F. GUENARD G. LELIEVRE

COMPLEMENTS D'ANALYSE

VOLUME 1

TOPOLOGIE

PREMIERE PARTIE

avec une préface de

L.A. STEEN et J.A. SEEBACH Jr.

ouvrage hors collection des cahiers de Fontenay

juin 85

LES CAHIERS DE FONTENAY
sont en vente à

l'E.N.S. 31, Avenue Lombart
92260 FONTENAY AUX ROSES

Règlement : C.C.P. 9132-09 Z - Paris
Chèque bancaire à l'ordre de l'Intendant

Comité de Lecture

Directrice de la Publication
Jacqueline BONNAMOUR

Secrétaire de Rédaction
Chantal GILLETTE

Membres du Comité
Spiros ZERVOS (Université d'Athènes)
Francis HIRSCH (E.N.S.E.T. de Cachan)
Michèle CHAUVE (E.N.S. de Fontenay)
Nicole EL KAROUI (E.N.S. de Fontenay)

Réalisation Technique

La frappe du manuscrit a été réalisée
à l'Université de Poitiers par :
Brigitte BRAULT
Maryvonne RAYNAUD
Joelle SALZERT
Elyane TEXEREAU

Le tirage a été effectué
à l'E.N.S. de Fontenay par :
Alain LAVAL
Odette LAYUS
Marie-France MONS
René RUNEL

Comité de Lecture

Directrice de la Publication
Jacqueline BONNAMOUR

Secrétaire de Rédaction
Chantal GILLETTE

Membres du Comité
Spiros ZERVOS (Université d'Athènes)
Francis HIRSCH (E.N.S.E.T. de Cachan)
Michèle CHAUVE (E.N.S. de Fontenay)
Nicole EL KAROUI (E.N.S. de Fontenay)

Réalisation Technique

La frappe du manuscrit a été réalisée
à l'Université de Poitiers par :
Brigitte BRAULT
Maryvonne RAYNAUD
Joelle SALZERT
Elyane TEXEREAU

Le tirage a été effectué
à l'E.N.S. de Fontenay par :
Alain LAVAL
Odette LAYUS
Marie-France MONS
René RUNEL

AVERTISSEMENT

Les Cahiers de Fontenay ont davantage publié dans les domaines des Lettres et des Sciences Humaines que dans les domaines Scientifiques. Ce numéro nous permet de rappeler à nos lecteurs la place importante que tient dans notre établissement la section de mathématiques dont les diverses formations sont conduites vers l'agrégation et la recherche. Cette section dont la responsabilité incombe à Madame Nicole EL KAROUI, professeur, et à Madame Michelle CHAUVE, maître de conférence, attire d'éminents spécialistes qui nous apportent leur concours.
Nous sommes heureuses de pouvoir accueillir ici les textes de Monsieur François GUÉNARD (Université de Poitiers) et de Monsieur Gilbert LELIEVRE (Université Paris-Sorbonne). Nous leur exprimons notre vive reconnaissance ainsi qu'aux collègues du comité de rédaction qui ont suivi la publication de cet ouvrage.

Jacqueline BONNAMOUR
Directrice de l'E.N.S. Fontenay

PREFACE

General topology provides insight into the roots of analysis. Concepts of open sets help explain continuity of functions, while theories of connected sets shed light on the intermediate value property. Metric spaces, function spaces, Euclidean spaces — all the fundamental spaces of analysis — are at their root topological.

It is right, therefore, that this Compléments d'Analyse *series begins with general topology. It sets vocabulary and context for all that follows, and provides a rich variety of classic examples to illustrate the important concepts of analysis.*

Although topology may provide the vocabulary of analysis, too often this vocabulary is overwhelmed by diverse terminology, inconsistent hypotheses, and contradictory theorems — due to the different traditions of exposition on the subject. One purpose of this work is to set forth a consistent environment of definitions, theorems and examples for all of analysis, from general topology through functional analysis.

In a sense, Bourbaki has already provided a consistent framework for topology and analysis. But the very general perspective of Bourbaki is intended more for the researcher than for the student. Whereas Bourbaki focuses on general theories from which particular instances can be derived (in the problems), Compléments d'Analyse *presents standard definitions and theorems as a foundation for more general study. In Bourbaki examples are excuses for exercises ; in* Compléments d'Analyse *examples and counterexamples join as full partners with definitions and theorems to yield insight into fundamental topological understanding.*

The power of generalization to unify mathematics becomes visible through the counterpoint of theory and example. Universal properties emerge as a central bond between topological and analytical ideas. Extension theorems and embedding results show that most of the spaces of analysis live, topologically, within certain familiar spaces from which many essential properties follow.

Compléments d'Analyse *assumes a significant background in both topology and analysis. By so doing it can develop connections and universal properties that normally remain unexamined in the standard linear progression of regular textbooks. In* Compléments d'Analyse, *details become tools for understanding, rather than impediments. What emerges is a perspective on topology and analysis that highlights their fundamental principles and calls attention to the role of unifying concepts in mathematics.*

St. Olaf College
Northfield, Minnesota (U.S.A.)
March, 1985

Lynn Arthur Steen
J. Arthur Seebach, Jr.

1. OBJET ET CONTENU DES COMPLÉMENTS D'ANALYSE

L'ambition des présents Compléments d'Analyse *est d'être utiles à ceux qui ont reçu l'enseignement des deux premiers cycles universitaires, en leur fournissant des éléments de réflexion et d'approfondissement sur l'analyse mathématique étudiée au cours des quatre années de ces cycles.*

Les Compléments d'Analyse *ne sont pas conçus pour une lecture linéaire. En renonçant à l'ordre d'exposition logique, on a voulu promouvoir des mathématiques d'idées, et montrer que l'analyse enseignée dans les deux premiers cycles est bien vivante, c'est-à-dire susceptible d'améliorations : en se libérant de cet ordre d'exposition presque immuable, on peut rapprocher des théorèmes relevant d'une même idée, d'une même méthode, mais qui sont d'habitude présentés séparément, sans que soient établis leurs liens conceptuels. C'est pourquoi les résultats ne sont pas présentés linéairement, mais regroupés par thèmes. Pour chacun d'eux, on s'est attaché à dégager les liens qui unissent divers objets mathématiques d'usage courant, ou à montrer comment une même idée, ou un même outil peuvent permettre de résoudre des problèmes différents, ou à expliquer pourquoi on a retenu tel concept ou axiome, plutôt que tel autre.*

C'est ainsi que l'on a donné systématiquement, lorsqu'ils existent, les énoncés convers des théorèmes du programme des deux premiers cycles, avec de nombreux exemples et contre-exemples. C'est systématiquement aussi que l'on a rapproché des points de vue artificiellement séparés par le jeu des cloisonnements de l'analyse en diverses branches. On ne s'étonnera donc pas de trouver des exemples d'intégration en topologie, ou des interprétations probabilistes de théorèmes courants d'analyse.

Parfois, on a été amené à déborder de ce programme de maîtrise :

- soit pour mieux éclaircir une notion de ce programme (comment comprendre qu'à un niveau élémentaire on ne considère que des espaces séparés, sinon en prenant conscience des bizarreries qui apparaissent dès que l'espace n'est plus séparé ?).

- soit parce que l'évolution des mathématiques suggère de présenter aujourd'hui certaines notions autrement qu'on le faisait il y a vingt ou trente ans. C'est ainsi que dès le volume 2, on a abordé les problèmes mathématiques liés à l'Informatique, et utilisé de nouvelles méthodes comme l'Analyse Non Standard. Toutefois, la lecture de l'ouvrage ne demande que les connaissances du programme usuel de maîtrise.

Puissent ces Compléments d'Analyse *aider ceux qui se préparent, en France à l'Agrégation de Mathématiques, ou, ailleurs, à l'examen de "qualification" pour entrer dans un programme de doctorat (Ph. D.), et intéresser ceux qui ont la charge d'enseigner les mathématiques dans les deux premiers cycles : leurs activités de recherche dans des domaines souvent éloignés ne leur permettent pas toujours de consacrer le temps nécessaire à l'examen minutieux des dernières publications, pour actualiser leurs cours.*

2. PRÉSENTATION DU VOLUME 1

Dans ce volume 1 ont été regroupés les compléments sur les propriétés topologiques élémentaires. On s'est attaché à montrer d'une part les liens entre les différents types d'espaces, d'autre part comment quelques espaces particuliers interviennent de façon essentielle dans l'étude d'espaces topologiques généraux. Ces deux points de vue ne sont d'ailleurs pas disjoints. Par exemple, pour étudier le lien entre connexité et connexité par arcs, on est amené à étudier les images continues de $[0;1]$.

L'accent a été mis en particulier sur les pièges si fréquents en topologie, et dont l'origine réside dans des idées fausses qu'il convient de dénoncer. On en a donné de nombreux exemples et contre-exemples, conduisant à affiner la classification élémentaire des différents types d'espaces. En matière de taxonomie, on s'est strictement limité aux notions qui déterminent la zone de vérité au-delà de laquelle une propriété s'altère, et à celles qui sont nécessaires pour la lecture des traités et articles spécialisés. Ces critères correspondent aux philosophies respectives des préparations à l'Agrégation et à l'examen de qualification pour le Doctorat (Ph. D.).

De par la nature même de l'ouvrage, les résultats qui y figurent sont peu évoqués dans la littérature courante, bien que ne faisant appel qu'à des techniques classiques, toutes enseignées dans les deux premiers cycles universitaires. Les résultats supposés connus sont tous exposés dans le livre de topologie de N. Bourbaki, et dans celui de J. Dugundji. L'American Mathematical Monthly *sera utile pour une remise à jour permanente des résultats. Les méthodes nouvelles de topologie, liées à l'Analyse Non Standard et à l'Informatique ont été regroupées dans le volume 2.*

Bien que le programme de maîtrise n'inclue pas de Théorie des Ensembles, il semblerait opportun que des professeurs de mathématiques y soient initiés au cours de leurs études, tant en raison de ses applications mathématiques traditionnelles (indécidabilité, incomplétude...), qu'en raison de ses développements récents vers l'Informatique et la Recherche Opérationnelle. Outre quelques problèmes de cardinaux, l'Appendice, dû à G. Lelièvre, aborde sans démonstration ce qu'un mathématicien non logicien devrait connaître sur le sujet. Pour la pratique quotidienne, en effet, il n'est pas nécessaire de savoir comment on démontre l'indépendance de tel axiome par rapport aux autres, mais seulement de savoir si cet axiome est, ou non, indépendant.

3. POINTS PARTICULIERS

Ce livre n'est pas conçu pour une lecture linéaire, du début à la fin. Il est divisé en chapitres largement indépendants, et chaque chapitre comporte une introduction, un corps de résultats, des exercices, une bibliographie commentée et des notes.

Les corps de résultats sont divisés en sections pouvant, d'une manière générale, être lues de façon autonome. Il arrive toutefois que l'on utilise un résultat ou un exemple traité plus en détail ailleurs, que ce soit avant ou après l'endroit où il est mentionné.

Pour faciliter la recherche, les énoncés d'un même chapitre font l'objet d'une numérotation commune, tandis que les définitions et notations font ensemble l'objet d'une seconde numérotation.

On a évité de multiplier les énoncés en morcelant à l'excès les longs raisonnements. Lorsque la démonstration d'un théorème fait appel à des lemmes, ceux-ci figurent immédiatement avant le théorème lui-même. Si cette démonstration utilise un autre résultat établi ailleurs dans le volume, on le signale dès le début. Ainsi évite-t-on des renvois en chaîne où 2.4.3. résulte de 1.8.10 qui découle de..., et où l'on perd le fil de l'argumentation.

Ce livre insiste sur les idées. Le texte est illustré de nombreux dessins, afin de lutter contre une pratique qui s'apparente à la "langue de bois", et qui conduit à n'écrire que des démonstrations formalisées, sans en dégager ni les idées sous-jacentes, ni l'éventuelle interprétation physique. On a renoncé à un trop grand formalisme : par exemple, dans les formules logiques, les parenthèses qui ne sont pas jugées indispensables à une bonne compréhension ont été systématiquement omises. Eventuellement, on leur a substitué des virgules.

Les notations courantes ont été données dans la Liste des notations, placée en tête de l'ouvrage, et ne sont pas répétées dans la suite. La Table thématique, l'Index des auteurs cités et l'Index terminologique sont placés à la fin.

Pour que les bibliographies constituent d'authentiques outils de travail, on a cru bien faire de les découper par thèmes, et de les annoter. Comme le dernier article publié sur un sujet est en général celui qui donne les résultats les plus fins, c'est par lui qu'il faut commencer pour se mettre à jour. Cet article doit donc, sauf motif contraire impératif, être disposé en tête. Inversement, la numérotation chronologique permet la mise à jour de la bibliographie sans modification des références antérieures. C'est pourquoi, de façon générale, la règle adoptée a été de ne pas disposer les références selon l'ordre alphabétique, mais en fonction des annotations, puis, pour des annotations identiques, par ordre chronologique inverse. Cependant, les références portant sur un même thème sont numérotées selon l'ordre chronologique.

4. REMERCIEMENTS

J'exprime ma reconnaissance à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay qui a favorisé la réalisation de cet ouvrage issu de mes leçons de préparation à l'oral de l'Agrégation.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs les Professeurs L. A. Steen et J.A. Seebach Jr. en écrivant la préface; je leur en exprime ma gratitude.

Je n'oublie pas que ce livre doit beaucoup à tous ceux qui m'ont prodigué leurs conseils, et qu'il n'aurait pas vu le jour sans le travail de ceux qui ont assuré la réalisation technique. Je les remercie sincèrement.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES NOTATIONS

NOTATIONS LOGIQUES ET ENSEMBLISTES

Nous utilisons les notations courantes : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\vee$, , $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\prod_{i\in I} X_i$, $\bigcup_{i\in I} X_i$, $\bigcap_{i\in I} X_i$
Chacun en connaît la signification.

Autres notations :

X^c	complémentaire de X
$\mathbf{P}(X)$	ensemble des parties de X
$\mathbf{P}_f(X)$	ensemble des parties finies de X
card X ou card(X)	cardinal de l'ensemble X
od(X)	ordre de l'ensemble constructible X
Def(X)	ensemble de tous les sous-ensembles de X définissables par une formule du premier ordre à paramètre dans X et relativisée à X
St(x) ou St(x ; $\mathfrak{U}$)	halo de x (relativement au recouvrement $\mathfrak{U}$)
$\phi \restriction X$	formule ϕ restreinte à l'ensemble ou à la collection X

Produits :

Δ ou Δ_X	diagonale (de X) : $\Delta_X = \{(x\,;x) \mid x \in X\}$
A^{-1}	si $A \subset X \times Y$, $A^{-1} = \{(y\,;x) \mid (x\,;y) \in A\}$
$U[x]$	si $U \subset X \times X$, et si $x \in X$, $U[x] = \{y \mid (x\,;y) \in U\}$
$U \circ V$	si $U, V \subset X \times X$, $U \circ V = \{(x\,;y) \in X \times X \mid \exists z \in X \quad (x\,;z) \in U \text{ et } (z\,;y) \in V\}$
pr_X	projection $X \times Y \to X$
pr_i	projection $\prod_{j\in I} X_j \to X_i$

Fonctions :

χ_X	fonction indicatrice (caractéristique) de l'ensemble X
Id ou Id_X	fonction identique de X
$\mathfrak{G}(f)$ ou $G(f)$	graphe de l'application $f : X \to Y$; $\mathfrak{G}(f) = \{(x\,;f(x)) \mid x \in X\}$
$f\restriction_Z$	restriction de l'application f à l'ensemble Z
$f \circ g$	composée des applications f et g : $f \circ g\,(x) = f[g(x)]$
f^n	itérée n-ième de l'application f .
$f^{(n)}$	dérivée n-ième de la fonction f .
$[f(x)]^n$	puissance n-ième du réel f(x)

NOTATIONS TOPOLOGIQUES : X espace topologique, et $A \subset X$.

$\overset{\circ}{A}$ ou A°	intérieur de A
$\bar{A}$ ou A^{-}	adhérence de A
$\bar{A}^Z$	adhérence dans Z de $A \subset Z$

$\overline{\mathring{A}}$	adhérence de l'intérieur de A (De même pour $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, etc.)
∂A ou $Fr(A)$	frontière de A
$\Xi(X)$	caractère de densité de X : plus petit cardinal $\mathfrak{m}$ tel que l'espace X admette une partie dense de cardinal $\mathfrak{m}$.
βX ou $\beta(X)$	compactifié de Stone-Cech (de X).
$\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}_X$	ensemble des ouverts de X
$\mathcal{G}_\delta$	ensemble des intersections dénombrables d'ouverts (de X)
$\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_X$	ensemble des fermés (de X)
$\mathcal{F}_\sigma$	ensemble des réunions dénombrables de fermés (de X)
$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}_X$	ensemble des parties analytiques (de X)
$\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}_X$	tribu des boréliens (de X)
T_i	axiome T_i de séparation
Supp(f)	support de l'application $f : X \to [0 ; 1]$; $\mathrm{Supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}^-$

NOTATIONS METRIQUES

$B(x ; \varepsilon)$ ou $B_d(x ; \varepsilon)$ ou $B(x ; d ; \varepsilon)$ ou $\mathring{D}(x ; \varepsilon)$	boule ouverte de centre x et de rayon ε (pour la distance ou l'écart d)
$\overline{B}(x ; \varepsilon)$ ou $\overline{B}_d(x ; \varepsilon)$ ou $D(x ; \varepsilon)$	boule fermée de centre x et de rayon ε
$B(x ; \varepsilon)^-$	fermeture de la boule ouverte $B(x ; \varepsilon)$ (en général différente de $\overline{B}(x ; \varepsilon)$)
$Ad(\xi)$	ensemble des valeurs d'adhérence de la suite ξ.

ENSEMBLES PARTICULIERS

$\emptyset$	ensemble vide
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	respectivement ensemble des entiers naturels, des entiers, des rationnels, des réels, des complexes. On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.
C	ensemble de Cantor : $C = 2^{\mathbb{N}}$ (cas particulier des *espaces* de Cantor, ensembles de la forme 2^I, où I est un ensemble infini quelconque)
K_3	ensemble triadique de Cantor (homéomorphe à C)
S^1	cercle unité : $S^1 = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
S^2	sphère unité : $S^2 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N} = {\mathbb{N}^*}^{\mathbb{N}^*}$ (homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
ω	premier ordinal infini
$\aleph_0$	premier cardinal infini (voir p.128 pour l'identification de $\mathbb{N}$, ω et $\aleph_0$)
$\mathfrak{c}$	cardinal du continu
Ω	premier ordinal non dénombrable (= ensemble des ordinaux dénombrables)

Espaces fonctionnels

$C_b(X)$	espace de Banach des fonctions continues bornées $X \to \mathbb{R}$ muni de la norme sup, notée $\|\cdot\|_\infty$
ℓ^1	espace des suites sommables de nombres réels
ℓ^∞	espace des suites réelles bornées
C, $b\Delta$, $b\mathcal{B}_1$, $b\mathcal{DB}_1$, bA	respectivement : espace de Banach des fonctions $[0\,;1] \to \mathbb{R}$ qui sont bornées, des dérivées bornées, bornées et de première classe de Baire, bornées de Darboux et de première classe de Baire, bornées et approximativement continues. La norme est la norme sup, $\|\cdot\|_\infty$

Intervalles

Sur $\mathbb{R}$:

$]a\,;b]$, $a,b \in \mathbb{R}$	$]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$
$[a\,;+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$	$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$

De même pour les autres types d'intervalles.

Conventions identiques pour les ordinaux.

Notations propres à $\mathbb{R}$

$I_{p,q}$	$I_{p,q} = \left[\frac{2q-1}{3^{p+1}}\,;\frac{2q}{3^{p+1}}\right]$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $q \le 4^p$
Π ou $\Pi(a\,;b)$	ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$
λ	mesure de Lebesgue
$S(f\,;\pi)$	somme de Riemann de la fonction f pour la subdivision π
tan	fonction tangente
ln ou ℓn	fonction logarithme népérien

CLASSES D'ENSEMBLES

$\mathfrak{On}$	classe des ordinaux
$\mathfrak{Cn}$	classe des cardinaux
DO	collection de tous les ensembles définissables en termes d'ordinaux
HDO	collection des ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux

NOMS PROPRES : Pour la translittération des caractères cyrilliques slaves en caractères latins, on a suivi les conventions des *Mathematical Reviews*. (elles coïncident avec celles de *Zentralblatt für Mathematik*).

Chapitre 1

ESPACES TOPOLOGIQUES - ESPACES METRIQUES

1. LES DIFFÉRENTES NOTIONS DE SÉPARATION

Les différentes notions de séparation jouent un grand rôle en topologie. Bourbaki et Dugundji considèrent essentiellement des espaces séparés. Mais depuis le traité de Kelley (1955, avant le traité de Dugundji), la plupart des "topologistes" anglo-saxons reconcent à cette hypothèse. On a donc actuellement coexistence de différents vocabulaires où les mêmes mots sont utilisés pour désigner des objets différents. Dans ce paragraphe, nous allons traiter des problèmes suivants :

- Préciser le vocabulaire.
- Donner les implications et les contre-exemples permettant de classer les différentes notions de séparation.
- Dresser un catalogue des pièges liés à "la vie dans les espaces non séparés" (*dixit* Wilansky).
- Donner les grands théorèmes de représentation des espaces satisfaisant aux différents axiomes de séparation, ainsi que les procédés d'engendrement de leurs topologies.

1.1. VOCABULAIRE

Les principales notions de séparations ([1]) s'expriment à l'aide de huit axiomes élémentaires numérotés T_i , qui sont les suivants :

Soit $(X ; \mathcal{T})$ un espace topologique.

▶ T_0 : Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X , il existe un ouvert $O \in \mathcal{T}$ vérifiant $x \in O$ et $y \notin O$, ou $x \notin O$ et $y \in O$.

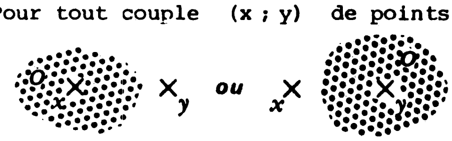


Figure 1

Ceci est équivalent à :

Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X , on a :

$$x \notin \{y\}^- \qquad \text{ou} \qquad y \notin \{x\}^-$$

▶ T_1 : Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X , il existe deux ouverts U et V vérifiant :

$$x \in U \ , \ y \notin U \ , \ y \in V \ \text{ et } \ x \notin V$$

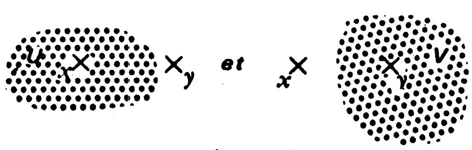


Figure 2

ceci équivaut à :

Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X, il existe un ouvert U vérifiant :

$x \in U$ et $y \notin U$

et à :

Les points de X sont des fermés.

ou encore à :

Tout point de X est l'intersection de ses voisinages.

▶ T_2 : Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X, il existe deux ouverts U et V vérifiant :

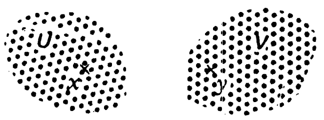


Figure 3

$$x \in U \ , \ y \in V \quad \text{et} \quad U \cap V = \emptyset$$

On dit que x et y sont séparés lorsque cette propriété est réalisée.

Ceci est équivalent à :

Tout point de X est l'intersection de ses voisinages fermés.

▶ $T_{2\frac{1}{2}}$: Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X, il existe deux ouverts U et V vérifiant :

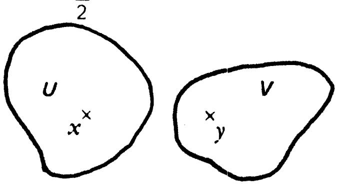


Figure 4

$$x \in U \ , \ y \in V \quad \text{et} \quad \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$$

▶ T_3 : Pour tout fermé F de X, et tout $x \in X \setminus F$, il existe des ouverts disjoints O_F et O_x vérifiant :

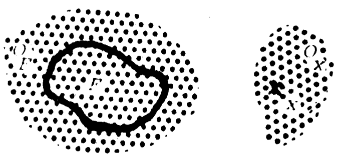


Figure 5

$$F \subset O_F \ , \ x \in O_x \ .$$

Ceci est équivalent à :

Tout point a une base de voisinages fermés.

et à :

Tout fermé de X est l'intersection de ses voisinages ouverts.

▶ $T_{3\frac{1}{2}}$: Pour tout fermé F de X, et tout $x \in X \setminus F$, il existe une fonction continue $f : X \to [0 ; 1]$ vérifiant :

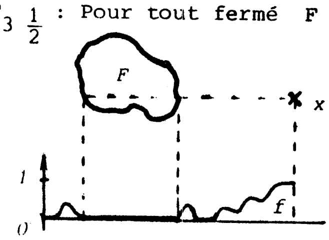


Figure 6

$$f(x) = 1 \ , \text{ et } \ f(y) = 0 \quad \text{si} \quad y \in F \ .$$

▶ T_4 : Pour tout couple $(F ; G)$ de fermés disjoints de X, il existe deux ouverts disjoints O_F et O_G contenant respectivement F et G.

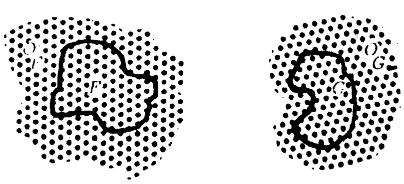


Figure 7

Ceci est équivalent à :

Pour tout ouvert O de X, et tout fermé $F \subset O$, il existe un ouvert U vérifiant :

$$F \subset U \subset \bar{U} \subset O .$$

▶ T_5 : Pour tout couple $(A ; B)$ de parties de X telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset$, il existe deux ouverts disjoints U et V vérifiant :

$$A \subset U \quad \text{et} \quad B \subset V .$$

Outre les huit axiomes précédents, dont les notations T_i sont d'usage courant, il sera pratique de considérer les axiomes supplémentaires suivants :

▶ U (comme Urysohn) : Pour tout couple $(x ; y)$ de points distincts de X, il existe une fonction continue $f : X \to [0 ; 1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$.

▶ G : Tout fermé de X est un $\mathfrak{G}_\delta$ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts de X).

▶ D : Pour toute famille (A_α) de parties fermées de X telle que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un ensemble A_α au plus, il existe une famille (U_α) d'ensembles ouverts deux à deux disjoints et telle que $A_\alpha \subset U_\alpha$ pour tout α.

▶ C : Tout recouvrement ouvert de X admet un sous recouvrement fini.

Le tableau 1 donne les différentes appellations des espaces satisfaisant aux différents axiomes de séparation (voir au verso). Dans la suite, nous employons la terminologie française.

1.2. CLASSIFICATION DES NOTIONS DE SEPARATION

Le tableau 2 donne les principales implications entre les différentes notions de séparation. On voit ainsi qu'en dépit de définitions différentes, les notions suivantes coïncident dans les terminologies de Bourbaki et de Steen et Seebach : espace de Kolmogorov, régulier, normal, complètement normal, parfaitement normal, collectivement normal. Comme les appellations courantes des espaces T_1 et T_2 ne posent pas de problème de "faux ami", le seul vrai piège est celui des espaces compacts, où un même mot désigne des notions mathématiquement différentes. Une précision tout de même : une fois le tableau des implications admis, on peut utiliser ces dernières, et mélanger les points de vue. Mais pour un cours de base sur ces notions, l'ordre d'exposition dépend du point de départ choisi. Quant à la comparaison Bourbaki-Kelley, on voit que leurs terminologies respectives diffèrent au moins sur les points suivants : espace régulier complètement régulier, normal, compact. C'est une différence considérable qui pose des problèmes pour la lecture des articles utilisant la terminologie de Kelley : il y a souvent un risque de confusion. Toutefois, la terminologie de Steen et Seebach tend maintenant à s'imposer, et les problèmes se posent essentiellement pour la lecture d'articles anciens.

Contre-exemple 1 — Un ensemble X de cardinal ≥ 2 muni de sa topologie grossière $\{\emptyset ; X\}$ est T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 et T_5, mais il n'est pas T_0, donc ni T_1, ni T_2, ni $T_{2\frac{1}{2}}$, ni U etc.

Contre-exemple 2 — L'ensemble $\{a ; b\}$ muni de la topologie $\{\emptyset ; \{a\} ; \{a ; b\}\}$ est T_0, mais il n'est pas T_1.

Figure 8

Axiomes	Terminologie bourbachique (en français)	Terminologie anglo-saxonne selon Steen et Seebach (en anglais)	Terminologie anglo-saxonne selon Kelley (en anglais)
T_o	Kolmogoroff	Kolmogorov	T_o
T_1	accessible	Fréchet	T_1
T_2	séparé	Hausdorff	T_2 ou Hausdorff ou separated
$T_{2\frac{1}{2}}$		completely Hausdorff	
T_3			regular
$T_{3\frac{1}{2}}$	uniformisable		completely regular
T_4			normal
T_5			
T_o+T_3		regular	
T_1+T_3			T_3
T_2+T_3	régulier		
T_1+T_4		normal	T_4
T_2+T_4	normal		
T_1+T_5		completely normal	
T_2+T_5	complètement normal		
$T_o+T_{3\frac{1}{2}}$		completely regular, ou Tychonoff	
$T_1+T_{3\frac{1}{2}}$			Tychonoff
$T_2+T_{3\frac{1}{2}}$	complètement régulier		
U			
T_4+G		perfectly T_4	
T_1+T_4+G		perfectly normal	
T_2+T_4+G	parfaitement normal		
T_2+D	collectivement normal	collectionwise normal	
C	quasi-compact	compact	compact
T_2+C	compact	compact Hausdorff	compact Hausdorff

Le traité de Dugundji est compatible, modulo la traduction, avec Bourbaki.

Tableau 1

Les différentes notions de séparation

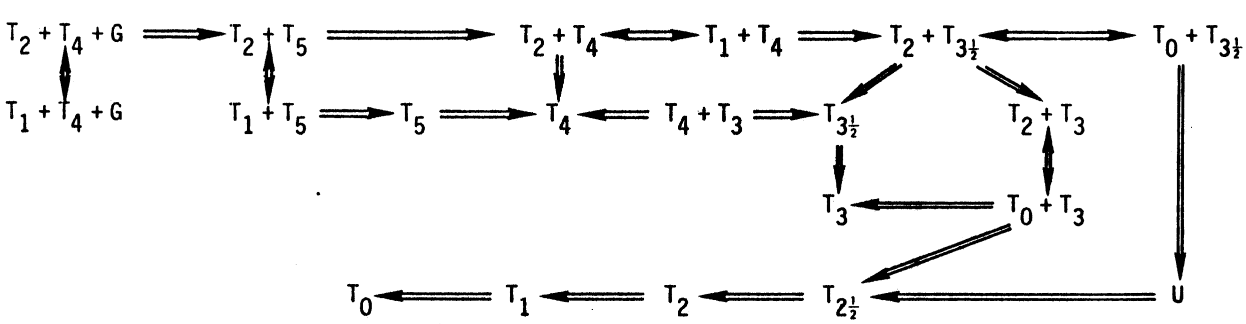


Tableau 2

Principales implications entre les différentes notions de séparation

Contre-exemple 3 — Un ensemble fini muni d'une topologie T_1 est aussi T_2 ; il est même discret. Les espaces T_1 non T_2 sont donc infinis. Soit X un ensemble infini. La moins fine des topologies T_1 sur X est la *topologie cofinie* de X dont les ouverts sont $\emptyset$, et les parties de X dont le complémentaire est fini. Cette topologie n'est pas T_2.

Contre-exemple 4 — Dans le plan complexe, on considère l'espace X formé de la réunion de 1, j, j^2 et de T, l'intérieur du triangle dont ces trois points sont les sommets (*). On considère la topologie $\mathcal{T}$ ainsi définie : les voisinages des points de T sont les voisinages usuels dans T.

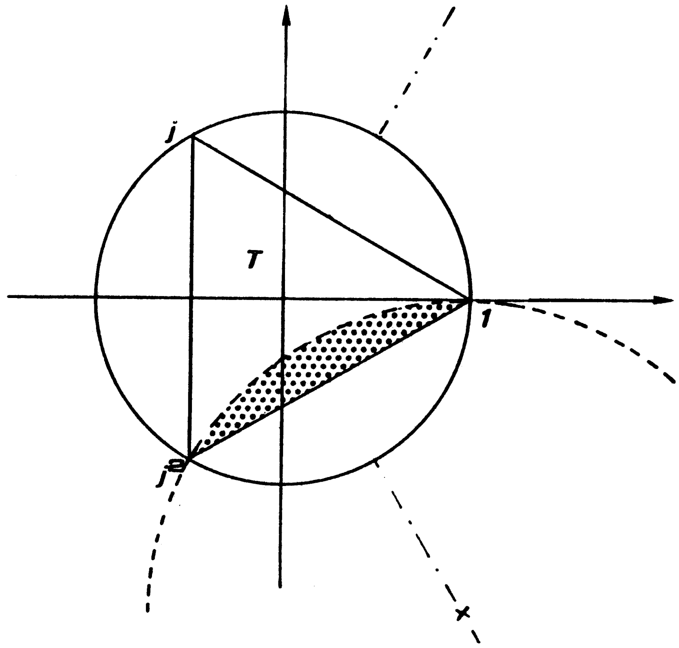


Figure 9

Contre-exemple 4

La partie tramée représente un voisinage de j^2

Une base de voisinage de $x \in \{1 ; j ; j^2\}$ est formée des ensembles qui sont l'intersection de X et de la réunion de $\{x\}$ et de l'intérieur d'un disque $D(\rho e^{i\theta}, r)$ centré en $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 1$ et $\theta = \operatorname{Arg} x + \frac{\pi}{3}$, et de rayon $r = |x - \rho e^{i\theta}|$. Il est clair que, si $x \in T$ et si $y \in X$, x et y sont séparés. Par ailleurs, $X \cap (\{1\} \cup \mathring{D}(1985\, e^{i\pi/3} ; |1-1985\, e^{i\pi/3}|))$ et $X \cap (\{j\} \cup \mathring{D}(-314159 ; |j-314159|))$ sont des voisinages disjoints de 1 et j. De même pour j et j^2, et pour 1 et j^2. Ainsi, X est T_2. Il n'est pas $T_{2\frac{1}{2}}$, car les adhérences de tous les voisinages de j ou de j^2 contiennent 1. Etant T_2 mais pas $T_{2\frac{1}{2}}$, cet espace n'est ni T_3, ni $T_{3\frac{1}{2}}$ si T_4, ni T_5 ni U.

On verra au chapitre 2 un autre exemple d'espace T_2 qui n'est pas $T_{2\frac{1}{2}}$ (*cf.* exemple 11, l'espace de Rittler).

Contre-exemple 5 — Considérons X, le treillis de Roy défini au chapitre 2 en 3.6.4. Considérons $Y = X_U\{\alpha\}$. Définissons les voisinages des $x \in X$ comme pour X, et une base de voisinages de α comme étant les ensembles de la forme $\bigcup_{k=2n}^{\infty} Q_k \times \{k\}$. Muni de cette topologie, l'ensemble Y est connexe, car tout ensemble à la fois ouvert et fermé contenant α contient un voisinage de α , donc un ensemble de la forme $\bigcup_{k=2n}^{\infty} Q_k \times \{k\}$. Il contient alors $Q_{2n-1}\times\{2n-1\}$ car il est fermé, puis $Q_{2n-2} \times \{2n-2\}$ car il est ouvert, puis etc. Il est donc égal à Y qui est connexe. Puisque Y est un connexe dénombrable, il ne peut pas être un espace d'Urysohn, car les parties connexes et dénombrables de $[0;1]$ sont les singletons ([3]). Par ailleurs, deux points quelconques de X ont des premières coordonnées différentes. De la sorte, si $(x;p)$ et $(y;q) \in X$, avec par exemple $x < x+\varepsilon < y-\varepsilon < y$, les ensembles suivants forment des voisinages fermés disjoints de $(x;p)$ et $(y;q)$:

- $X\cap([x-\varepsilon;x+\varepsilon]\times\{p\})$ et $X \cap([y-\varepsilon;y+\varepsilon]\times\{q\})$ si p et q sont pairs,
- $X \cap([x-\varepsilon;x+\varepsilon]\times\{p-2;p-1;p;p+1;p+2\})$ et $X \cap([y-\varepsilon;y+\varepsilon] \times \{q\})$ si p est impair et si q est pair,
- $X \cap([x-\varepsilon;x+\varepsilon] \times \{p-2;p-1;p;p+1;p+2\})$ et $X\cap([y-\varepsilon;y+\varepsilon] \times \{q-2;q-1;q;q+1;q+2\})$ si p et q sont impairs.
- $X \cap([x-\varepsilon;x+\varepsilon] \times \{p\})$ et $X\cap([y-\varepsilon;y+\varepsilon] \times \{q-2;q-1;q;q+1;q+2\})$ si p est pair et si q est impair.

Enfin, si $z = (x;2p) \in X$ (resp. $z = (x;2p+1) \in X$) , $X \cap ([x-1;x+1] \times \{2p\})$ (resp. $X\cap([x-1;x+1] \times \{2p-1;2p;2p+1;2p+2;2p+3\})$) et $\bigcup_{q=4p+3}^{+\infty} Q_p \times \{q\}$ sont des voisinages fermés de z et de α . Bref, cela montre que X et Y sont $T_{2\frac{1}{2}}$. Ce ne sont pas des espaces T_3 : en effet, $X \cap]-1;+1[\times\{4\}$ est un ouvert de X (et de Y). Mais il ne contient aucun voisinage fermé de ses points, car il faudrait qu'il contienne $X \cap (]-1;+1[\times\{3;5\})$.

Contre-exemple 6 (*A. Mysior, 1981*).– Considérons l'ensemble X constitué de la réunion du demi-plan $y \geq 0$ (sans sa topologie usuelle), et d'un singleton a . On définit ainsi la topologie de X :

- Les points $(x;y)$ vérifiant $y > 0$ sont isolés.
- Une base de voisinage de $(x;0)$ est formée des parties de X contenant $(x;0)$ et la réunion, privée d'un nombre fini de points, des deux segments

$$I_x = \{(x;y) \mid 0 \leq y < 2\} \quad \text{et} \quad I'_x = \{(x+y;y) \mid 0 \leq y < 2\}$$

- Une base de voisinages de a est formée des ensembles de la forme $U_n(a) = \{a\} \cup \{(x;y) \mid x > n\}$.

