5.2 Asymptotes

DESSIN.

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0, +\infty[$, voisinage de $+\infty$. Soit Δ une droite d'équation $y = ax + b$. On dit que* le graphe de f a pour asymptote Δ en $+\infty$ *si la différence $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*

Souvent, on trouve une asymptote en utilisant un “développement asymptotique”, c'est-à-dire en mettant f sous la forme

$$f(x) = ax + b + \varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 *quand x tend vers* $+\infty$. Pour trouver la position du graphe par rapport à son asymptote, on cherche un développement asymptotique plus précis, qui a souvent la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2(x).$$

Attention, il n'y a pas de formule de Taylor en $+\infty$! On pourra se ramener en 0 en posant par exemple $h = \frac{1}{x}$.

5.2.1 Exemple complet

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x^3}{1+x+2x^2}.$$
On va montrer qu'elle admet une droite asymptote en $+\infty$, la trouver, et déterminer la position du graphe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) À l'aide des technique de DL, on va trouver comme "développement asymptotique" (voir les calculs ci-dessous) :
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$$
avec $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

On en déduit d'abord que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ ($=: A(x)$) est asymptote : en effet, on a bien $f(x) - A(x)$ qui tend vers 0.

En suite, on a
$$f(x) - A(x) = -\frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).$$
Pour x assez grand, $f(x) - A(x)$ a le même signe que $-\frac{1}{8}\frac{1}{x}$, qui est négatif : le graphe est donc sous sa tangente au voisinage de $+\infty$.

2) Preuve du D.A. :

– On factorise les puissances dominantes ;

– on pose $h = 1/x$ pour se ramener en 0 ;

– on fait apparaitre un $\frac{1}{1+u}$;

– on utilise le DL composé de $\frac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2$;

– on revient à la variable x.

3) On a utilisé la règle des signes pour un D.A., ce qui n'est pas exactement le cadre énoncé dans le cours. Pour bien justifier, on peut démontrer que le signe est bien donné par le DA : on écrit
$$f(x) - A(x) = -\frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) = \frac{1}{x}(-\frac{1}{8} + \varepsilon(x)).$$
Comme $x > 0$, ceci a bien sûr le signe de $(-\frac{1}{8} + \varepsilon(x))$. Or $\varepsilon(x)$ tend vers 0 : en particulier pour tout x assez grand, $\varepsilon(x)$ est strictement plus petit que $\frac{1}{8}$ (utilisation de la définition de la limite vue au premier cours !). AUtrement dit, il existe un x_0 tel que, pour tout $x > x_0$, on a $(-\frac{1}{8} + \varepsilon(x)) < 0$.

4) Vérification avec GRAPHER.

5.3 Preuve de la formule de Taylor

Par intégrations successives, on prouve Taylor-Lagrange : si $f^{(n)}$ est comprise entre -M et M, et continue, alors $f(x) = f(0) + ... + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C}{n!}x^n$ où $-M < C < M$.

Feuille d'Exercices 4

Formules de taylor – Développements limités

MANQUE : calculs d'approximations à l'aide de DL ($\sqrt{101}$, ...).

DLs et graphes

Exercice 4.1.— À partir des DLs suivants, déterminer la tangente en $x = 0$ et le comportement du graphe de chaque fonction au voisinage de $x = 0$.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) & f_2(x) = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ f_3(x) = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x) & f_4(x) = 1 - x - x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ f_5(x) = -1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x) & f_6(x) = 1 + x + x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{array}$$

Calcul de DLs

Exercice 4.2.— (Cours) **1.** Écrire la formule de Taylor en $x_0 = 0$ à l'ordre 3.

2. À partir de cette formule, retrouver les DLs des fonctions sin et cos en 0 à l'ordre 3.

Exercice 4.3.— Calculer les développements limités suivants, et en déduire le comportement du graphe au voisinage du point.

1. $\sin(x) + \cos(x)$ en 0 à l'ordre 3 ;
2. $\sin(x)\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3 ;
3. $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 3 ;
4. $\sin(2x)$ en 0 à l'ordre 3.
5. $\sin(x^2)$ en 0 à l'ordre 6.

Exercice 4.4.— (M) Calculer les développements limités suivants, et en déduire le comportement du graphe au voisinage du point.

1. $\sqrt{(1+2x)} + \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 ;
2. $\sqrt{(1+2x)}\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 ;
3. $\exp(\sqrt{1+x})$ à l'ordre 2 en 0 ;
4. x^x à l'ordre 2 en 1 ;
5. $\exp(-x^2/2)$ en 0 à l'ordre 2.

Réponses[1].

---

[1] POUR LES ENSEIGNANTS : 2) $x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$; 3) $e + \frac{e}{2}x + 0x^2 + x^2\varepsilon(x)$; 4) $1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$.

Limites

Exercice 4.5.— Trouver les limites suivantes.

$$(1)\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{en } +\infty\ ; \qquad (2)\ \sqrt{x^2-5x+1}-x \quad \text{en } +\infty\ ; \qquad (3)\ \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} \quad \text{en } 0\ ;$$

$$(4)\ \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}-1-x}{x} \quad \text{en } 0.$$

Réponses[2].

Comparaison de fonctions

Exercice 4.6.— Donner la position du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$. Même question pour $x_0 = 1$.

Réponses[3].

Exercice 4.7.— (M) **1.** Tracer rapidement, sur un même dessin, l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln x$.

2. Montrer que ces deux graphes ont la même tangente au point d'abscisse 1.

3. Comparer les deux fonctions au voisinage de $x = 1$: lequel des deux graphes est au-dessus de l'autre ? Redessiner leur allure locale, et comparer à votre premier dessin.

Réponses[4].

---

[2] POUR LES ENSEIGNANTS : 2) DL de $\sqrt{x^2-5x+1}$ (cf aussi exercice asymptote) : $x - \frac{5}{2} + \frac{29}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$; 3)$-\frac{2}{3}$.

[3] POUR LES ENSEIGNANTS : En 0 : $x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$; en 1 : $\ln(3) + h - \frac{1}{6}h^2 + \cdots$.

[4] POUR LES ENSEIGNANTS : DLs en 1 : $h - h^2 + \cdots$ et $h - \frac{1}{2}h^2 + \cdots$.

Asymptotes

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0,+\infty[$, voisinage de $+\infty$. Soit Δ une droite d'équation $y=ax+b$. On dit que *le graphe de f a pour asymptote Δ en $+\infty$* si la différence $f(x)-(ax+b)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Souvent, on trouve une asymptote en utilisant un “développement asymptotique”, c'est-à-dire en mettant f sous la forme

$$f(x)=ax+b+\varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 *quand x tend vers $+\infty$*. Pour trouver la position du graphe par rapport à son asymptote, on cherche un développement asymptotique plus précis, qui a souvent la forme

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\varepsilon_2(x).$$

Exercice 4.8.— Pour chacune des fonctions suivantes :

1. montrer qu'elle est définie au voisinage de $+\infty$;
2. montrer qu'elle admet une asymptote, en trouver l'équation ;
3. trouver la position du graphe par rapport à son asymptote.

Aide : pour f_2, factoriser les puissances dominantes, puis utiliser un DL en 0 de $1/(1+u)$ pour obtenir un développement asymptotique de f_2. Pour f_3, factoriser x^2.

$g_1 : x \mapsto -3x+2+\sin\frac{1}{x}$ $\qquad$ $g_2 : x\mapsto (x^2-3x+2)\sin\frac{1}{x}$

$g_3 : x\mapsto (x+2)\cos(\frac{\pi}{x})$

$f_1 : x\mapsto \frac{-2x^2+7x-1}{x}$ $\qquad$ $f_2 : x\mapsto \frac{x^2+1}{x+1}$

$f_3 : x\mapsto \sqrt{x^2-5x+1}$ $\qquad$ $f_4 : x\mapsto (x+1)\exp(\frac{1}{x-1})$

Réponses[5].

Points de rebroussement des courbes paramétrées

Exercice 4.9.— On considère la courbe paramétrée définie par $x(t)=2(t-\sin(t))$, $y(t)=2(1-\cos(t))$.

1. Trouver les temps t pour lesquels la vitesse est nulle.

2. Déterminer les tangentes à la courbe $M(0)$ et $M(\pi)$.

3. Calculer $M(t+2\pi)$ en fonction de $M(t)$. À quelle transformation géométrique correspond cette formule ? Même question pour $M(-t)$.

4. Donner le tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0,\pi]$. Tracer la courbe.

Réponses[6].

---

[5] POUR LES ENSEIGNANTS : $f_2=x-1+\frac{2}{x}+\cdots$; f_3 : cf exo limites ; $\exp(\frac{1}{x-1})=1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}+\cdots$ et $f_4=x+2+\frac{5}{2}\frac{1}{x}+\cdots$.

[6] POUR LES ENSEIGNANTS : 2. Tangentes verticales

Exercice 4.10.— (M) Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, étudier l'existence des tangentes en $M(0)$ et $M(\pi/2)$, et la position de la courbe relativement à la tangente :

$$(1)\ x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)\ ; \qquad (2)\ x(t) = \cos(2t), y(t) = \sin(3t).$$

Réponses[7].