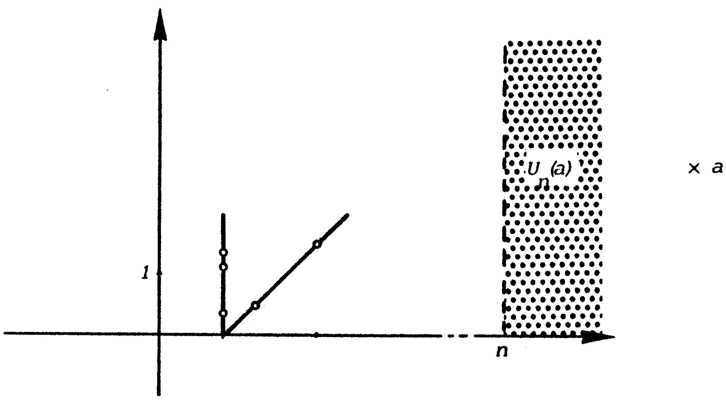


Figure 10

Il est clair que X est séparé (T_2). Pour montrer qu'il est T_3, montrons que tout ouvert contient un voisinage fermé de chacun de ses points. Pour les parties du demi-plan, c'est clair, car tout ouvert du demi-plan est aussi fermé. Pour les ouverts contenant a, on remarque que $\overline{U_{n+2}(a)} \subset U_n(a)$. Ainsi, X est bien un espace régulier.

Montrons à présent qu'il n'est pas complétement régulier. Soit A l'ensemble $[0\,;1]\times\{0\}$; c'est un fermé de X. Montrons que toute application f continue de X dans le segment $[0\,;1]$ (muni de la topologie usuelle) qui est nulle en A est alors nulle en a. Soit c une réel positif tel que $f((c\,;0)) = 0$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, $I'_c \cap f^{-1}([\varepsilon\,;1])$ est un fermé de I'_c ne contenant pas c ; c'est donc une partie finie de I'_c ; il en résulte que l'ensemble $I'_c \cap f^{-1}(]0\,.\,1])$, qui est la réunion des $I'_c \cap f^{-1}(]1/q\,;1])_{q\in\mathbb{N}^*}$ est au plus dénombrable. Par conséquent, la projection P_c, sur l'axe des x, de $I'_c \cap f^{-1}(\{0\})$ est une partie au plus dénombrable de $]c\,;c+2]$.

Montrons par récurrence que $Y_n = f^{-1}(\{0\}) \cap ([n-1\,;n]\times\{0\})$ est infini pour tout $n \geq 1$. C'est vrai pour $n=1$, car $Y_1 = A$. Supposons la propriété vraie pour n. Soit C_n une partie infinie dénombrable de Y_n ; alors la réunion Q des P_c, où c décrit C_n, est une partie infinie dénombrable de $\lceil n-1\,;n+2\rceil$; pour tout point x de $[n\,;n+1]\setminus Q$, le segment I_x rencontre tout $I'_c \cap f^{-1}(\{0\})$, avec $(c\,;0) \in C_n$. Comme $f^{-1}(\{0\})$ est fermé, on a $(x\,;0) \in f^{-1}(\{0\})$ si $x \in S_n \setminus P$. Cela achève la récurrence et la démonstration : X n'est pas complètement régulier.

1.3. LES GRANDS THEOREMES DE REPRESENTATION

Les énoncés que nous allons démontrer dans ce paragraphe concernent les espaces satisfaisant à diverses conditions de séparation. Ils sont de deux sortes.

- Les premiers affirment que les espaces topologiques vérifiant une certaine condition de séparation sont exactement les parties de cubes ou de quasi-cubes.
- Les suivants donnent des procédés d'engendrement de la topologie d'un espace satisfaisant à une condition de séparation.

Commençons par les théorèmes de plongement. Nous allons en voir deux qui reposent sur un même lemme.

Lemme de plongement 7 (*Kelley* [0[1]] *p.116*) — *Soient* X *un espace topologique,* F *un ensemble d'applications continues* $f : X \to Y_f$, *où les* Y_f, $f\in F$, *sont des espaces topologiques. Soit* e *l'application* $X \to \prod_{f\in F} Y_f$ *définie par* $e(x)_f = f(x)$.

(1) e *est une application continue.*

(2) Supposons que F *sépare les points de* X, *c'est-à-dire que, pour tous* $x, y\in X$, $x\neq y$, *il existe* $f\in F$ *telle que* $f(x) \neq f(y)$. *Supposons en outre que* F *sépare les points et les fermés de* X, *c'est-à-dire que, pour tout fermé* A *de* X, *et tout* $x \in X\setminus A$, *il existe* $f\in F$ *telle que* $f(x)$ *n'appartienne pas à l'adhérence de* $f(A)$ *dans* Y_f. *Alors* e *est une application ouverte* $X \to e(X)$.

(3) La fonction e *est injective si et seulement si* F *sépare les points de* X.

Démonstration. L'assertion 3 est évidente.

Assertion 1.– Soit pr_f la projection $\prod_{g\in F} Y_g \to Y_f$. On a $pr_f \circ e = f$, de sorte que e est continue par définition de la topologie produit sur $\prod_{g\in F} Y_g$.

Assertion 2.– Soient $x \in X$, et U un voisinage ouvert de x . Puisque F sépare les points et les fermés de X , il existe $f \in F$ tel que $f(x) \notin \overline{f(X\setminus U)}$. L'ensemble $\prod_{g\in G\setminus\{f\}} Y_g \times (Y_f \setminus \overline{f(X\setminus U)})$ est un ouvert de $\prod_{g\in F} Y_g$ qui contient $e(x)$. Son intersection avec $e(X)$ est un ouvert relatif de $e(X)$ qui est contenu dans $e(U)$, ce qui montre l'assertion 2 .■

Définition 1.– Désignons par Q l'intervalle $[0;1]$ muni de la topologie engendrée par les intervalles semi-ouverts $[0;t[$, $0 < t \leq 1$ *q (topologie droite,* ou *supérieure*). On appelle *quasi-cube* tout espace produit du type Q^I , où I est un ensemble non vide.

Notons que Q est un espace T_0 , quasi-compact, mais pas T_1 . Une fonction f , d'un espace topologique X vers l'espace $[0;1]$ (*i.e.* l'ensemble $[0;1]$ avec sa topologie usuelle) est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si et seulement si c'est une application continue quand on la considère comme application $X \to Q$ (c'est pourquoi il vaut mieux parler de topologie supérieure plutôt que de topologie droite).

Théorème 8 : Représentation des espaces T_0 . (*Nielsen et Sloyer, 1968*)

Tout espace topologique T_0 est homéomorphe à un sous-espace d'un quasi-cube.

Démonstration.– Soient X un espace T_0 et F l'ensemble des applications s.c.s. $X \to [0;1]$. Pour tout $f \in F$, soit Q_f une copie de Q . Soit e l'application $X \to Q^F$ définie par : $e(x)_f = f(x)$. L'application e est continue. D'après le lemme 7, pour établir que e est un homéomorphisme, il suffit de montrer que F sépare d'une part les points de X , d'autre part les points et les fermés de X . Soient donc x et $y \in X$. Puisque X est T_0 , il existe un ouvert U contenant l'un des deux points et pas l'autre, disons : $x \in U \not\ni y$. La fonction caractéristique χ_{U^c} de U^c est une application s.c.s. $X \to [0;1]$, donc une application continue $X \to Q$. Elle vérifie : $\chi_{U^c}(y) = 1$ et $\chi_{U^c}(x) = 0$. Aussi F sépare-t-il les points de X . Enfin, soient A un fermé de X , et $x \in X\setminus A$. Alors χ_A est une application continue $X \to Q$ vérifiant $\chi_A|_A = 1$ et $\chi_A(x) = 0$: cela signifie que F sépare les points et les fermés, et le théorème est démontré. ■

D'après le théorème de Tychonoff, un produit d'espaces quasi-compacts est quasi-compact. En outre, tout fermé d'un espace quasi-compact est quasi-compact (l'inverse est faux, voir § 1.4). Ainsi, si X est T_0 , la fermeture de $e(X)$ dans Q^F est un espace quasi-compact dans lequel $e(X)$ est dense : c'est une quasi-compactification de X (voir chapitre 6).

Théorème 9 : Représentation des espaces complètement réguliers.

Soit X un espace T_0 et $T_{3\frac{1}{2}}$. Alors X est homéomorphe à un sous-espace d'un cube $[0;1]^I$.

Pour la démonstration, on utilise le lemme 7.

Démonstration.– Soit F l'ensemble des applications continues $X \to [0;1]$ (muni de sa topologie usuelle). Pour tout $f \in F$, soit $[0;1]_f$ une copie de $[0;1]$. Soit e l'application $X \to [0;1]^F$ définie par : $e(x)_f = f(x)$. D'après le lemme 7, il suffit de démontrer que F sépare d'une part les points et les fermés de X, d'autre part les points de X. Puisque X est $T_{3\frac{1}{2}}$, F sépare les points et les fermés de X. Soient x et $y \in X$. Puisque X est T_o, il existe un ouvert U contenant l'un des deux points x et y, et pas l'autre. Supposons par exemple $x \in U \not\ni y$. Alors, puisque X est $T_{3\frac{1}{2}}$, il existe $f \in F$ telle que $f(x) = 1$ et $f|_{X \setminus U} = 0$. En particulier, $f(y) = 0$. Aussi F sépare-t-il les points et les fermés de X. Le théorème est démontré. ■

Dans le cas où X est un espace métrique séparable, et où d est une distance $X \times X \to [0;1]$, il suffit de se restreindre, pour l'ensemble F, aux fonctions $f_n : x \mapsto d(x;x_n)$, où $\{x_n\}$ est une partie dénombrable dense de X. L'ensemble $\{f_n\}$ satisfait aux hypothèses du lemme 7. Ainsi, *un espace métrique séparable est homéomorphe à un sous-espace de* $[0;1]^{\mathbb{N}}$. (résultat dû à Urysohn).

Un produit d'espaces séparés est séparé. Et d'après le théorème de Tihonov, un produit d'espaces compacts est compact. Ainsi, l'adhérence de $e(X)$ dans $[0;1]^F$ est un compact dans lequel $e(X)$ est dense. C'est la *compactification de Stone-Cech de* X (voir chapitre 6 pour la classification complète de toutes les compactifications). En outre, toute partie d'un espace séparé est elle-même séparée (on dit que T_2 est une notion *héréditaire*) : $e(X)$ est donc un espace séparé, et il en est de même de X qui est homéomorphe à $e(X)$. On a donc le

Corollaire 10.– *Un espace est* T_o *et* $T_{3\frac{1}{2}}$ *si et seulement s'il est* T_2 *et* $T_{3\frac{1}{2}}$.

La réciproque du théorème 9 est vraie. Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 11.– *Pour tout ensemble non vide* I, $[0;1]^I$ *est complètement régulier (i.e.* $T_2 + T_{3\frac{1}{2}}$ *).*

Démonstration.– Comme tout produit d'espaces séparés est séparé, il suffit d'établir que $[0;1]^I$ est $T_{3\frac{1}{2}}$. Soient donc $x = (x_i)_{i \in I} \in [0;1]^I$, et F un fermé de $[0;1]^I \setminus \{x\}$. Soit U le complémentaire de F. C'est un ouvert contenant x, et il existe un ouvert élémentaire V vérifiant $x \in V \subset U$ et $V = \prod_{j \in J}]x_j - \varepsilon; x_j + \varepsilon[\times \prod_{i \in I \setminus J} [0;1]_i$, où $\varepsilon > 0$, où J est un ensemble fini $\subset I$, et où, pour tout $i \in I \setminus J$, $[0;1]_i$ est une copie de $[0;1]$. Soit $j \in J$. Soit g une application affine par morceaux $[0;1] \to [0;1]$ valant 0 en x_j, 1 sur $[0;x_j - \varepsilon] \cup [x_j + \varepsilon;1]$. Soit f l'application $[0;1]^I \to [0;1]$ définie par : $f((y_i)_{i \in I}) = g(y_j)$. Alors $f = g \circ pr_j$ est une application continue qui vérifie $f(x) = 0$ et $f|_F = 1$, ce qui achève la démonstration. ■

Comme tout sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier, la conjugaison des énoncés 9, 10 et 11 conduit à :

Corollaire 12.– *Un espace topologique est complètement régulier si et seulement s'il est homéomorphe à un sous-espace d'un cube* $[0;1]^I$.

Remarque 13.– Topologie sur les espaces produits.

Pour les théorèmes qui précèdent, on a abondamment utilisé les topologies produits.

Revenons donc sur la définition de la topologie produit : Si $X = \prod_{i \in I} X_i$ est un produit d'espaces topologiques, la topologie produit sur X est engendré par les ouverts élémentaires, qui sont de la forme $U = \prod_{i \in I} U_i$, où U_i est un ouvert de X_i, qui est égal à X_i sauf pour un nombre fini d'indices i. Cette définition est celle qui est maintenant couramment utilisée ; elle a été proposée pour la première fois par Tihonov en 1930. Mais ce n'est pas la première définition d'une topologie sur un espace produit qui ait été donnée : en 1923, Tietze avait ainsi défini la topologie sur un espace produit : si $X = \prod_{i \in I} X_i$, les ouverts de X sont de la forme $\prod_{i \in I} U_i$, où U_i est un ouvert de X_i (en anglais, cette topologie produit est souvent appelée *box topology*). Les topologies produits de Tihonov et Tietze coïncident pour les produits finis. Voyons les raisons qui ont amené à conserver la définition de Tihonov, plutôt que celle de Tietze.

Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit d'espaces topologiques $(X_i;\mathcal{S}_i)$. Notons $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) la topologie produit sur X au sens de Tietze (resp. Tihonov). On a clairement $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$. L'inclusion est stricte lorsque le produit est infini, et que la topologie d'une infinité de facteurs n'est pas réduite à la topologie grossière.

Cela étant, $\mathcal{T}_2$ est la moins fine des topologies sur X qui rendent continues les projections $pr_i : X \to X_i$. En outre, $\mathcal{T}_2$ est séparée (resp. quasi-compacte) si et seulement si toutes les $\mathcal{S}_i$ sont séparée (resp. quasi-compactes). Par ailleurs, si $(Y,\mathcal{R})$ est un espace topologique compact (c'est-à-dire séparé et quasi-compact), toute topologie $\mathcal{R}'$ strictement plus fine (resp. moins fine) que $\mathcal{R}$ n'est pas quasi-compacte (resp. séparée). En regroupant tout ce qui précède, on voit que $\mathcal{T}_2$ est compacte si et seulement si toutes les $\mathcal{S}_i$ le sont. Si I est infini, $\mathcal{T}_1$ n'est pas quasi-compacte. Et si l'on prenait une troisième définition, conduisant à une topologie produit $\mathcal{T}_3$ moins fine que $\mathcal{T}_2$, on perdrait la séparation dans les produits infinis d'espaces compacts. Bref, c'est cette propriété "min-max" de la topologie produit de Tihonov qui a fait retenir cette définition de la topologie produit, de préférence aux autres.

▶ Revenons à présent aux théorèmes de représentation. Le problème que nous allons aborder ici pourrait être ainsi motivé : les espaces métriques forment une classe importante d'espaces topologiques, qui est néanmoins insuffisante pour englober tous les espaces de l'analyse. Une généralisation satisfaisante est donnée par les espaces uniformes. Les groupes topologiques, en particulier les espaces vectoriels topologiques, sont uniformisables. Il y a toutefois des espaces topologiques non uniformisables. Une question naturelle pour le topologue est donc de déterminer quelles sont les topologies que l'on peut définir à partir de familles d'entourages de la diagonale. Pour obtenir une classe d'espaces plus large que la classe des espaces uniformes, il faut affaiblir les exigences que l'on met sur cette famille d'entourages. L'affaiblissement convenable consiste à omettre l'axiome de symétrie. On parle alors de quasi-uniformité, et *tout* espace topologique est quasi-uniformisable : c'est donc cet axiome de symétrie que "caractérise" véritablement les espaces uniformisables parmi les espaces topologiques, et le procédé consistant à définir une topologie à partir d'entourages de la diagonale est tout à fait général. Aussi ce procédé doit-il être ajouté au catalogue des méthodes générales pour définir les topologies : par les ouverts (Sierpinski), par les fermés (Alexandroff), par les voisinages (Hausdorff), par l'opération de fermeture (Kuratowski), par les filets convergents, par les filtres convergents etc.

<u>Notation</u>.– Rappelons quelques notations de théorie des ensembles. Soient X un ensemble, et F et G deux parties de $X^2 = X \times X$. On pose : $F \circ G = \{(x,y) \in X^2 \mid \exists z \in X, (x;z) \in G$ et $(z;y) \in F\}$ et pour tout $x \in X$: $F[x] = \{y \in X \mid (x;y) \in F\}$. On pose également : $F^{-1} = \{(y;x) \mid (x;y) \in F\}$. En outre, on note Δ_X, ou plus simplement Δ, la diagonale de X^2 : $\Delta_X = \{(x;x) \mid x \in X\}$.

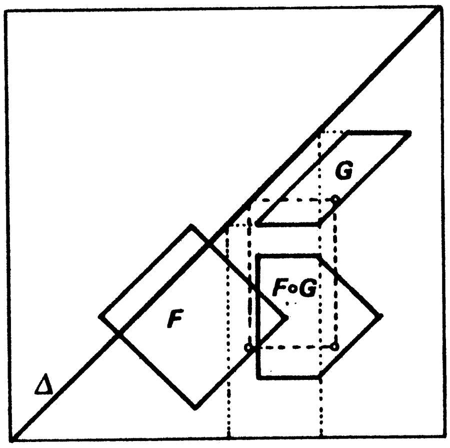


Figure 11

<u>Définition 2</u>.– Soit X un ensemble. On appelle *quasi-uniformité* sur X, ou encore *structure quasi-uniforme*, toute famille $\mathcal{U}$ de parties de X^2 satisfaisant aux axiomes suivants :

(i) Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\Delta \subset U$.

(ii) Pour tous U, $V \in \mathcal{U}$, $U \cap V \in \mathcal{U}$.

(iii) Si $U \in \mathcal{U}$, et si $U \subset V \subset X^2$, alors $V \in \mathcal{U}$.

(iv) Pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $V \circ V \subset U$.

Les éléments d'une structure quasi-uniforme sont appelés les *entourages* de cette structure. Une quasi-uniformité $\mathcal{U}$ satisfaisant à l'axiome (v) suivant est appelée une *uniformité*, ou une *structure uniforme*.

(v) Si $U \in \mathcal{U}$, $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

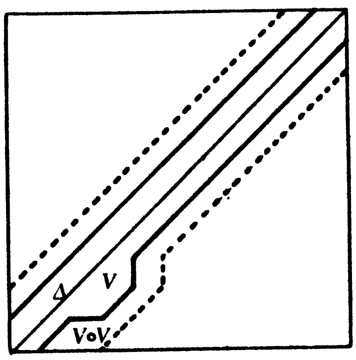


Figure 12

Soit $\mathcal{U}$ une quasi-uniformité. Une famille $\mathcal{B}$ de parties de X^2 est appelée un *système fondamental d'entourages* de $\mathcal{U}$, ou une *base de structure quasi-uniforme* si tout élément de $\mathcal{U}$ contient un élément de $\mathcal{B}$. Pour qu'un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X^2 soit une base de quasi-uniformité, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux axiomes suivants :

(i) Pour tout $U \in \mathcal{B}$, $\Delta \subset U$.

(ii) Pour tous $U, V \in \mathcal{B}$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset U \cap V$.

(iv) Pour tout $U \in \mathcal{B}$, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $V \circ V \subset U$.

Une base de quasi-uniformité $\mathcal{B}$ satisfaisant à l'axiome (vii) suivant est une base d'uniformité :

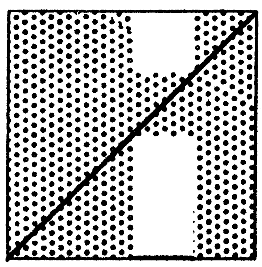
(vii) Pour tout $U \in \mathcal{B}$, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $V \subset U^{-1}$.

A partir d'une structure quasi-uniforme $\mathcal{U}$ sur X, on définit une topologie sur X, dite *topologie engendrée par* $\mathcal{U}$, en appelant voisinages d'un point $x \in X$ les ensembles de la forme $U[x]$, avec $U \in \mathcal{U}$. On vérifie facilement que les ensembles ainsi définis correspondent à une unique topologie (cf. Bourbaki T G II.3 proposition 1). La démonstration est faite pour les structures uniformes, mais elle marche pour les structures quasi-uniformes). L'inverse est faux : une topologie engendrée par une structure quasi-uniforme (resp. uniforme) est, en général, engendrée par toute une famille de structures quasi-uniformes (resp. uniformes). On verra au chapitre 6 la structure de l'ensemble des structures uniformes engendrant une topologie uniformisable.

Nous allons résoudre ici le problème réciproque : étant donné un espace topologique $(X;\mathcal{T})$, y-a-t-il une structure quasi-uniforme, ou uniforme engendrant $\mathcal{T}$?

Théorème 14 (*Pervin, 1962*)

Tout espace topologique $(X,\mathcal{T})$ *est quasi-uniformisable, et une sous-base de quasi-uniformité engendrant* $\mathcal{T}$ *est constituée des ensembles de la forme* $G^2 \cup (X \setminus G) \times X$, *où* G *parcourt* $\mathcal{T}$.



G

Figure 13

On dit que la structure quasi-uniforme ainsi définie est la *quasi-uniformité de Pervin* de X (*).

Pour tout $G \in \mathcal{T}$, posons $S_G = G \times G \cup (X \setminus G) \times X$.

Démonstration.– On va d'abord établir que l'ensemble $\mathcal{B}$ des ensembles de la forme S_G, où $G \in \mathcal{T}$, est une sous-base pour une structure quasi-uniforme. Une base de cette structure sera l'ensemble $\mathcal{B}'$ des intersections d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{B}$. Clairement, l'axiome (i) est vérifié par $\mathcal{B}$, donc par $\mathcal{B}'$. Par définition de $\mathcal{B}'$, l'axiome (vi) est vérifié. Reste donc seulement à montrer (iv). Cela découlera immédiatement de cette propriété : "Pour tout $G \in \mathcal{T}$, $S_G \circ S_G \subset S_G$". Soit $(x;z) \in S_G \circ S_G$. Il existe $y \in X$ tel que $(x;y) \in S_G$ et $(y;z) \in S_G$. Si $x \in G$, alors $(y;z) \in G \times G$, et donc $y \in G$. Mézalor $(y;z) \in G \times G$, c'est-à-dire $z \in G$, d'où $(x;z) \in G \times G \subset S_G$. Si $x \notin G$, on a $(x;z) \in (X \setminus G) \times X \subset S_G$, et la propriété est établie. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base d'une structure quasi-uniforme $\mathcal{U}$. Montrons que la topologie $\mathcal{T}'$ engendrée par $\mathcal{U}$ est égale à $\mathcal{T}$. Un ensemble $H \subset X$ appartient à $\mathcal{T}'$ si et seulement si, pour tout $x \in H$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U[x] \subset H$. Cela étant, soit $G \in \mathcal{T}$. Alors, pour tout $x \in G$, $S_G[x] = G$, ce qui montre $G \in \mathcal{T}'$, puis $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Réciproquement, soit $G \in \mathcal{T}'$. Alors, pour tout $x \in G$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U[x] \subset G$. Mais, par définition de $\mathcal{U}$, il existe $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{T}$ tels que $S_{G_1} \cap S_{G_2} \cap \dots \cap S_{G_n} \subset U$. Il vient alors : $S_{G_1}[x] \cap \dots \cap S_{G_n}[x] = (S_{G_1} \cap \dots \cap S_{G_n})[x] \subset U[x]$. Mais

$S_{G_i}[x]$, pour $1 \le i \le n$ est égal soit à G_i , soit à X . Dans les deux cas, c'est un ouvert de $(X;\mathcal{T})$, et $\bigcap_{i=1}^{n} S_{G_i}[x]$ est également un ouvert de $(X;\mathcal{T})$. Cela montre $G \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 15 (*Naimpally, 1967*)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique $(X;\mathcal{T})$ *soit* T_3 *est que sa quasi-uniformité de Pervin,* $\mathcal{U}$ *, satisfasse à l'axiome suivant :*

(viii) *Pour tout* $U \in \mathcal{U}$ *et tout* $x \in X$ *, il existe* $V \in \mathcal{U}$ *symétrique (i.e.* $V = V^{-1}$ *) tel que* $V \circ V[x] \subset U[x]$.

Démonstration.— Supposons que $(X,\mathcal{T})$ soit T_3 . Alors, pour tout $U \in \mathcal{U}$ et tout $x \in X$, il existe des ouverts O et O' tels que $x \in O \subset \bar{O} \subset O' \subset \bar{O}' \subset G = U[x]$. Posons : $W_1 = G^2 \cup (X \smallsetminus \bar{O}')^2$, $W_2 = \bar{O}'^2 \cup (X \smallsetminus \bar{O})^2$. Les ensembles W_1 et W_2 appartiennent à $\mathcal{U}$. En effet, par exemple pour W_1 : $S_G \cap S_{O'} \cap S_{X\smallsetminus\bar{O}'} \subset W_1$. Alors $V = W_1 \cap W_2$ est un entourage symétrique de $\mathcal{U}$ tel que : $V \circ V[x] = G$.

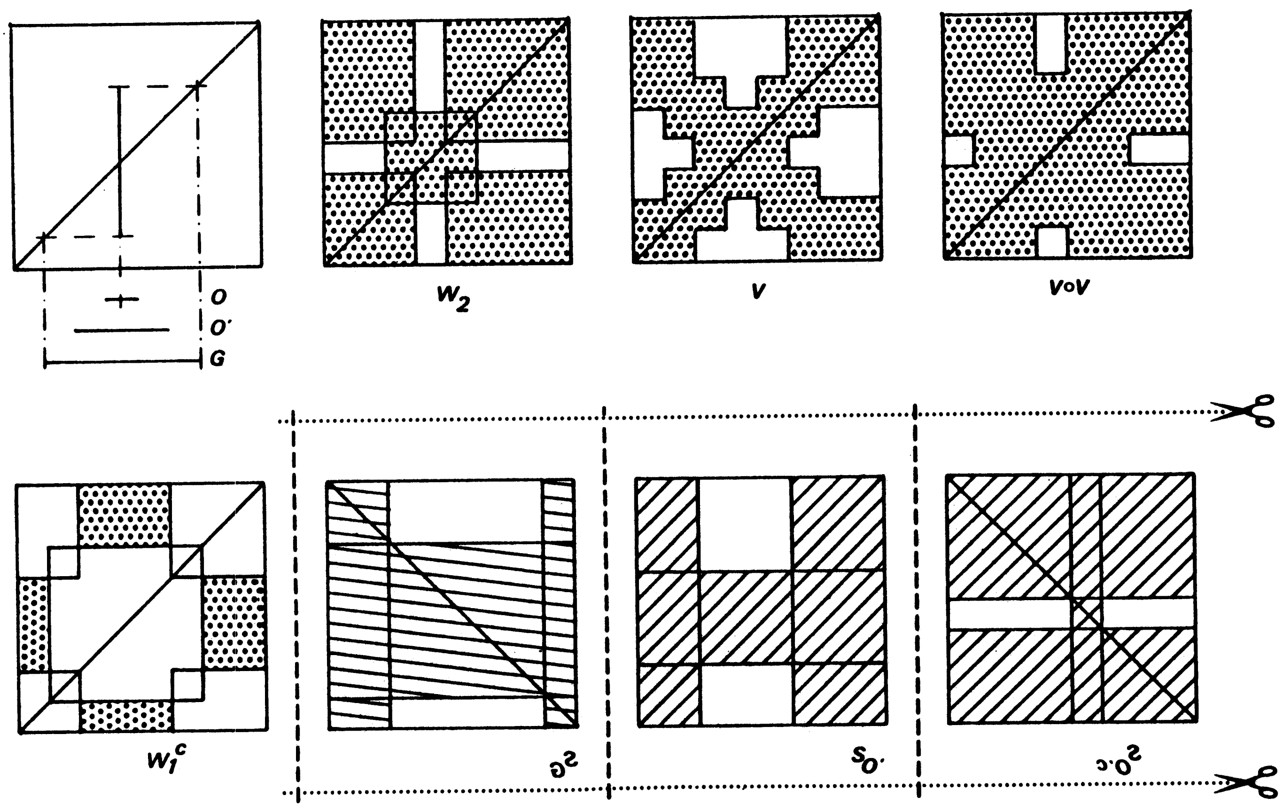


Figure 14

Démonstration du théorème 15

Pour vérifier l'inclusion $S_G \cap S_{O'} \cap S_{X\smallsetminus\bar{O}'} \subset W_1$ *, découper suivant les pointillés, plier suivant les tirets, et observer devant une source de lumière.*

Réciproquement, soit $\mathcal{U}$ une quasi-uniformité satisfaisant à la condition (viii). Soient $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par $\mathcal{U}$, G un ouvert de $\mathcal{T}$, et x un point de G. D'après la définition de $\mathcal{T}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U[x] \subset G$. Mais comme $\mathcal{U}$ vérifie la condition (viii), il existe un entourage symétrique V tel que $V \circ V[x] \subset U[x]$. Si $y \in \overline{V[x]}$, il existe $z \in V[x] \cap V[y]$. Mais alors $y \in V[z] \subset V \circ V[x] \subset U[x]$. Ainsi, $V[x]$ et $X \setminus \overline{V[x]}$ sont des voisinages disjoints de respectivement x et $X \setminus G$, ce qui montre que $(X, \mathcal{T})$ est T_3. ■

Définition 3.– Soit X un ensemble. On dit qu'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est un *écart* si elle satisfait aux conditions suivantes :

(1) $d(x;y) \geq 0$ pour tous x et $y \in X$.

(2) Si $x = y$, alors $d(x;y) = 0$.

(3) Pour tous $x, y \in X$, $d(x;y) = d(y;x)$.

(4) Pour tous $x, y, z \in X$, $d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z)$.

On appelle *boule* ou d-*boule ouverte* de rayon $\varepsilon (\in \mathbb{R}_+)$ et de centre $y \in X$ l'ensemble $B(y;d;\varepsilon) = B_d(y;\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x;y) < \varepsilon\}$.

On remarquera dans la condition (2) que l'on ne suppose pas l'implication : $d(x;y) = 0 \Longrightarrow x = y$. En outre, Bourbaki définit les écarts à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ici, nous les supposons à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{D} = \{d_\alpha \mid \alpha \in A\}$ une famille d'écarts sur un ensemble X. On définit sur X une topologie, dite *topologie engendrée par* $\mathcal{D}$, en disant qu'une partie V de X est un voisinage du point $x \in X$ s'il existe une partie finie $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de A, et $\varepsilon > 0$ tels que $\bigcap_{i=1}^{k} B(x; d_{\alpha_i}; \varepsilon) \subset V$. Autrement dit, $\mathcal{B}(\mathcal{D}) = \{B(y; d_\alpha; \varepsilon) \mid y \in X, d_\alpha \in \mathcal{D}, \varepsilon > 0\}$ est une sous-base de cette topologie. Notons $\mathcal{D}^+$ la famille d'écarts dite *saturée* associée à $\mathcal{D}$, définie par : $\mathcal{D}^+ = \{\max(d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_n}) \mid \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une partie finie de $A\}$. Alors, la famille $\mathcal{B}(\mathcal{D}^+)$ est une base de cette topologie. On montre facilement que la topologie associée à une famille $\mathcal{D}$ d'écarts est uniformisable, et qu'une base d'une structure uniforme engendrant cette topologie est formée des parties de $X \times X$ de la forme : $U_{d,\varepsilon} = \{(x;y) \in X \times X \mid d(x;y) < \varepsilon\}$, avec $d \in \mathcal{D}^+$ et $\varepsilon > 0$. On dit que cette uniformité est la *structure uniforme engendrée par* $\mathcal{D}$.

Théorème 16.– *Soit* $(X;\mathcal{T})$ *un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est* $T_{3\frac{1}{2}}$

(ii) X *est uniformisable.*

(iii) $\mathcal{T}$ *est engendrée par une famille d'écarts.*

Notons que si X est supposé en outre T_0, le théorème de représentation des espaces complètement réguliers (théorème 9) donne immédiatement les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iii).

Démonstration.– On va établir

$$\begin{tikzcd} \text{(ii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iii)} \arrow[dl, Rightarrow] \\ \text{(i)} \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $(X;\mathcal{U})$ un espace uniforme. Notons que, pour tout $U \in \mathcal{U}$, $U \cap U^{-1}$ est symétrique : les entourages symétriques forment un système fondamental d'entourages. Aussi, pour tout U symétrique, construisons par récurrence une suite (V_n) d'éléments symétriques de $\mathcal{U}$ vérifiant : $V_0 = U$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$. Posons :

$$f_U(x;y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x;y) \notin V_0 \\ 2^{-n} & \text{si } (x;y) \in V_{n-1} \setminus V_n \\ 0 & \text{si } (x;y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \end{cases}$$

Posons également, suivant le principe des distances géodésiques :

$$d_U(x;y) = \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} f_U(a_k;a_{k+1}) \mid a_0 = x,\ a_k \in X,\ a_n = y\}.$$

Alors, clairement, $d_U(x;x) = 0$ pour tout x, et $d_U(x;y) = d_U(y;x)$ pour tous x et $y \in X$. Enfin, pour tous $x, y, z \in X$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe n et $p \in \mathbb{N}$, $a_0 = x$, $a_1, \dots, a_n = y = b_0, b_1, \dots, b_p \in X$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_U(a_k;a_{k+1}) \le d_U(x;y) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p-1} f_U(b_k;b_{k+1}) \le d_U(y;z) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

On a alors : $d_U(x;z) \le \sum_{k=0}^{n-1} f_U(a_k;a_{k+1}) + \sum_{k=0}^{p-1} f_U(b_k;b_{k+1})$, d'où : $d_U(x;z) \le d_U(x;y) + d_U(y;z) + \varepsilon$, et enfin, puisque cette dernière relation est vraie pour tout ε : $d_U(x;z) \le d_U(x;y) + d_U(y;z)$. Cela montre que d_U est un écart.

Si $(x;y) \in V_n$, on a : $f_U(x;y) \le 2^{-(n+1)}$, d'où $V_n \subset \{(x;y) \mid d_U(x;y) < 2^{-n}\}$. Soit $(x;y) \in X^2$ vérifiant $d_U(x;y) < 2^{-n}$. Il existe $q \in \mathbb{N}$, et $a_o = x$, $a_1,\dots,a_q = y$ tels que $\sum_{k=0}^{q-1} f_U(a_k;a_{k+1}) < 2^{-n}$. Si $q = 1$, on a $f_U(x;y) < 2^{-n}$, d'où $(x;y) \in V_{n-1}$. Supposons avoir montré, par récurrence sur q que, pour tous x et y , pour tout entier p , et tout entier $r \le q$, $(r > 0)$, si l'on a une séquence $a_o = x,\dots,a_r = y$ telle que $\sum_{k=0}^{r-1} f_U(a_k;a_{k+1}) < 2^{-p}$, alors $(x;y) \in V_{p-1}$. Cela étant, soit $a_o = x,\dots,a_{q+1} = y$ une séquence telle que $\sum_{k=0}^{q} f_U(a_k;a_{k+1}) < 2^{-n}$. Posons $\alpha = \sum_{k=0}^{q} f_U(a_k;a_{k+1})$, et soit s l'entier tel que : $\sum_{k=0}^{s-1} f_U(a_k;a_{k+1}) < \alpha/2$ et $\sum_{k=0}^{s+1} f_U(a_k;a_{k+1}) > \alpha/2$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$(a_o;a_s) \in V_n$, $(a_s;a_{s+1}) \in V_n$, $(a_{s+1};a_{q+1})$ V_n , d'où, puisque $V_n \circ V_n \circ V_n \subset V_{n-1}$, $(a_o;a_{q+1}) = (x;y) \in V_n$, ce qui achève la récurrence. Finalement, on a établi :

$$V_n \subset \{(x;y) \mid d_U(x;y) < 2^{-n}\} \subset V_{n-1} .$$

Soit $\mathcal{D}^+$ la famille saturée d'écarts déduite de la famille (d_U). La relation précédente montre que la structure uniforme engendrée par $\mathcal{D}^+$ n'est autre que $\mathcal{U}$.

(iii) ⟶ (i). Supposons que la topologie $\mathcal{T}$ de X soit associée à une famille d'écarts $\mathcal{D}$. Soient $x \in X$ et F un fermé ne contenant pas x . L'ensemble $X \setminus F$ est un voisinage de x . Il contient donc un voisinage O de x de la forme $O = \{y \mid (x;y) \in U\}$, où U est un entourage du système fondamental d'entourages défini par $\mathcal{D}^+$, c'est-à-dire un entourage de la forme : $\{(u;v) \in X \times X \mid d_\alpha(u;v) < \varepsilon\}$, avec $d_\alpha \in \mathcal{D}^+$, $\varepsilon > 0$. La fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, $z \mapsto 1 - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Inf}\{\varepsilon; d_\alpha(x;z)\}$ vérifie $f(x) = 1$, et $f = 0$ dans F .

(i) ⟶ (ii). Supposons que X soit un espace $T_{3\frac{1}{2}}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues $X \to [0;1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $f \in \mathcal{C}$, soit :

$$V(f,\varepsilon) = \{(x;y) \in X \times X \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon\} .$$

Les ensembles $\bigcap_{f_i \in P} V(f_i,\varepsilon)$ forment, lorsque P décrit l'ensemble des parties finies de $\mathcal{C}$, une base d'une structure uniforme, $\mathcal{U}$. Une simple vérification montre que $\mathcal{U}$ est compatible avec $\mathcal{T}$, parce que X est $T_{3\frac{1}{2}}$. ◼

1.4. LES PIEGES DE LA VIE DANS LES ESPACES NON SEPARES

Nous reprenons ici, pour l'essentiel, quelques idées tirées d'un guide établi par A. Wilansky [1[24]]. Nous allons voir les pièges, et pour chacun d'eux une ou plusieurs parades, avec des exemples d'utilisation.