[7]POUR LES ENSEIGNANTS : (1) en $M(0)$:Ox, en $M(\pi)$:0y, (2) en $M(0)$:0y, en $M(\frac{\pi}{2})$: $y + 1 = \frac{9(x+1)}{4}$

Exercices supplémentaires (réponses en bas)

Exercice 4.11.— (M) Calculer les développements limités suivants, et tracer l'allure du graphe au voisinage du point.

1. $f_1 : x \mapsto e^{\cos(x)}$ à l'ordre 2 en 0 ;
2. $f_2 : x \mapsto \ln(2+x)$ à l'ordre 2 en 0 ;
3. $f_3 : x \mapsto \ln(\cos(x))$ à l'ordre 2 en 0 ;
4. $f_4 : x \mapsto \sin(\ln(x))$ à l'ordre 2 en 1 ;

Exercice 4.12.— (M) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$,

1. En calculant les dérivées successives de f.

2. En effectuant le changement de variable $x = u + \pi/2$, et en utilisant des DL connus.

Exercice 4.13.— (M) **1.** Montrer que les fonctions

$$h_0 : x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}, \quad h_1 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^6+x^4+1}}{x^2+1}, \quad h_2 : x \mapsto (1+x\sqrt{x}).\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ont respectivement comme asymptotes en $+\infty$ les droites $y = x$, $y = x$ et $y = x - \frac{1}{6}$. Donner la position de chaque courbe relativement à son asymptote.

2. Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de

$$h_3 : x \mapsto x^2.\ln\left(1+\tan\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

Exercice 4.14.— (M) Soit a un nombre réel.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \sqrt{1+ax}$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+ax}}{x^2}$ ait une limite finie en $x = 0$. Précisez alors la valeur de cette limite.

Réponses

4.11 $f_1(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$; $f_2(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x)$; $f_3(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)$; $f_4(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_4(h)$.

4.12 $f(\frac{\pi}{2}+u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{u}{\pi} + (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2\pi^2})u^2\right) + u^2\varepsilon(u)$.

4.13 1. Les DLs sont $h_0(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$; $h_1(x) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)$; $h_2(x) = x - \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\varepsilon(x)$.

2. $\ln(1+\tan(2/x)) = 2/x - 2/x \leq +16/3x \geq +$reste, l'asymptote est $y = 2x - 2$, la courbe est au-dessus.

4.14 $a = 2$, la limite vaut 1.

Corrigé des DLs 3 et 4 de l'exercice 4.4

3. DL de $\exp(\sqrt{1+x})$ en $x=0$ à l'ordre 2

Il s'agit d'un DL composé, **mais il y a un piège** : en $x=0$, la fonction à l'intérieur de exp prend la valeur 1 et non pas 0. Il va donc falloir se ramener en 0 en écrivant $\sqrt{1+x} = 1 + h(x)$.

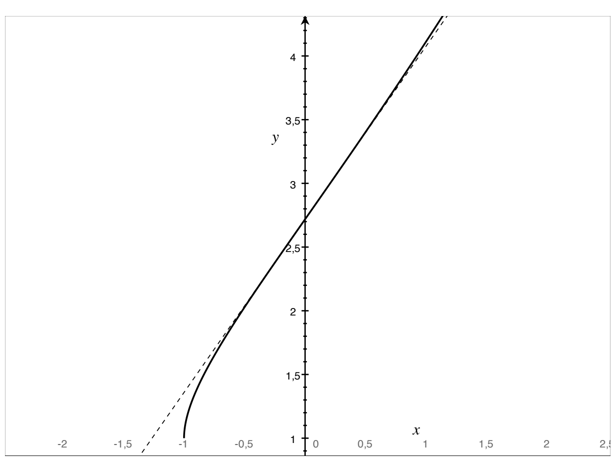
1. On écrit d'abord le DL de $\sqrt{1+x}$ en 0 :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_1(x) = 1 + h(x).$$
2. Il nous faut maintenant le DL de $\exp(1+h)$ **en** $\mathbf{h = 0}$ (et non pas celui de $\exp(h)$ en $h=0$). On obtient, avec la formule de Taylor,
$$\exp(1+h) = e + e.h + \frac{e}{2}h^2 + h^2\varepsilon_2(h).$$
3. On peut alors appliquer la règle de DL composé : on a
$$\exp(\sqrt{1+x}) = \exp(1+h(x)) = \{P(Q(x))\}_2 + x^2\varepsilon(x)$$
avec $P(h) = e + e.h + \frac{e}{2}h^2$ et $Q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, d'où (faire le tableau pour vérifier) le DL recherché :
$$\exp(\sqrt{1+x}) = e + \frac{e}{2}x + 0.x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

On peut facilement tester le DL : le premier terme doit être égal à la valeur de la fonction en 0, c'est-à-dire $\exp(\sqrt{1+0}) = e$, c'est bien le cas.

Pour le dessin du graphe, il y a **encore un piège** : le DL nous donne bien la tangente (d'équation $y = e + \frac{e}{2}x$), mais il ne nous permet pas d'avoir la position par rapport à la tangente, puisque le terme en "x^2" est nul. Pour avoir la position, il faudrait faire un DL à l'ordre 3.

Pour s'entrainer, faire le DL à l'ordre 3 ; on obtient
$$\exp(\sqrt{1+x}) = e + \frac{e}{2}x + 0.x^2 + \frac{e}{48}x^3 + x^2\varepsilon(x).$$

d'où la position : le graphe traverse sa tangente, il est situé au-dessous de la tangente pour $x<0$ et au-dessus pour $x>0$ (pour x assez proche de 0).



4. DL de x^x à l'ordre 2 en 1

Puisqu'il s'agit d'un DL en 1, on se ramène en 0 en posant $x = 1+h$. On écrit

$$x^x = (1+h)^{1+h} = \exp\left((1+h)\ln(1+h)\right).$$

On doit d'abord calculer le DL produit $(1+h)\ln(1+h)$, puis un DL composé. (Ce qu'on a à l'intérieur de l'exponentielle tend vers 0 en $h=0$, donc on utilisera le DL de $\exp(u)$ en $u=0$.)

1. DL produit :

$$(1+h)\ln(1+h) = \left\{(1+h)(h - \frac{1}{2}h^2)\right\}_2 + h^2\varepsilon(h) = h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h).$$

2. DL composé : on a $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u)$, d'où

$$x^x = \exp\left((1+h)\ln(1+h)\right) = \exp(h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)) = \{P(Q(h))\}_2 + h^2\varepsilon(h)$$

avec $P(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2$ et $Q(h) = h + \frac{1}{2}h^2$, et donc (faire le tableau pour vérifier)

$$\{P(Q(h))\}_2 = 1 + h + h^2.$$

Finalement,

$$x^x = \exp\left((1+h)\ln(1+h)\right) = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h).$$

Ici encore on peut vérifier le premier terme : 1 est bien la valeur de x^x pour $x=1$.

Pour l'équation de la tangente, on revient en variables x : il s'agit de $y = 1 + (x-1)$ (vérifier qu'elle passe bien par le point du graphe d'abscisse 1). La courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de $x = 0$.

Chapitre 6

Aire et calcul d'intégrales

6.1 Mathématisation de la notion d'aire

Vous savez que l'intégrale est l'objet mathématique qui correspond à la notion intuitive d'aire : l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

est *l'aire algébrique comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses.*

DESSIN.

Comme tout objet mathématique, l'intégrale doit être construite, c-à-d que ce qu'on vient de dire est une idée trop floue pour tenir lieu de définition mathématique. On ne va pas faire la construction ici (pas le temps), mais l'idée consiste à utiliser la formule donnant l'aire des rectangles, et à approcher le domaine sous la courbe par une union de rectangles :

- Si f est constante sur $[a, b]$, égale à C , l'intégrale est $(b - a)C$.
- Si f est une fonction quelconque (disons positive pour simplifier), on découpe le domaine en rectangles, et on fait la somme des aires des morceaux : en général il faut une infinité de morceaux, mais si la fonction f est continue sur $[a, b]$, on peut montrer que cette somme est bien définie, et donne un nombre qu'on appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$. C'est une démonstration difficile.

Pour la suite, *on admet l'existence de l'intégrale de toute fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$, qui vérifie les propriétés décrites dans la section suivante.*

6.2 Quelques propriétés

Toutes les fonctions sont supposées être continues sur les intervalles considérées.

1. **Relation de Chasles** Si $a < b < c$,

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

2. **Linéarité de l'intégrale**

$$\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

où λ est un nombre réel quelconque.

3. **Intégration des inégalités** Si on a $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Remarques

– la variable t est muette :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)du.$$

– On définit aussi l'intégrale $\int_b^a$ (même si $a < b$) en posant

$$\int_b^a f(t)dt := -\int_a^b f(t)dt.$$

Cette définition est choisie pour que la relation de Chasles reste vraie quand a, b, c sont rangés dans un ordre quelconque.

– L'intégrale d'une fonction positive est positive.

– Si la fonction f est comprise entre deux nombres m et M sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

(DESSIN)

Les deux dernières remarques permettent de tester les calculs. Exemples : Le nombre $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)dt$ est certainement strictement positif. Plus précisément, il est compris entre $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{4} > 0,7 \times 0,75$ et $\frac{\pi}{4} < 0,79$, donc entre $0,52$ et $0,79$.

6.3 Intégrale et dérivée

Vous savez que les intégrales se calculent à l'aide des primitives, c'est à dire en effectuant l'opération inverse de la dérivation. Les techniques introduites pour calculer des vitesses vont servir pour calculer des surfaces !

Définition 6.3.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction dérivable F est une primitive de f sur I si , pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$.*

Proposition 6.3.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.*

1. *Si F est une primitive quelconque de la f sur $[a, b]$, alors on a*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

2. *Réciproquement, la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.*

La difficulté de la notion de primitive vient du fait qu'une fonction continue f a une infinité de primitives : si F est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont les fonctions $F +$ constante.

EXEMPLE : calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)dt$ à l'aide des primitives sin et sin +2006.

À cause de cette non-unicité, il faut faire attention à la notation $\int f$ (sans borne). Ca ne désigne pas une fonction, mais une fonction définie à une constante près ; parfois ça pose des problèmes...

6.3.1 Primitives à connaître

La liste des dérivées des fonctions usuelles fournit aussi une liste de primitives (à connaitre sans hésitér !) : primitives de x^n, de $e^{\alpha x}$, de cos et sin.

Remarque :

– sur $]0 + \infty[$, la fonction log est une primitive de $\frac{1}{x}$;

– sur $] - \infty, 0[$, il faut prendre $\log(-x)$;

Si on veut une formule valable sur chacun des deux intervalles, on peut prendre $\log(\mid x \mid)$. De même, la fonction $\frac{1}{x+a}$ a pour primitive sur $] - \infty, -a[$ et sur $] - a, +\infty[$ la fonction $\log(\mid x + a \mid)$.

6.4 Trois techniques de calcul

Changement de variable

La proposition qui suit est connue sous le nom de formule du changement de variable. Le lecteur doit noter que l'égalité ci-dessous peut être lue dans les deux sens, et qu'elle sert autant dans l'un que dans l'autre.

Proposition 6.4.1 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Soit aussi ui une fonction continument dérivable de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$ avec $u(\alpha)=a$ et $u(\beta)=b$). On a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

Cette formule très utile est facile à prouver : si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a, pour tout t de $[\alpha,\beta]$

$$(F\circ u)'(t) = F'(u(t)).u'(t) = f(u(t)).u'(t),$$

et il suffit d'intégrer :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = [F\circ u(t)]_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

ce qui prouve la proposition.

Avec les notations différentielles que l'on a déjà rencontrée, si $x = u(t)$, on peut écrire $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = u'(t)$, ou, en poussant un peu le bouchon (hum),

$$du = u'(t)dt.$$

On peut donner un sens mathématique à ce petit calcul, mais pour l'instant on doit se contenter d'y voir un moyen de retenir cette formule, voir de la mettre en pratique. En effet, si l'on note u la variable notée x dans la formule ci-dessus (ce qui ne change rien), on lit

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

Voici des exemples où l'on applique la formule du changement de variable dans chacun des deux sens.

• On veut d'abord calculer

$$I = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$$

On va simplifier grandement le calcul en posant $u(t) = \sin t$. On a $du = u'(t)dt = \cos t dt$ et $u(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$, $u(\beta) = 1$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$. La formule ci-dessus lue de gauche à droite donne alors

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt.$$

Or sur l'intervalle $[0,\pi/2]$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

On vient de calculer la surface d'un quart de disque de rayon 1, donné par l'équation $y^2 = 1-x^2$, avec $x\in[0,1]$. Pour un disque de rayon R, on trouve de cette manière la valeur de son aire : πR^2.

• Calculons maintenant l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}dt$$

On reconnait facilement dans la fonction à intégrer une expression de la forme $f(u(t))u'(t)$ avec $u(t) = \ln t$ (et donc $u'(t) = 1/t$) et $f(x) = x^2$. On a $u(1) = 0$, $u(e) = 1$ et, en lisant la formule de changement de variable de droite à gauche,

$$J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

Intégration par parties

Il arrive que l'on ait à intégrer un produit de fonctions. Bien entendu le lecteur sait que le produit de primitives n'est pas une primitive du produit. Plus précisément, pour deux fonctions u et v dérivables, on a

$$(u.v)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

On en déduit la formule d'intégration par parties :

Proposition 6.4.2 *Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette formule est évidement très utile lorsque l'une des deux intégrales est beaucoup plus simple à calculer que l'autre. Soit par exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$. On a alors $u'(x) = 1$ et l'on peut prendre $v(x) = \sin x$ (un autre choix de primitive est tout à fait possible mais ne change pas le résultat du calcul). On obtient donc

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(*) Primitives de fractions rationnelles

Uniquement le cas $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$.

6.5 Une applications géométrique : longueur d'une courbe

6.5.1 Introduction : primitive et dérivée sont dans les voitures...

Notons $F(t)$ la fonction donnée par le compteur, cad le nombre de kilomètres parcourus par la voiture entre les temps 0 et t.

Notons $v(t)$ la vitesse à l'instant t, qui s'affiche sur le cadran des vitesses.

On a alors $F' = v$. Autrement dit, F est une primitive de v.

On peut donc calculer $F(t)$ en fonction de v :

$$F(t) = \int_0^t v(s)ds.$$

Ceci nous donne la longueur du chemin parcouru en fonction de la vitesse scalaire instantanée à tout moment. C'est par cette formule que l'on va définir la longueur d'une courbe paramétrée (et parfois pouvoir la calculer).

6.5.2 Longueur d'une courbe paramétrée

Définition 6.5.1 La longueur d'une courbe paramétrée $M : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est le réel (positif)

$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{OM}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

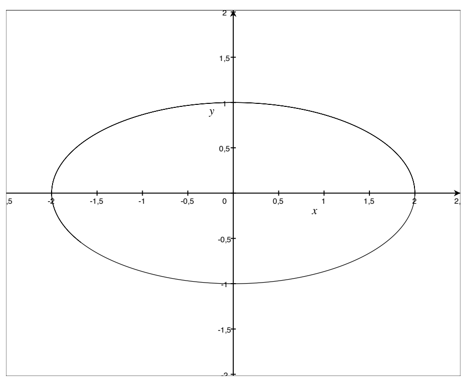
(bien défini si les deux fonctions coordonnées sont de classe C^1).

On peut comprendre cette définition en lisant l'intégrale du membre de droite comme une somme de longueur de déplacements très petits sur des segments tangents à la courbe.

Exemple 6.5.2 *La courbe géométrique associée à la courbe paramétrée $M(t) = (a \cos t, b \sin t)$ avec $a, b > 0$, est une ellipse. On la décrit entièrement en prenant $t \in [0, 2\pi[$. Sa longueur est donc*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, dt,$$

ce qu'il n'est pas facile de calculer ! Dans le cas où $a = b$, on a affaire a un cercle de rayon a, et l'intégrale ci-dessus donne bien $L = 2\pi a$.



(*) Voilà maintenant une réponse satisfaisante à une question naturelle : la longueur d'une courbe paramétrée ne dépend pas du choix de la parametrisation. Ce résultat repose sur la formule de changement de variable.

Appliquons cette formule pour calculer la longueur d'une courbe $M : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Si $t : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, et $N : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $N(s) = M(t)$, on a par définition,

$$L = \int_\alpha^\beta \|\overrightarrow{ON}'(s)\| ds.$$

Mais on a vu que $\overrightarrow{ON}'(s) = t'(s).\overrightarrow{OM}'(t(s))$, donc

$$L = \int_\alpha^\beta \|\overrightarrow{OM}'(t(s))\| t'(s) ds,$$

Grâce à la formule de changement de variable, on a donc aussi

$$L = \int_a^b \|\overrightarrow{OM}'(t)\| dt.$$

Chapitre 7

Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions usuelles ne permettent pas de calculer toutes les intégrales ! On va introduire trois nouvelles fonctions qui sont très utilisées ; elles sont notamment essentielles pour le calcul d'intégrales.

7.1 La fonction arctan

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, elle réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$: pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan(x) = y$.

Définition 7.1.1 *On définit ainsi une nouvelle fonction* arctan *qui a tout nombre réel* y *associe l'unique* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *tel que* $\tan(x) = y$.

Propriétés :

1. quelques valeurs (obtenues simplement à partir de quelques valeurs de tan) ;
2. graphe (à partir de ces valeurs) ; on constate que le graphe de arctan à partir du graphe de la restriction de tan à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ par symétrie d'axe $x = y$. (*) On peut expliquer (on peut d'abord utiliser le graphe de tan, mais en interprétant x comme fonction de y ; puis on doit échanger x et y pour retrouver les variables habituelles...)
3. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, on a
$$\lim_{y \to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{y \to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$
4. La fonction arctan est dérivable, sa dérivée est donnée (pour tout y) par
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$
(*) Preuve 1) par calcul de pente ; 2) en dérivant $\tan(\arctan(y)) = y$.

Remarque : a-t-on $\arctan(\tan(x)) = x$? Et $\tan(\arctan(y)) = y$?

Application : calcul de $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(b) - \arctan(a)$. par exemple, pour $a = 0$ et $b = 1$.