Piège 17

• *Se méfier des sous-espaces fermés.* Quand X n'est pas séparé ($= T_2$), certains espaces, d'habitude fermés (quand X est T_2) ne le sont plus : par exemple, la diagonale $\Delta_X = \{(x;x) \mid x \in X\} \subset X \times X$. Par ailleurs, certaines propriétés, vraies pour les sous-espaces fermés des espaces séparés ne sont plus forcément vraies quand l'espace n'est plus séparé : un sous-espace fermé d'un espace normal ($= T_1 + T_4 = T_2 + T_4$) est normal. Mais un sous-espace fermé d'un espace T_4 n'est pas forcément T_4.

La parade consiste à remplacer les sous-espaces fermés par des rétracts : un sous-espace Y d'un espace topologique X est appelé un *rétract* de X s'il existe une application continue $f : X \to Y$ vérifiant : $f|_Y = \mathrm{Id}_Y$. On dit alors que f est une *rétraction* $X \to Y$.

Exemple 18 — Si un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'espaces topologiques est normal, alors chacun des X_i est normal. Pour le démontrer, on remarque que chaque X_i est homéomorphe à un sous-espace fermé du produit. Si les espaces ne sont pas séparés, cette démonstration ne marche plus. On peut néanmoins utiliser les rétracts : chaque X_i est homéomorphe à un rétract de $\prod X_i$ (grâce à la projection pr_i). Si $\prod X_i$ est T_4, il en est donc de même de chaque X_i.

Exemple 19 — Si X n'est pas séparé, la diagonale Δ_X n'est pas fermée. Mais le graphe d'une application continue $f : X \to Y$ est un rétract de $X \times Y$, grâce à l'application $X \times Y \to \mathfrak{G}(f)$, $(x;y) \mapsto (x;f(x))$. Alors, si X et Y sont séparés, $\mathfrak{G}(f)$ est fermé ; on retrouve le fait que Δ_X soit fermé si X est T_2 en prenant $f = \mathrm{Id}_X$.

Piège 20 • *Se méfier des applications continues.* Si X et Y sont séparés, une application continue $f : X \to Y$ a un graphe fermé. Si les espaces ne sont pas séparés, c'est en général faux. Comme c'est bien souvent le graphe fermé qui est important, un remède est de considérer les applications dont le graphe est fermé, plutôt que les applications continues.

Exemple 21 — Si X est compact, si Y est séparé, et si $f : X \to Y$ est continue, alors f est fermée (*i.e.* l'image d'un fermé est un fermé). Si Y n'est pas séparé, c'est faux. On a toutefois l'énoncé de substitution : si X est compact, et si $f : X \to Y$ a un graphe fermé, alors f est fermée.

Exemple 22 — Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{R}$, et si f est une application additive (*i.e.* $f(x+y) = f(x) + f(y)$) $E \to F$ dont le graphe est fermé, alors f est linéaire. En effet, comme dans le cas "espaces séparés-application continue", on établit d'abord $f(\frac{p}{q} x) = \frac{p}{q} f(x)$ pour $p/q \in \mathbb{Q}$. C'est ensuite que l'argument change : pour $t \in \mathbb{R}$, on fait tendre r vers t dans $\mathbb{Q}$. On a alors $r \to t$, puis $rx \to tx$, et $f(rx) = rf(x) \to tf(x)$. Comme $(rx ; rf(x)) \in \mathfrak{G}(f)$, et que $\mathfrak{G}(f)$ est fermé, on en déduit $(tx ; tf(x)) \in \mathfrak{G}(f)$, c'est-à-dire $f(tx) = tf(x)$.

Piège 23 • *Se méfier des espaces localement compacts.* Dans un espace séparé X, il est équivalent de dire : "tout point de X appartient à un ouvert dont la fermeture est compacte" ou "tout point de x a un voisinage compact". On dit alors que X est *localement compact*. Si X n'est pas séparé, et si l'on remplace compact par quasi-compact, il n'y a pas équivalence entre les deux assertions ainsi obtenues. On a donc deux définitions possibles D1 et D2 d'un espace localement quasi-compact, qui ne sont pas équivalentes : D1 : "tout point de X appartient à un ouvert dont la fermeture est quasi-compacte" et D2 : "tout point de X a un voisinage quasi-compact". Il est clair que D1 implique D2, mais voici un contre-exemple montrant que la réciproque est fausse.

Contre-Exemple 24 – On pose $X = \mathbb{N} \times \{1;2\}$ avec la topologie $\mathcal{T} = \{C \subset X \mid \mathbb{N} \times \{1\} \setminus C \text{ est fini}\}$. On vérifiera facilement que X est un espace T_1 localement quasi-compact au sens de D_2. Il n'est pas localement quasi-compact au sens de D_1, car la fermeture de tout ouvert non vide est l'espace tout entier, qui n'est pas quasi-compact.

Exemple 25 – Un autre exemple d'espace localement quasi-compact au sens de D2 mais pas au sens de D1 est $\mathbb{N}$ muni de la topologie $\{\emptyset; \{0\}; \{0;1\}; \{0;1,2\}; \ldots\}$. Mais ce n'est pas un espace T_1 ; c'est seulement un espace T_o (il est tout de même T_4).

Le remède au problème des espaces localement quasi-compacts est simple : préciser clairement la définition utilisée.

Piège 26 • *Redouter tout particulièrement les espaces quasi-compacts.* Rappelons que le mot anglais *compact* correspond au français *quasi-compact*, et que la traduction anglaise du mot français *compact* est *compact Hausdorff*. Beaucoup de propriétés vraies dans les espaces compacts deviennent fausses dans les espaces quasi-compacts. Ainsi, disons qu'un espace topologique X est localement quasi-compact si tout point de X admet une base de voisinages quasi-compacts. Dans un espace séparé, cette définition est équivalente à D1 et à D2. Mais dans un espace non séparé, c'est faux. Il est également faux, avec cette définition, qu'un espace quasi-compact soit localement quasi-compact, alors qu'un espace compact est localement compact (c'est comme pour la connexité : un espace connexe n'est pas forcément localement connexe. Voir chapitre 3, § 1). Un premier remède est de considérer l'axiome T_3, à la place de T_2 : un espace T_3 quasi-compact est également localement quasi-compact ; il est même T_4 et $T_{3\frac{1}{2}}$. Du fait de l'implication $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$, tous les espaces uniformes sont T_3. En particulier, tous les groupes topologiques et les espaces vectoriels topologiques sont T_3.

Dans un espace compact, les parties compactes sont exactement les parties fermées. C'est faux pour les quasi-compacts : toute partie fermée d'un espace quasi-compact est quasi-compacte, mais il peut y avoir des parties quasi-compactes qui ne soient pas fermées. Un remède pour pallier cet inconvévient est de considérer une classe d'espaces, intermédiaire entre T_2 et T_1, la classe des espaces KC : un espace est dit KC si toutes les parties quasi-compactes de cet espace sont également fermées. On a les implications : $T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow T_1$. Notons que ce remède est incompatible avec le précédent, car dans un espace localement quasi-compact, les propriétés T_2 et KC sont équivalentes. On a vu précédemment les propriétés extrémales des topologies compactes (remarque 13) ; en particulier, une topologie compacte est maximale dans la classe des topologies quasi-compactes sur un ensemble. Pour les topologies KC, on a la réciproque : une topologie quasi-compacte est maximale dans la classe des topologies quasi-compactes de l'ensemble si et seulement si elle est KC. (Voir exercice 5).

Un dernier remède pour les espaces quasi-compacts est de remplacer T_2 par symétrique : un espace est dit *symétrique* si la relation $x \in \{y\}^-$ implique $y \in \{x\}^-$. Dans un espace symétrique, on a les implications $T_o \Rightarrow T_1$, $T_4 \Rightarrow T_3$.

▶ Conclusions du guide : Il est heureux que la quasi-totalité des espaces de l'analyse soient séparés. C'est pour cette raison, et pour tous les pièges que l'on vient de voir que l'on ne considère, à un niveau élémentaire, que des espaces séparés. On ne saurait trop recommander de s'en tenir à cette stratégie.

2. SOUS-ESPACES DENSES ; SÉPARABILITÉ ; PROLONGEMENT DES FONCTIONS

Définition 4.— Soient X un espace topologique, A une partie de X, et x un point de X. On dit que A est *dense* en x si tout voisinage de x contient un ouvert inclus dans $\bar{A}$. On dit que A est *dense* dans X, ou est *partout dense* si A est dense en chaque point de X. Cela revient à dire : $\bar{A} = X$.

On dit que A est *nulle part dense*, ou encore *rare* si A n'est dense en aucun point de X. Cela revient à dire : $(\bar{A})^{o} = \emptyset$. Certains qualifient de *non denses* les ensembles nulle part denses. Nous éviterons ici d'utiliser cette expression, car "nulle part dense" n'est pas la négation de "partout dense". Toute réunion finie d'ensembles rares est un ensemble rare. Les réunions dénombrables d'ensembles rares s'appellent ensembles *maigres*, ou de *première catégorie*. Le complémentaire d'un ensemble maigre s'appelle un *résiduel*. Lorsque dans X tout ensemble maigre est d'intérieur vide, on dit que X est un *espace de Baire*. Le théorème de Baire (*cf.* § 5, théorème 59) affirme que tout espace métrique complet est un espace de Baire.

Exemples 27 (triviaux) Dans $\mathbb{R}$:

- $]0;1]$ est dense en 0.
- $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas dense en 0, bien que 0 soit adhérent à A.
- Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont partout denses. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est maigre, mais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne l'est pas.

Remarque 28.— On dit qu'un espace topologique X est *dense en lui-même* s'il n'a pas de points isolés. Cela ne correspond pas à la notion de "dense en tous ses points". En outre la propriété d'être dense en lui-même est une propriété intrinsèque de l'espace. Au contraire, si Y est dense dans X, ce n'est pas une propriété propre de Y, mais une propriété du couple $(X;Y)$.

2.1. ESPACES SEPARABLES

Définition 5.— On dit qu'un espace topologique X est *séparable* s'il existe une partie dénombrable $A \subset X$ qui est dense dans X.

Le piège le plus fréquent dans lequel on puisse trébucher sur les espaces séparables consiste à affirmer qu'un sous-espace d'un espace séparable est lui-même séparable. C'est faux :

En général, les parties d'un espace séparable ne sont pas séparables.

Contre-exemple 29 (*D. Henkel*).— Soit X l'ensemble des nombres réels muni de la topologie $\mathcal{S}$ dont les ouverts sont les ensembles vides ou de la forme $V = U \setminus K$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}$, et où K est une partie dénombrable de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (5). L'ensemble R (resp. I) des nombres rationnels (resp. irrationnels) (6) est dense dans X, car tout élément de $\mathcal{S}$ contient un élément de R (resp. I). Pourtant, I n'est pas séparable. En effet, soit J une partie dénombrable de I. Alors, $I \setminus J$ est un ouvert de I qui ne rencontre pas J, ce qui montre que J n'est pas dense dans I. Notons que X est un espace séparé, et même complètement régulier, et que la partie non séparable de X que l'on a exhibée est dense dans X.

▶ On a néanmoins les deux énoncés positifs suivants :

Proposition 30.– *Soient* X *un espace métrique séparable et* $A \subset X$. *Alors* A *est un espace métrique séparable.*

Démonstration.– Soit (x_n) une suite de points de X dense dans X . Les boules $B(x_n\,;\,1/p)$ forment une base dénombrable de la topologie de X . Les ensembles $B(x_n;1/p)\cap A$ forment aussi une base dénombrable de la topologie de A . Pour tous n,p tels que $B(x_n;1/p)\cap A \neq \emptyset$, soit $a_{n,p}$ un point de $B(x_n;1/p)\cap A$. Les $a_{n,p}$ forment une partie dénombrable dense dans A . ■

Remarque et contre-exemple 31.– Dans la démonstration de la proposition 30, les $B(x_n,1/p)$, $p\in\mathbb{N}^*$ forment, pour chaque x_n , un système fondamental de voisinages de x_n . On n'aurait pas pu remplacer les $B(x_n,1/p)$, $p\in\mathbb{N}^*$, par un système fondamental quelconque de x_n . En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chaque x_n, $\{B(x_n;2^{-k}), k>n\}$ forme un système fondamental dénombrable de voisinages de x_n . Mais $\bigcup_{n\in\mathbb{N},k>n} B(x_n;2^{-k})$ ne recouvre pas $\mathbb{R}$, car la mesure de Lebesgue de cet ensemble est 1 .

Théorème 32 (*Marczewski-Pondiczery-Hewitt*) .– *Soient* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infini* (7) , *et* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille d'espaces topologiques. Si* card $A\le 2^{\mathfrak{m}}$, *et si, pour tout* $\alpha\in A$, X_α *admet une partie dense de cardinal* $\le\mathfrak{m}$, *alors* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *admet également une partie dense de cardinal* $\le\mathfrak{m}$.

Démonstration.– Commençons par supposer le résultat vrai dans le cas particulier où les espaces sont tous égaux à l'espace discret D de cardinal $\mathfrak{m}$. On suppose donc que si $Y_\alpha = D$ pour tout $\alpha\in A$, $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ a une partie dense de cardinal $\le\mathfrak{m}$. Alors, pour tout $\alpha\in A$, il existe une application continue $\phi_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha$ dont l'image est une partie dense de X dont le cardinal est $\le\mathfrak{m}$. Il s'ensuit que l'application produit $\Pi\phi_\alpha : \Pi Y_\alpha \to \Pi X_\alpha$ envoie toute partie dense E de ΠY_α sur une partie dense de $\Pi\phi_\alpha\,(\Pi Y_\alpha)$. Mais $\Pi\phi_\alpha(\Pi Y_\alpha)$ est une partie dense de ΠX_α , comme produit de parties denses, et parce qu'une partie dense de partie dense est elle-même une partie dense. Ainsi, $\Pi\phi_\alpha\,(E)$ est une partie dense de ΠX_α .

Reste donc à démontrer le cas particulier. Clairement, il suffit de montrer que si $Y_\alpha = D$, pour tout $\alpha\in 2^{\mathfrak{m}}$, alors $Y = \prod_{\alpha\in 2^{\mathfrak{m}}} Y_\alpha$ a une partie dense de cardinal $\le\mathfrak{m}$. On identifie $2^{\mathfrak{m}}$ et $\mathcal{P}(D)$. Soit $\mathcal{P}_f(D)$ l'ensemble des parties finies de D . Pour tout ensemble fini ε , on note Z_ε l'ensemble $D^{2^{\operatorname{card}\varepsilon}}$ que l'on identifie à $\prod_{\rho\in\mathcal{P}(\varepsilon)} D_\rho$, avec $D_\rho = D$ pour tout $\rho\in\mathcal{P}(\varepsilon)$. Soit E la partie de $\prod_{\alpha\in 2^{\mathfrak{m}}} Y_\alpha$ ainsi définie :

$$E = \bigcup_{\delta\in\mathcal{P}_f(D)} \ \bigcup_{z\in Z_\delta} \{(y_\alpha)_{\alpha\in 2^{\mathfrak{m}}} \mid y_\alpha = z_{\alpha\cap\delta}\}$$

L'ensemble $\mathcal{P}_f(D)$ est de cardinal $\mathfrak{m}$, et il en est de même de E . Montrons que E est dense dans Y . Soit O un ouvert élémentaire de Y . Il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in 2^{\mathfrak{m}}$, et $F_1,\dots,F_n\subset D$ tels que $O = \prod_{\alpha\in 2^{\mathfrak{m}}} G_\alpha$, avec $G_\alpha = F_i$ si $\alpha=\alpha_i$, $1\le i\le n$, et $G_\alpha = F_\alpha$ sinon. Soit δ une partie finie de D telle que $\delta\cap\alpha_i \neq \delta\cap\alpha_j$ si $i\neq j$. Ceci est possible, car les α_i sont distincts. Soit, pour tout i , $1\le i\le n$, $d_i\in F_i$. Soit $z = (z_o,\dots,z_{2^{\operatorname{card}\delta}})$ un élément de Z_δ vérifiant : $z_{\delta\cap\alpha_i} = d_i$, $1\le i\le n$. Alors, l'élément $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ de Y défini par $y_\alpha = z_{\alpha\cap\delta}$

appartient à E et à O , ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 33.– *Si* A *est un ensemble de cardinal* $\leq \mathfrak{c}$ *(le continu), et si* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est une famille d'espaces topologiques séparables, l'espace* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *est également séparable.*

Définition 6.– Soit X un espace topologique. On appelle *caractère de densité* de X , et l'on note $\Xi(X)$, le plus petit cardinal $\mathfrak{m}$ tel que X admette une partie dense du cardinal $\mathfrak{m}$.

Proposition 34 (*POSPÍŠIL, 1937*).– *Soit* X *un espace topologique séparé. Alors* $\mathrm{card}(X) \leq 2^{2^{\Xi(X)}}$.

Démonstration.– Soient X un espace topologique séparé, et D une partie dense de X de cardinal $\Xi(X)$. Pour tout point p de X , soient $\mathcal{V}_p$ un système fondamental de voisinages de p , et $\mathcal{D}_p$ la famille des ensembles de la forme $U \cap D$, avec $U \in \mathcal{V}_p$. L'association $p \to \mathcal{D}_p$ définit une application $X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$. Cette application est injective, car si $x \neq y \in X$, il existe $U \in \mathcal{V}_x$ et $V \in \mathcal{V}_y$ tels que $V \cap U = \emptyset$. On a alors $U \cap D \in \mathcal{D}_x$ et $U \cap D \notin \mathcal{D}_y$. On en déduit :

$$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))) = 2^{2^{\Xi(X)}}$$ ■

► En particulier, le continu, $\mathfrak{c}$, est égal à $2^{\aleph_0}$. Un espace topologique séparé et séparable X vérifie donc : $\mathrm{card}(X) \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Application 35.– D'après le théorème 31, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}$ sont séparables, tandis que d'après la proposition 33, $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})}$ ne l'est pas. Plus généralement, on verra (chapitre 3, corollaire 15) que le cardinal d'un continu (= compact connexe) métrisable X non réduit à un point est $\mathfrak{c}$. Les espaces X^X , $\mathbb{R}^X$ sont donc séparables.

Mais $X^{(X^X)}$, $X^{(X^{\mathbb{R}})}$, $\mathbb{R}^{(X^X)}$ etc. ne le sont pas. Notons également que dans le cas particulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il est facile de prouver directement que c'est un espace séparable. Il suffit pour cela de considérer les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des fonctions caractéristiques des intervalles dont les extrémités sont dans $\mathbb{Q}$.

2.3. PROLONGEMENT DES FONCTIONS

L'une des principales utilisations des sous-espaces denses est le prolongement (continu) à tout l'espace de fonctions (continues) définies sur un sous-espace dense. Voici un énoncé assez général, dû à Taimanov, dont nous nous servirons dans le chapitre 3 (théorème 14).

Théorème 36 (*Taimanov, 1952*).– *Soient* Z *un espace topologique,* X *une partie dense de* Z , Y *un espace compact, et* f *une application continue* $X \to Y$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que f *admette un prolongement continu* $\hat{f} : Z \to Y$ *est que, pour toute paire* $\{K;L\}$ *de fermés disjoints de* Y , *les ensembles* $\overline{f^{-1}(K)}^{Z}$ *et* $\overline{f^{-1}(L)}^{Z}$ *soient disjoints.*

Démonstration.– Il est évident que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit f une fonction y satisfaisant. Pour tout $z \in Z$, désignons par $\mathcal{W}(z)$ l'ensemble des voisinages ouverts de z , et par $\mathcal{K}(z)$ l'ensemble des fermetures, dans Y , des $f(O \cap X)$, où

$O\in\mathcal{W}(z)$. Comme l'intersection de deux éléments de $\mathcal{W}(z)$ appartient encore à $\mathcal{W}(z)$, il en est de même des éléments de $\mathcal{K}(z)$. Mais puisque ce sont des compacts de Y , leur intersection est non vide. Montrons que $F(z) = \bigcap_{K\in\mathcal{K}(z)} K$ est un singleton. Soient $t\in F(z)$, et V un voisinage de t (non nécessairement ouvert). Alors, pour tout $O\in\mathcal{W}(z)$, $\overline{f(O\cap X)}^{Z}\cap V\neq\emptyset$, et donc, $X\cap O\cap f^{-1}(V)\neq\emptyset$, ce qui montre $z\in\overline{f^{-1}(V)}^{Z}$. Cela étant, supposons que $F(z)$ ne soit pas réduit à un point, et soient s et t deux éléments distincts de $F(z)$. Puisque le compact Y est T_3 , les points s et t admettent deux voisinages fermés disjoints S et T . D'après la propriété établie ci-dessus, S et T vérifient : $z\in\overline{f^{-1}(S)}^{Z}\cap\overline{f^{-1}(T)}^{Z}$, ce qui est contraire à la condition de l'énoncé. Ainsi, $F(z)$ est un singleton. Puisque f est continue sur X , on a, pour tout $x\in X$, l'égalité $F(x)=\{f(x)\}$. Soit $\hat{f}$ l'application $Z\to Y$ définie par $\hat{f}(z)\in F(z)$, pour tout $z\in Z$. Il faut montrer que $\hat{f}$ est un prolongement continu. Supposons par l'absurde que $\hat{f}$ ne soit pas continue. Il existe $z\in Z$, U un voisinage ouvert de $\hat{f}(z)$, tels que, pour tout voisinage ouvert V de z , on ait : $\hat{f}(V)\cap Y\setminus U\neq\emptyset$. Soit W un voisinage fermé de $\hat{f}(z)$ inclus dans U . Il vérifie : $W_1\cap Y\setminus U=\emptyset$. Alors, pour tout voisinage V de z , il existe $x\in X$ tel que $f(x)\in Y\setminus W$. En effet, soit $t\in V$ tel que $\hat{f}(t)\in Y\setminus U$. Par définition de $\hat{f}$, il existe un élément O de $\mathcal{W}(t)$ tel que : $\overline{f(O\cap X)}\cap W=\emptyset$. Comme $O\cap X\neq\emptyset$, puisque X est dense dans Z , il existe $x\in X$ tel que $f(x)\in Y\setminus W$. En particulier, pour tout $V\in\mathcal{W}(z)$, on a $\overline{f(V)}\cap(X\setminus W)\neq\emptyset$, d'où $z\in\overline{f^{-1}(X\setminus W)}^{Z}$. Soit enfin K un voisinage fermé de $\hat{f}(z)$ inclus dans W et vérifiant : $K\cap\overline{(Y\setminus W)}=\emptyset$. On a, d'après la propriété établie au début, $z\in\overline{f^{-1}(K)}^{Z}$. Les deux relations $z\in\overline{f^{-1}(K)}^{Z}$ et $z\in\overline{f^{-1}(X\setminus W)}^{Z}$ contredisent l'hypothèse de l'énoncé. ■

Le théorème suivant nous servira abondamment :

Théorème 37 (*Tietze et Urysohn*).– *Soit X un espace topologique séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est normal (i.e. T_4 puisque X est déjà T_2)*

(ii) *Pour tous fermés disjoints A et B de X, l'application $f : A\cup B\to[0;1]$ telle que $f(x)=0$ si $x\in A$ et $f(x)=1$ si $x\in B$ admet un prolongement continu $X\to[0;1[$.*

(iii) *Pour tout fermé $A\subset X$ et toute application continue $f : A\to[0;1[$, il existe un prolongement continu g de f, de X dans $[0;1[$.*

L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) (resp. (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)) est connue sous le nom de caractérisation d'Urysohn (resp. Tietze) des espaces normaux.

Démonstration.– On va établir (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) , puis (iii) $\Longrightarrow$ (ii) et (i+ii) $\Longrightarrow$ (iii).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) • Supposons que X soit normal, et soient A et B deux fermés disjoints de X . On va construire, pour tout nombre dyadique $r=k/2^n$, $0\le k\le 2^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, de $[0;1]$, un ouvert $U(r)$, de telle façon que la famille $U(r)$ vérifie :
$r<r' \Longrightarrow \overline{U(r)}\subset U(r')$ (1) . Soit D l'ensemble des nombres dyadiques de $[0;1]$. Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on pose : $D_m=\{k/2^m,\ 0\le k\le 2^m\}$. On a donc : $D=\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} D_m$, et $D_1\subset D_2\subset\ldots\subset D_m\subset D_{m+1}\subset\ldots$
En outre, $D_{m+1}\setminus D_m=\{k/2^{m+1},\ 0<k<2^{m+1},\ k \text{ impair}\}$ (2) . Construisons les $U(r)$ par récurrence sur les éléments de D_m . Pour $m=1$, on pose : $U(1)=B^c$, et $U(0)$ est,

d'après T_4, un ouvert qui vérifie : $A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset U(1)$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons les $U(r)$ construits pour tous les $r \in D_m$, et satisfaisant à la condition (1). D'après (2), il suffit de construire les $U(r)$ pour $r = k/2^{m+1}$, avec k impair $\in]0;2^{m+1}[\cap \mathbb{N}$. Soit donc k un tel entier. D'après l'axiome T_4, appliqué à $\overline{U((k-1)/2^{m+1})}$ et à $U((k+1)/2^{m+1})$, il existe un ouvert V qui vérifie : $U((k-1)/2^{m+1}) \subset V \subset \bar{V} \subset U((k+1)/2^{m+1})$. On prend pour $U(k/2^{m+1})$ un tel V. Il est clair qu'avec un tel choix (dépendant, voir Appendice), la condition (1) est vérifiée pour tous les $r, r' \in D_{m+1}$, ce qui montre la récurrence. Cela étant, on pose: $V(r) = U(r)$ si $r \in D \setminus \{1\}$, et $V(1) = X$. Les $V(r)$ satisfont encore à la condition (1). On pose, pour tout $x \in X$, $\bar{f}(x) = \inf\{r \mid x \in V(r)\}$. Il est clair que l'on a : $A \subset \bar{f}^{-1}(\{0\})$, $B \subset \bar{f}^{-1}(\{1\})$, et $\bar{f}(X) \subset [0;1]$. Il faut montrer que $\bar{f}$ est continue. Soient $x \in X$, $\varepsilon > 0$, r_1 et $r_2 \in D$ tels que : $\bar{f}(x) - \varepsilon < r_1 < \bar{f}(x) < r_2 < \bar{f}(x) + \varepsilon$. L'ensemble $V(r_2) \setminus \overline{V(r_1)}$ est un voisinage de x, et tout point y de $V(r_2) \setminus \overline{V(r_1)}$ vérifie : $\bar{f}(y) \le r_2$ car $y \in V(r_2)$, et $\bar{f}(y) \ge r_1$ car $y \notin V(r_1)$. On en déduit la continuité de $\bar{f}$ qui est un prolongement continu de f.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) ● Supposons que X vérifie (ii), et soient A et B deux fermés disjoints non vides de X. Il existe une fonction continue $f : X \to [0;1]$ qui vérifie : $f(A) \subset \{0\}$, $f(B) \subset \{1\}$. Alors, $f^{-1}([0;1/3[)$ et $f^{-1}(]2/3;1])$ sont des ouverts disjoints contenant respectivement A et B.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) ● C'est évident car si A et B sont deux fermés, $A \cup B$ est un fermé.

(i+ii) $\Longrightarrow$ (iii) ● Supposons que X soit un espace normal. D'après ce qui précède, il vérifie (ii). Soit A un fermé. Notons d'abord le résultat suivant : (1) si g est une fonction continue $A \to [a;b] \subset [0;1]$, il existe une fonction continue $h : X \to [0;b/3]$ qui vérifie : $|g(x)-h(x)| < 2b/3$, pour tout $x \in A$ (2). En effet, les ensembles $F = \{x \in A \mid g(x) \ge 2b/3\}$ et $H = \{x \in A \mid g(x) \le b/3\}$ sont deux fermés disjoints de A, donc de X. D'après (ii), il existe une fonction d'Urysohn $h : X \to [0;2b/3]$ qui vérifie : $h(x) = 0$ si $x \in H$, $h(x) = 2b/3$ si $x \in F$. Il est clair que h satisfait à (2). Cela étant, soit f une fonction continue $A \to [0;1]$. D'après (1), il existe une fonction $h_0 : X \to [0;1]$ telle que $|f-h_0| \le 2/3$ sur A, et $|h_0| \le 1/3$. En appliquant de nouveau (1) à $f-gh_0$, on voit qu'il existe $h_1 : X \to [0;(1/3) \times (2/3)]$ tel que : $|f-h_0-h_1| < (2/3)^2$ sur A. Par applications successives de (1), on obtient une suite (h_n) de fonctions $h_n : X \to [0;\ (2/3)^{n-1} \times (1/3)]$ qui vérifient : $|f-h_0-\dots-h_n| \le (2/3)^n$. La fonction $F = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n$ est continue, d'après le découpage

$$|F(x)-F(y)| \le \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} h_k(x)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} (h_k(x)-h_k(y))\right|$$

$$+ \left|F(y) - \sum_{k=0}^{n} h_k(y)\right|$$

En outre, elle vérifie : $F|_A = f$ et $|F| \le 1$.

Supposons à présent que f soit à valeurs dans $[0;1[$. La fonction F ci-dessus est à valeurs dans $[0;1]$. Posons $B = F^{-1}(\{1\})$. C'est un fermé disjoint de A, et d'après (2), il existe une fonction d'Urysohn $g : X \to [0;1]$ valant 1 sur A et 0 sur B. Alors, $g \circ F$ est un prolongement de f à X qui prend ses valeurs dans $[0;1[$, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 38.- Si $f : A \to \mathbb{R}$ est à valeurs dans $]0;1[$, le même raisonnement que dans la dernière étape de (i+ii) $\Longrightarrow$ (iii) montre qu'il existe un prolongement continu $F : X \to]0;1[$. Par homéomorphisme, on voit également que si f est une application continue de A dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, elle admet un prolongement F de X dans *le même* intervalle J .

▶ Interprétation fonctionnelle du théorème de Tietze-Urysohn.

Rappelons que, pour tout espace topologique Y , on note $C_b(Y)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées $Y \to \mathbb{R}$ muni de la norme sup.

Soient X un espace normal, et A un fermé de X . Le théorème de Tietze-Urysohn peut s'exprimer ainsi : "Il existe une application $\eta : C_b(A) \to C_g(X)$, appelée *extenseur*, telle que, pour tout $f \in C_b(A)$, on ait : $[\eta(f)]|_A = f$" . Cette formulation du théorème amène immédiatement les questions suivantes : existe-t-il un extenseur linéaire ? un extenseur continu ? un extenseur linéaire et continu ? Si X est un espace normal, les réponses sont respectivement oui, oui et non. Dugundji a montré que si X est un espace métrique, la réponse aux trois questions est oui (cf. [26]) .

Proposition 39 (*avec l'axiome du choix, A.C.*).- *Soit* A *un sous-espace fermé d'un espace normal* X . *Alors il existe un extenseur linéaire* $\eta : C_b(A) \to C_b(X)$.

La démonstration utilise le théorème de Tietze-Urysohn (théorème 38).

Démonstration.- Soit, grâce à l'axiome du choix, $\mathcal{B}$ une base de l'espace vectoriel $C_b(A)$. D'après le théorème de Tietze-Urysohn, pour tout $f \in \mathcal{B}$, il existe un prolongement $\theta(f)$, de f à X . On appelle η l'application linéaire unique qui coïncide avec θ sur $\mathcal{B}$. C'est l'extenseur cherché. ■

Proposition 40.- *Soit* A *un sous-espace fermé d'un espace normal* X. *Il existe un extenseur continu* $\eta : C_b(A) \to C_b(X)$.

La démonstration utilise les théorèmes 9 et 38, et le fait que pour un fermé A d'un espace normal X , l'espace βA soit homéomorphe à l'adhérence de A dans βX .

Démonstration.- Supposons d'abord que X soit compact, et que A soit fermé dans X . Comme X est compact, et que $C_b(A)$ est métrisable, $X \times C_b(A)$ est un espace normal ; $A \times C_b(A)$ est fermé dans $X \times C_b(A)$. Soit F l'application $A \times C_b(A) \to \mathbb{R}$, $(x;f) \mapsto f(x)$. C'est une application continue, qui admet donc, d'après le théorème de Tietze-Urysohn, un prolongement $\hat{F} : X \times C_b(A) \to \mathbb{R}$. Pour tout $f \in C_b(A)$, et tout $x \in X$, on pose : $\hat{f}(x) = \hat{F}(x;f)$. Alors, $\hat{f}$ est continue, et du fait de la compacité de X , l'application $\eta : C_b(A) \to C_b(X)$, $f \to \hat{f} = \eta(f)$ est continue.

Si X n'est pas compact, c'est néanmoins un espace normal, donc complètement régulier. Il admet un compactifié de Stone-Čech (*cf.* théorème 9), βX . Dans ce compactifié, l'adhérence de A est homéomorphe à βA (car X est normal) (*cf.* chapitre 6). Ainsi, toute application $f \in C_b(A)$ a un prolongement unique de βf de βA (identifié à l'adhérence de A dans βX) dans $\mathbb{R}$. Or, dans le compact βX , il existe un extenseur continu $\beta\eta : C_b(\beta A) \to C_b(\beta X)$ qui prolonge tout βf en une application $\eta(\beta f) : \beta X \to \mathbb{R}$. L'application $C_b(A) \to C_b(X)$, $f \to [\eta(\beta f)]|_X$ est un extenseur continu. ■

Remarques 41

■ Si η_1 est un extenseur continu de $C_b(A)$ vers $C_b(X)$, on obtient un extenseur continu η_2 préservant les bornes en posant : $\eta_2 = M \circ m \circ \eta_1$, avec

$$m(f)(x) = \max\{f(x)\ ;\ \inf\{f(a) \mid a \in A\}\} \quad , \text{ et } \quad M(f)(x) = \min\{f(x)\ ;\ \sup\{f(a) \mid a \in A\}\}$$

■ On verra (volume 6) une démonstration "banachique" directe de la proposition 40, en utilisant le théorème de Bartle-Graves.

■ La restriction $f \in C_b(X) \to f|_A \in C_b(A)$ étant continue, tout extenseur η est un homéomorphisme de $C_b(A)$ sur $\eta(C_b(A))$, et $\eta(C_b(A))$ est un rétract de $C_b(X)$, une rétraction étant donnée par : $f \in C_b(X) \mapsto \eta(f|_A) \in \eta(C_b(A))$.

Proposition 42.– *Soient* X *un espace séparable complètement régulier, ayant un sous-espace fermé non séparable* A *qui possède une famille non dénombrable* $(U_i)_{i\in I}$ *d'ouverts relatifs disjoints deux à deux. Alors il n'y a pas d'extenseur linéaire et continu* $C_b(A) \to C_b(X)$.

Démonstration.– Supposons par l'absurde qu'il existe un extenseur linéaire continu $\eta : C_b(A) \to C_b(X)$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, si $f \in C_b(A)$, on ait : $\|\eta(f)\| \le n\|f\|$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille non dénombrable d'ouverts relatifs de A disjoints deux à deux. Pour tout $i \in I$, soit x_i un point de U_i, et soit f_i une fonction d'Urysohn $A \to [0;1]$ associée à x_i et à $A \setminus U_i$: $f_i(x) = 0$ si $x \in A \setminus U_i$, $f_i(x_i) = 1$. Posons : $V_i = \{x \in X \mid \eta(f_i)(x) > 1/2\}$. Alors V_i est un ouvert non vide de X, et, comme X est séparable, il existe une partie non dénombrable $J \subset I$ vérifiant : $\cap\{V_i \mid i \in J\} \neq \emptyset$. Soit y un point de cet ensemble. Soient $i_1, \dots, i_{2n}$ $2n$ éléments distincts de J. On pose : $g = \sum_{k=1}^{2n} f_{i_k}$. Comme les U_i sont disjoints deux à deux, on a : $\|g\| = 1$. On en déduit $n = n\|g\| \ge \|\eta(g)\| \ge \eta(g)(y) = \sum_{k=1}^{2n} \eta(f_{i_k})(y) > 2n.\frac{1}{2} = n$, ce qui est impossible. ■

On verra au chapitre 6 un exemple d'espace X ayant les propriétés de la proposition précédente. Il s'agit de $\beta\mathbb{N}$, la compactifié de Stone-Cech de $\mathbb{N}$, et du sous-espace fermé $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Le problème de l'existence d'un prolongement continu d'une application linéaire continue définie sur un sous-espace dense d'un espace de Banach sera traité dans le volume 6.

Le deuxième grand théorème de prolongement en topologie est celui de Bing : si A est un fermé d'un espace métrisable X, et si d est une distance sur A, il existe une distance sur X qui est un prolongement de d. En raison de la technique utilisée pour la démonstration, nous démontrerons ce théorème au § 6, avec le théorème de métrisabilité de Bing.

3. FILTRES, FILETS ET SUITES

Le but de cette section est triple :

- dégager les liens entre filtres, filets et suites,

- expliquer quand l'emploi des filtres ou des filets s'impose,
- préciser quand l'usage des suites est suffisant, en mettant particulièrement en garde contre certaines interprétations erronées d'énoncés comme : "dans un espace métrique, les suites suffisent".

Il ne s'agit donc pas de refaire un cours complet sur ces concepts, mais d'arriver rapidement au coeur des sujets ci-dessus. En particulier, on commencera par des rappels des définitions et propriétés élémentaires. Cet aide-mémoire sans démonstrations est surtout destiné à permettre la lecture d'articles ou de livres se rattachant à une école mathématique autre que celle à laquelle on est habitué : En effet, les filtres ont été définis par H. Cartan (A. Weil), et les ouvrages de langue française oublient souvent les filets. Inversement, les filets ont été introduits par Moore, et étudiés par Schmidt, et certains ouvrages ou articles anglo-saxons semblent ignorer les filtres. Bien que mathématiquement, l'une ou l'autre de ces notions soit suffisante (ainsi qu'on le verra, elles sont équivalentes), on a intérêt à connaître les deux, d'une part pour pouvoir lire les articles de topologie, d'autre part pour utiliser dans chaque cas la notion la plus appropriée : quand il s'agit de traiter un problème d'espace compact (ou quasi-compact), il est généralement plus commode d'utiliser les filtres ; mais pour prouver qu'un ensemble est fermé, les filets sont souvent préférables aux filtres. Par ailleurs, les filets ont un avantage pédagogique : ils apparaissent comme une généralisation immédiate des suites, ce qui facilite l'enseignement de la topologie générale à des étudiants ayant déjà étudié les espaces métriques. D'un autre côté, les filtres apparaissent naturellement dans certains problèmes. Chacun connaît l'exemple classique des structures uniformes. Mais plus "terre à terre", B.S. Thomson a montré en 1982 que l'utilisation systématique de bases de filtres permet d'obtenir une théorie unifiée des différentes notions de dérivation et d'intégration des fontions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous développerons en détail cette nouvelle théorie dans le volume 4, mais nous nous verrons ici quelques exemples des filtres qu'il utilise.

3.1. DEFINITIONS ET RAPPELS DES PROPRIETES ELEMENTAIRES

Définition 7.– Soit X un ensemble. On dit qu'une partie non vide F de $\mathcal{P}(X)$ est un *filtre* si elle satisfait aux axiomes suivants :

(i) $\emptyset \notin F$

(ii) $(A,B \in F) \Longrightarrow (A \cap B \in F)$

(iii) $(A \in F$ et $A \subset B \subset X) \Longrightarrow (B \in F)$.

On dit qu'une partie non vide F de $\mathcal{P}(X)$ est une *base de filtre* si elle satisfait à l'axiome (i) précédent, et au suivant :

(iv) $(A,B \in F) \Longrightarrow (\exists Z \in F,\ Z \subset A \cap B)$

Si $\mathcal{B}$ est une base de filtre sur X , l'ensemble F des parties de X contenant un élément de $\mathcal{B}$ est un filtre, appelé *filtre engendré par* $\mathcal{B}$.

Soit $(D,\leq)$ un ensemble ordonné. On dit que D est *dirigé, filtré, filtré à droite, filtrant* ou *filtrant à droite* si, pour tout couple $(\alpha;\beta)$ d'éléments de D , il existe $\gamma \in D$ vérifiant $\alpha \leq \gamma$ et $\beta \leq \gamma$. Autrement dit, toute paire de D est majorée. On appelle *filet* de X toute application $D \to X$, où D est un ensemble filtrant. Si $D = \mathbb{N}$, on parle de suite, plutôt que de filet. Par analogie avec les suites, un filet est noté $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$.

▶ Liens ensemblistes entre filtres et filets

Si $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ est un filet sur X, l'ensemble $\mathcal{B} = \{\{x_\alpha \mid \alpha \geq \alpha_0\} \mid \alpha_0 \in D\}$ est une base de filtre sur X. Le filtre engendré par $\mathcal{B}$ est appelé *le filtre des sections* du filet (x_α). Inversement, si $\mathcal{F}$ est un filtre, c'est aussi un ensemble filtrant pour la relation d'inclusion : $A \leq B$ ssi $A \supset B$.

On obtient un filet associé en choisissant, pour tout $A \in \mathcal{F}$, un $x_A \in A$.

▶ Comparaison des filtres. Ultrafiltres

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres sur X. On dit que $\mathcal{F}_1$ est plus fin que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. La relation "est plus fin que" est une relation d'ordre sur l'ensemble des filtres sur un ensemble X. Muni de cet ordre, cet ensemble est inductif, c'est-à-dire que toute partie finie admet en majorant. En effet, si $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ sont des filtres sur X, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ est un filtre sur X, plus fin que chacun des $\mathcal{F}_i$. Il découle donc du théorème de Zorn (*i.e.* de l'axiome du choix) que tout filtre admet un majorant maximal. Les filtres maximaux sont appelés les ultrafiltres. Un filtre sur X est un ultrafiltre si et seulement si, pour toute partition $X = X_1 \cup X_2$, on a $X_1 \in \mathcal{F}$ ou $X_2 \in \mathcal{F}$.

Proposition 43 (*St André, 1971*).– *Soit X un ensemble infini. Soit $\mathcal{F}_c$ le filtre formé des parties de X dont le complémentaire est fini. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur X.*

Alors, ou bien $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{F}_c$, ou bien il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{F}$ soit l'ensemble des parties de X contenant x.

Autrement dit, ou bien $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{F}_c$, ou bien $\mathcal{F}$ est principal (*i.e.* de la forme $\{A \subset X \mid x \in A\}$.

Démonstration.– Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas plus fin que $\mathcal{F}_c$. Il existe alors $A \in \mathcal{F}_c$ tel que : $A \notin \mathcal{F}$. Puisque $A \in \mathcal{F}_c$, A^c est une partie finie de X, et comme $A \notin \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$. Il existe $x \in A^c$ tel que $\{x\} \in \mathcal{F}$, car autrement, on aurait $A = \cap \{X \setminus \{x\} \mid x \in A^c\} \in \mathcal{F}$, ce qui contredirait la définition de A. ■

La proposition 43 n'a de sens que dans ZFC, la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel à laquelle on ajoute l'axiome du choix. C'est ce dernier axiome qui fournit l'existence d'ultrafiltres non principaux. Si l'on considère d'autres variantes de ZF, par exemple ZF + AD, obtenue en ajoutant au système de Zermelo-Fraenkel l'axiome de détermination, on n'a plus forcément l'existence d'ultrafiltres non principaux (voir Appendice § 4.10).

▶ Images et images réciproques de filtres

Soient toujours X un ensemble, Y un autre ensemble, f une application $X \to Y$, g une application $Y \to X$, $\mathcal{F}$ un filtre sur X, et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur X. Alors :

- $f(\mathcal{F})$ et $f(\mathcal{B})$ sont des bases de filtres de Y. Le filtre engendré par $f(\mathcal{F})$ est appelé le *filtre image* de $\mathcal{F}$ par f.

• Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et si f est surjective, $f(\mathcal{F})$ est un ultrafiltre.

• $g^{-1}(\mathcal{F})$ est une base de filtre de Y si et seulement si $\emptyset \notin g^{-1}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de $\mathcal{F}$ rencontre $g(Y)$.

▶Exemples fondamentaux de filtres, de bases de filtres

• Sur $\mathbb{N}$, l'ensemble des complémentaires des parties finies constitue un filtre, appelé *filtre de Fréchet*.

• Plus généralement, si D est un ensemble filtrant, ses sections finissantes $[\alpha;\to)$ forment un filtre, S_D . Ce filtre est un ultrafiltre principal si et seulement si D a un plus grand élément. Si X est un ensemble, et si $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ est un filet sur X , le filtre des sections de ce filet n'est autre que le filtre image par l'application $D \to X$ $\alpha \mapsto x_\alpha$ du filtre S_D .

• Dans un espace topologique $(X,\mathcal{T})$, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x est un filtre. Inversement d'ailleurs, si $\mathcal{F}$ est un filtre sur un ensemble E , et si l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$ est non vide, il existe une topologie sur E telle que $\mathcal{F}$ soit l'ensemble des voisinages d'un point de E ; et si l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$ est vide, on peut rajouter à E un point ω tel que le filtre $\{A \cup \{\omega\} \mid A \in \mathcal{F}\}$ soit le filtre des voisinages de ω pour une topologie sur $E \cup \{\omega\}$.

• Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X . On appelle *filtre élémentaire* sur X l'image par $A : n \mapsto a_n$ du filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$: une partie B de X appartient au filtre élémentaire associé à A si elle contient tous les a_n , sauf un nombre fini.

▶Convergence des filtres, des filets

On suppose à présent que $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique.

Définition 8.– Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X . On dit que $\mathcal{F}$ *converge* vers $x \in X$ si tout voisinage U de x appartient à $\mathcal{F}$. Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ un filet sur X . On dit que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *converge* vers $x \in X$ si, pour tout voisinage U de x , il existe $\alpha_0 \in A$ tel que, pour tout $\alpha \in A$, la relation $\alpha \geq \alpha_0$ implique $x_\alpha \in U$. Un filtre, un filet, qui converge vers un point de X est dit *convergent*.

Cette définition montre bien que les filets sont des généralisations immédiates des suites. Les filets sont équivalents aux filtres : un filet (x_α) converge vers $x \in X$ si et seulement si le filtre des sections du filet converge vers x . Inversement, si $\mathcal{F}$ est un filtre qui converge vers x , tout filet associé $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{F}}$ converge vers x .

Dans un espace topologique, on obtient des théorèmes semblables à ceux obtenus dans les espaces métriques, en remplaçant les suites par des filets :

▶ Soient $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique, et Y une partie de X . Alors, Y est fermée si et seulement si tout filet (x_α) d'éléments de Y qui converge dans X converge dans Y .

▶ Soient $(X;\mathcal{T})$ et $(Y,\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, et f une application $X \to Y$. Alors, f est continue si et seulement si, pour tout filet (x_α) convergent dans X vers $x\in X$, le filet $(f(x_\alpha))$ converge dans Y vers $f(x)$.

Si tout point x de X possède un système fondamental dénombrable de voisinages, on peut remplacer *filet* par *suite* dans les deux énoncés ci-dessus. Ceci est vrai en particulier si X est un espace métrique. C'est en raison de ces propriétés que l'on dit souvent que "dans les espaces métriques, les suites suffisent". Nous verrons plus loin les limitations d'une telle assertion.

Revenons sur le dernier énoncé. Dans le cas où Y est T_1, on peut affaiblir les hypothèses en enlevant les derniers mots de l'énoncé, ce qui donne :

Proposition 44 (*Hansell et Wolk, 1976*).– *Soient* $(X;\mathcal{T})$ *un espace topologique,* $(Y;\mathcal{T}')$ *un espace* T_1 *, et* f *une application* $X \to Y$ *. Alors* f *est continue si et seulement si, pour tout filet* (x_α) *convergent dans* X*, le filet* $(f(x_\alpha))$ *converge dans* Y *.*

Du fait de l'équivalence entre filets et filtres, cette proposition a l'énoncé dual suivant :

Proposition 44 bis.– *Soient* $(X;\mathcal{T})$ *un espace topologique,* $(Y;\mathcal{T}')$ *un espace* T_1 *, et* f *une application* $X \to Y$ *. Alors* f *est continue si et seulement si, pour tout filtre* $\mathcal{F}$ *convergent dans* X *, la base de filtre* $f(\mathcal{F})$ *converge dans* Y *.*

Montrons par exemple le premier énoncé.

Démonstration de la proposition 44.– Soient $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ le filtre des voisinages de x, et D l'ensemble filtrant pour la relation d'inclusion défini par $D = \{(V;p) \mid V \in \mathcal{V}_x\ ,\ p \in U\}$. On prend le filet $S : D \to X$, $(U;p) \mapsto p$. Alors, le filet S converge vers x, et, par hypothèse, le filet $(f(S(U;p)))_{(U;p)\in D}$ converge dans Y vers un point y. Si W est un voisinage de y, il existe $(U;p) \in D$ tel que $f(S(V;q)) \in W$ pour tout $(V;q) \geq (U;p)$ c'est-à-dire si $V \subset U$. Ainsi, lorsque $t \in U$, on a $f(t) \in W$; autrement dit, $f(U) \subset W$, et en particulier, $f(x) \in W$. Ceci étant vrai pour tout voisinage W de y, et Y étant T_1, on en déduit $f(x) = y$. On a donc montré que pour tout voisinage W de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset W$. C'est la continuité de f.

La réciproque est évidente. ■

On a vu plus haut que, lorsque l'intersection des éléments d'un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble E est vide, on peut rajouter à E un point ω tel que le filtre $\{A \cup \{\omega\} \mid A \in \mathcal{F}\}$ soit le filtre des voisinages de ω pour une topologie sur $E \cup \{\omega\}$. Cela suggère de définir la limite d'une fonction relativement à deux filtres, en se passant de la notion de topologie : Soient E et F deux ensembles munis respectivement de filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$, et f une application $E \to F$. Si $\mathcal{F}$ induit un filtre $\mathcal{F}_f$ sur le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, on peut dire que f converge suivant $(\mathcal{F};\mathcal{H})$ si, pour tout $Y \in \mathcal{H}$, $f^{-1}(Y)$ est un élément de $\mathcal{F}_f$. Peut-être cette définition étendue de la notion de limite peut-elle soulager l'angoisse de ceux qui, dans le secondaire, n'osent construire $\overline{\mathbb{R}}$, ou écrire les formules comme $\lim_{x \to 0^+} x.\ell n\, x = 0^-$. Ils peuvent remplacer $+\infty$ par le filtre $\mathcal{F}(+\infty)$ engendré par $(]n;\to[\ ,\ n \in \mathbb{N})$, et "le réel à droite a^+" par le filtre $\mathcal{F}(a;+)$ engendré par $(]a;a+\varepsilon[\ ,\ \varepsilon > 0)$. De même pour $-\infty$ et pour a^-. De la sorte, la formule $\lim_{x\to 0^+} x\,\ell n\, x = 0^-$ peut être écrite sous la forme $\mathrm{conv}(x.\ell n\, x\ ;\ \mathcal{F}(0;+)\ ;\ \mathcal{F}(0;-))$, ce qui pourrait (par exemple) se lire ainsi : "il y a convergence de la fonction $x \mapsto x\,\ell n\, x$ suivant le filtre des voisinages à droite de zéro et le filtre des voisinages à gauche de zéro".

Voyons à présent quelques exemples de filtres utilisés en analyse. Les démonstrations des applications énoncées seront données dans le volume 4.

Définition 9.— Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles compacts de $[a;b]$ non réduits à un point. On appelle *base de différentiation* toute base de filtre de parties de $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}$ une base de différentiation dont chaque élément β contient une subdivision $\pi = \{(I_i;x_i) \mid 1 \le i \le n\}$ de $[a;b]$ (par *subdivision*, on entend que les $(I_i)_{1\le i\le n}$ sont un recouvrement de $[a;b]$ par des intervalles compacts contigus, et que, pour chaque i, on a $x_i \in I_i$). Notons Π l'ensemble des subdivisions de $[a;b]$. Soit f une fonction $[a;b] \to \mathbb{R}$. Pour toute subdivision $\pi \in \Pi$, on pose : $S(f;\pi) = \sum_{(I;x)\in\pi} f(x)\lambda(I)$, où $\lambda(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I. On dit que $S(f;\pi)$ est une *somme de Riemann* de f. Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, posons : $\Pi_\beta = \{\pi \in \Pi , \pi \subset \beta\}$. Alors, $\{\Pi_\beta , \beta \in \mathcal{B}\}$ est une base de filtre sur Π, et l'on dit que f est *intégrable au sens de la base de différentiation* $\mathcal{B}$ si la base de filtre $\{\{S(f;\pi) \mid \pi \subset \beta\} \ \beta \in \mathcal{B}\}$ converge. Pour tout intervalle $I = [c;d] \in \mathcal{I}$, on pose : $\Delta f(I) = f(d) - f(c)$. On dit que f est *dérivable au sens de la base de différentiation* $\mathcal{B}$ au point $x \in [a;b]$ si $\inf_{\beta\in\mathcal{B}} \sup_{(I;x)\in\beta} \Delta f(I)/\lambda(I) = \sup_{\beta\in\mathcal{B}} \inf_{(I;x)\in\beta} \Delta f(I)/\lambda(I)$. Soit $\mathcal{B}_x$ la base de filtre sur $\mathcal{I}$ définie par $\{\{I \mid (I;x)\in\beta\} \in \mathcal{B}\}$. Alors, f est dérivable en x au sens de $\mathcal{B}$ si et seulement si la base de filtre $\{\{\Delta f(I)/\lambda(I) \mid I \in \mu\} \ \mu \in \mathcal{B}_x\}$ converge. La limite est alors la dérivée de f en x, au sens de $\mathcal{B}$. On la note $D_{\mathcal{B}}f(x)$.

Exemple 45.— Pour tout $\varepsilon > 0$, posons : $\beta_\varepsilon = \{(I;x) \mid I \in \mathcal{I}, x \in I , \lambda(I) < \varepsilon\}$. La base de différentiation $\mathcal{U} = \{\beta_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ est qualifiée d'*uniforme*. Une fonction f est uniformément dérivable si et seulement si elle est dérivable au sens de $\mathcal{U}$. Elle est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est intégrable au sens de $\mathcal{U}$.

Exemple 46.— Pour toute fonction $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, posons : $\beta_\delta^{\#} = \{(I;x) \mid I \in \mathcal{I}, x \in \mathbb{R}, I \subset]x-\delta(x);x+\delta(x)[\}$ $\mathcal{D}^{\#} = \{\beta_\delta^{\#} \mid \delta$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\}$. La base de différentiation $\mathcal{D}^{\#}$ est appelée la *base de différentiation pointue*. Pour qu'une fonction f soit dérivable au sens de $\mathcal{D}^{\#}$ en x, il faut et il suffit qu'elle ait une dérivée pointue $D^{\#} f(x)$ définie par : $D^{\#} f(x) = \lim_{\substack{(y;z)\to(x;x)\\ y\neq z}} \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$. Une fonction $[a;b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si elle est intégrable au sens de $\mathcal{D}^{\#}$. En particulier, il faut savoir que, contrairement à une idée répandue, la convergence de certaines sommes de Riemann ([8]) caractérise les fonctions intégrables pour la quasi-totalité des théories de l'intégration sur $\mathbb{R}$ connues à ce jour. Il suffit de considérer la convergence selon une base de filtre adéquate.

Exemple 47.— Pour toute fonction $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\beta_\delta^{\circ} = \{(I;x) \mid I \in \mathcal{I}, x \in I , \lambda(I) < \delta(x)\}$ $\beta_\delta = \{(I;x) \mid I \in \mathcal{I} , x$ est une extrémité de I, et $\lambda(I) < \delta(x)\}$. Alors les deux bases de différentiation

$\mathcal{D}^{\circ} = \{\beta_\delta^{\circ} \mid \delta$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*\}$, et

$\mathcal{D} = \{\beta_\delta \mid \delta$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*\}$ sont deux versions d'une même base de différentiation, qualifiée d'*ordinaire*. Une fonction f est dérivable si et seulement si elle est dérivable au sens de $\mathcal{D}$. Elle est intégrable au sens de Denjoy-Perron si et seulement si elle est intégrable au sens de $\mathcal{D}$.

Remarque.— On développera en détail la théorie de B. Thomson dans le volume 4. A la seule vue des exemples 45 à 47, il ne faut pas croire au miracle : le fait de disposer d'une présentation unifiée pour les différents types de dérivées et pour les théories de l'intégration sur $\mathbb{R}$ est très réjouissant pour l'esprit... quand on a déjà étudié ces théories par ailleurs. Cela permet alors de bien comprendre leurs liens ainsi que les avantages et inconvénients de chacune d'elles. Mais en l'état actuel de cette théorie unifiée, il est impensable de commencer par elle pour un apprentissage de l'intégration ; elle n'enlève pas encore sa prééminance à l'intégrale de Lebesgue !

3.2. MAIS QUAND LES SUITES SUFFISENT-ELLES ?

Nous avons vu en 3.1, que dans un espace satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité (tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages), on peut se passer des filets et ne considérer que des suites. Nous allons maintenant voir différents contre-exemples dont le but est d'éviter certaines idées fausses.

Le premier contre-exemple contredit une faute répandue qui peut prendre diverses formes. Plutôt que d'écrire les énoncés faux auxquels elle conduit, voici trois assertions vraies, correspondant à différentes formes de cette faute, que le contre-exemple va établir :

- Dans un espace séparable, l'ensemble des limites des sous-suites convergentes d'une partie dénombrable partout dense n'est pas forcément égal à tout l'espace.
- Une suite est un filet. Mais il y a des sous-filets d'une suite qui ne sont pas des sous-suites.
- L'ensemble des points adhérents à une suite n'est pas égal à l'ensemble des limites des sous-suites convergentes.

Contre-exemple 48 (*Priestley, 1968*).— On considère $X = [0;1]^{[0;1]}$, c'est-à-dire l'espace topologique des fonctions $[0;1] \to [0;1]$ muni de la topologie produit. D'après le théorème de Tihonov, X est compact ; d'après le corollaire 33, il est séparable. Pour toute partie finie $A = \{a_1;\dots;a_n\}$ de $\mathbb{Q}$ vérifiant $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1 = a_{n+1}$, on appelle ϕ_A la fonction continue $[0;1] \to [0;1]$ s'annulant sur $A \cup \{0;1\}$, valant 1 sur $\{(a_i + a_{i+1})/2\ ,\ 0 \le i \le n\}$, et affine sur chacun des intervalles $[0;a_1/2]$, $[a_1/2;a_1]$, $[a_1;(a_1+a_2)/2], \dots\ [(1+a_n)/2;1]$.

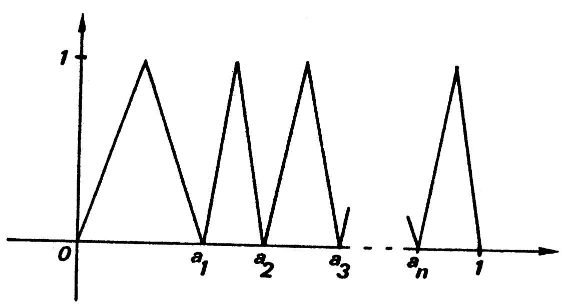


Figure 15

Soit S l'ensemble des ϕ_A . L'ensemble S est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. C'est donc un ensemble dénombrable. Soit x_o la fonction identiquement nulle. Un voisinage élémentaire $V(x_o;\varepsilon;t_1;\dots;t_n)$ de x_o est de la forme $\{\phi : [0;1]\to[0;1] \mid \phi(t_i)<\varepsilon,\ 1\le i\le n\}$, avec $\varepsilon>0$, et $\{t_i;\dots;t_n\}$ partie finie de $[0;1]$. Il est clair que tout voisinage de x_o contient un élément de S . On a donc : $x_o\in\bar{S}$. Néanmoins, aucune suite d'éléments de S ne converge vers x_o . On a en effet, pour tout $s\in S$: $\int_0^1 x(t)dt = 1/2$, et $\int_0^1 x_o(t)dt = 0$. Si une suite (y_n) d'éléments de S convergeait vers x_o , le théorème de convergence dominée impliquerait $\int_0^1 x_o(t)dt = 1/2$, d'où la contradiction. En fait, on a $\bar{S} = \{f:[0;1]\to[0;1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$, tandis que l'ensemble des limites des suites d'éléments de S est inclus dans l'ensemble des fonctions de première classe de Baire dont l'intégrale vaut 1/2 ! Notons au passage que ce contre-exemple montre que le théorème de convergence dominée n'est valide que pour les suites de fonctions, pas pour les filets.

Inversement, certains filets se ramènent à ses sous-suites :

Définition 10.– Soit $(D;\le)$ un ensemble filtrant. On dit qu'une suite (α_n) d'éléments de D *tend vers* ∞ si, pour tout $\beta\in D$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\ge N$, on ait : $\beta\le\alpha_n$. On dit que D est *dénombrablement accessible* s'il existe une suite (α_n) d'éléments de D tendant vers ∞ .

Proposition 49 (*Marsden, 1968*).– *Soient* X *un espace topologique,* A *un ensemble filtrant dénombrablement accessible, et* $f : A\to X$, $f = (f_\alpha)_{\alpha\in A}$ *, un filet sur* X *. S'il existe* $x\in X$ *tel que, pour toute suite* (α_n) *de* A *tendant vers* ∞ *, on ait* $f_{\alpha_n}\to x$ *, on a alors* $f_\alpha\to x$.

Démonstration.– Si l'on n'avait pas $f_\alpha\to x$, il existerait un voisinage U de x tel que, pour tout $\beta\in A$, il existe $\beta'>\beta$ qui vérifie : $f(\beta')\notin U$. Alors, pour une suite (α_n) tendant vers ∞ , on aurait $\alpha'_n\to\infty$, et $f_{\alpha'_n}\notin U$, c'est-à-dire $f_{\alpha'_n}\not\to x$, d'où la contradiction. ■

Application.– Si $x\in[a;b]$, et si f est une fonction $[a;b]\setminus\{x\}\to\mathbb{R}$, on a $\lim_{y\to x} f(y) = z$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = z$ pour toute suite (y_n) tendant vers x . Mais on le savait déjà, dans la mesure où $\mathbb{R}$ satisfait au premier axiome de dénombrabilité.

Le contre-exemple suivant montre :

- La connaissance des suites convergentes pour une topologie ne suffit pas à caractériser cette topologie.

Contre-exemple 50 (*J.B. Conway, 1969*).– On considère l'espace ℓ^1 des suites sommables de nombres réels : une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels appartient à ℓ^1 si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. On définit sur ℓ^1 une norme en posant : $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Muni de cette norme, ℓ^1 est un espace de Banach. Soit $\mathcal{S}$ la topologie déduite de $\|.\|_1$. Considérons à présent ℓ^∞ , l'espace des suites réelles bornées. Pour $(x_n)\in\ell^\infty$, et $(a_n)\in\ell^1$, on pose : $\langle(x_n);(a_n)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} x_j a_j \in\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie faible sur ℓ^1 : une base de voisinages de

(a_n) dans (ℓ', T) est donnée par les ensembles de la forme

$\{(b_p) \in \ell^1 \mid |<(x_p) ; (a_n - b_p)>| < \varepsilon\}$, avec $(x_p) \in \ell^\infty$ et $\varepsilon > 0$. La topologie est strictement plus fine que T. En effet, il est clair qu'elle est plus fine. Par ailleurs, la sphère unité $S = \{(a_n) \in \ell^1 \mid \|a_n\| = 1\}$ est fermée pour S, mais elle est dense pour T dans $\{(a_n) \in \ell^1 \mid \|a_n\| \leq 1\}$. Pour le voir, il suffit d'établir que la suite nulle, (0), est adhérente à S pour T. Soit donc U un T-voisinage ouvert de (0). Il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans ℓ^∞, et $\varepsilon > 0$ tels que : $\bigcap_{k=1}^{n} \{\beta \in \ell^1 \mid |<\xi_k ; \beta>| < \varepsilon\} \subset U$. Mais $\{\beta \mid <\xi_k ; \beta> = 0 \ , \ 1 \leq k \leq n\}$ est un sous-espace de dimension infinie de ℓ^1 qui est inclus dans U. En particulier, U contient un β de norme 1. Ainsi, S est strictement plus fine que T. Pourtant, S et T ont les mêmes suites convergentes, ainsi que le montre le théorème suivant.

Théorème 51 (*Schur*) — *Toute suite* $(\alpha^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* ℓ^1 *qui converge vers zéro pour la topologie* T *converge aussi vers zéro pour* S.

La démonstration utilise le théorème de Baire (théorème 59).

Démonstration.— Soit $(\alpha^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 qui converge vers zéro pour T. On pose, pour tout n, $\alpha^{(n)} = (a_p^n)_{p\in\mathbb{N}}$. Soit $X = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \leq 1\}$. On définit sur X une distance d en posant :

$$d((x_j) ; (x'_k)) = \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q+1} |x_q - x'_q| .$$

On vérifie facilement que $(X;d)$ est un espace métrique complet, et qu'un système fondamental de voisinages de (x_j) dans $(X;d)$ est formé des ensembles de la forme :

$$S((x_j);J;\delta) = \{(x'_k) \in X \mid |x_q - x'_q| < \delta, \ 0 \leq q \leq J\}$$

avec $j \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$F_m = \{(x_j) \in X \mid |<(x_j), \alpha^{(n)}>| \leq \varepsilon/3 \ \text{ pour tout } \ n \geq m\} .$$

Comme pour tout $\alpha \in \ell^1$, la fonction $\phi_\alpha : (X;d) \to \mathbb{R}$, $(x_j) \mapsto <(x_j) ; \alpha>$ est continue, chacun des F_n est fermé dans $(X;d)$; et comme $\lim_{n\to\infty} <(x_j) ; \alpha^{(n)}> = 0$ pour tout $(x_j) \in X$, on a : $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. D'après le théorème de Baire (cf. § 5, théorème 59), il existe un F_m d'intérieur non vide. Autrement dit, il existe $(x_j) \in X$, $\delta > 0$, et $j \in \mathbb{N}$ tels que $S((x_j);J;\delta) \subset F_m$. Si $n \geq m$ est fixé, soit $(x'_j) \in X$ vérifiant : $x'_j = x_j$ si $1 \leq j \leq J$, et $x'_j = \mathrm{sgn}(a_j^{(n)})$ pour $j \geq J+1$. Alors, $(x'_j) \in S((x_j);J;\delta)$, et par suite : $\sum_{j=J+1}^{\infty} |a_j^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{J} |a_j^{(n)}|$. Le résultat annoncé s'en déduit, en choisissant $m_1 \geq m$ tel que :

$$|a_j^{(n)}| < \varepsilon/(3J) , \ \text{pour} \ 1 \leq j \leq J \ \text{ et } \ n \geq m_1 . \blacksquare$$

Le contre-exemple 50 pourrait laisser penser que le phénomène est dû à la nature pathologique de ℓ^1. Il n'en est rien, car même sur $\mathbb{R}$, la connaissance des suites convergentes ne suffit pas pour déterminer la topologie.

Contre-exemple 52 (*Baker, Lawrence et Zorzitto, 1978*).– *Topologies sur la droite réelle pour lesquelles les suites convergent à la manière usuelle.* Soit X la droite réelle (*). Notons $\mathcal{R}$ la topologie usuelle ($\mathbb{R} = (X;\mathcal{R})$). Désignons par $\mathbf{T}$ l'ensemble des topologies $\mathcal{T}$ sur X qui ont le même ensemble de suites convergentes que $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$. Alors $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$. En effet, soit F un fermé de $(X;\mathcal{T})$, et soit $\bar{F}$ l'adhérence de F dans $\mathbb{R}$. Alors, tout point p de $\bar{F}$ est la limite, pour $\mathcal{R}$, d'une suite (a_n) de points de F ; il est donc aussi limite de (a_n) pour $\mathcal{T}$. Ainsi, p appartient à la fermeture de F pour $\mathcal{T}$, qui n'est autre que F, puisque F est un fermé de $(X;\mathcal{T})$. On a donc $F = \bar{F}$, c'est-à-dire l'inclusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{CF}$ la topologie cofinie sur X, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont $\emptyset$, X, et les parties de X dont le complémentaire est fini. On montre facilement que $\mathcal{CF}$ est la moins fine des topologies T_1 sur X. Ce n'est pas un élément de $\mathbf{T}$. Mais tout élément $\mathcal{T}$ de $\mathbf{T}$ est T_1. En effet, soient p et q deux points distincts de X. La suite $(p;q;p;q;p\ldots)$ ne converge pas pour $\mathcal{R}$, donc pas pour $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$. Aussi existe-t-il un ouvert de $\mathcal{T}$ contenant p mais pas q ; et $\mathcal{T}$ est T_1. On a ainsi montré les inclusions : $\mathcal{CF} \subsetneq \mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, pour tout $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$.

Montrons à présent que $\mathbf{T}\setminus\{\mathcal{R}\}$ n'est pas vide. Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur X dont les ouverts sont $\emptyset$, X et les complémentaires des fermés dénombrables de $\mathbb{R}$. Cette topologie est moins fine que $\mathcal{R}$, et pour établir $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$, il suffit de montrer que toute suite qui converge pour $\mathcal{T}$ converge également pour $\mathcal{R}$. Soit donc (x_n) une suite de réels rendant vers ℓ au sens de $\mathcal{T}$. Supposons que x_n ne tende pas vers ℓ au sens de $\mathcal{R}$. Il existe une sous-suite (x_{k_n}) de la suite (x_n), formée d'éléments de $X\setminus\{\ell\}$, et convergeant dans $\bar{\mathbb{R}}\setminus\{\ell\}$. Si $(x_{n_k}) \to \pm\infty$, considérons $V = X\setminus\{x_{k_n}, k \in \mathbb{N}\}$. On a $\ell \in V$; de plus, V est un ouvert de $\mathcal{T}$ ne contenant aucun des (x_{k_n}). Ainsi, x_n ne tend pas vers ℓ au sens de $\mathcal{T}$. Si $(x_{n_k}) \to \ell' \in \mathbb{R}\setminus\{\ell\}$, considérons $V = X\setminus\{\ell', x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$. On a encore $\ell \in V$, et V est un ouvert de $\mathcal{T}$ ne contenant aucun des (x_{k_n}). Ainsi, (x_n) ne tend pas vers ℓ au sens de $\mathcal{T}$; d'où la contradiction.

Notons que $\mathcal{T}$ est T_1 mais pas T_2. Il existe toutefois des éléments de $\mathbf{T}$ qui sont T_2 (*cf.* exercice 19).

4. ESPACES MÉTRIQUES, ESPACES VECTORIELS NORMÉS. COMPARAISON.

Le fait que tout espace vectoriel normé soit un espace métrique pourrait laisser croire que la classe des espaces métriques est plus large que celle des espaces vectoriels normés. Il n'en est rien : la classe des espaces métriques et celle formée par les espaces vectoriels normés et leurs parties sont identiques. Voici deux théorèmes justifiant cette affirmation.

Théorème 53 (*Kuratowski*).– *Tout espace métrique* $(X;d)$ *admet un plongement isométrique dans l'espace de Banach* $C_b(X)$ *des fonctions continues bornées* $X \to \mathbb{R}$ *muni de la norme sup,* $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration (*d'après Dugundji*).– Soit $p \in X$. Pour tout $x \in X$, soit $f_x : X \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto d(\xi;x) - d(\xi;p)$. L'inégalité $f_x(\xi) \leq d(x;p)$ montre que f_x est bornée. Comme elle est continue, elle appartient à $C_b(X)$. L'application $\lambda : X \to C_b(X)$, $x \mapsto f_x$ est l'isométrie cherchée. En effet, $\|f_y - f_z\| = \sup_{\xi \in X} d(\xi;y) - d(\xi;z) \le d(y;z)$, et la borne sup de ceci est atteinte pour $\xi = z$. ■

Théorème 54 (*Arens-Eells, 1956*).— *Tout espace métrique admet un plongement isométrique comme sous-ensemble fermé d'un espace vectoriel normé.*

Démonstration (*Communiquée par J. Dugundji*).— Soit X un espace métrique. On note $\mathbf{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X . On munit $\mathbf{P}_f(X)$ de la topologie discrète, et l'on note $\mathcal{C}$ l'espace $C_b(\mathbf{P}_f(X))$ des fonctions continues bornées $\mathbf{P}_f(X) \to \mathbb{R}$ muni de la norme sup . Bien que ce soit un espace de Banach, commençons par plonger isométriquement X dans $\mathcal{C}$. (On procède comme pour la démonstration du théorème de Kuratowski). Soit $p \in X$. Pour tout $x \in X$, soit $f_x : \mathbf{P}_f(X) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto d(x;A) - d(p;A)$. Comme les éléments A de $\mathbf{P}_f(X)$ sont des parties finies, les expressions $d(x;A)$ et $d(p;A)$ ont un sens. L'inégalité $|f_x(A)| = |d(x;A) - d(p;A)| \le d(x;p)$ montre que f_x est bornée. L'application $\lambda : X \to \mathcal{C}$, $x \mapsto f_x$ est un plongement isométrique, car $\|f_y - f_z\|_\infty = \sup_A |d(y;A) - d(z;A)| \le d(y;z)$, et parce que le sup est atteint pour $A = \{z\}$. Ainsi, $\|\lambda(y) - \lambda(z)\|_\infty = d(y;z)$, et λ est une isométrie. Cela étant, remarquons les points suivants : f_p est la fonction identiquement nulle ; pour tout $x \in X$, on a $f_x(A) = 0$ si $\{x;p\} \subset A$. En particulier, $\lambda(X)$ contient l'origine de $\mathcal{C}$. Soit L le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par $\lambda(X)$. C'est un espace vectoriel normé qui n'a aucune raison d'être fermé dans $\mathcal{C}$, donc d'être complet. Montrons que $\lambda(X)$ est fermé dans L . Soit $g \in L \setminus \lambda(X)$. Par définition de L , il existe $n \in \mathbb{N}$, et n couples $(\alpha_i; f_{y_i}) \in \mathbb{R}^* \times \lambda(X)$, $1 \le i \le u$ tels que : $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{y_i}$. Puisque $g \notin \lambda(X)$, on a $g \ne f_{y_i}$, pour $1 \le i \le n$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\|g - f_{y_i}\|_\infty < \delta$, pour $1 \le i \le n$. Montrons que, pour tout $x \in X$, on a également $\|g - f_x\|_\infty > \delta$. Supposons par l'absurde le contraire : $\|g - f_x\|_\infty \le \delta$ pour un $x \in X$. Alors, $\|f_x - f_{y_i}\| \ge \delta$, et $\|f_x\| = \|f_x - f_p\|_\infty$, et, puisque λ est une isométrie, $d(x;y_i) \ge \delta$, et $d(x;p) \ge \delta$. Mais $\|g - f_x\| \ge |g(A) - f_x(A)|$, pour tout $A \in P_f(X)$. En particulier, pour $A = \{y_1;\dots;y_n;p\}$, on a $g(A) = 0$, de sorte que : $\|g - f_x\| \ge |f_x(A)| = d(x;\{y_1;\dots;y_n;p\})$, ce qui contredit l'hypothèse $\|g - f_x\| < \delta$. Finalement, on a montré $B(g;\delta) \subset L \setminus \lambda(X)$; il s'ensuit que $L \setminus \lambda(X)$ est ouvert, et cela achève la démonstration. ■

Notons qu'il y a des distances sur des espaces vectoriels normés qui définissent la même topologie que la norme, mais ne sont pas des normes. Les plongements obtenus par les théorèmes de Kuratowski et d'Arens-Eells ne coïncident pas avec le plongement de l'espace dans lui-même obtenu par l'application identique. Plus : dans le cas d'un espace de dimension finie, le plongement est effectué dans un espace de dimension infinie qui ne coïncide donc certainement pas avec l'espace de départ.

Rappelons d'autres plongements des espaces métriques : un espace métrique est homéomorphe à une partie d'un cube $[0;1]^I$. Un espace métrique séparable est homéomorphe à un sous-espace de $[0;1]^{\mathbb{N}}$, et si l'espace métrique est topologiquement complet, le sous-espace de $[0;1]^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbf{G}_\delta$. (*cf.* le théorème 7 et le corollaire 58).

5. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS, TOPOLOGIQUEMENT COMPLETS ; BAIRERIES

5.1. ESPACES METRIQUES TOPOLOGIQUEMENT COMPLETS

Considérons l'intervalle $J =]-\pi/2 ; +\pi/2[$. Si on le munit de la distance usuelle, il n'est pas complet. Mais par ailleurs, la fonction Arctan réalise un homéomorphisme $\mathbb{R} \to J$. Si l'on pose $d(x;y) = |\tan x - \tan y|$, on transporte sur J la structure uniforme de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet pour cette distance, J devient complet pour la distance d . Une question est donc de savoir, lorsqu'un espace métrique $(X;d)$ n'est pas complet, s'il existe une autre distance, δ , ne changeant pas la topologie de X , et pour laquelle X soit complet. Si tel est le cas, on dit que X est *topologiquement complet*. Nous allons, dans ce paragraphe, répondre à cette question. La présentation est celle d'Oxtoby, adaptée de Kuratowski.