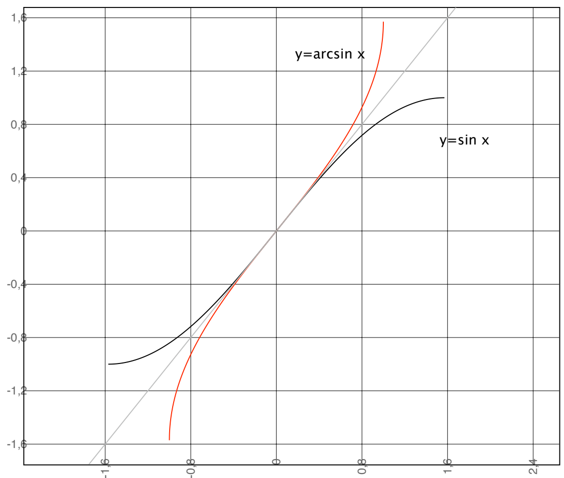
(*) Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx$ par changement de variable $u = x/\sqrt{3}$.

7.2 (*) La fonction arcsin

La fonction sin est strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Puisqu'elle est continue sur cet intervalle, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est une bijection, et l'on note

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

sa bijection réciproque, qui est une fonction continue, strictement croissante. On peut aussi montrer qu'elle est impaire puisque la fonction sin l'est.



Résumons : $y = \arcsin x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin y = x$. En particulier, on a, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

mais attention,

$$\arcsin(\sin x) = x \Longleftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Puisque la fonction sin est dérivable, et que $\sin'(x) = 0$ si et seulement si $x = \pm\frac{\pi}{2}$, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[= [-1, 1] \setminus \{\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})\}$. Sa dérivée est

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

D'où une nouvelle primitive à connaitre. Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Deuxième partie

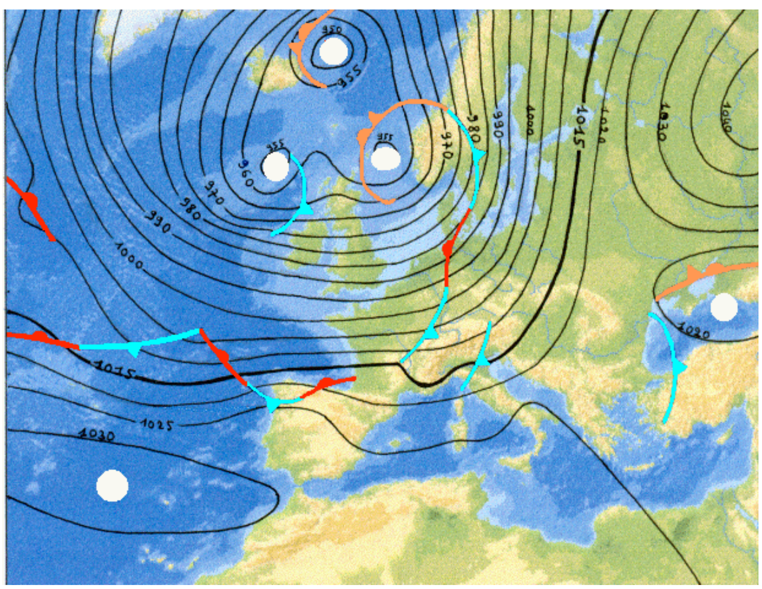
Surfaces et fonctions de deux variables

Chapitre 8

Généralités

8.1 Introduction

8.1.1 Un exemple : la météo



Les fonctions sont utilisées pour modéliser certains phénomènes naturels ; mais pour cela les fonctions d'une variable ne suffisent pas, on a souvent besoin de fonctions de plusieurs variables.

Si vous voulez faire décrire le temps qu'il fait, à un moment donnée, en Europe, vous allez modéliser la pression et la température par des fonctions de deux variables : grandeur $P(x, y)$ ou $T(x, y)$ qui varie en fonction du point (x, y) (par exemple, x représente longitude et y la latitude).

Bien sûr, si vous voulez être plus précis, il faudra introduire la variable altitude ; si vous voulez décrire l'évolution de P et T au cours du temps, vous aurez besoin d'une quatrième variable, et P et T seront des fonctions de (x, y, z, t). Dans ce cours, on va étudier les fonctions qui dépendent juste de deux variables.

8.1.2 Questions

Par rapport aux fonctions d'une variable, qu'est-ce qui change, qu'est-ce qui reste pareil ?

– domaine de définition ;

– représentation graphique ;

– Continuité, limite ;

– fonction dérivée ? Sens, tableau de variation ? ?

– calcul différentiel (notion de *dérivée partielle*) ;

– tangente ? ?

– DLs...

8.1.3 Définitions

Définition 8.1.1 (fonction) *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ fait correspondre, à tout élément (x, y) de E, un unique élément $f(x, y)$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble E est appelé* ensemble de définition *de f.*

Définition 8.1.2 (graphe) *Soit f une fonction de deux variables, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On appelle graphe de f, ou surface représentative de f, l'ensemble $\mathcal{S}_f$ des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $z = f(x, y)$.*

8.2 Fonctions affines

Les fonctions de deux variables les plus simples sont les fonctions affines, qui sont de la forme

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

avec α, β des constantes. Par exemple, la formule $f(x, y) = 2x + 3y + 4$ définit une fonction affine. Son graphe est l'ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2x + 3y + 4$, autrement dit

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \mid z = 2x + 3y + 4\}.$$

À quoi ressemble le graphe d'une fonction affine ? C'est un plan, pourquoi ?

8.2.1 Retour sur les droites de $\mathbb{R}^2$

Commençons par nous rappeler comment les choses se passent dans le plan $\mathbb{R}^2$. Par exemple, quelle est l'équation de la droite (D) passant par $M_0 = (1, 2)$ et orthogonale à $\vec{n} = (3, 4)$?

$$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{M_0M} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

ce qu'on peut traduire par un produit scalaire nul, ce qui donne l'équation de la droite en se rappelant l'expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées x, y dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemple : l'équation de la droite passant par le point $M_0 = (1, 2)$ et orthogonal au vecteur $\vec{v} = (8, 9)$ est

$$8(x - 1) + 9(y - 2) = 0.$$

8.2.2 Plans dans $\mathbb{R}^3$

Tout le paragraphe précédent se généralise sans problème dans l'espace $\mathbb{R}^3$, en rajoutant une coordonnée partout. Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$ est défini par

$$\vec{u_1}.\vec{u_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Donnons-nous un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur. Maintenant, l'ensemble des points M tels que le vecteur $\vec{M_0 M}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ est un plan. La technique vue dans $\mathbb{R}^2$ conduit donc à l'équation d'un plan.

Exemple : l'équation du plan passant par le point $M_0 = (1, 2, 3)$ et orthogonal au vecteur $\vec{v} = (7, 8, 9)$ est

$$7(x-1) + 8(y-2) + 9(z-3) = 0.$$

Réciproquement, on peut remonter le raisonnement pour montrer que toute équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est l'équation d'un plan, qui est orthogonal au vecteur (α, β, γ). Par exemple, notre graphe a pour équation $2x + 3y - z + 4 = 0$. Il contient le point $(0, 0, 4)$. On peut donc écrire l'équation $2x + 3y + (z - 4) = 0$, il s'agit donc du plan passant par $(0, 0, 4)$ et orthogonal au vecteur $(2, 3, 1)$.

(GRAPHER : le vecteur $\vec{n}$ et le plan).

Les fonctions affines les plus simples sont les fonctions constantes, le graphe de la fonction constante $f(x, y) = k$ est le plan horizontal d'altitude k, cad le plan d'équation $z = k$.

Points et vecteurs Formellement, dans ce qui précède, rien ne distingue un point d'un vecteur : tous deux sont donnés par leurs coordonnées. Cependant, il faut penser qu'il y a une différence d'*utilisation* entre les deux. Un point représente un endroit du plan (ou de l'espace) ; un vecteur représente un déplacement entre deux points.

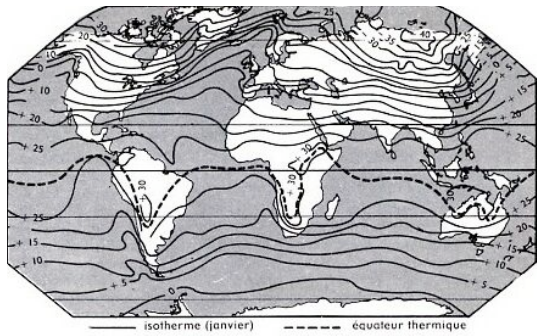
En particulier, ajouter deux vecteurs a un sens (la résultante de deux déplacements est un déplacement), alors qu'ajouter deux points n'a pas de sens (que serait $A + B$ quand A et B sont deux points du plan ?). Par contre, on peut ajouter un vecteur à un point : le point $B = A + \vec{u}$ est obtenu en partant du point A se déplaçant du vecteur $\vec{u}$ (les coordonnées de B sont la somme de celles de A et de celles de $\vec{u}$).