Lemme 55.— *Soit* $(X;d)$ *un espace métrique. On suppose qu'il existe une suite* (f_n) *de fonctions continues* $X \to \mathbb{R}$ *telle qu'une suite de Cauchy* (x_n) *d'éléments de* X *converge si et seulement si les suites* $(f_p(x_n))_{p\in\mathbb{N}}$ *sont bornées pour tout* n .

Alors, il existe une distance δ *sur* X *, définissant la même topologie que* d *, et pour laquelle* X *est complet.*

Démonstration.— On pose : $\delta(x;y) = d(x;y) + \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n)\min\{1;|f_n(x)-f_n(y)|\}$

■ Montrons que δ est une distance. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate. Elle découle de l'inégalité triangulaire appliquée à chaque terme.

■ Montrons que δ définit la même topologie que d .

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \varepsilon$, et il existe $\xi<\varepsilon$ tel que la relation $d(x;y)<\xi$ implique $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$, pour $1 \le n \le N$. Alors, si $d(x;y) < \xi$, on a :

$$\delta(x;y)<\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} (1/2^n)|f_n(x)-f_n(y)| + 1/2^N < 3\varepsilon .$$

Ainsi, $\lim \delta(x;x_n) = 0$ lorsque $\lim d(x;x_n) = 0$. L'inégalité $d(x;x_n)\le\delta(x;y)$ montre l'implication réciproque, de sorte que d et δ définissent la même topologie (une topologie métrisable est déterminée par l'ensemble des suites convergentes *cf.* § 3.2).

■ Montrons que $(X;\delta)$ est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy pour la distance δ . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(x_p;x_q) < 1/2^n$ pour tous $p,q \ge N$. On a alors, pour de tels p et q : $1 > 2^n\,\delta(x_p;x_q) \ge \min\{1;|f_n(x_p)-f_n(x_q)|\}$, et par suite $|f_n(x_p)-f_n(x_q)|<1$. Il s'ensuit que la suite $(f_n(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout n . Comme $d(x;y) \le \delta(x;y)$, la suite (x_p) est aussi de Cauchy pour d . De par les hypothèses de l'énoncé, la suite (x_p) converge. ■

Théorème 56 (Aleksandrov 1924).— *Soit* Y *un* G_δ *d'un espace métrique complet* $(X;d)$. *Il existe une distance* δ *sur* Y *pour laquelle* Y *est complet.*

Démonstration.— Soit Y un G_δ d'un espace métrique complet $(X;d)$. Si $Y = X$, le théorème est évident. Sinon, il existe une suite (G_n) d'ouverts de X distincts de X telle que : $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = X\setminus G_n$, et soit g_n l'application $X \to \mathbb{R}$ définie par : $g_n(x) = \inf\{d(x;y) \mid y \in F_n\}$. Chaque g_n est strictement positive sur Y . Les fonctions $f_n = 1/g_n$ satisfont aux hypothèses du lemme 55 appliqué à Y . En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy de points de Y telle que, pour tout n , la suite $(f_n(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ soit bornée ; alors (x_p) converge dans X vers un point y , car X est complet. On a $y \notin F_n$, car la suite $(f_n(x_p))$ est bornée. On a donc $y \in G_n$ pour tout n , d'où $y \in Y$. Le lemme 55 appliqué à Y montre le théorème. ■

Un énoncé convers du théorème 56 est le suivant :

Théorème 57.– *Soit* Y *une partie topologiquement complète d'un espace métrique* $(X;d)$. *Alors* Y *est un* $\mathfrak{G}_\delta$ *de* X .

Démonstration.– Notons encore d la restriction de d à Y . Soit δ une distance sur Y pour laquelle Y est complet. Puisque δ définit sur Y la même topologie que d , l'application identique Id_Y est continue, comme application $Id_1 : (Y;d) \to (Y;\delta)$, et comme application $Id_2 : (Y;\delta) \to (Y;d)$. Soient $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\theta(x;n) \in]0;1/n[$ tel que, pour tout $y \in Y$ vérifiant $d(x;y) < \theta(x;n)$, on ait : $\delta(x;y) < 1/n$. Posons : $G_n = \bigcup_{x\in Y} B_d(x;\theta(x;n)/2)$, où les $B_d(x;\theta(x;n)/2)$ sont prises ouvertes. L'ensemble G_n est un ouvert de X qui contient Y . Soit $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} G_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in Y$ tel que $d(x_n;z) < \theta(x_n;n)/2$. Comme $\theta(x_n;n) < 1/n$, on a $\lim_{n\to\infty}(x_n) = z$. Pour tout $m > n$, on a :

$$d(x_n;x_m) \le d(x_n;z) + d(x_m;z) < \frac{1}{2}[\theta(x_n;n) + \theta(x_m;m)] \le \max[\theta(x_m;m);\theta(x_n;n)]$$

On en déduit, par définition de $\theta(x;k)$, $\delta(x_n;x_m) < 1/n$, pour tout $m > n$. Ainsi, la suite (x_n) est une suite de Cauchy de $(Y;\delta)$. Puisque cet espace est complet, elle converge vers un $y \in Y$. D'après l'unicité de la limite, on a $z = y$, d'où $z \in Y$, ce qui montre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} G_n \subset Y$. On en déduit $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} G_n$, ce qui achève la démonstration. ■

Les espaces métrisables à la fois séparables et topologiquement complets sont appelés *espaces polonais*. Ils seront étudiés plus en détail dans le chapitre 3.

En rapprochant le théorème 57 du résultat d'Urysohn signalé après le théorème 9 (p. 29), on obtient le :

Corollaire 58.– *Tout espace polonais est homéomorphe à un* $\mathfrak{G}_\delta$ *de* $[0;1]^{\mathbb{N}}$

5.2. ESPACES METRIQUES COMPLETS ; BAIRERIES

Définitions 11.– Rappelons (§ 2, définition 4) qu'un espace topologique X est dit *de Baire* lorsque l'intersection d'une suite d'ouverts denses dans X est dense dans X . Une partie A de X est dite *rare*, ou *nulle part dense* si $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. Les réunions dénombrables d'ensembles rares sont dites *maigres*, ou *de première catégorie*. Les complémentaires des ensembles maigres sont appelés *résiduels*. L'espace topologique X est donc un espace de Baire si tout ensemble maigre de X est d'intérieur vide. Dans un espace de Baire, tout résiduel contient un $\mathfrak{G}_\delta$ dense ; il est donc dense.

Théorème de Baire (*première version*) 59.– *Les espaces métriques complets, les espaces localement compacts sont des espaces de Baire.*

Démonstration.– Soit X un espace métrique complet (resp. un espace localement compact). Soient O un ouvert non vide de X, et (O_n) une suite décroissante d'ouverts denses. Soit $B_1 \subset O_1 \cap O$ une boule de rayon plus petit que 1 (resp. un ouvert relativement compact). Par récurrence, on construit une suite (B_n) de boules de rayon inférieur à $1/n$ (resp. d'ouverts relativement compacts vérifiant : $\overline{B_{n+1}} \subset (B_n \cap O_n)$. Dans les deux cas, l'intersection des $\bar{B}_n$ est non vide et incluse dans celle des O_n avec O. ∎

Exemples 60.

- Un ouvert d'un espace de Baire est de Baire.
- Un fermé d'un espace métrique complet est complet. C'est donc un espace de Baire.
- Un fermé d'un espace de Baire n'est pas forcément un espace de Baire : en effet, $\mathbb{Q} \times \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2 \setminus ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\})$ qui est un espace de Baire. Mais $\mathbb{Q} \times \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{Q}$, qui n'est pas un espace de Baire.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un espace topologiquement complet (*cf.* Chapitre 2 § 4 théorème 8, de Hausdorff). C'est donc un espace de Baire.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace de Baire : si r_n désigne une énumération de $\mathbb{Q}$, en posant $O_n = \{r_p \mid p \neq n\}$, on a $\cap O_n = \emptyset$. Plus généralement d'ailleurs, ce raisonnement montre qu'un espace de Baire sans points isolés n'est pas dénombrable. De plus, $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathbb{R}$, car si c'était le cas, il existerait une suite (G_n) d'ouverts de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. En reprenant l'énumération r_n précédente, et en posant $H_n = \mathbb{R}_n \setminus \{r_n\}$ on aurait : $\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (G_n \cap H_n)$, ce qui contredirait le fait que $\mathbb{R}$ est un espace de Baire. Autre raison pour affirmer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathcal{G}_\delta$: comme $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace de Baire, il n'est pas topologiquement complet. Ce n'est donc pas un $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathbb{R}$, d'après le théorème d'Aleksandrov (théorème 56).

Définition 12.– Soit X un espace topologique. On appelle *tamis* sur X toute relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{G}$ des ouverts de X satisfaisant aux axiomes suivants :

(i) $(U \mathcal{R} V) \Longrightarrow (U \subset V)$

(ii) Pour tout ouvert non vide U, il existe V tel que $V \mathcal{R} U$.

(iii) $(U \mathcal{R} V$ et $V \mathcal{R} W) \Longrightarrow (U \mathcal{R} W)$

(iv) Pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts vérifiant, pour tout n, $U_{n+1} \mathcal{R} U_n$, on a : $\cap U_n \neq \emptyset$.

S'il existe un tamis sur X, on dit que X est *tamisable*.

Théorème 59 bis (CHOQUET, 1958) : *Théorème de Baire. deuxième version*.– *Tout espace tamisable est un espace de Baire.*

Démonstration.– C'est la même que dans la première version, en remplaçant la condition $\overline{B_{n+1}} \subset (B_n \cap O_n)$ par $B_{n+1} \mathcal{R} (B_n \cap O_n)$. ∎

Lemme 61 (CHOQUET, 1958).– *Tout produit d'espaces tamisables est tamisable.*

Démonstration.– Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces tamisables non vides. Pour tout $i\in I$, soit $\mathcal{R}_i$ un tamis sur X_i. Posons $X=\prod_{i\in I} X_i$. Soient J et K deux parties finies de I ; soient $G=\prod_{i\in I} G_i$, avec $G_i=X_i$ si $i\notin J$, et $H=\prod_{i\in I} H_i$, avec $H_i=X_i$ et $i\notin K$, deux ouverts élémentaires de X. On pose $G\mathcal{R}H$ si l'on a simultanément $K\subset J$, pour tout $i\in K$, $G_i\,\mathcal{R}_i\,H_i$, et, pour tout $i\in J\smallsetminus K$, $G_i\,\mathcal{R}_i\,X_i$. Soient à présent E et F deux ouverts quelconques de X. On pose $E\mathcal{R}F$ s'il existe deux ouverts élémentaires G et H vérifiant : $E\subset G\subset H\subset F$ et $G\mathcal{R}H$. On vérifie facilement que la relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est un tamis sur X. ■

Proposition 62 (CHOQUET, 1958).– *Tout produit d'espaces localement compacts ou métriques complets est un espace de Baire.*

Démonstration.– La relation $E\mathcal{R}F$ si $\bar{E}\subset F$ est un tamis si X est un espace localement compact. Si X est un espace métrique complet, la relation $E\mathcal{R}F$ si $\bar{E}\subset F$ et si $\operatorname{diam} E\le\min\{1\,;(\operatorname{diam} F)/2\}$ est un tamis. D'après le lemme 61, un produit d'espaces topologiques dont chaque facteur est localement compact ou métrique complet est un espace tamisable, donc un espace de Baire. ■

En particulier, pour tout ensemble I, $\mathbb{R}^I$, $[0;1]^I$ sont des espaces de Baire.

Applications du théorème de Baire

Pour mémoire, signalons le théorème de Schur (§ 3, théorème 51), le théorème de Banach-Steinhaus qui dit qu'une famille simplement bornée d'applications linéaires continues sur un espace de Banach est uniformément bornée.

Exemple 63.– *Un espace de Banach ne peut avoir une dimension algébrique infinie dénombrable.* Si E est un espace de Banach de dimension infinie, supposons par l'absurde qu'il ait une base algébrique dénombrable. Alors, la suite (E_n) des sous-espaces vectoriels fermés engendrés par les n premiers vecteurs d'une telle base est une suite croissante de fermés d'intérieur vide dont la réunion est égale à tout l'espace ; cela contredit le théorème de Baire.

Exemple 64.– Soient $I=[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, (x_k) une suite de points de I, et f une fonction continue $I\to\mathbb{R}$. On pose $f_0=f$, et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f_{k+1}(x)=\int_{x_k}^{x} f_k(t)\,dt$. *Si, pour tout x, il existe k tel que $f_k(x)=0$, alors f est identiquement nulle.* En effet, posons, pour tout k : $E_k=\{x\in I\mid f_k(x)=0\}$. Chaque E_k est fermé, et $\cup E_k=I$. Il s'ensuit que $\cup \overset{\circ}{E}_k$ est dense. En dérivant f_k k fois sur chaque composante connexe de $\overset{\circ}{E}_k$, on voit que f est nulle sur $\cup\overset{\circ}{E}_k$. Enfin, par continuité, f est nulle sur I.

Exemple 65 (BOAS, 1960).– *Une caractérisation des polynômes.* Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application C^∞ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe n tel que : $f^{(n)}(x)=0$. Alors f est un polynôme. Posons : $E_k=\{x\in\mathbb{R}\mid f^{(k)}(x)=0\}$. Alors, chaque E_k est fermé, et $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k=\mathbb{R}$. D'après le théorème de Baire, $\cup\overset{\circ}{E}_k$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$. Décomposons chaque $\overset{\circ}{E}_k$ comme réunion d'une suite d'intervalles, $I_{n,k}$. En intégrant k fois la relation $f^{(k)}(x)=0$ sur chaque

$I_{n,k}$, on obtient une suite (J_n) d'intervalles sur lesquels la restriction de f est un polynôme ; il faut montrer que f coïncide avec le même polynôme. Soit $H = (\cup J_n)^c$. Montrons que H est dense en lui-même, c'est-à-dire n'a pas de point isolé. Dans le cas contraire, un tel point serait une extrémité commune de deux intervalles ouverts contigus $I_1 \subset E_{k_1}$ et $I_2 \subset E_{k_2}$. Ce point appartiendrait alors à E_k^o , avec $k = \max(k_1;k_2)$, d'où la contradiction. L'espace H est de Baire. Par suite, si $H \neq \emptyset$, il existe un intervalle ouvert J et un entier n tel que $f^{(n)}(x) = 0$ sur $J \cap H$. Soit K une composante connexe de $J \setminus H$. Par définition de H , il existe $m > 0$ tel que $f^{(m)}(x) = 0$ sur K . Si $m \leq n$, $f^{(n)}(x) = 0$ sur K , et si $m > n$, toutes les dérivées d'ordre $> n$ sont nulles aux extrémités de K , et, puisque f est un polynôme sur K , on a $f^{(n)}(x) = 0$ sur K . Ainsi, $f^{(n)} = 0$ sur K , comme sur tout autre composante connexe de $J \setminus H$ qui est dense dans J . On en déduit $J \cap H = \emptyset$, puis $H = \emptyset$, ce qui achève la démonstration.

Cette démonstration de l'exemple 65 est une adaptation simplifiée de celle du théorème d'Oliver (1954) que l'on démontrera dans le volume 4. Ce théorème (qui n'est pas une généralisation de l'exemple 65) donne la réciproque de la formule de Taylor : soit f une fonction $[a;b] \to \mathbb{R}$.

Soit $n \geq 2$. On dit que f a des *dérivées de Peano* d'ordre $\leq n$ en $x \in [a;b]$ s'il existe des nombres $f_r(x)$, $0 \leq r \leq n$, tels que : $f(x+h) = \sum_0^n \frac{f_r(x)}{r!} h^r + o(h^n)$. Le théorème d'Oliver affirme que si f est une fonction continue $[a;b] \to \mathbb{R}$, si $n \geq 2$, et si f_n est définie sur $[a;b]$ et bornée supérieurement ou inférieurement, alors $f_n = f^{(n)}$.

Exemple 66.– *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que, pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *, on ait :* $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$. *Alors* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En effet, posons, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ $E_{n\varepsilon} = \{x > 0 \mid \forall p \geq n , |f(px)| \leq \varepsilon\}$. Alors, les $E_{n,\varepsilon}$ sont des fermés recouvrant $\mathbb{R}$. Il existe donc, d'après le théorème de Baire, un $n \in \mathbb{N}$ et un intervalle $I = [a;b] \subset E_{n,\varepsilon}$. On en déduit $\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} pI \subset E_{n,\varepsilon}$, puis : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n > 0$, $\exists c \in \mathbb{R}_+$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $(m \geq n) \Longrightarrow (|f(mx)| < \varepsilon$ si $x > c)$.

Exemple 67.– *Le problème des fonctions typiques*. Considérons les espaces suivants de fonctions bornées $[0;1] \to \mathbb{R}$; C (continues), $b\Delta$ (dérivées), $b\mathcal{B}_1$ (de première classe de Baire), $b\mathcal{DB}_1$ (de Darboux et de première classe de Baire), $b\mathcal{A}$ (approximativement continues). L'application $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0;1]\}$ confère à chacun des espaces précédents une structure d'espace de Banach. Ce sont donc des espaces de Baire, et une fonction f de l'un de ces espaces, F , est dite *typique*, sous-entendu *relativement à une certaine propriété*, si l'ensemble des fonctions de F ayant cette propriété est un résiduel. On consacrera dans le volume 4 un chapitre entier aux fonctions typiques. Voici déjà, sans démonstrations, quelques-unes de leurs propriétés :

- Une fonction continue typique n'est dérivable en aucun point (Banach et Mazurkiewicz, 1931).

- Une fonction continue typique, f , a en chaque point un cône de dérivation égal à $\overline{\mathbb{R}}$; autrement dit, pour tout $x \in]0;1[$, et tout $y \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une suite (x_n) tendant vers x et telle que :

$$\lim_{n\to\infty} ((f(x_n)-f(x))/(x_n-x)) = y \quad \text{(Jarnik, 1933-1934)}.$$

- Pour une fonction continue typique f, aucun ensemble de niveau $\{x \mid f(x) = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ne contient plus d'un extremum relatif.

- Soit $C(f)$ l'ensemble des points de continuité d'une fonction f. On désigne toujours par λ la mesure de Lebesgue. Une fonction typique de $b\Delta$ (resp. $b\mathcal{B}_1$, $b\mathcal{DB}_1$, bA) vérifie : $\lambda(\overline{f(C(f))}) = 0$. En outre, $f(C(f))$ a la puissance du continu, et $(C(f))^{\cdot} = 0$. De plus, pour tout y, $\lambda(f^{-1}(y)) = 0$ (Bruckner, Petruska et Ceder, 1983).

6. MÉTRISABILITÉ DES ESPACES TOPOLOGIQUES

Dans cette section, nous allons préciser quels sont les espaces topologiques qui sont métrisables. Mais on ne peut être amené à se demander si un espace topologique ayant telle propriété est métrisable que si les espaces métrisables ont justement cette propriété. Avant de donner les théorèmes de métrisabilité, nous énoncerons donc quelques propriétés des espaces métriques. Mais comme ces propriétés s'énoncent souvent à l'aide de recouvrements, nous profiterons de l'occasion pour présenter une synthèse rapide des notions topologiques qui utilisent les recouvrements, et pour nous attarder sur les espaces paracompacts et les espaces normaux.

6.1. LES RECOUVREMENTS ET LES NOTIONS TOPOLOGIQUES QUI EN DERIVENT

Définition 13.– Soit X un espace topologique. On dit qu'un ensemble $\mathfrak{U}$ de parties de X est un *recouvrement* de X si $\bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U = X$. Selon le problème considéré, on pourra être amené à utiliser la notation des familles pour désigner les recouvrements : $\mathfrak{U} = (U_\xi)_{\xi \in \Xi}$. On utilisera alors encore le vocabulaire des recouvrements, sans le redéfinir.

Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X. Si $\mathfrak{U}$ a un nombre fini (resp. dénombrable) d'éléments, on dit que c'est un *recouvrement fini* (resp. *dénombrable*). Si tout point de X n'appartient qu'à un nombre fini (resp. dénombrable) d'éléments de $\mathfrak{U}$, on dit que $\mathfrak{U}$ est *ponctuellement fini* (resp. *ponctuellement dénombrable*). Si tout point x de X possède un voisinage V tel que $V \cap U \neq \emptyset$ pour un nombre fini (resp. dénombrable) d'éléments U de $\mathfrak{U}$, on dit que $\mathfrak{U}$ est *localement fini* (resp. *localement dénombrable*). Si, pour tout $U \in \mathfrak{U}$, il n'existe qu'un nombre fini (resp. dénombrable) de $V \in \mathfrak{U}$ tels que $V \cap U \neq \emptyset$, on dit que $\mathfrak{U}$ est un recouvrement *à halos finis* (resp. *à halos dénombrables*). Pour tout $U \subset X$, la réunion des $V \in \mathfrak{U}$ tels que $U \cap V \neq \emptyset$ s'appelle le *halo* de U. On le note $St(U)$, ou $St(U,\mathfrak{U})$. Pour tout $x \in X$, la réunion des $U \in \mathfrak{U}$ tels que $x \in U$ s'appelle le *halo* de x ; on le note également $St(x)$, ou $St(x;\mathfrak{U})$. On pose, par récurrence : $St^1(x) = St(x)$, et $St^{n+1}(x) = St(St^n(x))$. De même pour une partie U de X : $St^1(U) = St(U)$, et $St^{n+1}(U) = St(St^n(U))$. Si tous les éléments de $\mathfrak{U}$ sont des ouverts, on dit que $\mathfrak{U}$ est un *recouvrement ouvert*. Un recouvrement $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ est appelé un *sous-recouvrement de* $\mathfrak{U}$. Un recouvrement $\mathfrak{B}$ tel que, pour tout élément V de $\mathfrak{B}$, il existe $U \in \mathfrak{U}$ tel que $V \subset U$ est qualifié de *recouvrement plus fin que* $\mathfrak{U}$ ou de *raffinement de* $\mathfrak{U}$. On dit qu'un recouvrement $\mathfrak{B}$ est un *raffinement barycentrique*, ou un *raffinement ponctuellement étoilé* du recouvrement $\mathfrak{U}$ si le recouvrement $\mathfrak{B}^\Delta = \{St(x;\mathfrak{B}) \mid x \in X\}$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$. On dit qu'un recouvrement $\mathfrak{B}$ est un *raffinement étoilé* du recouvrement $\mathfrak{U}$ si le recouvrement $\mathfrak{B}^* = \{St(U,\mathfrak{B}) \mid U \in \mathfrak{B}\}$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$. Un raffinement barycentrique d'un raffinement barycentrique d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ est un raffinement étoilé de $\mathfrak{U}$. On pose : $\mathfrak{U}^{**} = (\mathfrak{U}^*)^*$, et

$\mathfrak{U}^{\Delta\Delta} = (\mathfrak{U}^{\Delta})^{\Delta}$. Supposons que $\mathfrak{U}$ soit un recouvrement ouvert, et que $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de recouvrements ouverts de X . On dit que $(\mathfrak{U}_n)$ est *localement étoilant* pour $\mathfrak{U}$ si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x , un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $\mathfrak{V} \in \mathfrak{U}$ tels que $St(V;\mathfrak{U}) \subset U$. Si le recouvrement $\mathfrak{U}$ admet une décomposition de la forme $\mathfrak{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{U}_n$, où les $\mathfrak{U}_n$ sont des recouvrements localement finis (resp. à halo fini, etc.) de X , on dit que $\mathfrak{U}$ est un recouvrement *σ-localement-fini* (resp. *σ-à-halo-fini*, etc.). Un recouvrement $\mathfrak{U}$ est dit *cohérent* si, pour toute partie propre non vide $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{U}$, il existe $U \in \mathfrak{U}\setminus\mathfrak{U}'$ et $U' \in \mathfrak{U}'$ tels que $U \cap U' \neq \emptyset$. Il est clair que toutes les définitions précédentes se généralisent aux *collections* de parties de X , c'est-à-dire aux ensembles de parties de X qui ne sont pas forcément des recouvrements de X . A l'occasion, on utilisera le vocabulaire et les notations des recouvrements pour les collections.

Passons à présent aux notions topologiques qui se définissent à l'aide de recouvrements.

Définition 14.— Soit X un espace topologique. On dit que X est *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini. On dit que X est *compact* s'il est T_2 (séparé) et quasi-compact. On dit que X est un *espace de Lindelöf* s'il est T_2 , et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable. On dit que X est *paracompact* ([9]) s'il est séparé (T_2) , et si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement localement fini. Si X est un espace paracompact dont tout sous-espace est paracompact, on dit que X est *héréditairement paracompact.* Pour que X soit héréditairement paracompact, il faut et il suffit que tout ouvert de X soit paracompact. Un espace séparé X est dit *totalement normal* si tout recouvrement ouvert de X a un raffinement barycentrique ouvert (voir le théorème de Stone ci-après). Il est dit *fortement paracompact* si tout recouvrement ouvert de X a un raffinement ouvert à halos finis. Il est dit *métacompact*, ou *ponctuellement paracompact*, ou *faiblement paracompact* si tout recouvrement ouvert de X a un raffinement ouvert ponctuellement fini.

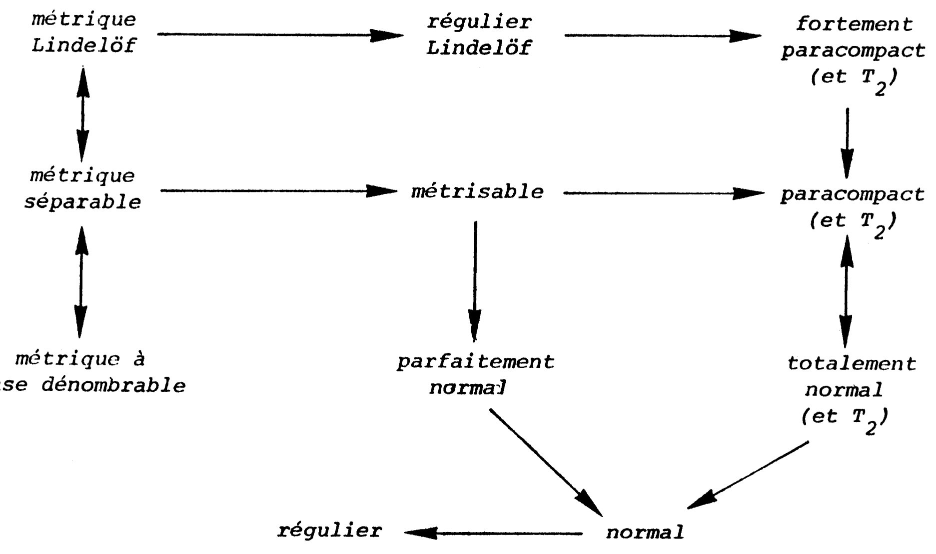


Tableau 3

Les recouvrements interviennent également dans la définition de la *dimension de Lebesgue* d'un espace topologique. La théorie de la dimension sera étudiée au chapitre 5 (volume 2). On verra dans ce même chapitre une application des recouvrements avec les théorèmes de point fixe de Brouwer, de Tyhonov et de Schauder.

Les recouvrements permettent aussi de caractériser certaines notions topologiques (on pourrait donc les définir ainsi). Voici, sans démonstrations, certains de ces énoncés. On pourra consulter le traité de Dugundji pour les preuves.

Un espace séparé X est normal (*i.e.* T_4) si et seulement si, pour tout recouvrement ouvert ponctuellement fini $\mathfrak{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, il existe un recouvrement ouvert $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tel que, pour tout $\alpha \in A$ pour lequel $U_\alpha \neq \emptyset$, on ait : $V_\alpha \neq \emptyset$ et $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$. (*cf.* Dugundji p. 152).

▶ Soit X un espace régulier (*i.e.* $T_2 + T_3$). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est paracompact

(ii) Tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement qui est σ-localement-fini-ouvert.

(iii) Tout recouvrement ouvert de X a un raffinement localement fini.

(iv) Tout recouvrement ouvert de X a un raffinement fermé et localement fini.
(Michael *cf.* Dugundji p. 163).

▶ Un espace T_1 est paracompact si et seulement si tout recouvrement ouvert a un raffinement barycentrique ouvert (A.H. Stone, 1948 ; *cf* Dugundji p. 168). Autrement dit, un espace T_1 est paracompact si et seulement s'il est totalement normal.

▶ Un espace T_1, X, est paracompact si et seulement si tout recouvrement ouvert de X admet une suite localement étoilante de recouvrements ouverts (A. Arhangel'skii ; *cf* Dugundji p. 169).

Le principal intérêt des espaces paracompacts est que sur ces espaces existent des partitions de l'unité. Comme on s'en servira pour l'étude des variétés (volumes 5 et 6), nous allons détailler ce point.

Définition 15.- Soient X un espace séparé, et $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ une famille d'applications continues $X \to [0;1] = \mathbb{1}$. Pour chaque $\xi \in \Xi$, on note $\mathrm{Supp}(f_\xi)$ le *support* de f_ξ, défini par : $\mathrm{Supp}(f_\xi) = \{x \in X \mid f_\xi(x) \neq 0\}^-$. On dit que la famille $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ est une *partition de l'unité* si $(\mathrm{Supp}(f_\xi))_{\xi\in\Xi}$ est un recouvrement fermé localement fini de X, et si, pour tout $x \in X$, $\sum_{\xi\in\Xi} f_\xi(x) = 1$. Si $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ est un recouvrement ouvert de X, on dit qu'une partition de l'unité $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ est *subordonnée* au recouvrement $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ si, pour tout $\xi \in \Xi$, on a : $\mathrm{Supp}(f_\xi) \subset U_\xi$.

Théorème 68 (E. MICHAEL, 1953).– *Soit X un espace topologique séparé. Alors, X est paracompact si et seulement si, pour tout recouvrement ouvert $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ de X, il existe une partition de l'unité $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ subordonnée au recouvrement $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

Pour la démonstration, on supposera connu le fait qu'un espace paracompact est normal (Dugundji p. 163), et la caractérisation de Michael des espaces réguliers paracompacts citée plus haut : un espace régulier est paracompact si et seulement si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement qui est σ-localement-fini-ouvert. On utilisera également le théorème de Tietze-Urysohn (th. 37).

Démonstration.— Supposons que, pour tout recouvrement ouvert de X, il existe une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Alors, X est complètement régulier. C'est donc un espace régulier, et pour montrer qu'il est paracompact, il suffit de montrer que tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement qui est σ-localement-fini-ouvert. Soient donc $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de X, et $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathfrak{U}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}_n$ la collection de tous les ensembles de la forme $\{x\in X \mid f_\xi(x) > 1/n\}$, avec $\xi\in\Xi$. On pose $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Il est clair que $\mathcal{B}$ est un raffinement ouvert de $\mathfrak{U}$, et il suffit donc de vérifier que chaque $\mathcal{B}_n$ est localement fini. Soient $x\in X$, et $n\in\mathbb{N}^*$. On cherche un voisinage V de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{B}_n$. Soit Ψ une partie finie de Ξ telle que $\sum_{\xi\in\Psi} f_\xi(x) > 1-1/2n$, et soit V un voisinage de x tel que $\sum_{\xi\in\Psi} f(y) > 1-1/n$, pour tout $y\in V$. Alors, V ne rencontre $\{y\in X \mid f_\xi(y) > 1/n\}$ que si $\xi\in\Psi$, et par suite, V ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{B}_n$, ce qui achève la première partie de la démonstration.

Réciproquement, supposons que X soit paracompact, et soit $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ un raffinement ouvert localement fini de $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Raffinons encore $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ pour obtenir deux raffinements ouverts localement finis $(W_\beta)_{\beta\in B}$ et $(Z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ vérifiant : "pour tout $\gamma\in\Gamma$, il existe $\beta\in B$, $\beta = c(\gamma)$, tel que $\overline{Z}_\gamma \subset W_\beta$", et "pour tout $\beta\in B$, il existe $\xi\in\Xi$, $\xi = b(\beta)$, tel que $\overline{W}_\beta \subset U_\xi$". Comme tout espace paracompact est normal, on peut utiliser le théorème de Tietze-Urysohn : pour tout $\gamma\in\Gamma$, il existe une fonction d'Urysohn $f_\gamma : X \to [0;1]$ qui vaut 1 sur $\overline{W}_\gamma$, et 0 sur $(V_{c(\gamma)})^c$. Alors, $\mathrm{Supp}\, f_\gamma \subset U_{b\circ c(\gamma)}$. Comme $(Z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est un recouvrement localement fini de X, pour tout $x\in X$, on a : $1 < \mathrm{card}\,\{\gamma \mid f_\gamma(x) \neq 0\} < \aleph_0$. Ainsi, $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ est une fonction continue $X \to \mathbb{R}_+^*$. La partition de l'unité cherchée est $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, avec $g_\gamma(x) = f_\gamma(x) / \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$. ∎

En particulier, cette démonstration montre que dans un espace *normal*, pour tout recouvrement ouvert *localement fini*, il existe une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

Pour en terminer avec la paracompacité, voyons les propriétés de stabilité de cette notion : la paracompacité est une notion faiblement héréditaire mais pas héréditaire, topologique et surtopologique (en français, dans l'ordre : tout fermé d'un espace paracompact est paracompact, mais il existe des parties de certains espaces paracompacts qui ne sont pas paracompactes. Tout espace homéomorphe à un espace paracompact est paracompact, et toute image continue d'un espace paracompact est paracompacte). Du point de vue du produit, si un produit d'espaces est paracompact, alors chaque facteur est paracompact. Toutes ces propriétés sont démontrées dans Dugundji pp. 165 *sq*. On verra au chapitre 2 un contre-exemple du fait que la paracompacité n'est pas héréditaire : le sous-espace $[0;\Omega[$ du compact $[0;\Omega]$ n'est ni compact ni paracompact (*cf.* chapitre 2, § 5.4, propriété U3). Notons néanmoins que tout $\mathcal{F}_\sigma$ d'un espace paracompact est paracompact. Voici un contre-exemple, dû à Michael (1963), du fait qu'un produit d'espaces paracompacts n'est en général pas paracompact. On suit la présentation de Nagata [64].

Contre-exemple 69.– Soient I l'ensemble des irrationnels de $[0;1]$ muni de sa topologie usuelle, et S l'intervalle $[0;1]$ muni de la topologie $\mathcal{S}$ dont les bases de voisinages sont ainsi définies : si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, x est isolé, et si $x \in \mathbb{Q}$, une base de voisinages de x est formée des voisinages usuels : $]x-1/n\,;x+1/n[\cap[0;1]$. L'ensemble I est un espace métrique, donc un espace paracompact et normal. L'ensemble S est séparé, car $\mathcal{S}$ est plus fine que la topologie usuelle. D'après le théorème de Stone cité plus haut, pour établir que S est paracompact, il suffit d'établir qu'il est totalement normal. Soit donc $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de S. Pour tout $x \in S\cap\mathbb{Q}$, il existe $\varepsilon(x)>0$ et $U \in \mathfrak{U}$ tels que $]x-\varepsilon(x);x+\varepsilon(x)[\subset U$. Alors, le recouvrement ouvert

$$\mathfrak{D} = \{\{x\} \mid x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0;1]\} \cup \{]x-\varepsilon(x);x+\varepsilon(x)[\cap]0;1] \mid x \in \mathbb{Q}\cap[0;1]\}$$

est un raffinement ouvert de $\mathfrak{U}$. Le recouvrement

$$\mathfrak{W} = \{\{x\} \mid x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0;1]\} \cup \{]x-\varepsilon(x)/4;x+\varepsilon(x)/4[\cup[0;1] \mid x \in \mathbb{Q}\cap[0;1]\}$$

est un raffinement barycentrique de $\mathfrak{U}$. Montrons que $I\times S$ n'est pas normal. *A fortiori*, ce ne sera pas un espace paracompact. Notons respectivement S_1 et S_2 l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels de S. Alors, $F = I\times S_1$ et $G = \{(x;x) \mid x \in S_2\}$ sont deux fermés disjoints de $I\times S$. Montrons que F et G ne peuvent être séparés par des ouverts disjoints. Supposons par l'absurde qu'il existe deux ouverts U et V de $I\times S$ tels que : $F\subset U$, $G\subset V$ et $U\cap V=\emptyset$. Posons : $V_n = \{q \mid q\in S_2$ et $\{q\}\times]q-1/n;q+1/n[\subset V\}$. Alors, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = S_2$. Par ailleurs, S_2 n'est pas un $\mathcal{F}_\sigma$ de S. En effet, si l'on avait $S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n$, avec K_n fermé dans S, on aurait $S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n$, où $\overline{K}_n$ est l'adhérence de K_n pour la topologie usuelle de $[0;1]$. On aurait alors $(\mathbb{Q}\cap[0;1]) \subset ([0;1]\setminus K_n)$, et les $\overline{K}_n$ seraient des parties nulle part denses (= rares) de $[0;1]$. Mais alors, $\mathbb{Q}\cap[0;1]$ serait un $\mathcal{G}_\delta$ de $[0;1]$, ce qui contredirait le théorème de Baire. Cela étant, revenons à S : comme S_2 n'est pas un $\mathcal{F}_\sigma$, $S_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{V}_n \neq S_2$, d'où l'on tire $S_1\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{V}_n \neq\emptyset$, puis $S_1\cap\overline{V}_n\neq\emptyset$ pour un $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $y\in S_1\cap\overline{V}_n$. Soit $z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tel que $|y-z|<1/2n$. Comme $(y;z)\in F$, il existe $m\geq 2n$ tel que $]y-1/m\,;y+1/m[\times]z-1/m\,;z+1/m[\subset U$. Puisque $z\in\overline{V}_n$, il existe $t\in V_n\cap]z-1/m\,;z+1/m[$, et par suite, $(y;t)\in]y-1/m\,;y+1/m[\times]z-1/m\,;z+1/m[\subset U$. Par ailleurs, $|z-t|<1/m\leq 1/2n$, et comme $|y-z|<1/2n$, il vient : $|y-t|<1/n$, puis, par définition de V_n : $(y;t)\in V$, ce qui contredit l'hypothèse $U\cap V=\emptyset$, et achève d'établir le contre-exemple.

Ce contre-exemple montre également qu'en général, le produit de deux espaces normaux n'est pas un espace normal. Cette question de la normalité du produit de deux espaces normaux est liée à un problème célèbre, maintenant résolu, la conjecture de Dowker. Cette conjecture affirmait que le produit d'un espace normal quelconque avec $[0;1]$ est un espace normal, ce qui équivaut au fait que tout espace normal soit dénombrablement paracompact. M.E. Rudin a montré que cette conjecture est fausse (*cf.* Appendice, § 4.11, pour les liens entre la conjecture de Dowker et l'hypothèse de Souslin).

Enfin, l'ensemble S, connu sous le nom de *droite de Michael*, est un exemple d'espace non métrisable, collectivement normal mais non développable ; en outre, tout point x de S possède une base dénombrable de voisinages $W(n\,;x)$ qui est telle que, pour tout ouvert U contenant x, il existe un entier $s=s(x\,;U)$, et un ouvert $V=V(x\,;U)$ contenant x tels que, pour tout $y\in V$, on ait : $x\in W(s\,;y)\subset U$. Un espace T_1, X, dont chaque point x possède une base dénombrable *décroissante* de voisinages $W(n\,;x)$ ayant la propriété ci-dessus est métrisable (critère de métrisabilité de Collins et Roscoe, 1984).

6.2. METRISABILITE DES ESPACES TOPOLOGIQUES

Pour mémoire, rappelons quelques propriétés des espaces métriques. Rappelons aussi qu'un espace topologique X est dit *parfaitement normal* s'il est normal, et si tout fermé de X est un $\mathfrak{G}_\delta$.

▶ Tout espace métrique est parfaitement normal (*cf.* Dugundji p. 186)

▶ Tout espace métrique est paracompact (Stone et Tukey, *cf.* Dugundji p. 186)

▶ Il est équivalent de dire qu'un espace métrique est séparable, qu'il est de Lindelöf, ou qu'il est à base dénombrable (*cf.* Dugundji p. 187)

Cela étant, passons au problème de la métrisabilité. Les critères de métrisabilité de Nagata et Smirnov, d'Urysohn, de Stone, de Morita et celui d'Arhangel'skii sont traités par Dugundji [O2]. Nous n'y reviendrons donc pas. Nous allons voir un autre grand théorème de métrisabilité, le premier théorème de métrisabilité de Bing (1947), qui doit son importance au théorème de prolongement qui s'en déduit, et dont nous nous servirons plus loin. (Il y a un second théorème de métrisabilité de Bing, mais nous ne nous en servirons pas).

Lemme 70.— *Soient* X *un ensemble,* $r \in \mathbb{N}^*$ *, et* $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de collections de parties de* X *ayant la propriété suivante : pour tous* $x_1, x_2 \in X$ *, et tout* $n \in \mathbb{N}$ *, s'il existe une sous-collection cohérente de cardinal* $\leq r$ *de* $\mathfrak{U}_{n+1}$ *qui recouvre* $\{x_1 ; x_2\}$ *, alors il existe un* $U \in \mathfrak{U}_n$ *qui contient* $\{x_1 ; x_2\}$ *.*

Alors, si $\{x;y\}$ *est une paire qui n'est recouverte par aucun élément de* $\mathfrak{U}_1$ *, et s'il existe une collection cohérente minimale* $\{U_1,\dots,U_n\}$ *vérifiant* $U_i \subset \mathfrak{U}_{\alpha(i)}$ *,* $1 \leq i \leq n$ *, et* $\{x;y\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ *, on a :* $2 \sum_{i=1}^{n} 1/r^{\alpha(i)} > 1/r^s$ (1) .

Démonstration.— Soit $\{x;y\}$ une paire $\subset X$ satisfaisant aux hypothèses de la deuxième partie de l'énoncé. Comme la collection est cohérente et minimale, on peut supposer, quitte à changer la numérotation des U_i : $x \in U_1$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, $U_i \cap U_{i+k} = \emptyset$ si $k > 1$, $y \in U_n$. Autrement dit, les U_i forment une chaîne de x à y . On va montrer : (2) $1/r^{\alpha(1)} + 2 \sum_{i=2}^{n-1} 1/r^{\alpha(i)} + 1/r^{\alpha(n)} > 1/r^s$.
Pour cela, on procède par récurrence sur n . Si $n=1$, alors $\alpha(1) < s$, et la relation (2) est vraie. Supposons avoir établi la relation (2) pour tous les entiers $n < k$, mais que celle-ci soit fausse pour k . Soit $(U_1,\dots,U_k)$ une chaîne de x à y , et soit m un entier tel que $\{x;y\}$ ne soit inclus dans aucun élément de $\mathfrak{U}_m$. On suppose que la relation (2) est fausse pour k et m . Pour tout i , $1 \leq i \leq k-1$, soit $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$, avec $x_1 = x$, et $x_k = y$. Soit $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ une séquence strictement monotone croissante de r entiers de $[2;k]$ ayant les propriétés suivantes : "Aucun élément de $\mathfrak{U}_{m+1}$ ne contient x_1 et x_{j_1} , mais il existe $U_1 \in \mathfrak{U}_{m+1}$ tel que $\{x_1 ; x_{j_1 - 1}\} \subset U_1$" et : "Pour tout q , $1 \leq q \leq r$, aucun élément de $\mathfrak{U}_{m+1}$ ne contient $x_{j_q - 1}$ et $x_{j_{q+1}}$, mais il existe $U_{q+1} \in \mathfrak{U}_{m+1}$ tel que $\{x_{j_q - 1} ; x_{j_{q+1} - 1}\} \subset U_{q+1}$" .
Aucun élément de $\mathfrak{U}_{m+1}$ n'inclut $\{x_{j_q - 1} ; x_k\}$, car sinon, il existerait une collection cohérente de cardinal $\leq r$ et incluse dans $\mathfrak{U}_{m+1}$ qui recouvrirait $\{x;y\} = \{x_1 ; x_k\}$. On aurait alors $\{x;y\} \subset U \in \mathfrak{U}_m$, ce qui contredirait la définition de m . Comme la relation (2) est vraie pour tout $n < k$, on peut l'appliquer aux paires $\{x_1 ; x_{j_1}\}$, $\{x_{j_1} ; x_{j_2}\}$,... Cela donne :

$$1/r^{\alpha(1)} + 2/r^{\alpha(2)} + \ldots + 2/r^{\alpha(j_1-1)} + 1/r^{\alpha(j_1)} > 1/r^{m+1}$$
$$1/r^{\alpha(j_1)} + 2/r^{\alpha(j_1+1)} + \ldots + 2/r^{\alpha(j_2-1)} + 1/r^{\alpha(j_2)} > 1/r^{m+1}$$
$$\ldots$$
$$1/r^{\alpha(j_{r-1})} + 2/r^{\alpha(j_{r-1}+1)} + \ldots + 2/r^{\alpha(j_r-1)} + 1/r^{\alpha(j_r)} > 1/r^{m+1}$$

En additionnant ces inégalités, on obtient (2) . ∎

Théorème 71 (*Bing, 1947*) [10].— *Soit* X *un espace topologique admettant une suite* $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ayant les deux propriétés suivantes :*

a) un point $p \in X$ *appartient à la fermeture* $\overline{M}$ *d'une partie* M *de* X *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $V \in H_m$ *tel que* $p \in V$ *et* $V \cap M \neq \emptyset$;

b) *pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, *et toute paire* $\{x;y\} \subset X$, *s'il existe* $U \in \mathfrak{U}_{m+1}$ *tel que* $\{x;y\} \subset U$, *ou s'il existe* U *et* $V \in \mathfrak{U}_{m+1}$ *tels que* $U \cap V \neq \emptyset$ *et* $\{x;y\} \subset U \cup V$, *alors il existe* $W \in \mathfrak{U}_m$ *tel que* $\{x;y\} \subset W$.

Alors, X *est métrisable.*

Démonstration.— Supposons que X admette une suite de recouvrements satisfaisant à a) et b). On reprend les notations du lemme 70. Selon le principe des distances géodésiques, pour toute paire $\{x;y\}$ d'éléments de X , on note $\mu(x;y)$ la borne inférieure des nombres de la forme $1/2^{\alpha(1)} + 1/2^{\alpha(2)} + \ldots + 1/2^{\alpha(n)}$, où $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une collection cohérente vérifiant : $U_i \in \mathfrak{U}_{\alpha(i)}$, pour $1 \le i \le n$, et $\{x;y\} \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. On pose également : $d(x;y) = \min\{1;\mu(x;y)\}$.

■ *Montrons que* d *est une distance* : il est clair que $d(x;y) \ge 0$, que $d(x;y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et que $d(x;y) = d(y;x)$. Reste l'inégalité triangulaire : soient $x,y,z \in X$. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux collections cohérentes recouvrant respectivement $\{x;y\}$ et $\{y;z\}$. Alors $(\mathcal{U};\mathcal{V})$ est une collection cohérente recouvrant $\{x;z\}$. Il s'ensuit : $d(x;z) \le d(x;y) + d(y;z)$ (clairement, si $\mathcal{U} = (U_1;\ldots;U_p)$ et $\mathcal{V} = (V_1;\ldots;V_q)$, on a posé : $(\mathcal{U};\mathcal{V}) = (U_1;\ldots;U_p;V_1;\ldots;V_q)$.

■ *Montrons que la topologie définie par* d *est bien celle de* X . Soient $Y \subset X$, et $y \in X\setminus\overline{Y}$. Il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel qu'aucun élément de $\mathfrak{U}_s$ contenant y ne contienne aussi un point de Y . D'après le lemme 70, si z est un point de Y , on a $d(y;z) \ge 1/2^{s+1}$. Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si Z est une partie de X vérifiant $y \in \overline{Z}$, et $\overline{Z}\setminus\{y\} \neq \emptyset$, la réunion des éléments de $\mathfrak{U}_n$ qui contiennent y a une intersection non vide avec $Z\setminus\{y\}$. Ainsi, on a $y \in \overline{Z}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in Z$ tel que $d(y;t) < \varepsilon$. Cela achève la démonstration. ∎

Lemme 72.— *Soient* Y *et* Z *deux fermés métrisables d'un espace topologique* X . *On suppose qu'il existe deux distances* d_Y *et* d_Z *sur respectivement* Y *et* Z *qui coïncident sur* $Y \cap Z$: $\forall (x;t) \in Y \cap Z$, $d_Y(x;y) = d_Z(x;t)$. *Alors, il existe une distance sur* $Y \cup Z$ *qui coïncide avec* d_Y *et* d_Z *sur* Y *et sur* Z .

Démonstration.— Si $Y \cap Z = \emptyset$, et si $Y \neq \emptyset \neq Z$, soient $y_o \in Y$ et $z_o \in Z$ deux points fixés. On pose, pour tout $(x;y) \in (Y \cup Z)^2$:

$$d(y;x) = d(x;y) = \begin{cases} d_Y(x;y) & \text{si } (x;y) \in Y^2 \\ d_Z(x;y) & \text{si } (x;y) \in Z^2 \\ d_Y(x;x_o) + 1 + d_Z(y_o;y) & \text{si } (x;y) \in Y \times Z \end{cases}$$

On vérifie facilement que d est une distance sur $Y \cup Z$ qui coïncide avec d_Y et d_Z sur respectivement Y et Z.

Si $Y \cap Z \neq \emptyset$, en appliquant le principe des distances géodésiques, on pose, pour tout $(x;y) \in (Y \cup Z)^2$:

$$d(x;y) = d(y;x) = \begin{cases} d_Y(x;y) & \text{si } (x;y) \in Y^2 \\ d_Z(x;y) & \text{si } (x;y) \in Z^2 \\ \inf\{d_Y(x;z) + d_Z(z;y) \mid z \in Y \cap Z\} & \text{si } (x;y) \in Y \times Z \end{cases}$$

Il est clair que $d(x;y) \geq 0$, que $d(x;y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et que $d(x;y) = d(y;x)$.

Montrons l'inégalité triangulaire sur $Y \times Z$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x,y,z \in Y \cup Z$, et $\theta > 0$ tels que : $d(x;z) - \theta = d(x;y) + d(y;z)$. Alors, deux des points x,y,z appartiennent à l'un des ensembles Y et Z, tandis que le troisième point appartient à l'autre ensemble. Un premier cas est : $(x;y) \in Y^2$, et $z \in Z$. Il existe $t \in Y \cap Z$ tel que :

$$\begin{aligned} d(x;y) + d(y;z) &> d_Y(x;y) + d_Y(y;t) + d_Z(t;z) - \theta \\ &\geq d_Y(x;t) + d_Z(t;z) - \theta \geq d(x;z) - \theta \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse. Le deuxième cas à considérer est : $(x;z) \in Y$ et $y \in Z$. Il existe alors t et $u \in Y \cap Z$ tels que :

$$\begin{aligned} d(x;y) + d(y;z) &> d_Y(x;t) + d_Z(t;y) - \theta/2 + d_Z(y;u) + d_Y(u;z) - \theta/2 \\ &\geq d_Y(x;t) + d_Z(t;u) + d_Y(u;z) - \theta \\ &= d_Y(x;t) + d_Y(t;u) + d_Y(u;z) - \theta \geq d_Y(x;z) - \theta = d(x;z) - \theta \end{aligned}$$

ce qui contredit encore l'hypothèse, et achève la démonstration. ▣

Théorème 73 (*Bing, 1947*). *Prolongement des distances*.— *Soient* Y *un sous-espace fermé d'un espace métrisable* X, *et* d_Y *une distance sur* Y. *Alors, il existe une distance* d *sur* X *qui coïncide avec* d_Y *sur* Y.

La démonstration utilise le théorème 71 et le lemme 72.

Démonstration.— *Premier cas :* d_Y *est bornée*. Quitte à multiplier d_Y par une constante, supposons : $\operatorname{diam} d_Y(Y) < 1/8$. On va utiliser une distance δ sur X qui majore d_Y sur Y. Soit δ' une distance sur X pour laquelle : $\operatorname{diam}_{\delta'}(X) < 1/2$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}_n$ la collection de tous les ouverts U de X qui vérifient : $\operatorname{diam}_{\delta'}(U) < 1/2^i$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_n$ la collection des éléments de $\mathcal{U}_n$ qui contiennent deux point x et y de Y vérifiant : $d_Y(x;y) \geq 1/2^{n+2}$. Posons : $\mathcal{B}_n = \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{C}_n$. Soit $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de recouvrements

de X définie ainsi par récurrence : $\mathcal{L}_1 = \mathcal{B}_1$, et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}_{n+1}$ est un sous-recouvrement de $\mathcal{B}_{n+1}$ qui raffine $\mathcal{L}_n$, et tel que toute intersection non vide de deux éléments de $\mathcal{L}_{n+1}$ soit incluse dans un élément de $\mathcal{L}_n$. On peut déduire ainsi $\mathcal{L}_{n+1}$ de $\mathcal{L}_n$: pour tout $x \in X$, soit U_x un élément de $\mathcal{L}_n$ contenant x, et soit V_x un élément de $\mathcal{B}_{n+1}$ contenant x et vérifiant : $\mathrm{diam}_{\delta'}(V_x) < \delta'(x;U_x^c)/2$. On prend pour $\mathcal{L}_{n+1}$ un recouvrement de X formé de tels ensembles V_x. La suite $(\mathcal{L}_n)$ satisfait aux hypothèses du théorème 71, et l'on a : $Y \subset \mathcal{L}_1$. La démonstration du théorème 71 fournit une distance δ sur X. Montrons que δ majore d_Y sur Y. Soient x et $y \in Y$, et j l'entier vérifiant : $1/2^{j+1} \le d_Y(x;y) < 1/2^j$. Comme $\{x;y\}$ n'est inclus dans aucun élément de $\mathcal{B}_{j-1}$, il n'est contenu dans aucun élément de $\mathcal{L}_{j-1}$. Soit $(U_1,\dots,U_n)$ une collection cohérente d'ouverts vérifiant : $\{x;y\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, et $U_i \in \mathcal{L}_{\alpha(i)}$, $1 \le i \le n$. Le lemme 70 montre : $1/2^{\alpha(1)} + 1/2^{\alpha(2)} + \dots + 1/2^{\alpha(n)} > 1/2^j$.
On en déduit : $\delta(x;y) \ge 1/2^j > d_Y(x;y)$.

● Définissons à présent d, en suivant le principe des distances géodésiques :

$$d(x;y) = \min\{\delta(x;y),\ \inf\{\delta(x;t) + d_Y(t;u) + \delta(u;y) \mid (t;u) \in Y^2\}\}$$

Soient $x,y,u,t \in Y$. Il vient : $\delta(x;t) + d_Y(t;u) + \delta(u;y) \ge d_Y(x;t) + d_Y(t;u) + d_Y(u;y) \ge d_Y(x;y)$. En prenant $x = t$ et $y = u$, on obtient : $d(x;y) = d_Y(x;y)$. Ainsi d coïncide-t-elle avec d_Y sur Y.

● Il est clair que l'on a : $d(x;y) \ge 0$, $d(x;y) = d(y;x)$ et $d(x;y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Montrons que d satisfait à l'inégalité triangulaire. Supposons par l'absurde que cette inégalité ne soit pas vérifiée. Il existe donc $x,y,z \in X$, et $\theta > 0$ tels que : $d(x;z) - \theta = d(x;y) + d(y;z)$. Si $d(x;y) \neq \delta(x;y)$, et si $d(y;z) \neq \delta(y;z)$, il existe $t,u,v,w \in Y$ tels que : $d(x;y) + \theta/2 > \delta(x;t) + d_Y(t;u) + \delta(u;y)$ et que : $d(y;z) + \theta(2) > \delta(y;v) + d_Y(v;w) + \delta(w;z)$. Par addition, il vient : $d(x;y) + d(y;z) + \theta > \delta(x;t) + d_Y(t;u) + \delta(u;y) + \delta(y;v) + d_Y(v;w) + \delta(w;z)$ $\ge \delta(x;t) + d_Y(t;u) + \delta(u;v) + d_Y(v;w) + \delta(w;z) \ge \delta(x;t) + d_Y(t;w) + \delta(w;z) \ge d(x;z)$, ce qui contredit l'hypothèse. De même dans les autres cas, c'est-à-dire si $d(x;y) = \delta(x;y)$, ou si $d(y;z) = \delta(y;z)$.

● Enfin, on vérifie facilement que d est compatible avec la topologie de X, et le théorème est démontré dans le cas où la distance d_Y est bornée.

■ *Deuxième cas : d_Y n'est pas bornée.*— Soient $x \in Y$, et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts de X telle que : $x \notin V_1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} \subset V_n$, et $\{y \in Y \mid d_Y(x;y) > n\} \subset V_n$, et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n = \emptyset$. On pose : $W_n = X \setminus V_n$. L'ensemble W_n est donc un fermé de X, et si $y,z \in Y \cap W_n$, on a : $d_Y(y;z) \le 2n$. Cela étant, comme d_Y est bornée sur $Y \cap W_1$, il existe, d'après la première partie de la démonstration, une distance bornée d_{W_1} sur W_1 qui coïncide avec d_Y sur $Y \cap W_1$. D'après le lemme 72, il existe une distance bornée $d_{W_1 \cup (Y \cap W_2)}$ qui coïncide avec d_{W_1} sur W_1 et avec d_Y sur $Y \cap W_2$. D'après la première partie de la démonstration, $d_{W_1 \cup (Y \cap W_2)}$ admet un prolongement borné à W_2. Fin de la démonstration par âne qui trotte. ■

7. ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS

Chacun connaît les propriétés suivantes que possède tout espace métrique compact $(X;d)$.

- $(X;d)$ est précompact et complet.
- Toute suite d'éléments de X a une sous-suite convergente.
- Toute application continue $(X;d) \to (Y;\delta)$ est uniformément continue.
- Toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.
- La distance de deux fermés disjoints de X est strictement positive.
- Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X, il existe $\lambda > 0$ tel que $\{B(x;\lambda) \mid x \in X\}$ soit un raffinement de $\mathfrak{U}$.

Dans cette section, nous allons voir des énoncés convers de ces assertions. Nous terminerons par l'étude de quelques propriétés faisant intervenir à la fois la compacité et la connexité.

Proposition 74.- *Soit* (X,d) *un espace métrique. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est compact.*

(ii) X *est séquentiellement compact. Autrement dit, toute suite d'éléments de* X *a une sous-suite convergente.*

(iii) *Toute suite infinie de points de* X *a au moins une valeur d'adhérence.*

(iv) *Toute partie infinie de* X *a au moins un point d'accumulation.*

La démonstration se trouve dans tous les bons traités de topologie. Voir par exemple G. CHOQUET, Cours d'Analyse tome II p. 74.

Proposition 75.— *L'espace métrique* $(X\,;d)$ *est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

Démonstration.— Comme pour la proposition 74.

Lemme 76.— *Soit* $Y = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *une partie infinie dénombrable fermée et discrète d'un espace métrisable* X. *Alors, il existe une distance* d_Y *sur* Y *pour laquelle la suite* (x_n) *est une suite de Cauchy.*

Démonstration.— On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_Y(x_n;x_{n+1}) = 1/2^n$, et, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $p > n$: $d(x_n;x_p) = \sum_{k=0}^{p-n-1} d(x_{n+k};x_{n+k+1})$. (On a supposé les x_n distincts deux à deux). ■

Théorème 77 (*Niemytski-Tikhonov, 1928*).— *Soit* X *un espace métrisable. L'espace* X *est compact si et seulement s'il est complet pour toute distance compatible avec sa topologie.*

La démonstration utilise les énoncés 73, 74, 75, 76.

Démonstration.— Si X est compact, d'après la proposition 75, il est complet pour toute distance. Si X n'est pas compact, d'après la proposition 74, il admet une suite infinie de points sans valeur d'adhérence. D'après le lemme 76, il existe sur l'ensemble sous-jacent à cette suite une distance δ pour laquelle cette suite est une suite de Cauchy. D'après le théorème de prolongement de Bing (théorème 73), cette distance δ peut être étendue à tout X. Pour la distance d ainsi obtenue, X n'est pas complet. ▣

Théorème 78 (*Hewitt, 1948*).— *Soit* X *un espace métrisable. L'espace* X *est compact si et seulement si toute fonction continue* $X \to \mathbb{R}$ *est bornée.*

La démonstration utilise le théorème 73, et la proposition 74.

Démonstration.— On sait que, si X est compact, toute fonction continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée. Si X n'est pas compact, il admet une partie infinie dénombrable $Y = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sans point d'accumulation. Supposons les x_n distincts deux à deux, et définissons une distance d_Y sur Y par : $d_Y(x_n ; x_m) = |m-n|$. D'après le théorème de prolongement de Bing (théorème 73), la distance d_Y se prolonge à tout X. Soit d un tel prolongement. L'application continue $X \to \mathbb{R}$, $x \to d(x_o ; x)$ n'est pas bornée. ▣

Remarque 79.— On a montré au passage que si X est un espace métrisable non compact, il existe sur X une distance compatible non bornée (théorème dû à Hausdorff).

Théorème 80 (*Alexander, 1971*).— *Soit* X *un espace métrisable. L'espace* X *est compact si et seulement si, pour tout espace métrique* $(Y ; d)$ *contenant* X *et tout fermé* $Z \subset Y$ *disjoint de* X, *on a :* $d(X ; Z) > 0$.

La démonstration utilise le théorème 73 et la proposition 74.

Démonstration.— Si X est compact, si $(Y;d)$ inclut X, et si Z est un fermé de Y disjoint de X, l'application $X \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto d(x;Z)$ est continue ; elle atteint donc sa borne inférieure, qui est >0. Si X n'est pas compact, il existe une suite infinie dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de points distincts deux à deux sans valeur d'adhérence. L'ensemble $\{x_n\}$ est un fermé de X. Munissons $\{x_n\}$ de la distance δ définie par : $\delta(x_n;x_{n+1}) = 1/2^n$, et, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $p > n$, $\delta(x_n;x_p) = \sum_{k=0}^{p-n-1} \delta(x_{n+k} ; x_{n+k+1})$. D'après le théorème de prolongement de Bing, la distance δ admet un prolongement continu, d, sur X. Soit ω un point n'appartenant pas à X. On munit $X \cup \{\omega\} = Y$ de la distance d' définie par : $d'(x;y) = d(x;y)$ si $(x;y) \in X^2$; si $n \in \mathbb{N}^*$, $d'(x_n;\omega) = 1/2^{n-1}$; si $x \in X \setminus \{x_n\}$, $d'(x;\omega) = \inf\{d(x;x_n) + d'(x_n;\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme d est une distance sur X, il suffit de vérifier les axiomes des distances avec ω. Si $x \in X$ vérifie $d'(x;\omega) = 0$, x est une valeur d'adhérence de (x_n). Par hypothèse, c'est impossible. Par ailleurs, si $x,y \in X$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe n et $p \in \mathbb{N}$ tel que : $d'(x;\omega) = d(x;x_n) + d'(x_n;\omega) - \rho$, avec $\rho < \varepsilon/2$, et que $d'(\omega;y) = d(y;x_p) + d'(x_p;\omega) - \tau$, avec $\tau < \varepsilon/2$. On en déduit : $d'(x;\omega) + d(\omega;y) =$

$$= d(x;x_n) + d'(x_n;\omega) + d'(y;x_p) + d(x_p;\omega) - \theta \quad \text{avec } \theta < \varepsilon ,$$

$$\geq d(x;x_n) + d(x_n;x_p) + d(x_p;y) - \theta \quad \geq d(x;y) - \theta \quad .$$

Cela montre que d' est bien une distance sur Y. Dans l'espace métrique $(Y;d')$, X et le fermé $\{\omega\}$ vérifient : $d'(X;\{\omega\}) = 0$. ▣

Théorème 81 (Hueber, 1981).– *Soit* $(X;d)$ *un espace métrique. Pour tout* $x \in X$, *on pose :* $d(x) = d(x;X\setminus\{x\})$. *(*$x \in X$ *est isolé ssi* $d(x) > 0$*). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est compact*

(ii) *Toute fonction continue* $X \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue, et, pour tout* $\varepsilon > 0$, $\{x \in X \mid d(x) > \varepsilon\}$ *est fini.*

La démonstration utilise la proposition 74, ainsi que le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn (théorème 37).

Démonstration.– (i) $\Longrightarrow$ (ii). On sait que, si X est compact, toute fonction continue $X \to \mathbb{R}$ est uniformément continue. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{x \in X \mid d(x) > \varepsilon\}$ soit infini, le recouvrement ouvert de X $\{\{y \in E \mid d(x;y) < \varepsilon\} \mid x \in X\}$ n'a pas de sous-recouvrement fini.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que X ne soit pas compact, mais que $\{x \in X \mid d(x) > \varepsilon\}$ soit fini, pour tout $\varepsilon > 0$. Puisque X n'est pas compact, d'après la proposition 74, il existe une partie infinie dénombrable de X sans point d'accumulation, $Z = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, avec $x_n \neq x_p$ si $n \neq p$. Comme $\{x \in X \mid d(x) > \varepsilon\}$ est fini, $\{x \in Z \mid d(x) > \varepsilon\}$ est aussi fini, et $\lim_{n\to\infty} d(x_n) = 0$. Il existe donc une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et un ensemble infini dénombrable $Y = \{y_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ de points distincts deux à deux, disjoint de $T = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, et vérifiant : $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k};y_{n_k}) = 0$. L'ensemble Y n'a pas de point d'accumulation, car un point d'accumulation de Y serait un point d'accumulation de X. Cela étant, les ensembles Y et T sont des fermés disjoints de X. Puisqu'un espace métrisable est normal, il existe, d'après le théorème de Tietze-Urysohn, une fonction d'Urysohn $f : X \to [0;1]$ valant 1 sur T et 0 sur Y. La fonction f n'est pas uniformément continue, car $\lim_{k\to\infty}[(f(x_{n_k})-f(y_{n_k}))/(d(x_{n_k};y_{n_k}))] = +\infty$, et cela achève la démonstration.

Théorème 82 (Tanaki, 1973). Constante de Lebesgue des recouvrements).– *Soit* X *un espace métrisable. L'espace* X *est compact si et seulement si, pour toute distance* d, *et tout recouvrement ouvert* $\mathfrak{U}$ *de* X, *il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $\{B_d(x;\lambda) \mid x \in X\}$ *soit un raffinement de* $\mathfrak{U}$.

On dit que λ est une *constante de Lebesgue* du recouvrement $\mathfrak{U}$, car c'est Lebesgue qui avait montré que si X est compact, tout recouvrement ouvert admet une telle constante. Dire que $\{B_d(x;\lambda) \mid x \in X\}$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$ revient à dire que, pour toute boule ouverte $B_d(x;\lambda)$, il existe un $U \in \mathfrak{U}$ qui inclut $B_d(x;\lambda)$. On utilisera les constantes de Lebesgue dans le chapitre 5 pour étudier la dimension topologique de $\mathbb{R}^n$, et démontrer le théorème de Brouwer.

La première démonstration utilise la proposition 74. Une deuxième démonstration repose sur le théorème de Hueber (théorème 81).

<u>Démonstration</u>.— Supposons que X soit compact. Soient d une distance compatible, et $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $x \in X$, soit $\delta(x) > 0$ tel qu'il existe $U \in \mathfrak{U}$ vérifiant : $B_d(x;2\delta(x)) \subset U$. Alors, $\{B_d(x;\delta(x)) \mid x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X, qui, puisque X est compact, admet un sous-recouvrement fini $\{B_d(x_i;\delta(x_i)) \mid 1 \le i \le n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\lambda = \min\{\delta(x_i) \mid 1 \le i \le n\}$. C'est une constante de Lebesgue du recouvrement $\mathfrak{U}$.

Réciproquement, supposons que, pour toute distance d, tout recouvrement $\mathfrak{U}$ admette une constante de Lebesgue, $\lambda(\mathfrak{U})$. On va montrer que X est séquentiellement compact. Comme X est métrisable, cela montrera qu'il est compact (proposition 74). Supposons que X ne soit pas séquentiellement compact, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de X qui n'admette pas de sous-suite convergente, et qui vérifie $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Alors, toute partie de $\{x_n\}$ est fermée. Il faut distinguer deux cas : ou bien tous les x_n sauf un nombre fini d'entre eux sont des points d'accumulation de X ; ou bien il existe une sous-suite (x_{n_k}) formés de points isolés de X. Dans le premier cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varepsilon_n > 0$ vérifiant : $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $B_d(x_n;2\varepsilon_n) \neq B_d(x_n;\varepsilon_n)$ et $x_m \notin B_d(x_n;\varepsilon_n)$ si $m \neq n$. Alors, le recouvrement ouvert $\{B_d(x_n;\varepsilon_n) \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{X \smallsetminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}\}$ n'admet pas de constante de Lebesgue, d'où la contradiction. Dans le second cas, soit $Y = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. On pose $\delta(x;y) = 1/(1+d(x;y))$ si $x,y \notin Y$, $\delta(x;x_{n_k}) = \delta(x_{n_k};x)$ si $x \notin Y$ et $\delta(x_{n_k};x_{n_q}) = 2\,|k^{-1} - q^{-1}|$. Alors, δ est une distance sur X compatible avec la topologie de X, et le recouvrement $\{B_\delta(x_{n_k};k^{-2}) \mid k\in\mathbb{N}\} \cup (X\smallsetminus Y)$, n'a pas de constante de Lebesgue ; nouvelle contradiction, et fin de la démonstration.

<u>*Deuxième démonstration*</u>.— A partir du théorème de Hueber (théorème 81), on obtient une démonstration plus courte de l'implication : "Il existe des constantes de Lebesgue" $\Longrightarrow$ "X est compact".

Supposons donc que, pour toute distance d, tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ ait une constante de Lebesgue. Soient d une distance sur X, f une application continue $X \to \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, il existe $\eta(x) > 0$ tel que, pour tout $y \in X$, $d(x;y) < \eta(x)$ implique $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. Soit λ une constante de Lebesgue du recouvrement $\{B(x;\eta(x)) \mid x \in X\}$. Alors, si $d(x;y) \le \lambda$, on a $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Autrement dit, f est uniformément continue. Par ailleurs, supposons qu'il existe $\rho > 0$ tel que : $X_\rho = \{x \in X \mid d(x) > \rho\}$ soit infini. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite infinie de points de X_ρ distincts deux à deux. Le recouvrement ouvert $\{B(x;\rho/2) \mid x \in X \smallsetminus \{x_n\}\} \cup \{B(x_n;\rho/n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'a pas de constante de Lebesgue. Le théorème de Hueber (théorème 81) montre que X est compact. ■

▶ Voyons à présent quelques propriétés de connexité, avec ou sans la compacité, dans les espaces métriques. La connexité par arcs, et la connexité locale seront étudiées dans le chapitre 3.

<u>Proposition 83 (*Ašić et Adamović, 1970*)</u>.— *Soient* $(X;d)$ *un espace métrique compact,* $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* X, *et* $\mathrm{Ad}(\xi)$ *l'ensemble des valeurs d'adhérence de* ξ. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n;x_{n+1}) = 0$, $\mathrm{Ad}(\xi)$ *est une partie connexe de* X.

La démonstration utilise le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn (théorème 37).

Démonstration.– Soit f une application continue $Ad(\xi) \to \{0;1\}$. Comme X est normal, et que $Ad(\xi)$ est fermé dans X , il existe, d'après le théorème de Tietze-Urysohn, un prolongement continu de f , $\bar{f} : X \to [0;1]$. Comme X est compact, $\bar{f}$ est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que la relation $d(x,y) < \eta$ implique, pour tous $x,y \in X$, l'inégalité $|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| < 1/4$. Par définition de $Ad(\xi)$, et puisque X est compact, $\{x \in X \mid |d(x;Ad(\xi))| < \eta\}$ contient tous les termes de ξ sauf un nombre fini. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, on ait simultanément : $d(x_n;Ad(\xi)) < \eta$, et $d(x_n;x_{n+1}) < \eta$. Cela étant, on a $\bar{f}(x_N) \in [0;1/4] \cup [3/4;1]$. Supposons par exemple $\bar{f}(x_N) \in [0;1/4]$. Par récurrence, on voit que : $\bar{f}(x_{N+p}) \in [0;1/4]$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, par exemple pour $p = 1$: comme $d(x_{N+1};Ad(\xi)) < \eta$, on a $\bar{f}(x_{N+1}) \in [0;1/4] \cup [3/4;1]$; et comme $d(x_N;x_{N+1}) < \eta$ et $\bar{f}(x_N) \in [0;1/4]$, on a $\bar{f}(x_{N+1}) \in [0;1/2]$, d'où finalement : $\bar{f}(x_{N+1}) \in [0;1/4]$. Si $x \in Ad(\xi)$, il existe $q \geq N$ tel que $d(x;x_q) < \eta$, et l'on en déduit : $\bar{f}(x) \in [0;1/2]$. Mais comme $\bar{f}(x) = f(x) \in \{0;1\}$, cela signifie : $f(x) = 0$. Autrement dit, f est constante sur $Ad(\xi)$ qui est donc une partie connexe de X . ■

Lemme 84.– *Soit* Y *une partie connexe d'un espace métrique* $(X;d)$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *et tous* $x,y \in Y$, *il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, *et* $t_1,\dots,t_n \in Y$ *tels que :* $d(x_0;t_1)<\varepsilon$, $d(t_i,t_{i+1}) < \varepsilon$ *si* $1 \leq i \leq n-1$, $d(t_n;y) < \varepsilon$.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x,y \in Y$, il existe une ε-chaîne d'extrémités x et y .

Démonstration.– Soient x et $y \in Y$. Posons : $\delta = \inf \{\varepsilon > 0 \mid$ il existe une ε-chaîne d'extrémités x et $y\}$. Supposons par l'absurde $\delta > 0$. Posons : $A(x) = \{z \in Y \mid$ il existe une $(\delta/2)$-chaîne d'extrémités x et $z\}$. Alors, $A(x)$ est un ouvert, car si $z \in A(x)$, $B(z;\delta/2) \subset A(x)$. On définit de même $A(y)$. C'est aussi un ouvert, et, par définition de δ , $A(x) \cap A(y) = \emptyset$. De plus, si $z \in Y \setminus (A(x) \cup A(y))$, $B(z;\delta/2) \cap (A(x) \cup A(y)) = \emptyset$, de sorte que $Y \setminus (A(x) \cup A(y))$ est un ouvert disjoint de $A(x)$ et de $A(y)$. Ainsi, $\{A(x);A(y);Y \setminus (A(x) \cup A(y))\}$ est une partition de Y en trois ouverts disjoints dont deux au moins, $A(x)$ et $A(y)$, sont non vides. C'est impossible car Y est connexe. L'hypothèse $\delta > 0$ est absurde, et le lemme est démontré. ■

Proposition 85 (*Ašić et Adamović, 1970*).– *Soient* $(X;d)$ *un espace métrique, et* $\xi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de points de* X *dont l'ensemble* $Ad(\xi)$ *des valeurs d'adhérence est un connexe non vide de* X . *Alors, il existe une sous-suite* $\eta = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ *de* ξ *telle que :*
$\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k};x_{n_{k+1}}) = 0$ *et* $Ad(\xi) = Ad(\eta)$.

La démonstration repose sur le lemme 84.