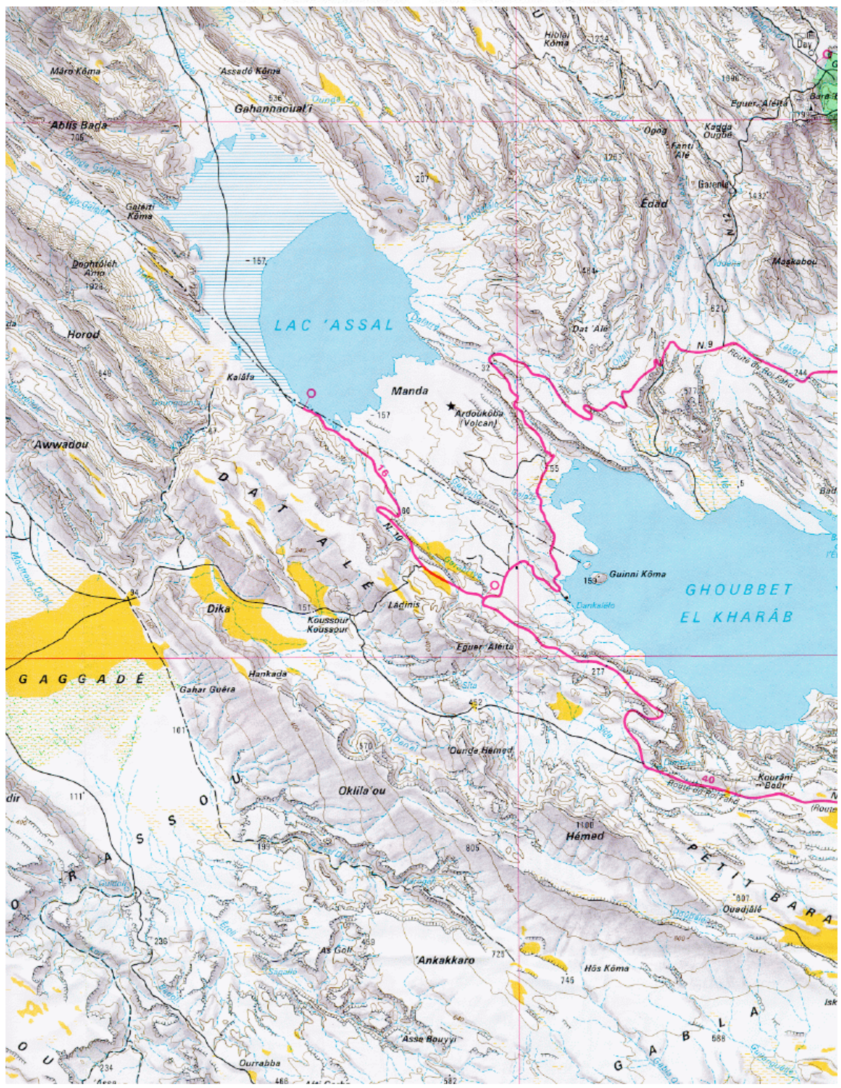
8.3 Lignes de niveau

Le graphe est beaucoup plus difficile à tracer que pour les fonctions d'une variable : difficulté du dessin, et surtout, pas de notion équivalente au tableau de variation des fonctions d'une variable. C'est pourquoi on utilise souvent d'autres modes de représentation graphique. Par exemple, la carte de la première page offre une représentation graphique d'une fonction pression $P(x, y)$; on a dessiné des *isobares* : un isobare est une courbe sur laquelle f est constante.

Ce type de représentation est très utilisé ; par exemple, pour la température, on trace les isothermes, courbes sur lesquelles la température est constante. Pour les cartes géographique représentant le relief, à la place d'une carte en trois dimension (pas pratique à plier), on trace les courbes d'altitude constante.

(GRAPHER)





Définition 8.3.1 (Lignes de niveau) *Soit f une fonction de deux variables, et h un nombre réel. On appelle* ligne de niveau de f de hauteur h *l'ensemble des points (x, y) du plan (Oxy) en lesquels f prend la valeur h :*

$$L_h = \{(x, y) \text{ tels que } f(x, y) = h\}.$$

(GRAPHER) Exemple vu en TD : la “presqu'ile” $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$. La ligne de niveau 0. Remarque : on l'obtient en dessinant le plan du niveau de la mer...

Lien avec le graphe Le plan horizontal d'altitude k est le plan d'équation $z = k$; la ligne de niveau de hauteur k est donc la trace du graphe de f sur ce plan [projetée dans le plan (Oxy)].

Soit k une hauteur donnée. Dans le plan horizontal d'équation $z = k$, muni des coordonnées (x, y), la ligne de niveau de hauteur k est la trace du graphe de f.

8.4 Fonctions partielles

Beaucoup de problèmes concernant les fonctions de plusieurs variables peuvent se ramener à des problèmes concernant les fonctions d'une seule variable. pour cela, on utilise les *fonctions partielles*, qui sont obtenues en fixant la valeur de l'une des variables.

Soit f une fonction de deux variables, et (x_0, y_0) un point du domaine de définition de f.

Définition 8.4.1 (Fonctions partielles) *On appelle* fonctions partielles *au point* (x_0, y_0) *les deux fonctions*

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$$

Exemple Si l'on reprend notre presqu'ile, qu'on se place au point $(0, 0)$, la première fonction partielle est $x \mapsto f(x, 0) = ...$ (on a fixé $y = 0$), la seconde est $y \mapsto f(0, y) = ...$

Lien avec le graphe Fixer $y = 0$ revient à se placer dans le plan vertical (Oxz) (plan d'équation $y = 0$, justement).

Dans le plan vertical d'équation $y = 0$, muni des coordonnées (x, z), le graphe de la fonction partielle $z = f(x, 0)$ est la trace du graphe de f.

(GRAPHER : dessin de la presqu'ile avec le plan $y = 0$, vue de l'intersection en se plaçant perpendiculairement ; comparer avec le graphe (en deux variables) de la fonction partielle).

Un danger

Attention, bien savoir dans quel cadre on se situe :

- le dessin du graphe de f est un dessin dans l'espace (dimension 3) muni des coordonnées (x, y, z) ;
- le dessin des lignes de niveau se situe dans le plan horizontal muni des coordonnées (x, y) ;
- le dessin du graphe d'une fonction partielle est un dessin dans un plan vertical (x, z) ou (y, z).

Pour chacun des objets graphiques qu'on va introduire, ne pas se tromper de cadre !

GRAPHER : autres exemples :
- paraboloide (écrire les fonctions partielles, constater qu'il s'agit de paraboles, montrer les coupes ; et les lignes de niveau...)
- Hyperboloide $x^2 - y^2 = 1$ dans la feuille de TD. Et $xy = 1$, la ligne de niveau est le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$...
- champ de bosse... (pour le fun).

FIN DU COURS 1.

8.5 Continuité

8.5.1 Notion de limite en deux variables

Maintenant nos fonctions f vont du plan $\mathbb{R}^2$ vers la droite $\mathbb{R}$. Dans ce cadre, la propriété à définir est : "$f(x, y)$ tend vers 0 (dans $\mathbb{R}$) quand le point (x, y) tend vers le point $(0, 0)$ (dans le plan $\mathbb{R}^2$)".

On procède exactement comme en une variable, avec une petite différence :
- dans $\mathbb{R}$, "être proche de 0" signifie "être dans un petit intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ autour de 0."
- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, "être proche de $(0, 0)$" signifie "être dans un petit disque de rayon ε autour de 0."

Exemple Prenons par exemple la fonction $f(x, y) = xy$. J'affirme que $f(x, y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Autrement dit, *je prétend que je peux rendre $f(x, y)$ aussi proche de 0 que vous voulez, si vous m'autorisez à prendre (x, y) aussi proche de $(0, 0)$ que je veux.*

Démontrons ceci. Imaginons que vous ayez choisi un $\varepsilon > 0$ aussi petit que vous voulez. Je dois trouver un $\delta > 0$ pour que : pour tout point (x, y) dans le disque de rayon δ autour de $(0, 0)$, on a $f(x, y) = xy \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Ca m'arrangerait si x et y était chacun plus petit que $\sqrt{\varepsilon}$. Autrement dit, si je pouvais forcer le point (x, y) à être dans le carré... Il suffit de prendre un disque assez petit pour être inclus dans ce carré : le disque de rayon $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ convient. Ainsi, pour chacun de vos choix de ε, il existe un choix de δ qui convienne : on a bien montré que la fonction xy tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

La définition s'écrit :

Définition 8.5.1 (limite) *On dira que* $f(x, y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \neq 0$ dans l'intervalle $]-\delta, +\delta[$, le nombre $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon, +\varepsilon[$.*

On écrit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 \text{ ou même } \lim_{(0,0)} f = 0.$$

(Pour que ceci ait un sens, on suppose que la fonction f est bien défini au voisinage du point $(0, 0)$, cad que son domaine de définition contient un petit disque autour de $(0, 0)$).

À partir de cette définition, on peut obtenir toutes les variantes : par exemple, on dira que $f(x, y)$ tend vers ℓ lorsque (x, y) tend vers un point (x_0, y_0) si la fonction $f(x_0 + h, y_0 + h - \ell$ tend vers 0 lorsque (h, k) tend vers le point $(0, 0)$.

Continuité

(On suppose que f est bien définie sur un voisinage de $(0, 0)$).

Définition 8.5.2 (continuité) *La fonction f est continue au point $(0, 0)$ si*

1. *$f(x, y)$ admet une limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$;*
2. *cette limite est égale à $f(0, 0)$.*

Opérations

Théoreme 8.5.3 *La somme, le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues ; le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas est une fonction continue. La composée de deux fonctions continues est continue.*

En particulier : les fonctions polynômes, les fonctions fractions rationnelles en deux variables sont continues sur leur ensemble de définition. Par exemple, notre fonction “presqu'ile” est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme d'habitude, la composition pose problème (compatibilité des ensembles de départ et d'arrivée).

Chapitre 9

Plan tangent et dérivées partielles

9.1 Le problème

Lorsqu'on veut des informations sur le comportement d'une fonction $f(x)$ dépendant d'**une seule variable** au voisinage d'un point, on peut calculer sa dérivée, qui nous donne une approximation de f par une fonction affine (DL à l'ordre 1). Graphiquement, cela revient à approcher le graphe de f par sa tangente.

Peut-on décrire une théorie similaire pour les fonctions de **deux variables** ? La réponse est affirmative. On va encore pouvoir approcher $f(x,y)$, au voisinage d'un point, par une fonction affine ; on obtiendra cette approximation affine en calculant les *dérivées partielles* de f au point considéré. Le graphe de l'approximation affine sera le plan tangent au graphe de f.

9.2 Dérivées partielles

Dans toute cette section, on considère une fonction f *définie au voisinage du point* (x_0, y_0) : cela signifie que son ensemble de définition contient un petit disque centré au point (x_0, y_0).

Exemple reprendre la presqu'île, $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$. Si on fixe l'une des deux variables, on obtient une fonction de l'autre variable, que l'on peut dériver.

– exemple de y fixé à 0 ; notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

– exemple de x fixé à 0 ; notation $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$.

– exemple de y fixé à y_0, notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$.

Soit f une fonction de deux variables (x,y), définie au voisinage de (x_0,y_0). On considère les deux fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x,y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0,y).$$

Définition 9.2.1 *On appelle* dérivées partielles de f au point (x_0,y_0) *les nombres*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_2'(y_0)$$

Attention au sens des différents symboles :
- x_0, y_0 sont des nombres, (x_0, y_0) est un point du plan ;
- 'x' est juste un symbole : $\frac{\partial}{\partial x}$ signifie qu'on dérive suivant la première variable, qui est souvent notée x (mais pas toujours).
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est un nombre ;
- Quel objet est $\frac{\partial f}{\partial x}$? *Aide : on lui donne deux nombres x_0 et y_0, et ça nous renvoie un nombre...*

9.3 Développement limité à l'ordre 1

9.3.1 Rappel en une variable (oralement)

- Formule de Taylor,

- équation de la tangente.

9.3.2 Formule de Taylor -Young en deux variables en au point $(0, 0)$

Définition 9.3.1 *On dira qu'une fonction f est de classe C^1 si les fonctions dérivées partielles existent et sont des fonctions continues de (x, y).*

Par exemple, les polynômes sont de classe C^1, les fractions continues le sont sur leur ensemble de définition ; une somme, ou un produit, ou un quotient (bien défini) de fonctions C^1 est encore une fonction C^1.

Notation On note $||(h, k)||$ la longueur du vecteur (h, k) : $||(h, k)|| = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Proposition 9.3.2 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1, en deux variables) *Soit f une fonction qui est de classe C^1 sur un voisinage du point $(0, 0)$. Alors on a*

$$f(h, k) = f(0, 0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + ||(h, k)||\varepsilon(h, k).$$

avec $\varepsilon(h, k)$ tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$.

On dit alors que f admet un DL à l'ordre 1 en $(0, 0)$ (comme en une variable). La fonction affine $T(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ s'appelle *approximation affine de f en* $(0, 0)$. Elle donne l'équation du plan tangent :

Définition 9.3.3 *Si f est de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$, le plan d'équation $z = f(0, 0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ s'appelle* plan tangent au graphe de f au point $(0, 0, f(0, 0))$.

Exemple La presqu'ile au point $(0, 0)$. Remarque : le plan tangent contient les deux tangentes aux "coupes" $x = 0$ et $y = 0$. [il contient en fait les tangentes à toute les coupes, et plus généralement à toutes les courbe paramétrées incluses dans le graphe].

Cette formule permet de dessiner le mouvement de la planche d'un surfeur sur des vagues d'équation $z = \sin(x + y)$ (voir petit film)...

9.3.3 DL en un point (x_0, y_0)

(Comme en une variable). On peut trouver la formule en faisant le changement de variable $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$. On obtient

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + ||(h, k)||\varepsilon(h, k)$$

(et $\varepsilon(h, k)$ tend vers $(0, 0)$ lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$).

Là encore, la partie affine donne l'équation du plan tangent, *en faisant attention à revenir aux variables x et y* : Le faire sur un **EXEMPLE** (presqu'ile en $(1, 2)$).

Exercice d'application Encore la presqu'ile... Rappel : les distances sont en centaines de mètres.

– calculer l'approximation affine au point $(1, 1)$.

– Un promeneur se situe en ce point : son altitude est donc $f(1, 1) = 1/6$ (soit environ 15 m au dessus du niveau de la mer). Il se dirige dans la direction Nord-Est. En, utilisant l'approximation affine (cad en négligeant le reste dans la formule de Taylor), calculer sa nouvelle altitude lorsque ses coordonnées x et y changent d'un mètre.

– il continue son chemin dans cette direction, en quel point aure-t-il les pieds mouillés ? (comparer à la “vraie” valeur de l'altitude au point trouvé).

FIN COURS 2.

9.4 Formule de dérivation composée

9.4.1 Énoncé

Proposition 9.4.1 *Soient $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée , et $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables. Alors, sous les hypothèses qui suivent, la fonction composée $f \circ M$ est dérivable en t, et sa dérivée est donnée par la formule :*

$$(f \circ M)'(t) = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Les hypothèses sont celles qui sont nécessaires pour que la formule ait un sens :
- les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies au voisinage du nombre t, et dérivables en t ;
- la fonction f est définie au voisinage du point $(x(t), y(t))$, et les deux dérivées partielles existent en ce point.

Moyen mnémotechnique En physique, la composition de deux fonctions est souvent seulement implicite, par exemple, on écrira $f(t) = f(x(t), y(t))$ là où en maths on $f \circ M(t) = f(x(t), y(t))$. Le désavantage c'est que l'on note de la même façon deux objets différents (les fonctions f et $f \circ M$).

L'avantage, c'est que la formule se retient mieux (avec les notations de Leibniz, et en enlevant les variables) :

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

9.4.2 Exemples

Le skieur

On reprend la presqu'ile. Le trajet d'un skieur est décrit par une courbe paramétrée $M(t) = (x(t), y(t))$ donnant sa position sur la carte en fonction du temps t. La fonction $z(t) = f(M(t))$ représente alors l'altitude du skieur au temps t. La dérivée de cette fonction vaut alors...

Application numérique : si le skieur est au point $(-1, 1)$ avec une vitesse (dans le plan (Oxy)) donnée par $\vec{v}(t) = M'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 1)$, on obtient $z'(t) = ...$ En particulier, on voit qu'il est en train de descendre (puisque la dérivée de son altitude est négative). Le vecteur vitesse du skieur *dans* $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $(x'(0), y'(0), z'(0)) = ...$

Exemple physique

On considère une fusée qui décolle. Son énergie cinétique est donnée par la formule $E = \frac{1}{2}mv^2$. Comme elle brûle du carburant, sa masse varie au cours du temps. Vue comme une fonction du temps, l'énergie est donc une fonction composée :

$$E(t) = \frac{1}{2}m(t)v(t)^2.$$

Comment calculer la dérivée $E'(t)$ de cette fonction à partir des fonctions $v(t)$ et $m(t)$? ...

9.5 Le vecteur gradient

Soit f une fonction de deux variables, (x, y) un point en lequel f est définie et ses DP aussi. Alors le gradient de f au point (x, y) est, par définition, le vecteur

$$\vec{\mathrm{Grad}}_{(x,y)} f = \vec{\nabla}_{(x,y)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

La formule de dérivation composée s'écrit maintenant :

Proposition 9.5.1

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \left(\vec{\mathrm{Grad}}_{(x(t),y(t))} f \right) . \vec{v}(t)$$

où $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ *est le vecteur vitesse au temps* t.

Rappel si $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2)$ sont deux vecteurs, on a deux formules pour le produit scalaires :

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = ||u_1|| ||u_2|| \cos(\alpha)$$

où α est l'angle entre es deux vecteurs. Ainsi, le signe du produit scalaire nous renseigne sur l'angle α :
- $\vec{u}_1.\vec{u}_2 > 0 \Leftrightarrow \alpha$ est un angle aigu ;
- $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha$ est un angle droit ;
- $\vec{u}_1.\vec{u}_2 < 0 \Leftrightarrow \alpha$ est un angle obtu.

Exemple Pour la presqu'ile, on a calculé $\tilde{\mathrm{Grad}}_{(-1,1)} f = (-1, -1)$. On dessine ce vecteur gradient, et différentes directions possibles pour la vitesse. Les directions orthogonales sont celles dans lesquelles la pente est nulle, les direction qui forment un angle aigu sont celles dans lesquelles "ça monte", et "ça descend" pour les angles obtus.

Proposition 9.5.2 *(version vague)*

1. *“Le gradient indique la direction dans laquelle la fonction f augmente le plus rapidement” ;*
2. *Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.”*

Le problème, c’est qu’on ne sait pas bien ce que sont les lignes de niveau (des “courbes”, mais pas a priori des courbes paramétrées...) Pour préciser cette version vague, on a besoin de voir ces lignes de niveau comme des courbes paramétrées. Voici une façon de faire ceci.