Démonstration.– L'ensemble $\{B(x_n;1/p) \mid n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*, B(x_n;1/p) \cap Ad(\xi) \neq \emptyset\}$ est un recouvrement ouvert dénombrable $\mathfrak{U}$ de $Ad(\xi)$. Indexons ce recouvrement par $\mathbb{N}^*$: $\mathfrak{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $t \in Ad(\xi)$, il existe une boule de $\mathfrak{U}$ de diamètre arbitrairement petit contenant t . Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, soit $t_n \in U_n \cap \mathrm{Ad}(\xi)$. D'après le lemme 84, il existe des entiers $1 = k_1 < k_2 < \ldots$ et des points $u_n \in \mathrm{Ad}(\xi)$ tels que : $u_{k_i} = t_i$, $d(u_{n-1};u_n) < 1/i$ si $k_{i-1} < n \le k_i$. On a alors : $\lim_{n\to\infty} d(u_n;u_{n+1}) = 0$. Soit p_1 le plus petit entier >0 tel que $x_{p_1} \in U_1$ et $d(x_{p_1};u_1) < 1$. Par récurrence, on construit ainsi la suite (p_n) : si $p_1,\ldots,p_n$ sont déjà déterminés, on appelle p_{n+1} le plus petit entier $>p_n$ vérifiant : $d(x_{p_{n+1}};u_{n+1}) < 1/(n+1)$, et, si $n+1 = k_i$, $x_{p_{n+1}} \in U_i$. La suite extraite $\eta = (x_{p_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi obtenue a des termes d'indices arbitrairement grands dans chaque U_i. Il s'ensuit : $\mathrm{Ad}(\eta) \supset \mathrm{Ad}(\xi)$. Mais comme η est une sous-suite de ξ, on a également $\mathrm{Ad}(\eta) \subset \mathrm{Ad}(\xi)$, de sorte que : $\mathrm{Ad}(\eta) = \mathrm{Ad}(\xi)$. Enfin,

$$
\begin{aligned}
d(x_{p_n};x_{p_{n+1}}) &\le d(x_{p_n};u_n) + d(u_n;u_{n+1}) + d(u_{n+1};x_{p_{n+1}}) \\
&\le 1/n + d(u_n;u_{n+1}) + 1/(n+1),
\end{aligned}
$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$; et la proposition est démontrée. ■

Corollaire 86 ("*si*" : *Barone, 1939* ; "*seulement si*" : *Schaeffer, 1968*).— *Soient* ξ *une suite bornée de* $\mathbb{C}$, *et* $\mathrm{Ad}(\xi)$ *l'ensemble des valeurs d'adhérence de* ξ. *Alors,* $\mathrm{Ad}(\xi)$ *est connexe si et seulement s'il existe une sous-suite* η *de* ξ *telle que* $\mathrm{Ad}(\eta) = \mathrm{Ad}(\xi)$ *et* $\lim_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n) = 0$.

Cela découle immédiatement des propositions 83 et 85. ■

Rappelons que l'on note ∂A la frontière d'une partie A d'un espace topologique, et $\bar{A}$ l'adhérence de A.

Théorème 87 (*Heinen et Wilansky, 1973*).— *Soient* A *et* B *deux parties relativement compactes d'un espace métrique NON COMPACT* X. *Si* B^c *est connexe, et si* $\partial A \subset B$, *on a :* $A \subset B$.

Démonstration.— D'après le théorème de Hausdorff mentionné à la remarque 79, il existe sur X une distance compatible non bornée, d. Pour d, les espaces relativement compacts A et B sont bornés. Supposons par l'absurde que l'on ait $\partial A \subset B$, et qu'il existe un $x \in A$ vérifiant : $x \in B^c$. Posons $D_1 = \bar{A} \cap B^c$, $D_2 = \overline{A^c} \cap B^c$. Comme $x \in D_1$, on a $D_1 \neq \emptyset$, et comme A et B sont bornés, et que X ne l'est pas, $D_2 \neq \emptyset$. En outre, $D_1 \cup D_2 = [\bar{A} \cap B^c] \cup [A^{c-} \cap B^c] = B^c$ et $\bar{D}_1 = [\bar{A} \cap B^c]^- \subset \bar{A} \cap (B^c)^- = \bar{A} \cap B^{c-}$, d'où : $\bar{D}_1 \cap D_2 \subset \bar{A} \cap B^{c-} \cap D_2 = \bar{A} \cap B^{c-} \cap A^{c-} \cap B^c = \partial A \cap B^c$ et, puisque $\partial A \subset B$, on a $\partial A \cap B^c = \emptyset$, d'où $\bar{D}_1 \cap D_2 = \emptyset$. De même, $D_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$. Ainsi, $\{\bar{D}_1 \cap B^c ; \bar{D}_2 \cap B^c\}$ est une partition de B en deux fermés disjoints, ce qui contredit la connexité de B^c et démontre le théorème. ■

On verra dans le volume 5 une application de ce théorème à la stabilité des équations différentielles.

Voici quatre contre-exemples, tous dus à Heinen et Wilansky, qui montrent que l'on ne peut enlever aucune hypothèse du théorème.

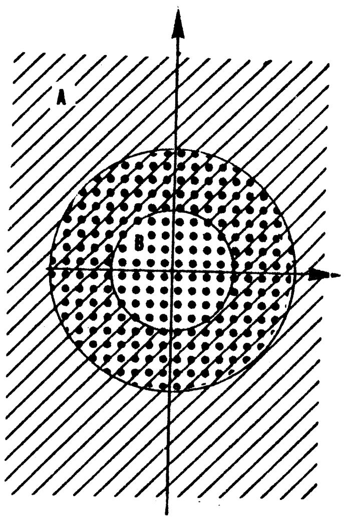
Contre-exemples 88

a) Si A n'est pas relativement compact, on considère $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \geq 1\}$, $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 2\}$.

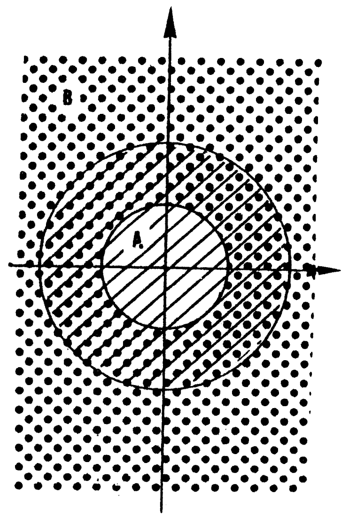
b) Si B n'est pas relativement compact, on considère : $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$.

c) Si B^C n'est pas connexe, on considère :
$X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x \mid \|x\| \leq 2\}$, $B = \{x \mid 1 \leq \|x\| \leq 3\}$.

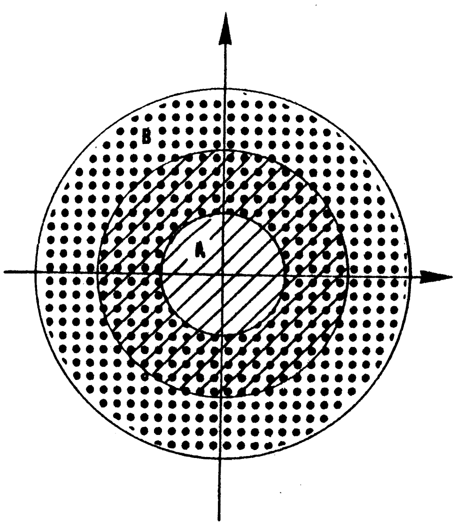
d) Si X est compact, on considère :
$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 3\}$, $A = \{x \in X \mid \|x\| \leq 2\}$, et $B = \{x \in X \mid 1 \leq \|x\| \leq 3\}$.



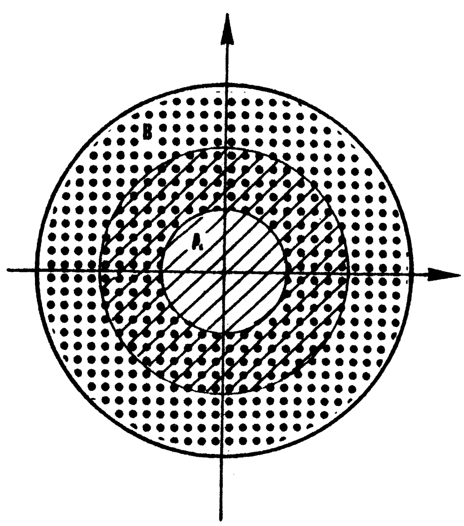
a



b



c



d

EXERCICES DU CHAPITRE 1

§1. LES DIFFÉRENTES NOTIONS DE SÉPARATION

1. PLUS FAIBLE QUE T_1, TU MEURS (DAVIS, 1961)

Soit X un espace topologique.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- Si $x \in X$, et si F est un fermé de X ne contenant pas x, il existe un ouvert U tel que : $X \subset U \neq X$.
- Tout ouvert de X contient l'adhérence de chacun des singletons qu'il inclut.
- Pour tous $x, y \in X$, ou bien $\{x\}^- \cap \{y\}^- = \emptyset$, ou bien $\{x\}^- = \{y\}^-$.

On dit que X est R_0 s'il satisfait à ces trois conditions.

b) Montrer qu'un espace X est T_1 si et seulement s'il est à la fois T_0 et R_0.

c) Soit X l'espace dont l'ensemble sous-jacent est $\mathbb{R}^2$, et dont la topologie est engendrée par l'écart : $d((x;y);(x';y')) = |x-x'|$. Montrer que X est R_0 mais pas T_0.

2. ESPACES DANS LESQUELS LES QUASI-COMPACTS NE SONT JAMAIS FERMES (LEVINE, 1965)

Soit (X,T) un espace topologique. On dit que X est *A.-C.-C.* (comme *"Anti-closed-compact"*) si $\emptyset$ est la seule partie de X à la fois fermée et quasi-compacte.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est A.-C.-C.

(ii) Tout fermé non vide de X a un sous-espace propre qui est fermé et non vide.

(iii) Pour tout fermé non vide F de X, il existe une chaîne $\{F_i \mid i \in I\}$ de fermés propres non vides de F dont l'intersection est vide.

(iv) Pour tout ouvert propre O de X, il existe un ouvert O' vérifiant : $O \subsetneq O' \subsetneq X$.

(v) Pour tout ouvert propre O de X, il existe une chaîne $\{O_i \mid i \in I\}$ d'ouverts vérifiant $O \subsetneq O_i \subsetneq X$ et $X = \bigcup(O_i \mid i \in I)$.

(vi) Pour tout $x \in X$, $\{x\}^-$ n'est pas quasi-compact.

(vii) Pour tout $x \in X$, $\{x\}^-$ inclut un fermé propre non vide.

(Indication : on pourra montrer : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Leftrightarrow$ (ii), (iii) $\Leftrightarrow$ (v), (i) $\Leftrightarrow$ (vi), (vii) $\Leftrightarrow$ (ii)).

b) Soit X un espace A.-C.-C. Montrer que X n'est ni T_3 ni T_1.

c) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espace topologiques non vides. Soit X le produit de ces espaces. Montrer que X est A.-C.-C. si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que X_i soit A.-C.-C.

d) Donner un exemple d'espace A.-C.-C.

3. QUASI-COMPACT ET T_0 (ELSNER, 1974)

Soit X un espace quasi-compact et T_0. Soit A l'ensemble des singletons fermés de X. Soit Y une partie de X contenant A. Montrer que Y est quasi-compacte.

4. QUASI-COMPACT, T_0 et SEPARABLE (LAATSH, 1965)

On considère l'espace X dont l'ensemble sous-jacent est $[-1;+1]$, et dont les ouverts sont les intervalles de l'une des trois formes $[-1;b[$, $]a;b[$, $]a;1]$, avec $a < 0 < b$.

a) Montrer que X est T_0, quasi-compact et séparable.

b) Montrer que toute fonction continue $X \to \mathbb{R}$ est constante, et que X n'est pas T_2.

c) $X \setminus \{0\}$ est-il séparable ?

d) X est-il localement quasi-compact au sens D_1, ou au sens D_2 du piège 23 ?

e) X est-il connexe ?

5. ENTRE T_1 + QUASI-COMPACT ET T_2 : FERMES ET QUASI-COMPACTS DES ESPACES QUASI-COMPACTS.

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est *C.-C.* si la classe des fermés de X coïncide avec la classe des quasi-compacts de X. (C.-C. comme "*closed-compact*"). On dit que X est *M.-C.* (comme "*maximal relative to compactness*") si X est quasi-compact, et si pour toute topologie $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, $(X;\mathcal{S})$ n'est pas quasi-compact.

a) Soient $A \subset X$, et $\mathcal{S} = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $(X;\mathcal{S})$ est quasi-compact si et seulement si A^c est quasi-compact dans $(X;\mathcal{T})$.

b) Montrer que si X est compact (i.e. T_2 + quasi-compact), alors il est M.-C.

c) Déduire de a) que X est C.-C. si et seulement s'il est M.-C.

d) Montrer qu'un espace C.-C., $(X;\mathcal{T})$, est quasi-compact et T_1.

*e) Soit X la quasi-compactification d'Aleksandrov de $\mathbb{Q}$. Montrer que X n'est pas T_2 mais est C.-C.

f) Soit X l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de la topologie cofinie, c'est-à-dire dont les éléments sont les complémentaires des parties finies. Montrer que X est quasi-compact et T_1, mais pas C.-C.

6. INTERSECTIONS DE QUASI-COMPACTS (HERRLICH, 1968)

On pose, pour $m,n \in \mathbb{N}^*$: $X_n^m = \{n\} \times \{m\} \times \mathbb{N}$, $X_m = X_m^1 \cup X_m^2 \cup \cdots \cup X_m^m$, $X = \cup\{X_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$. On définit une topologie $\mathcal{T}$ sur X en disant qu'une partie A de X est fermée si elle vérifie : $\mathrm{card}(A \cap X_m^n) \geq \aleph_0 \Rightarrow \{m;m+n\} \subset A$ (1), et : $\mathrm{Card}\{m \mid A \cap (X_m \cup \{m\}) \neq \emptyset\} \geq \aleph_0 \Rightarrow 0 \in A$ (2).

a) Montrer que $A \subset X$ est quasi-compacte si et seulement si elle vérifie (2) et : $\mathrm{card}(A \cap X_m^n) \geq \aleph_0 \Rightarrow \{m;m+n\} \cap A \neq \emptyset$.

b) Montrer que X est T_1 et quasi-compact.

c) Montrer que $Y_m = X_m \cup X_{m+1} \cup \dots \cup X_{m+n}$ peut s'exprimer comme intersection de $m+1$ parties quasi-compactes de X, mais pas comme intersection de m telles parties.

d) Montrer que $Z = X \setminus \mathbb{N}$ est une intersection de parties quasi-compactes de X qui n'est pas intersection d'un nombre fini de parties quasi-compactes de X.

7. COMPACTS ET FINITUDE

On dit qu'un espace topologique $(X;\mathcal{T})$ est *à quasi-compacts finis* (ou est *pseudo-fini*), ce que l'on note Q.-C.-F., si les quasi-compacts de X sont les parties finies de X.

a) Montrer que les espaces topologiques suivants sont Q.-C.-F. :
(i) X est fini.
(ii) $(X;\mathcal{T})$ est un espace discret.
(iii) X est l'ensemble des entiers naturels, et $\mathcal{T}$ est constitué de $\emptyset$, X, et des ensembles de la forme $\{0\}$, $\{0;1\},\dots,\{0,1;\dots;n\}$.
(iv) X est un ensemble infini, et $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$, et les parties de X dont le complémentaire est dénombrable (autrement dit, $\mathcal{T}$ contient la topologie codénombrable).
(v) X est un ensemble quelconque, x est un point de X, et $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$, et toutes les parties de X auxquelles x appartient.

b) Soient X et Y deux espaces topologiques, et f une bijection ouverte $X \to Y$. Montrer que si X est Q.-C.-F., il en est de même de Y.

c) Soient X un espace topologique, et Y et Z deux parties de X vérifiant $X = Y \cup Z$. On suppose que Y et Z sont Q.-C.-F. Montrer que X est Q.-C.-F. lorsque Y et Z sont des fermés de X (resp. des ouverts de X).

d) Montrer qu'un espace métrisable est Q.-C.-F. si et seulement s'il est discret.

e) Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique dans lequel chaque point admet un système fondamental dénombrable de voisinages (premier axiome de dénombrabilité). Montrer que X est Q.-C.-F. si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points distincts de X n'a pas de valeur d'adhérence.

f) Soit X un espace topologique sans point isolé, et dont toute partie dense est ouverte. Montrer successivement les propriétés suivantes de X :
(i) Toute partie de X d'intérieur vide est fermée et discrète (on dit qu'elle est *totalement isolée*).
(ii) X n'est pas compact.
(iii) X est Q.-C.-F.

8. ENTRE T_1 ET T_2

Soit $(X;\mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est *C.-C.* si toute partie quasi-compacte de X est fermée. On dit que X est *U.-S.* si toute suite convergente d'élément de X a une unique limite. On dit que X est *I.-C.* si l'intersection de deux parties quasi-compactes de X est quasi-compacte.

a) Montrer les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd} & & \text{I.-C.} & \\ T_2 \arrow[r, Rightarrow] & \text{C.-C.} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & & \text{U.-S.} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \end{tikzcd}$$

b) Montrer que si X est un espace satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité (*cf.* exercice 7), on a : U.-S. $\Rightarrow$ C.-C. $\Rightarrow$ T_2.

c) On considère l'ensemble X réunion de la droite réelle et d'un point p. On munit X de la topologie suivante : une partie de $X\setminus\{p\}$ est ouverte si et seulement si elle est ouverte dans $\mathbb{R}$. Une partie de X contenant p est ouverte si et seulement si son complémentaire est la réunion d'un nombre fini d'adhérences de suites convergentes. Montrer que X est U.-S. mais pas C.-C.

d) Soit $[0;\Omega]$ l'ensemble des ordinaux inférieurs (ou égaux) au premier ordinal non dénombrable, Ω. (*cf.* chapitre 2, §5). Dans $[0;\Omega]\times\{0;1\}$, on identifie $(\alpha;0)$ et $(\alpha;1)$ pour tout $\alpha \neq \Omega$. Soit X l'espace quotient de $[0;\Omega]\times\{0;1\}$ par cette relation d'équivalence. Montrer que X est U.-S. mais pas I.-C.

e) Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de sa topologie cofinie est T_1 mais pas U.-S.

f) Soit X la droite réelle munie de sa topologie codénombrable, c'est-à-dire de la topologie dont les fermés sont X et les parties dénombrables. Montrer que X est C.-C. mais pas T_2.

9. ENTRE T_2 ET COMPACT : UNE CLASSE D'ESPACES STABLE POUR BEAUCOUP D'OPERATIONS

Soit $(X;T)$ un espace topologique. On dit que X est *C.-G.* (comme "*compactly generated*") s'il est séparé, et si toute partie Y de X vérifiant "$Y\cap K$ est fermé pour tout compact $K\subset X$" est fermée dans X.

a) Montrer qu'un espace localement compact est C.-G., qu'un espace séparé satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité (*cf.* exercice 7) est C.-G.

b) Soit $X = [0;\Omega]$ la réunion de l'espace des ordinaux dénombrables, et de Ω, le premier ordinal non dénombrable (*cf.* chapitre 2, §5). Soit Y la partie de X formée des ordinaux limites de $[0;\Omega[= \Omega$. Montrer que $X\setminus Y$ est séparé, mais pas C.-G.

c) Déduire de b) que la propriété C.-G. n'est pas héréditaire.

d) Montrer que la propriété C.-G. est faiblement héréditaire, c'est-à-dire que tout fermé d'un espace C.-G. est C.-G.

e) Montrer que si X est C.-G., si Y est T_2, et si $f : X\to Y$ est une surjection continue ouverte, alors Y est C.-G.

10. T_4 N'EST PAS GENEALOGIQUE... MAIS PRESQUE.

Soit X l'espace $\{1;2;3\}$ muni de la topologie $\{\emptyset;\{1;2;3\};\{1;2\};\{2;3\};\{2\}\}$. Montrer que X n'est pas T_4, bien que toute partie propre de X le soit. Montrer que tout espace Y non T_4 dont les parties propres sont toutes T_4 est homéomorphe à X.

11. CARACTERISATION DES ESPACES REGULIERS PAR LES RECOUVREMENTS (CHEW, 1972)

Soit X un espace séparé. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est régulier.

(ii) Tout recouvrement ouvert de X a un raffinement ouvert localement fini (comparer avec la caractérisation (iii) de la paracompacité donnée p. 63).

(iii) Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X, et tout $a\in X$, il existe un voisinage ouvert V de a, et un recouvrement ouvert $\mathfrak{B}$ de X tels que, pour tout $x\in V$, on ait $St(x;\mathfrak{B})\subset U$, pour un $U\in\mathfrak{U}$.

(Indication : montrer $1 \Leftrightarrow 2$ et $1 \Leftrightarrow 3$).

12. FONCTIONS A GRAPHE FERME

a) Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une bijection dont le graphe est fermé. Montrer que f^{-1} a la même propriété.

b) Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto 0$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto 1$. Montrer que $\mathcal{G}(f)$ et $\mathcal{G}(g)$ sont fermés, mais que $\mathcal{G}(g \circ f)$ ne l'est pas. ($\mathcal{G}(f)$ désigne le graphe de f).

§2. SOUS-ESPACES DENSES, PROLONGEMENTS

13. Pourquoi l'argument de la proposition 30 ne s'applique-t-il pas au contre-exemple 31 ?

14. UN EXEMPLE D'ESPACE SEPARABLE NON REGULIER (S.W. WILLIAMS, 1967)

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est *radiale en* x si $x \in A$, et si, pour toute direction θ, A contient un segment de direction θ dont l'intérieur contient x. On dit que A est *radiale* si elle est radiale en chacun de ses points. Soit $(X;\mathcal{T})$ l'espace topologique dont les éléments sont ceux de $\mathbb{R}^2$, et dont la topologie est formée des parties radiales de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\mathbb{Q}^2$ est dense dans X, qui est donc séparable.

b) Montrer que le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$ est un fermé discret ; en déduire que $(X;\mathcal{T})$ n'est pas un espace de Lindelöf.

c) L'espace $(X;\mathcal{T})$ est-il séparé ?

d) Montrer que $(X;\mathcal{T})$ n'est pas régulier.

e) En déduire que $(X;\mathcal{T})$ n'est ni normal, ni localement compact.

15. CARDINAL DES SOUS-ESPACES DISCRETS DES ESPACES T_3

Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace à la fois T_3 et T_0, et soit D une partie dense de X de cardinal $\mathfrak{m}$. Montrer qu'un sous-espace discret E de X vérifie : $\operatorname{card}(E) \leq 2^{\mathfrak{m}}$.

16. CARDINAL DES SOUS-ESPACES DISCRETS DES ESPACES NORMAUX SEPARABLES

Soient X un espace topologique normal, A et B deux parties de X vérifiant $A \subset \overline{B}$.

a) On admet l'axiome du choix. Montrer que, si A est fermé et discret, on a : $2^{\operatorname{card} A} \leq 2^{\operatorname{card} B}$.

b) On admet l'axiome du choix et l'hypothèse du continu : $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Déduire de a) qu'un fermé non dénombrable d'un espace séparable normal ne peut être discret.

c) Montrer que si l'on suppose seulement X complètement régulier, le résultat est faux. (Indication : voir Kelley, exercices 1.L et 3.N).

17. TOPOLOGIES DE DENSITE (LEVINE, 1968)

On dit que la topologie $\mathcal{T}$ d'un espace topologique $(X;\mathcal{T})$ est une *topologie de densité* si tout ouvert non vide de $\mathcal{T}$ est dense dans X. Si $\mathcal{T}$ est une topologie de densité, on dit que X est un *espace de densité*.

a) Montrer que les espaces topologiques $(X;\mathcal{T})$ suivants sont des espaces de densité :

(i) X est un ensemble infini, et $\mathcal{T}$ est la topologie formée de $\emptyset$, et des complémentaires des parties finies de X (topologie cofinie).

(ii) X est un ensemble non vide quelconque, x est un élément de X, et $\mathcal{T}$ est la topologie formée de $\emptyset$ et des parties de X contenant x.

(iii) X est l'ensemble des entiers naturels, et les ouverts sont $\emptyset$, X, et les ensembles de la forme $\{0;1;\dots;n\}$.

b) Montrer qu'une topologie de densité ne peut être séparé (T_2), mais peut être accessible (T_1).

c) Montrer que, si $(X;\mathcal{T})$ est un espace topologique, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est un espace de densité.

(ii) Tout ouvert de $\mathcal{T}$ est connexe.

(iii) L'intersection de deux ouverts non vides est non vide.

d) Montrer que tout sous-espace d'un espace de densité est un espace de densité.

e) Montrer qu'une image continue d'un espace de densité est un espace de densité.

f) Soit $X = \Pi(X_\alpha | \alpha \in A)$ un produit non vide d'espaces topologiques non vides. Montrer que X est un espace de densité si et seulement si chaque X_α est un espace de densité.

§3. FILTRES, FILETS ET SUITES

18. FILETS, ESPACES T_0, ET ESPACES T_1.

Soit Y un espace T_0. Pour tout espace topologique X, on désigne par $\mathcal{C}(X;Y)$ l'ensemble des applications continues $X \to Y$, et par $\mathcal{CF}(X;Y)$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ qui préservent la convergence des filets, c'est-à-dire telles que, pour tout filet $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ convergent dans X, le filet $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ soit convergent dans Y. En utilisant la proposition 44, montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) Y est T_1

(ii) Pour tout espace topologique X, $\mathcal{CF}(X;Y) \subset \mathcal{C}(X;Y)$.

19. TOPOLOGIES DE LA DROITE REELLE AYANT LES MÊMES SUITES CONVERGENTES QUE LA TOPOLOGIE USUELLE

Lorsqu'elle existe, on appelle *densité asymptotique* d'une partie S de $\mathbb{N}$, et l'on note $\pi(S)$, la limite, quand $n \to \infty$, de $(1/n)\mathrm{card}\{x \in S | x \leq n\}$.

a) Montrer que : $\pi(S) = 1$, si et seulement si $\pi(S^c) = 0$.

b) Montrer que la classe des parties de $\mathbb{N}$ de densité asymptotique égale à 1 est stable par intersections finies.

Soit X la droite réelle, et soit $\mathcal{R}$ la topologie usuelle de X. (*i.e.* $(X;\mathcal{R}) = \mathbb{R}$). Soient F une partie infinie de X fermée pour $\mathcal{R}$, $p \in X\backslash F$ et (t_n) une suite strictement monotone d'éléments de F. Soit $\mathcal{B}$ la famille de parties de X formée des ouverts de $(X;\mathcal{R})$ qui, ou bien contiennent p, ou bien contiennent $\{t_i;\ i \in S\}$, pour une partie S de $\mathbb{N}$ vérifiant $\pi(S) = 1$.

c) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base pour une topologie $\mathcal{S}$.

d) Montrer que F n'est pas fermée pour $\mathcal{S}$.

e) Montrer $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.

f) Montrer que si une suite (x_n) converge vers $x \in X$, pour $\mathcal{S}$, elle converge aussi vers x pour $\mathcal{R}$.

g) Montrer que si F n'est pas bornée, et si $\lim t_n = \pm\infty(\mathcal{R})$, alors $\mathcal{S}$ est T_2.

h) Montrer que si F n'est pas bornée, $\mathcal{S}$ n'est pas T_2.

§4.-7 ESPACES MÉTRIQUES

20. PLONGEMENT DES ESPACES METRIQUES DANS DES ESPACES DE HILBERT

Soit $(X;d)$ un espace métrique. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}_r$ le recouvrement de X par des boules de rayon $1/2r$. Puisque X est paracompact, soit $\mathcal{U}_r = \{U_{r,\alpha} | \alpha \in A_r\}$ un raffinement localement fini de $\mathcal{B}_r$. Posons $A = \cup A_r$, $r \in \mathbb{N}^*$, et soit H l'espace de Hilbert $H(A)$ des familles indexées par A, de carré sommable. On définit ainsi une application $X \to H$. Si $x \in X$, si $r \in \mathbb{N}^*$ et si $\alpha \in A_r$, on pose :

$$\phi_{r,\alpha}(x) = d(x;U^C_{r,\alpha}), \quad u_{r,\alpha}(x) = \phi_{r,\alpha}(x)/\Big(\sum_{\beta\in A_r}(\phi_{r,\alpha}(x))^2\Big)^{1/2}, \text{ et } \quad v_{r,\alpha}(x) = u_{r,\alpha}(x)/r.$$

Montrer que, pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in A_r$, les applications $\phi_{r,\alpha}$, $u_{r,\alpha}$ et $v_{r,\alpha}$ sont définies. Montrer que la relation $x \mapsto (v_{r,\alpha}(x))_{r\in\mathbb{N}^*,\alpha\in A_r}$ définit une application $X \to H$ qui est un homéomorphisme de X sur son image.

21. DISTANCES ULTRAMETRIQUES

Soit X un ensemble. On dit qu'une distance d définie sur X: est une *distance ultramétrique* si, pour tous $x, y, z \in X$, on a : $d(x;z) \le \max\{d(x;y);d(y;z)\}$.

a) Soit X un espace métrisable. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
(i) X est de dimension 0 (*cf.* Chapitre 2, § 3.3).
(ii) Il existe une suite $(\mathcal{B}_n)$ de partitions ouvertes de X par des ouverts de diamètre $< 1/n$, et telle que, pour tout n, $\mathcal{B}_{n+1}$ soit un raffinement de $\mathcal{B}_n$.
(iii) Il existe une distance ultramétrique engendrant la topologie de X.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}_n = \{((]\sqrt{2};\sqrt{2}+1/2^n[)+k/2^n) \cap \mathbb{Q} | k \in \mathbb{Z}\}$ une partition de $\mathbb{Q}$ par des intervalles ouverts disjoints de longueur 2^{-n}. Si x et y sont deux rationnels distincts, on pose : $q(x;y) = \inf\{n | x$ et y n'appartiennent pas au même élément de $\mathcal{B}_n\}$. On pose : $d(x;y) = 1/q(x;y)$ si $x \neq y$, et $d(x;x) = 0$. Montrer que d est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$ qui est compatible avec la topologie usuelle de $\mathbb{Q}$.

c) Même question qu'en b), en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, et en posant :
$\mathcal{B}_n = \{((]0;2^{-n}[)+k.2^{-n}) \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Construire une distance ultramétrique sur l'ensemble triadique de Cantor, K_3 (*cf.* chapitre 2, §3).

22. ENSEMBLES METRIQUEMENT ISOLES

Soient $(X;d)$ un espace métrique, et A une partie de X. On dit que A est *métriquement isolée* si $d(A;B) > 0$ pour tout fermé $B \subset (X \setminus A)$.

a) Montrer que A est métriquement isolée si et seulement si c'est une partie fermée de X dont la frontière est compacte.

b) On dit que A est *absolument métriquement isolée* si A est métriquement isolée pour toute distance compatible avec la topologie de X. Montrer que A est absolument métriquement isolée si et seulement si A est fermée, et si A ou $\overline{(X \setminus A)}$ est compacte.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE DU CHAPITRE 1

0. REFERENCES GENERALES

Pour le chapitre 1, on suppose plus ou moins bien connu l'un des deux traités suivants :

[2] J. DUGUNDJI : *Topology*. Allyn and Bacon pub., Boston, 1966.

[3] N. BOURBAKI : *Topologie générale (2 vol.)*. Hermann, Paris, 1970 et 1974.

Un autre ouvrage de référence est :

[1] J.L. KELLEY : *General topology*. New-York, 1955.

Ce n'est pas un traité, mais sa terminologie tend à s'imposer. Cet ouvrage génial devrait figurer dans toute bonne bibliothèque de math :

[4] L.A. STEEN et J.A. SEEBACH JR. : *Counterexamples in topology*. Springer-Verlag, New-York, 1970 (2nd ed. 1978).

1. LES DIFFERENTES NOTIONS DE SEPARATION

Le vocabulaire a été établi en conformité avec le livre de Steen et Seebach, et les trois traités de Dugundji, Bourbaki et Kelley. L'exemple 6 sort de :

[30] A. MYSIOR : *A regular space which is not completely regular*. Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 652-653.

Un autre exemple —plus compliqué— d'espace régulier non complètement régulier se trouve dans :

[23] J. THOMAS : *A regular space, not completely regular*. Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 181-182.

Attention : l'espace donné par Dugundji p. 154 de *Topology* n'est pas régulier. Le lemme 7 vient de Kelley (§ 0). Le théorème 8 est dû à :

[19] R. NIELSEN and C. SLOYER : *On embedding in quasi-cubes*. Amer. Math. Monthly, 75 (1968), 514-515.

Pour les compléments sur les quasi-cubes, voir :

[25] S. SALBANY and G.C.L. BRÜMMER : *Pathology of upper Stone-Cech compactifications*. Amer. Math. Monthly, 72 (1971), 187-188.

Voici les références pour les topologies sur les espaces produits :

[29] D.E. CAMERON : *The mini-max property of the Tychonoff product topology*. Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 925-927.

[3] E. HEWITT : *A problem of set-theoretic topology*. Duke Math. J. 10 (1943), 309-333.

[2] A. TIHONOV : *Über die topologische Erweiterung von Raumen*. Math. Ann. 102 (1930), 544-561.

[1] H. TIETZE : *Über Analysis Situs*. Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 2 (1923), 27-70.

Pour les théorèmes de représentation par quasi-uniformisation, on pourra consulter :

[11] S.A. NAIMPALLY : *Separation axioms in quasi-uniform spaces*. Amer. Math. Monthly, 74 (1967), 283-284.

[6] W.J. PERVIN : *Quasi-uniformization of topological spaces*. Math. Annalen, 147 (1962), 316-317.

[5] W.J. PERVIN : *Uniformization of Neighborhood axioms*. Math. Annalen, 147 (1962), 313-315.

et, pour des compléments sur le sujet :

[18] N.A. FRIEDMAN and R.C. METZLER : *On stable topologies*. Amer. Math. Monthly, 75 (1968), 493-498.

[4] A.S. DAVIS : *Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces*. Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 886-893.

Pour le cas des espaces uniformes, on a suivi :

[21] G. CHOQUET : *Lectures on Analysis (3 vol.)*. Benjamin Pub. New-York, 1969.

Pour la vie dans les espaces non séparés, on s'est surtout inspiré de :

[24] A. WILANSKY : *Life without* T_2. Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 157-161.

On a également consulté (notamment pour les exercices) :

[28] J. CHEW : *Regularity as a relaxation of paracompactness*. Amer. Math. Monthly, 79 (1972), 630-632.

[27] T.E. ELSNER and A.A. JAGERS : *Compact subsets in a* T_o*-space*. Amer. Math. Monthly AP 5874-81 (1972), 91-92.

[26] O. MORPHY and G. WILDENBERG : *A space not normal but with all proper subspaces normal*. Amer. Math. Monthly 78 (1971), 309-310.

[22] M.R. KIRCH : *A class of spaces in which compact sets are finite*. Amer. Math. Monthly 76 (1969), 42.

[20] P.R. MEYER : *A compactness condition weaker than* T_1. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 758-759.

[17] N. LEVINE : *On the equivalence of compactness and finiteness in topology*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 178-180.

[16] H. HERRLICH : *On intersections of compact sets*. Duke Math. J. 35 (1968), 439-440.

[15] T.S. FRANK and N.J. KUENZI : *The intersection of compact sets in a* T_1*-space*. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1274.

[14] A. WILANSKY : *Between* T_1 *and* T_2. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 261-266.

[13] J.P. THOMAS : *Maximal non-*T_i *spaces*, i=0,1,2,3. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 169-171.

[12] N.E. STEENROD : *A convenient category of topological spaces*. Michigan Math. J. 14 (1967), 133-152.

[10] P.S. SCHNARE : *Two definitions of local compactness*. Amer. Math. Monthly 72 (1965), 764-765.

[9] N. LEVINE : *Spaces in which compact sets are never closed*. Amer. Math. Monthly 72 (1965), 635-638.

[8] R. LAATSCH : *Compact spaces and locally compact subspaces*. Amer. Math. Monthly 72 (1965), 537.

[7] N. LEVINE : *When are compact and closed equivalent ?* Amer. Math. Monthly 72 (1965), 41-44.

2. SOUS-ESPACES DENSES. SEPARABILITE. PROLONGEMENT DES FONCTIONS

Pour la séparabilité, et pour les caractères de densité, voici les principales références dont on s'est servi :

[14] D.L. LUTZER and D. HENKEL : *Dense subsets in a separable space*. Amer. Math. Monthly 5698, 77 (1970), 896.

[12] W.W. COMFORT : *A short proof of marczewski's separability theorem*. Amer. Math. Monthly 76 (1969), 1041-1042.

[8] K.A. ROSS and A.H. STONE : *Products of separable spaces*. Amer. Math. Monthly 71 (1964), 398-403.

[5] E. MARCZEWSKI : *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*. Fund. Math. 34 (1947), 127-143.

[4] E. HEWITT : *A remark on density characters*. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 641-643.

[3] E.S. PONDICZERY : *Power problems in abstract spaces*. Duke Math. J. 11 (1944), 835-837.

[2] E. HEWITT : *A problem of set-theoretic topology*. Duke Math. J. 10 (1943), 309-333.

[1] B. POSPÍŠIL : *Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée*. Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky 67 (1937-1938), 89-96.

Autres références sur la séparabilité :

[18] R. JOHNSONBAUGH and F.S. CATER : *Subspaces of a normal, separable space* [6147]. Amer. Math. Monthly 86 (1979), 60-61.

[16] L. ERLEBACH and R. OLSON : *A separable Hansdorff space not σ-compact* [5962]. Amer. Math. Monthly 82 (1975), 943.

[15] A. WILANSKY : *How separable is a space ?* Amer. Math. Monthly 79 (1972), 764-765.

[13] N.J. KALTON : *A barrelled space without a basis*. Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 465-466.

[11] S.W. WILLIAMS and R.V. FULLER : *The cardinality of discrete subsets in a regular topological space* [5583]. Amer. Math. Monthly 76 (1969), 314-315.

[10] N. LEVINE : *Dense topologies*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 847-852.

[9] S.W. WILLIAMS and S.P. FRANKLIN : *Nonregular separable spaces* [5468]. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 208.

Les références sur le prolongement des fonctions sont les suivantes :

[17] E.K. VAN DOUWEN, D.J. LUTZER and T.C. PRZYMUSINSKI : *Some extensions of the Tietze-Urysohn theorem*. Amer. Math. Monthly 84 (1977), 435-441.

[7] A.D. TAIMANOV : *On extensions of continuous mappings of topological spaces (en russe)*. Math. Sb. 31 (1952), 459-463.

[6] J. DUGUNDJI : *An extension of Tietze's theorem*. Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367.

3. FILTRES ET FILETS

Pour les filtres et les filets, outres les références générales mentionnées en O, on a utilisé :

[16] R.W. HANSELL and E.S. WOLK : *On continuous functions and convergence of nets*. Amer. Math. Monthly 83 (1976), 365-366.

[14] R.J. St ANDRE : *A classification of ultrafilters*. Amer. Math. Monthly 72 (1971), 1126-1127.

[3] G. CHOQUET : *Topologie et théorie des fonctions*. CDU éd., Paris.

[6] S. LEADER : *Kimber's theorem on weighted sets*. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1226-1227.