Proposition 9.5.3 *(version précise) Soit $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée. Supposons que la fonction $t \mapsto f(M(t))$ est constante : autrement dit, la courbe image est incluse dans une unique ligne de niveau de la fonction f.*

Alors le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est orthogonal au gradient de f au point $M(t)$: plus précisément, le produit scalaire des deux vecteurs est nul,

$$\vec{v}(t).\tilde{\mathrm{Grad}}_{(x(t),y(t))} f = 0.$$

Preuve: Par exemple pour $t = 0$ (on s’y ramène toujours par chgt de variable).

1. Dériver la relation $f(M(t)) = \text{cste}$ en $t = 0$.
2. Conclure.

□

(en fait, dès que le vecteur gradient n’est pas nul, la courbe de niveau est localement une courbe paramétrée....)

Comment obtenir l’équation de la tangente à une ligne de niveau ?

Soit (x_0, y_0) un point du plan, et supposons que le gradient de f en ce point n’est pas le vecteur nul. On pose $\ell_0 = f(x_0, y_0)$. Soit C la courbe de niveau de f au point (x_0, y_0) : elle a pour équation $f(x, y) = \ell_0$.

Définition 9.5.4 *La tangente à la courbe C est la droite passant par (x_0, y_0) et orthogonale au vecteur gradient.*

Exemple Pour la presqu’ile, au point $(-1, 1)$...

Le champ de gradient

Soit f une fonction de deux variables (par exemple notre presqu’ile, $f(x, y) = ...$). En chaque point (x, y), on a défini le vecteur gradient $\vec{\mathrm{Grad}}_{(x,y)} f$. On a ainsi ce qu’on appelle un *champ de vecteurs*, cad la donnée, en chaque point (x, y) du plan, d’un vecteur $\vec{X}(x, y)$. *Attention, ce vecteur s’interprète comme étant basé au point (x, y), et non pas au point* $(0, 0)$: exemple du dessin du vecteur gradient de la presqu’ile f au point $(2, -1)$. (Ainsi, un champ de vecteurs est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui s’interprète et se dessine d’une façon particulière).

9.5.1 Exemples d'utilisation du gradient en Physique

Le champ électrique

En Physique, on définit le champ électrique $\vec{E}$. La force électrique subie par une particule de charge q est $\vec{F} = q\vec{E}$.

L'une des propriétés importantes du champ électrique est qu'il "dérive d'un potentiel" : ceci signifie qu'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{E} = \tilde{\mathrm{Grad}}(\Phi).$$

Illustration : dessin des équipotentielles du champ créé par deux charges. (cf par exemple Feynman, vol 2 de l'édition anglaise, p59).

Les équipotentielles ne sont rien d'autre que les lignes de niveau de la fonction Φ.

Équation de diffusion de la chaleur

L'idée intuitive que la chaleur va "du chaud vers le froid" se traduit à l'aide du gradient : le flux de chaleur $\vec{h}$ est proportionnel au gradient de température ∇T.

$$\vec{h} = -\kappa \nabla T.$$

Le vecteur $\vec{h}$ est, par définition, la quantité de chaleur qui "passe" par unité de surface, à travers une surface imaginaire orthogonale à $\vec{h}$.

(avec la conservation de l'énergie thermique, on en déduit la loi de diffusion de la chaleur dans le vide...)

(Autre exemple : une goutte de d'encre dans de l'eau, comment diffuse-t-elle ?...)

9.5.2 Exemples mathématiques

1) $f(x, y) = x^2+y^2$: dessiner les lignes de niveau ; calculer le gradient en unpoint (x, y) quelconque ; dessiiner ce vecteur en quelques points particuliers $(1, 1), (1, 0), ...)$. Constater l'orthogonalité.

2) Même chose avec la fonction $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, dont les lignes de niveau sont les ellipses décrites par $M(t) = (r\cos(t), \frac{1}{2}r\sin(t))$.

Chapitre 10

Extremums d'une fonction de deux variables

10.1 Retour sur les fonctions d'une variable

10.1.1 Définitions

Soit f une fonction d'une variable, définie sur D_f. On définit deux types de maxima : DESSIN. Soit $x_0 \in D_f$.

– on dit que f atteint son maximum absolu au point x_0 si pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(x_0)$.

– on dit que f admet un maximum local au point x_0 si l'inégalité $f(x) \leq f(x_0)$ est vérifiée pour tout $x \in D_f$ assez proche de x_0 (plus précisément : si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap D_f$, $f(x) \leq f(x_0)$).

(en pratique, dans le tableau de variation, on voit une flèche qui monte jusqu'en $f(x_0)$, puis une flèche qui descend...)

On définit de même les minima absolus et locaux. Extremum signifie minimum ou maximum.

Sur le dessin, le réel x_0 est un max absolu, et *a fortiori* un max local (qui peut le plus peut le moins !).

10.1.2 Points critiques (les suspects !)

Dans ce cours, on va se concentrer sur la recherche des extrema locaux d'une fonction donnée. Ceci va se faire en deux étapes.

On suppose maintenant que f est définie au moins sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ (cad $I \subset D_f$).

Proposition 10.1.1 (Principe de Fermat) *Si f admet un minimum local ou un maximum local au point $x_0 \in I$, et si $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$: géométriquement, la tangente au graphe de f en ce point est horizontale.*

Autrement dit, **les extremums locaux sont à chercher parmis les points critiques**, c-à-d les points x_0 où la dérivée s'annule). Exemples à avoir en tête :

- 0 est un point critique de $1 + x^2$ (et un min local) ;
- 0 est un point critique de $1 - x^2$ (et un max local) ;
- 0 est un point critique de $1 + x^3$ (et ni min ni max local : en particulier, la réciproque de la proposition est fausse, tous les suspects ne sont pas forcément coupables !).

10.1.3 Condition d'ordre 2 (les coupables !)

Une fois qu'on a un point critique x_0 (suspecté, sans preuve, d'être un extremum local), comment faire pour savoir s'il s'agit d'un minimum local (comme $1 + x^2$), d'un maximum local (comme $1 - x^2$) ou d'un innocent (comme $1 + x^3$) ? On fait un DL à l'ordre 2. On écrit :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + 0 + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + h^2 \varepsilon(h) = f(x_0) + h^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(h) \right).$$

– si $f''(x_0) > 0$, on voit que pour h assez proche de 0, $f(x_0 + h) > f(x_0)$ (rappelons la preuve, qui est très simple...) ;

– si $f''(x_0) < 0$, on voit que pour h assez proche de 0, $f(x_0 + h) < f(x_0)$;

– si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire (il faudrait faire un DL à l'ordre 3 ou plus...). On dit que le point critique est *dégénéré*.

Remarquons qu'il s'agit d'un cas particulier de l'étude de la position par rapport à la tangente (cf chapitre sur les DLs) : par exemple x_0 est un minimum local ssi le graphe est localement au-dessus de sa tangente (qui est horizontale).

Bilan :

Proposition 10.1.2 (Condition d'ordre 2) *Soit x_0 un point critique de f.*
- *Si $f''(x_0) > 0$, alors c'est un minimum local ;*
- *si $f''(x_0) < 0$, alors c'est un maximum local ;*
- *si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire sans plus d'information.*

Exemple $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{5}x^2\right)$. Trois points critiques, un de chaque sorte.

10.2 Définitions en deux variables

En deux variables, on va suivre la même méthode : il y a encore une notion de point critique, et une condition d'ordre 2 (un peu plus compliquée). Il y aura un nouveau type de point qui n'existe pas en une variable (le point selle).

Soir f une fonction de deux variables, définie pour $(x, y) \in D_f$. Soit (x_0, y_0) un point de D_f.
- On dira que f atteint son maximum au point (x_0, y_0) si, pour tout $(x, y) \in D_f$, on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.
- On dira que f admet un maximum local au point (x_0, y_0) si l'inégalité $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ est vérifiée pour tout $(x, y) \in D_f$ assez proche de (x_0, y_0), c'est-à-dire pour tout (x, y) dans un petit disque autour du point (x_0, y_0).

Bien sûr, on définit de façon analogue les minima et minima locaux.

10.3 Points critiques

On suppose désormais que f est définie (au moins) pour $x \in I$ et $y \in J$ où $I =]a, b[$, $J =]a', b'[$ sont deux intervalles ouverts (c-à-d $I \times J \subset D_f$). On suppose aussi que les DP de f existent sur $I \times J$.

Définition 10.3.1 *Un* point critique *est un point* (x_0, y_0) *où les deux dérivées partielles s'annulent :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \textit{et} \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Géométriquement, le plan tangent au graphe de f *au point* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ *est horizontal.*

Proposition 10.3.2 (Principe de Fermat en deux variables) *Si* f *admet un minimum local ou un maximum local au point* (x_0, y_0)*, alors ce point est un point critique.*

Preuve de la proposition Pour simplifier, on se place au point $(0, 0)$. Supposons que ce point soit un maximum local de f : on a $f(x, y) \leq f(0, 0)$ pour tout (x, y) assez proche de $(0, 0)$. Alors ceci est *a fortiori* vrai lorsqu'on se restreint aux valeurs nulles de y : pour tout x assez proche de 0, on a $f(x, 0) \leq f(0, 0)$. Autrement dit, la fonction partielle $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$ admet un maximum local en $x = 0$. Le théorème correspondant en une variable nous dit que $\varphi'(0) = 0$, mais par définition $\varphi'(0)$ est la dérivée partielle de f en $(0, 0)$ par rapport à la variable x. Bien sûr, le même raisonnement marche pour la dérivée par rapport à y.

Exemples simples
- $2 - x^2 - y^2$ admet un minimum local, et même absolu, en $(0, 0)$: calcul direct.
- De même, $2 + x^2 + y^2$, maximum absolu.
- Par contre pour $2 + x^2 - y^2$, le point $(0, 0)$ est un point critique qui n'est ni un minimum, ni un maximum : cf le graphe vu en TD. **Jusitification analytique :**
  - $f(x, 0) = 2 + x^2 > 2$ pour tout $x \neq 0$, donc il y a des points aussi proche de $(0, 0)$ qu'on veut où f prend des valeurs plus grande que 2 (ça n'est donc pas un maximum local) ;
  - $f(0, y) = 2 - y^2 < 2$ pour tout $y \neq 0$, donc il y a des points aussi proche de $(0, 0)$ qu'on veut où f prend des valeurs plus petite que 2 (ça n'est donc pas un minimum local).

  C'est le propotype d'un point selle ou col (cf plus loin). (Dessin du signe de $x^2 - y^2$ dans le plan Oxy ?)

Exemple La presqu'ile. On voit sur le dessin qu'elle a un maximum local (le sommet). Est-ce un maximum absolu ?...

Comment trouver les coordonnées précises de ce point ? En ce point, le plan tangent est horizontal, autrement dit les deux dérivées partielles sont nulles. On a trouvé en TD les points où le plan tangent est horizontal (exo 7.4) : il y en a deux : celui correspondant au maximum local, et le col.

Exemple de recherche de points critiques $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. On trouve les trois points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. [2 min locaux et un col]

En général, la fonction f possède un nombre fini de points critiques. Une fois qu'on les a identifié, il reste à savoir leur nature : minimum, maximum ou autre (lesquels de ces suspects sont des coupables ?).

FIN COURS QUATRE.

10.4 Les fonctions quadratiques et la méthode de Gauss

Pour identifier la nature d'un point critique, comme en une variable, on va faire un DL à l'ordre 2. Pour utiliser ce DL, il faut savoir identifier le signe de l'expression qui va apparaitre, qui est du type

$$q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Ces fonctions s'appellent des *formes quadratiques*, ou *polynômes homogènes de degré* 2.

Comment connaitre le signe d'une forme quadratique ?

10.4.1 Les trois modèles

On a trois modèles simples :

1. $q(x, y) = x^2 + y^2$ est strictement positif pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$;
2. $q(x, y) = -x^2 - y^2$ est strictement négatif pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$;
3. $q(x, y) = x^2 - y^2$ prend des valeurs positives et négatives.

Pour une forme quelconque, on va essayer de l'exprimer comme **somme ou différence de deux carrés** : c'est ce que fait la méthode de Gauss.

10.4.2 Description de la méthode sur des exemples

1. $q_1(x, y) = x^2 + y^2 + xy = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ (comme le xy nous embete, lon l'a fait rentre dans le carré du x : noter que le coeff 1/2 est choisi précisément pour absorber le terme en xy). On en déduit que $q_1(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, (on peut même montrer que $q(x, y) > 0$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$). La forme est dite strictement positive.
2. $q_2(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy = (x + \frac{3}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2$: on en déduit que q_2 prend des valeurs > 0 et < 0 (DESSIN : le long des axes $y = 0$ et $x + \frac{3}{2}y = 0$).
3. $q_3(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$. Cette fois-ci, la forme est ≥ 0, mais pas strictement positive (puisqu'elle s'annule lorsque $x + y = 0$, DESSIN). On dit qu'elle est dégénérée.
4. Il y a un cas un peu spécial, si il n'y a pas de x^2 : dans ce cas on utilise le y^2 à la place. Par exemple, pour $q_4(x, y) = xy + y^2 = ...$
5. et un cas très spécial : $q_5(x, y) = xy$, qu'on écrit $\frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2)$.

10.4.3 Bilan : Méthode de Gauss pour $q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$

- si $r \neq 0$, on se ramène à $r = 1$ en factorisant r ;
- on écrit $x^2 + 2sxy = (x + sy)^2 - s^2y^2$;
- on en déduit une écriture de $q(x, y)$ sous la forme $\alpha x^2 + \beta x^2$.
- lorsque $r = 0$, on utilise y à la place de x, sauf si $r = t = 0$, qui est le cas très spécial vu ci-dessus.

Définition 10.4.1 *La forme quadratique $q(x, y)$ est dite*
- dégénérée *si α ou β est nul. Si elle n'est pas dégénérée, on dit qu'elle est :*
- strictement positive *si α et $\beta > 0$;*
- strictement négative *si α et $\beta < 0$;*
- de type selle (ou col) *si α et β sont de signes contraires.*

Proposition 10.4.2 *(admise) La forme quadratique $q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$ est non dégénérée si et seulement si son* déterminant*, $rt - s^2$ n'est pas nul.*

10.5 Formule de Taylor d'ordre 2

On dit que la fonction f est de classe C^2 si ses DP sont des fonctions de classe C^1. On a alors quatre dérivées partielles d'ordre 2, qu'on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Proposition 10.5.1 (Schwarz) *Si f est de classe C^2, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Proposition 10.5.2 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point (x_0, y_0), et de classe C^2 les DP existent et sont chacune de classe C^1). Notons*
– α, β les dérivées partielles au point (x_0, y_0) ;
– r, s, t les dérivées secondes en ce même point.
On a alors la formule :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + ||h, k||^2 \varepsilon(h, k)$$

avec $\lim_{(h,k \to (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$.

Remarque : $||h, k||^2 = h^2 + k^2$.

10.6 Conclusion : type des points critiques

Soit (x_0, y_0) un point critique d'une fonction f. Supposons qu'on ait un DL de f,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right) + ||h, k||^2 \varepsilon(h, k)$$

(ici α et β sont nuls puisqu'on a un point critique).

Proposition 10.6.1 *(admise)*

Hypothèse : *supposons $rt - s^2 \neq 0$: la forme quadratique $q(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$ est non dégénérée. Alors*
– si q est strictement positive, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local ;
– si q est strictement négative, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local ;
– si q est de type selle, alors le point (x_0, y_0) n'est pas minimum local, ni un maximum local (on dit qu'il est de type selle).

Lorsque q est dégénérée, on ne peut pas conclure sans plus d'information.

Bilan

Pour trouver les extrema locaux d'une fonction f de deux variables :

1. On trouve les points critiques de f : on sait que tous les extrema locaux de f font partie des points critiques (remarque : en pratique, on n'y arrive pas toujours) ;

2. pour chaque point critique (x_0, y_0),
   (a) on calcule les dérivées secondes r, s, t ;
   (b) on vérifie que $rt - s^2 \neq 0$ (sans quoi la méthode ne donne pas de réponse) ;
   (c) en utilisant la méthode de Gauss, on cherche le type de la forme quadratique $q(h, k)$: strictement positive, strictement négative, ou de type selle
   (d) on conclut sur le type du point critique : minimum local, maximum local, ou point selle.

– exemple complet : extremums locaux de la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

– tableau : correspondance des concepts et méthodes 1 var/2vars ?

FIN COURS CINQ !!!

Plan

——————— cours 0 ———————

I. Courbes et fonctions d'une variable

1. Introduction
   (a) Lettres et courbes : les courbes de Bézier
   (b) Courbes en physique : les lois de Képler. Courbes de PH ?
   (c) Courbes mathématiques : quelques jolies courbes. Graphe des fonctions usuelles.
   (d) Quelques définitions : fonction, ensemble de définition, graphe (à faire : identifier les fcts usuelles dont on donne le graphe). Fonction affine et son graphe, coefficient directeur.
   (e) Quelques définitions (suite) : courbe paramétrée, image d'une courbe paramétrée. Premier exemple de tracé.

——————— cours 1 ———————

2. Tangentes et fonctions dérivées
   (a) (30) A propos de la notion de limite : Définition de limite nulle en 0. Opérations sur les limites. Définition de la continuité.
   (b) (30) Nombre dérivé : Taux d'accroissement, définition géométrique et analytique du nombre dérivé, DL à l'ordre 1 et équation de la tangente.
   (c) (10) Calculs de dérivées : fonctions dérivées, règles de calcul (sauf dérivation composée), dérivées usuelles.
   (d) (20) Égalité des accroissements finis : énoncé, sens de variation des fonctions.

——————— cours 2 ———————

   (e) Intermède sur les fonctions composées : ensemble de définition, dérivation.
   (f) Application aux courbes paramétrée : vecteur vitesse, exemples d'étude.

——————— cours 3 ———————

3. DLs
   (a) Introduction
   (b) La formule de Taylor-Young
   (c) Calculs de DLs : somme, produit, composition.

——————— cours 4 ———————

   (d) Applications : calculs de limite, étude d'un point critique d'une courbe paramétrée, asymptotes.

——————— cours 5 ———————

4. Longueur des courbes
   (a) Intégrale d'une fonction continue
   (b) Primitives usuelles
   (c) IPP
   (d) cgt de variables

——————— cours 6 ———————

5. Résolution d'équations
   (a) TVI
   (b) Fonctions réciproques
   (c) Méthodes numériques : dichotomie, Newton.

——————— cours 7 ———————

II. Surfaces et fonctions de deux variables...

A rajouter : un rappel sur les extrema en une variable.