Références pour le caractère suffisant ou insuffisant des suites :

[18] E.S. WOLK : *On the inadequacy of cofinal subnets and transfinite sequences*. Amer. Math. Monthly 89 (1982), 310-311.

[15] J.D. GRAY : *An algebraic characterization of limits*. Amer. Math. Monthly 82 (1975), 825-827.

[11] W.M. PRIESTLEY : *A sequentially closed countable dense subset of* I^I. Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 270-271.

[10] J.B. CONWAY : *The inadequacy of sequences*. Amer. Math. Monthly 76 (1969), 68-69.

[8] W.M. PRIESTLEY : *Nets and sequences, an example*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 1098-1099.

[7] J.E. MARSDEN : *Countable and net convergence*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 397-398.

[5] B. KRIPKE : *One more reason why sequences are not enough*. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 563-565.

[4] S.P. FRANKLIN : *Spaces in which sequences suffice* II. Fund. Math. 61 (1967), 51-56.

[3] S.P. FRANKLIN : *Spaces in which sequences suffice*. Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

[2] BERBERIAN : *Measure and integration*. Mac Millan Pub. (1965), 95.

[1] R. ARENS : *Note on convergence in topology*. Math. Mag. 23 (1950), 229-234.

Sur le thème particulier des différentes topologies sur $\mathbb{R}$, les références sont :

[17] J.A. BAKER, J. LAWRENCE and F. ZORZITTO : *Sequence topologies on the real line*. Amer. Math. Monthly 85 (1978), 667-668.

[13] O.T. ALAS : *Metrizable topologies on the real numbers*. Amer. Math. Monthly 78 (1971), 773.

[12] K.D. JUHLIN and M. YU : *Homeomorphism of the real line with upper limit topology*. Amer. Math. Monthly 78 (1971), 415.

4. COMPARAISON DES ESPACES METRIQUES ET DES ESPACES VECTORIELS NORMES

Les sources originales des deux théorèmes sont :

[1] C. KURATOWSKI : *Sur les espaces complets*. Fund. Math. 15 (1930), 301-309.

[2] R.F. ARENS and J. EELLS : *On embedding uniform and topological spaces*. Pacific J. Math. 6 (1956), 397-403.

La présentation suivie ici est due à Dugundji :

[3] J. DUGUNDJI and A. GRANAS : *Fixed point theory*. Monographie Matematyczne Pub. Warsaw (à paraître).

5. ESPACES METRIQUES COMPLETS, TOPOLOGIQUEMENT COMPLETS. BAIRERIES

Les références originales pour les espaces topologiquement complets sont :

[1] S. MAZURKIEWICZ : *Über Borelsche Mengen*. Bull. Acad. Cracovie (1916), 490-494.

[3] P. ALEKSANDROV : *Sur les ensembles de la première classe et les espaces abstraits*. C.R. Acad. Sc. Paris 178 (1925), 185.

D'autres démonstrations, ou des énoncés voisins ont été donnés dans ces articles :

[5] W. SIERPINSKI : *Sur les ensembles complets d'un espace* (D). Fund. Math. 11 (1928), 203.

[4] W. SIERPINSKI : *Sur l'invariance topologique des ensembles* G_δ. Fund. Math. 8 (1926), 135.

[2] F. HAUSDORFF : *Die Mengen* G_δ *in vollständigen Räumen*. Fund. Math. 6 (1924), 146.

La présentation suivie ici est celle d'Oxtoby, qui avait lui-même adaptée celle de Kuratowski :

[11] J.C. OXTOBY : *Measure and category*. GTM #2. Springer-Verlag Pub. New-York 1971.

[7] C. KURATOWSKI : *Topologie* I. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe ed. Warszawa (1958).

Pour le théorème de Baire et ses applications, on a suivi le cours de P. Doukhan, sauf pour les tamis inventés par G. Choquet, et que l'on peut trouver chez Mayer :

[13] P. DOUKHAN : *Cours d'analyse réelle à l'usage des agrégatifs*. E.N.S. St Cloud Ed. (1980).

[10] C. MAYER : *Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique*. C.D.U. et S.E.D.E.S. Ed., Paris, 1969.

[8] G. CHOQUET : *Une classe régulière d'espaces de Baire*. C.R.Ac. Sc. Paris I, Séance du 13.01.1958.

Les exemples proviennent de sources diverses (parfois non identifiées), parmi lesquelles :

[14] I. MUSTAFA : *On residual subsets of Darboux Baire classe 1 functions*. Real An.Exchange 9 (1984), 394-395.

[12] A.M. BRUCKNER : *Differentiation of real functions*. Lecture Notes in Math. 659. Springer-Verlag Pub. New-York (1978).

[9] R.P. BOAS Jr. : *A primer of real functions*. Math. Ass. America Pub. (1960).

[6] T. VIOLA : *Etude sur la détermination d'une fonction discontinue par sa dérivée unilatérale*. Gauthiers-Villars Ed. Paris (1933).

6. METRISABILITE DES ESPACES TOPOLOGIQUES

La référence principale est le traité de Dugundji. Comme toujours quand il est question de vocabulaire en topologie, on peut consulter Steen et Seebach (cf. Bibliographie § 0). Les autres références sont :

[4] J.I. NAGATA : *Modern general topology*. North-Holland Pub. Amsterdam (1968).

[3] E. MICHAEL : *A note on paracompact spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 831-838.

[2] R.H. BING : *Metrization of topological spaces*. Canadian J. 3 (1951), 175-186.

[1] R.H. BING : *Extending a metric*. Duke Math. J. 14 (1947), 511-519.

7. ESPACES METRIQUES COMPACTS

Les énoncés du § 7 proviennent des articles suivants, mais les démonstrations utilisant le théorème de prolongement de Bing sont nouvelles.

[12] H. HUEBER : *On uniform continuity and compactness in metric spaces*. Amer. Math. Monthly 88 (1981), 204-205.

[11] R.K. TAMAKI and A.A. JAGERS : *Compactness and open covers* [5850]. Amer. Math. Monthly 85 (1978), 815.

[10] J.A. HEINEN and A. WILANSKY : *A theorem on set inclusion in metric spaces*. Amer. Math. Monthly 80 (1973), 46-48.

[9] C.C. ALEXANDER : *Metrically isolated sets*. Amer. Math. Monthly 78 (1971), 892-895.

[8] M.D. AŠIĆ and D.D. ADAMOVIĆ : *Limit points of sequences in metric spaces*. Amer. Math. Monthly 77 (1970), 613-616.

[7] P. SCHAEFER : *Limit points of bounded sequences*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 51.

[6] L.M. SIMON : *Compactness and sequential compactness in metric spaces*. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1238-1239.

[5] J. HUNT : *A new proof of Lebesgue's covering lemma*. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 990-991.

[4] V.L. KLEE Jr. : *Some characterizations of compactness*. Amer. Math. Monthly 58 (1951), 389-393.

[3] E. HEWITT : *Rings of real-valued continuous functions I*. Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 45-99.

[2] H.G. BARONE : *Limit points of sequences and their transforms by methods of summability*. Duke Math. J. 5 (1939), 740-752.

[1] V. NIEMYTZKI and A. TIHONOV : *Benveis des satzes, dass ein metrisierbarer Raum dann und nur dann kompakt ist wenn er in jeder Metrik vollständig ist*. Fund. Math. 12 (1928), 118-120.

NOTES DU CHAPITRE 1

(1) Voir les exercices 1 à 9 pour d'autres notions de séparation.

(2) Dans le cadre de la lutte contre les pinaillages stériles, on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. En particulier, on ne distinguera pas le nombre complexe z du point M d'affixe z. Cette distinction est d'ailleurs liée à la façon de définition $\mathbb{C}$. Imaginerait-on de distinguer 2 et le nombre réel qui correspond à la classe d'équivalence de la suite de Cauchy constante d'éléments de $\mathbb{Q}$ dont le terme général correspond à la classe d'équivalence du couple (2;1) d'entiers naturels ?

(3) Il existe des espaces connexes dont le cardinal est infini dénombrable. Voir chapitre 2 le contre-exemple 11, l'espace de Rittler qui est un exemple d'espace topologique à la fois séparé dénombrable, connexe et localement connexe.

(4) Il y a une faute dans le livre de Steen et Seebach dans la formule de définition de la quasi-uniformité de Pervin.

(5) En français, dénombrable signifie fini ou infini dénombrable.

(6) On réserve plutôt les notations $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ pour désigner l'ensemble des nombres réels et celui des nombres rationnels munis de leur topologie usuelle.

(7) Voir chapitre 2, §5, pour l'arithmétique des cardinaux.

(8) Les sommes de Riemann devraient en réalité s'appeler les sommes de Cauchy-Riemann. Ce fut en effet Cauchy qui démontra, en 1823, que pour une fonction continue sur un intervalle, ces sommes convergent vers l'intégrale. C'est un demi-siècle plus tard que Riemann définit l'intégrale en partant des sommes.

(9) Les espaces paracompacts ont été introduits par Dieudonné en 1944. Ce dernier a montré que tout espace paracompact est normal. Les espaces totalement normaux avaient été définis en 1940 par Tukey qui avait démontré que tout espace métrisable est totalement normal. Le lien entre les deux notions a été établi par Stone en 1948 : un espace T_1 est paracompact si et seulement s'il est totalement normal.

(10) Dans son article, Bing annonçait un résultat qu'il ne démontrait pas. Le théorème 71 correspond à l'énoncé effectivement démontré par Bing. En fait, Bing a signalé en 1951 que le résultat qu'il avait annoncé en 1947 était faux, car L.K. Meals avait trouvé un contre-exemple.

Chapitre 2

QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES FONDAMENTAUX

Nous allons dans ce chapitre dresser un catalogue de quelques espaces fondamentaux en topologie. Notre propos n'est bien sûr pas de donner toutes les propriétés connues des espaces concernés. S'agissant de compléments, nous nous intéresserons essentiellement à des propriétés parfois méconnues, surtout en ce qui concerne des espaces aussi courants que les intervalles de $\mathbb{R}$, ou le cercle.

Les *"propriétés universelles"* de ces espaces fondamentaux, celles qui justifient l'intérêt qu'on leur porte, sont regroupées dans le chapitre suivant. Par ailleurs, un chapitre spécial est consacré à la topologie de $\mathbb{R}$. Enfin, les espaces fonctionnels sont exclus de ce chapitre: on les étudiera dans le volume 6.

1. CARACTÉRISATION TOPOLOGIQUE DES INTERVALLES COMPACTS.

La question à laquelle nous allons répondre est celle-ci: « *Etant donné un espace topologique X , à quelle condition est-il homéomorphe à un intervalle compact de* $\mathbb{R}$? » . On dira qu'un tel espace est un *arc simple*.

Nous allons suivre la présentation de G. Whyburn et E. Duda [1[5]].

1.1. DEFINITIONS.

Définition 1.– Soit X un espace topologique. On appelle *déconnexion* de X ([1]) toute décomposition de X sous la forme $X = X_1 \cup X_2$, avec :

$$X_1 \cap \bar{X}_2 = \emptyset = \bar{X}_1 \cap X_2 .$$

On dit alors que X_1 et X_2 sont *déconnectés*. Notons que X_1 et X_2 sont alors des ouverts de X .

Un point x de X *déconnecte* deux points a et b de X s'il existe une déconnexion de $X\setminus\{x\}$ sous la forme $X\setminus\{x\} = X_a \cup X_b$, avec $a \in X_a$ et $b \in X_b$ (avec également $X_a \cap \bar{X}_b = \emptyset = \bar{X}_a \cap X_b$, puisqu'il s'agit d'une déconnexion). On a alors $\bar{X}_a \cap \bar{X}_b \in \{\{x\} ; \emptyset\}$.

Il est facile de voir qu'un espace X est connexe si et seulement s'il n'admet pas de déconnexion (*cf.* exercice 1).

Définition 2.– On dit qu'un point x d'un espace connexe X est un *point de coupure* de X si $X \setminus \{x\}$ n'est pas connexe.

Définition 3. – Soit X un arc simple. Les points correspondant aux extrémités d'un intervalle $[a\,;b]$ auquel X est homéomorphe sont appelés les *extrémités* de X . ([2]).

Rappelons enfin qu'on appelle *continus* les espaces topologiques qui sont à la fois compacts et connexes.

1.2. THEOREMES.

Théorème 1. (*Moore, 1917*)

Un continu métrisable X *non réduit à un point est un arc simple si et seulement s'il existe deux points* a *et* b *de* X *tels que tout point de* $X \setminus \{a\,;b\}$ *déconnecte* a *et* b .

Si X est un tel espace, il est clair que a et b en sont les extrémités.

Lemme 2.

Soient X *un espace connexe, et* Y *une partie connexe de* X *telle que* $X \setminus Y$ *admette une déconnexion de la forme* $X \setminus Y = Z_1 \cup Z_2$. *Alors* $X_1 \cup Y$ *et* $Z_2 \cup Y$ *sont des ensembles connexes.*

Démonstration du lemme 2. Supposons que $Z_1 \cup Y$ ne soit pas connexe. Il existe deux ouverts relatifs de $Z_1 \cup Y$, disons A et B , tels que :

$$Z_1 \cup Y = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset .$$

On a alors également : $\bar{A} \cap B = B \cap \bar{A} = \emptyset$, les adhérences étant prises relativement à $Z_1 \cup Y$. Puisque Y est connexe, on a $Y \subset A$ ou $Y \subset B$. Car sinon, Y se décomposerait sous la forme $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, et ne serait pas connexe.

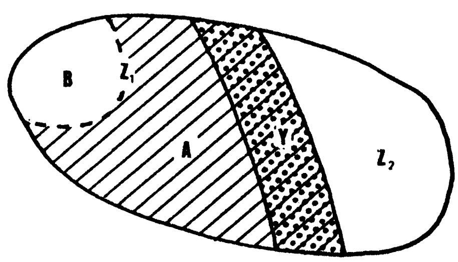


Figure 1
Démonstration du lemme 2

Supposons par exemple $Y \subset A$. On a alors $B \subset Z_1$, puis $X = (Z_2 \cup A) \cup B$. Ceci est une déconnexion de X . En effet, $\overline{(Z_2 \cup A)} = \bar{Z}_2 \cup \bar{A}$, où les adhérences sont dorénavant prises relativement à X . De la relation $\bar{Z}_2 \cap Z_1 = \emptyset$, on tire $\bar{Z}_2 \cap B = \emptyset$. Puisque $Z_2 \cap \bar{Z}_1 = \emptyset$, et que $B \subset Z_1$, on a $\bar{B} \subset \bar{Z}_1$ d'où $\bar{B} \cap Z_2 = \phi$, ce qui montre que l'adhérence de B relativement à X est égale à l'adhérence de B relativement à $Z_1 \cup Y$. Cela étant,

$\bar{A} \cap B = (\bar{A} \cap (Z_1 \cup Y) \cap B) \cup (\bar{A} \cap Z_2 \cap B) = [\bar{A} \cap (Z_1 \cup Y)] \cap B = \emptyset$ puisque $A \cup B$ est une déconnexion de $Z_1 \cup Y$. Des relations $\bar{Z}_2 \cap B = \emptyset$ et $\bar{A} \cap B = \emptyset$, on déduit $(\overline{Z_2 \cup A}) \cap B = \emptyset$. Comme $\bar{B} \cap Z_2 = \emptyset$ on a $\bar{B} \subset Z_1 \cup Y$, d'où $\bar{B} \cap A = \emptyset$, cette relation ayant été établie dans $Z_1 \cup Y$. Enfin, la conjugaison de $\bar{B} \cap A = \emptyset$ et de $\bar{B} \cap Z_2 = \emptyset$ conduit à $\bar{B} \cap (A \cup Z_2) = \emptyset$. Le fait que X admette une déconnexion contredit sa connexité, ce qui achève la démonstration. ■

Démonstration du théorème 1.

Il est clair qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ a la propriété énoncée, de sorte que celle-ci est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

■ *Première étape : Préliminaires.*

Soit donc X un continu métrisable non réduit à un point et ayant deux points a et b tels que tout point de $X \setminus \{a; b\}$ les déconnecte.

Puisque X est un compact métrisable, il est séparable. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points distincts de $X \setminus \{a; b\}$ dense dans X. Tout point $x \in \{x_n\}$ déconnecte X sous la forme $X \setminus \{x\} = X_a(x) \cup X_b(x)$, avec $a \in X_a(x)$, $b \in X_b(x)$, $\overline{X_a(x)} \cap X_b(x) = \emptyset$, et $X_a(x) \cap \overline{X_b(x)} = \emptyset$. Il résulte du lemme 2 que $X_a(x) \cup \{x\} = Y_a(x)$ et $X_b(x) \cup \{x\} = Y_b(x)$ sont connexes.

En outre, $Y_a(x)$ et $Y_b(x)$ sont compacts. En effet, soit par exemple $y \in \overline{Y_a(x)}$. Si l'on avait $y \in X_b(x)$, on aurait $y \in \overline{X_a(x)}$ ou $y \in \overline{\{x\}} = \{x\}$, et donc $\overline{X_a(x)} \cap X_b(x) \neq \emptyset$, ou $\{x\} \cap X_b(x) \neq \emptyset$, ce qui est impossible. L'ensemble $Y_a(x)$ est donc fermé dans le compact X. C'est un compact. Il en est de même de $Y_b(x)$, et ces deux ensembles sont des continus.

Montrons que ces continus ont la même propriété que X, à savoir, pour $Y_a(x_n)$ par exemple :

"*tout point* x *de* $Y_a(x_n) \setminus \{a; x_n\}$ *déconnecte* a *et* x_n ".

En effet, soit $x' \in Y_a(x_n) \setminus \{a; x_n\}$. On sait que x' déconnecte a et b dans X ; $X \setminus \{x'\} = X_a(x') \cup X_b(x')$, avec $a \in X_a(x')$, $b \in X_b(x')$, $\overline{X_a(x')} \cap X_b(x') = \emptyset = X_a(x') \cap \overline{X_b(x')}$. Cela fournit la décomposition suivante de $Y_a(x_n) \setminus \{x'\}$:

$$Y_a(x_n) \setminus \{x'\} = (Y_a(x_n) \cap X_a(x')) \cup (Y_a(x_n) \cap X_b(x')).$$

C'est une déconnexion de $Y_a(x_n)$ qui déconnecte a et x_n. En effet, supposons par l'absurde que l'on ait $x_n \in (Y_a(x_n) \cap X_a(x'))$. Alors $x' \in X_a(x')$, et puisque $x_n \in Y_b(x_n)$, le connexe $Y_b(x_n)$ admet la déconnexion $Y_b(x_n) = (Y_b(x_n) \cap X_a(x')) \cup (Y_b(x_n) \cap X_b(x'))$ ce qui est impossible.

En résumé, on a montré que, si X est un continu métrisable non réduit à un point tel que tout point x de $X \setminus \{a; b\}$ déconnecte a et b sous la forme $X \setminus \{x\} = X_a(x) \cup X_b(x)$, alors $Y_a(x) = X_a(x) \cup \{x\}$ est également un continu métrisable tel que tout point $x' \in Y_a(x) \setminus \{a; x\}$ déconnecte a et x. Et de même, pour $Y_b(x) = X_b(x) \cup \{x\}$.

■ *Deuxième étape : définition d'une application* $\{x_n\} \to [0; 1]$.

On pose d'abord : $h(a) = 0$, $h(b) = 1$, et $h(x_1) = \frac{1}{2}$. Soit $n(\frac{1}{4})$ (resp. $n(\frac{3}{4})$) le plus petit entier k tel que x_k appartienne à $X_a(x_1)$ (resp. $X_b(x_1)$). Remarquons que, puisque les x_n sont des points distincts de $X\setminus\{a; b\}$, les points $x_{n(1/4)}$ et $x_{n(3/4)}$ sont distincts de a_1, x_1 et b.

On pose : $h(x_{n(1/4)}) = 1/4$ et $h(x_{n(3/4)}) = 3/4$. Posons également : $Z(\frac{1}{4}) = Y_a(x_1)$, $Z(\frac{3}{4}) = Y_b(x_1)$. En appliquant aux continus $Z(\frac{1}{4})$ et $Z(\frac{3}{4})$ les résultats de la partie préliminaire, on obtient quatre continus $Z(\frac{1}{8})$, $Z(\frac{3}{8})$, $Z(\frac{5}{8})$ et $Z(\frac{7}{8})$ vérifiant les relations $Z(\frac{1}{8}) = Y(\frac{1}{8}) \cup \{x_{n(1/4)}\}$, $Z(\frac{3}{8}) = Y(\frac{3}{8}) \cup \{x_{n(1/4)}\}$, $Z(\frac{5}{8}) = Y(\frac{5}{8}) \cup \{x_{n(3/4)}\}$, $Z(\frac{7}{8}) = Y(\frac{7}{8}) \cup \{x_{n(3/4)}\}$, où $Y(\frac{1}{8}) \cup Y(\frac{3}{8})$ est une déconnexion de $Z(\frac{1}{4})$ qui déconnecte a et x_1, et où $Y(\frac{5}{8}) \cup Y(\frac{7}{8})$ est une déconnexion de $Z(\frac{3}{4})$ qui déconnecte x_1 et b. Notons les liens entre les $Z(k/2^3)$:

$$\begin{cases} Z(k/2^3) \cap Z((k+2)/2^3) \neq \emptyset & \text{si } k \text{ impair} \leq 5 = 2^3-3 \\ Z(k/2^3) \cap Z(h/2^3) = \emptyset & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Par récurrence, on construit, pour chaque n, une décomposition de X de la forme : $X = Z(1/2^n) \cup Z(3/2^n) \cup \ldots \cup Z(2^n-1)/2^n)$ où les $Z(k/2^n)$ sont des continus dont les intersections deux à deux sont vides, à l'exception de celles du type $Z(k/2^n) \cap Z((k+2)/2^n)$ égale à $\{x_{n((k+1)/2^n)}\}$. On pose : $h(x_{n(k/2^n)}) = k/2^n$. En imposant, pour k impair $< 2^n$, à $n(k/2^n)$ d'être le plus petit entier q tel que

$$x_q \in Z(k/2^n)\setminus\{x_{n((k-1)/2^n)} \; ; \; x_{n((k+1)/2^n)}\} \;, \quad \text{on a :} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2^n-1} n(k/2^n) \right) = \mathbb{N}^*$$

De la sorte, h définit une bijection de $\{a; b\} \cup \{x_n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ sur l'ensemble des nombres dyadiques.

■ *Troisième étape : Extension de l'application* h *à* X.

Montrons que cette bijection est uniformément continue.

Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $1/2^{N-1} < \varepsilon/2$. Les ensembles $Z(k/2^N)$, $k \in \{1, 3, \ldots, 2^N-1\}$ forment un recouvrement de X. Soit d une distance sur X compatible avec la topologie de cet ensemble. Posons $\eta_{k,\ell} = d(Z(k/2^N) \; ; \; Z(\ell/2^N))$, pour $k, \ell \in \{1, 3, \ldots, 2^N-1\}$ non consécutifs dans cet ensemble. Puisque les compacts $Z(k/2^N)$ et $Z(\ell/2^N)$ sont disjoints, $\eta_{k,\ell}$ est strictement positif, et le minimum, η, de ces $\eta_{k,\ell}$, l'est aussi. Soient x et $y \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ tels que : $d(x,y) < \eta$. Alors, x et y appartiennent soit au même $Z(k/2^N)$, soit à deux de ces ensembles consécutifs, $Z(k/2^N)$ et $Z((k+2)/2^N)$. Dans le premier cas, on peut écrire :

$$|h(x)-h(y)| \leq |h(x_{n((k-1)/2^N)}) - h(x_{n((k+1)/2^N)})| = \frac{1}{2^{N-1}}$$

et dans le second :

$$|h(x)-h(y)| \leq |h(x)-h(x_{n((k+1)/2^N)})| + |h(x_{n((k+1)/2^N)})-h(y)| \leq \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon \quad .$$

Cela montre que h est uniformément continue. Elle admet donc un prolongement

$\overline{h} : X \to [0 ; 1]$ uniformément continu. L'image d'un compact par une telle application étant un compact, h est surjective.

■ *Quatrième étape : $\overline{h}$ est injective.*

Soient x et $y \in X$, $x \neq y$. Le point x déconnecte $X \setminus \{x\}$ en : $X \setminus \{x\} = X_a(x) \cup X_b(x)$. Supposons par exemple $y \in X_b(x)$. Soit $X \setminus \{y\} = X_a(y) \cup X_b(y)$ une déconnexion de X par rapport à y. On a $x \in X_a(y)$. En effet, si l'on avait $x \in X_b(y)$, on aurait

$Y_a(y) = X_a(y) \cup \{y\} = (Y_a(y) \cap Y_a(x)) \cup (Y_a(y) \cap Y_b(x)) = (Y_a(y) \cap X_a(x)) \cup (Y_a(y) \cap X_b(x))$

ce qui serait une déconnexion du connexe $Y_a(y)$, d'où la contradiction.

Cela étant, on a $X_a(y) \cap X_b(x) \neq \emptyset$. En outre, cet ensemble est ouvert dans X. Soient z_1 et $z_2 \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ deux éléments de $X_a(y) \cap X_b(x)$. Supposons par exemple $h(z_1) < h(z_2)$. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a : $Y_a(x) \subset Y_a(z_1)$ et $Y_b(y) \subset Y_b(z_2)$. En outre, pour tout $x_i \in Y_a(z_1)$ (resp. $Y_b(z_2)$), on a l'inégalité : $h(x_i) \leq h(z_1)$ (resp. $h(x_i) \geq h(z_2)$). Par continuité, on en déduit : $\overline{h}(x) \leq h(z_1) < h(z_2) \leq \overline{h}(y)$ ce qui achève de montrer l'injectivité de $\overline{h}$.

■ *Conclusion :* On a construit une application continue bijective du compact X sur $[0 ; 1]$. C'est un homéomorphisme. ■

<u>Théorème 3</u> (<u>*Moore, 1923*</u>)

— *Un continu métrisable* X *est un arc simple d'extrémités* a *et* b *si et seulement si tout point de* $X \setminus \{a;b\}$ *est un point de coupure de* X.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. compte tenu du théorème 1, il suffit d'établir que tout point x d'un continu X ayant la propriété de l'énoncé déconnecte a et b.

Soit donc $x \in X$. Puisque x est un point de coupure de X, on a : $X \setminus \{x\} = A \cup B$, où A et B sont des ouverts disjoints de $X \setminus \{x\}$. Si l'on a $a \in A$ et $b \in B$, x déconnecte a et b, et c'est terminé. Supposons par l'absurde que l'on ait $\{a;b\} \subset A$. On va montrer que B doit contenir un point y qui n'est pas un point de coupure de X.

Supposons que tous les points de B soient des points de coupure de X. Puisque X est un espace métrique compact, il existe une partie dense dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où les x_n sont disjoints deux à deux et différents de x. Soit n_1 le plus petit entier tel que $x_{n_1} \in B$. Par hypothèse, x_{n_1} est un point de coupure de X, et l'on déconnecte $X \setminus \{x_{n_1}\}$ sous la forme $X \setminus \{x_{n_1}\} = A_1 \cup B_1$, avec $x \in A_1$. Alors, comme $A \cup \{x\}$ est connexe (d'après le lemme 2), on a $A \cup \{x\} \subset A_1$, et par suite $B_1 \subset B$. Par ailleurs, $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1-1}$ appartiennent à A_1.

Supposons, par récurrence, avoir construit une séquence ([3]) $n_1, \ldots, n_p$ d'entiers, et des séquences correspondantes de points $x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}$, de parties de X, $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots, B_p$ telles que pour tout i, $1 \leq i \leq p$, on ait :

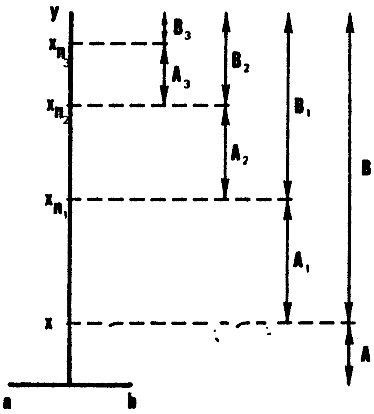


Figure 2
Démonstration du théorème 3

- n_i est le plus petit entier $> n_{i-1}$ tel que $x_{n_i} \in B_{i-1}$
- $A_i \cup B_i$ est une déconnexion de $X \setminus \{x_{n_i}\}$ telle que $x_{n_{i-1}} \in A_i$; il s'ensuit les inclusions $A_{i-1} \cup \{x\} \subset A_i$ et $B_i \subset B_{i-1}$
- $x_1, \ldots, x_{n_i - 1}$ appartiennent à A_i.

Clairement, on peut poursuivre la récurrence au rang p+1.

Cela étant, la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'ensembles vérifiant :
$B_{p+1} \cup \{x_{n_{p+1}}\} = \overline{B_{p+1}} \subset B_p \subset B$ d'où l'on déduit : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_p = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \overline{B_p} \neq \emptyset$, car dans un compact, une suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide. Soit C cette intersection ; $C \subset B$.

D'autre part, la suite $(A_p \cup \{x_{n_p}\})_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de connexes. Sa réunion D est donc un connexe. Comme elle contient tous les x_n, elle est partout dense. Enfin, $C \cap D = \emptyset$.

Soit $y \in C$. Alors $D \subset X \setminus \{y\} \subset \overline{D} = X$. L'ensemble $X \setminus \{y\}$, compris entre une partie connexe et sa fermeture, est connexe. Ainsi y est-il un point de B qui n'est pas un point de coupure de X. Ceci contredit le fait que tout point de $X \setminus \{a;b\}$, donc tout point de B, soit un point de coupure de X, et achève la démonstration ■

2. CARACTÉRISATION DU CERCLE

Nous utilisons le vocabulaire et les résultats du paragraphe 1.

Définition 4. — On appelle *courbe simple fermée* tout espace topologique homéomorphe à un cercle (non réduit à un point).

Notons qu'un espace topologique X est une courbe simple fermée si et seulement s'il se décompose sous la forme $X = Y \cup Z$, où Y et Z sont des arcs simples d'extrémités communes a et b et tels que :
$(Z \setminus \{a;b\}) \cap (Y \setminus \{a;b\}) = \emptyset$.

Théorème 4. (MOORE, 1923) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique non réduit à un point soit une courbe simple fermée est qu'il soit un continu métrisable déconnecté par toute paire de points distincts.*

Autrement dit, un continu métrisable non réduit à un point X est une courbe simple fermée si et seulement si, pour toute paire $\{a;b\}$ de points distincts de X, $X \setminus \{a;b\}$ n'est pas connexe. Un tel espace n'est pas un arc simple, car si a et b sont les extrémités d'un arc simple X, $X \setminus \{a;b\}$ est connexe.

Démonstration : Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Pour cela, on va établir que, si X est un espace topologique satisfaisant à la condition du théorème, il existe deux points a et b de X tels que $X = Y \cup Z$, où Y et Z sont deux arcs simples d'extrémités a et b, et tels que : $(Y \setminus \{a;b\}) \cap (Z \setminus \{a;b\}) = \emptyset$.

● Notons pour commencer que l'on a établi dans la démonstration du théorème 3 que tout continu métrisable contient au moins un point qui n'est pas un point de coupure. On en déduit facilement (exercice 3) qu'il en contient au moins deux.

● Cela étant, supposons que X est un espace topologique satisfaisant à la condition du théorème, et soient a et b deux points distincts de X qui ne sont pas des points de coupure de X :

$$\begin{cases} X \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad X \setminus \{b\} \text{ sont connexes,} \\ X \setminus \{a;b\} = Y \cup Z, \quad Y \cap Z = \emptyset \text{ et } Y \text{ et } Z \text{ sont ouverts dans } X \setminus \{a;b\}. \end{cases}$$

D'après le lemme 2, $Y \cup \{a\}$, $Y \cup \{b\}$, $Z \cup \{a\}$ et $Z \cup \{b\}$ sont connexes. En outre, puisqu'un continu n'a pas de point isolé, on a :

$\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z} = X$. Toujours parce que X est connexe, $\overline{Y} \cap \overline{Z} \neq \emptyset$. De plus, puisque $Y \cap Z = \emptyset$, et que Y et Z sont fermés dans $X \setminus \{a;b\}$, $\overline{Y} \cap \overline{Z}$ est inclus dans $\{a;b\}$.

● *Montrons* $(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \{a;b\}$.

Supposons par l'absurde qu'un seul des deux points a et b, disons a, appartienne à $\overline{Y} \cap \overline{Z}$, et que b n'appartienne qu'à $\overline{Y}$. Alors, $X \setminus \{a\} = Y \cup Z \cup \{b\} = (Y \cup \{b\}) \cup Z$ serait une déconnexion de X, et a serait un point de coupure de X, ce qui par hypothèse est exclu.

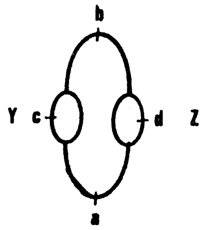


Figure 3

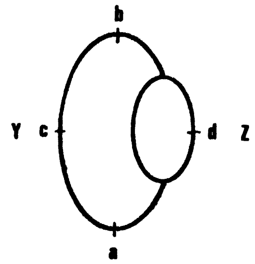


Figure 4

- $\overline{Y}$ *et* $\overline{Z}$ *sont des continus.*

En effet, ce sont des compacts comme sous-ensembles fermés du compact X. En outre, on sait que $Y \cup \{a\}$ et $Z \cup \{a\}$ sont connexes, de sorte que les inclusions

$$Y \subset Y \cup \{a\} \subset Y \cup \{a;b\} = \overline{Y} = \overline{Y \cup \{a\}}$$

$$Z \subset Z \cup \{a\} \subset Z \cup \{a;b\} = \overline{Z} = \overline{Z \cup \{a\}}$$

établissent la connexité de $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$, en tant qu'adhérences de connexes.

■ *Montrons à présent que* $\overline{Y}$ *et* $\overline{Z}$ *sont des arcs simples d'extrémités* a *et* b.

- Supposons par l'absurde pour commencer, que ni $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ ne soient des arcs simples d'extrémités a et b. Alors, d'après le théorème 1, il existerait $c \in \overline{Y} \setminus \{a;b\}$ et $d \in \overline{Z} \setminus \{a;b\}$ tels que $\overline{Y} \setminus \{c\}$ et $\overline{Z} \setminus \{d\}$ soient connexes (voir figure 3). L'ensemble $(\overline{Y} \setminus \{c\}) \cup (\overline{Z} \setminus \{d\}) = X \setminus \{c;d\}$ serait alors connexe, comme réunion de deux connexes d'intersection non vide, et cela contredirait le fait que $X \setminus \{c;d\}$ ne soit pas connexe, car $c \neq d$. Donc, l'un au moins des deux ensembles $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$, disons $\overline{Y}$, est un arc simple d'extrémités a et b.

- Soit $c \in \overline{Y} \setminus \{a;b\}$. Puisque $\overline{Y}$ est un arc simple, c déconnecte $\overline{Y}$ avec une déconnexion de la forme $\overline{Y} \setminus \{c\} = A \cup B$, où A et B sont des connexes contenant respectivement a et b. Supposons par l'absurde que $\overline{Z}$ ne soit pas un arc simple d'extrémités a et b. Alors, il existerait $d \in \overline{Z} \setminus \{a;b\}$ tel que $\overline{Z} \setminus \{d\}$ soit connexe (voir figure 4). L'ensemble $(\overline{Z} \setminus \{d\}) \cup A$ serait connexe comme réunion de deux connexes d'intersection non vide, et il en serait de même de $(\overline{Z} \setminus \{d\}) \cup A \cup B = X \setminus \{c;d\}$, pour la même raison; or, par hypothèse, $X \setminus \{c;d\}$ n'est pas connexe.

- Ainsi, on a établi que $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ sont des arcs simples d'extrémités a et b; le théorème est démontré. ▣

La sphère S^2 admet une caractérisation topologique semblable à celles des intervalles compacts et du cercle. La démonstration n'est pas élémentaire, et l'on pourra consulter [14].

<u>Théorème 5</u> – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu localement connexe* S *soit homéomorphe à la sphère* $S^2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *est que les trois assertions suivantes soient vérifiées :*

a) S *contient au moins une courbe simple fermée.*

b) Toute courbe simple fermée de S *déconnecte* S.

c) Aucun arc simple contenu dans une courbe simple fermée de S *ne déconnecte* S.

3. L'ENSEMBLE DE CANTOR.

3.1. DEFINITION.

Considérons la famille $(I_{p,q})_{p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*,\ q\leq 4p}$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ définis par :

$$I_{p,q} = \left]\frac{2q-1}{3^{p+1}} ; \frac{2q}{3^{p+1}}\right[$$

On appelle *ensemble triadique de Cantor*, et l'on note K_3 l'ensemble

$$[0; 1] \setminus \left(\bigsqcup_{p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*,\ q\leq 4^p} I_{p,q} \right) .$$

Une construction par récurrence de l'ensemble triadique de Cantor est obtenue de la manière suivante :

On considère l'intervalle $[0; 1] = C_o$. On construit C_1 en privant C_o de l'intervalle ouvert $\left]\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right[$; "tiers médian" de $[0; 1] = C_o$. L'ensemble C_1 est donc réunion de $2 = 2^1$

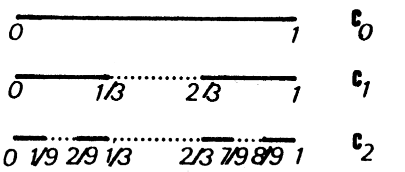


Figure 5

intervalles fermés de longueur $1/3 = 1/(3^1)$. On déduit C_2 de C_1 en privant chacun des intervalles constitutifs de celui-ci de son tiers médian ouvert. Ainsi, C_2 est égal à :

$$[0; \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9} ; \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3} ; \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9} ; 1] \ .$$

Il est constitué de $4 = 2^2$ intervalles fermés de longueur $1/9 = 1/3^2$.

Plus généralement, C_{n+1} est déduit de C_n en enlevant à chacun des 2^n intervalles disjoints de longueur $1/3^n$ constituant C_n son tiers médian ouvert.

L'ensemble triadique de Cantor n'est autre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

3.2. PROPRIETES DE L'ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR.

Celles-ci sont nombreuses, et sont très utilisées, particulièrement en raison du caractère "pathologique" de cet ensemble. On s'en sert essentiellement pour construire des contre-exemples, et détruire éventuellement certaines "idées fausses". Voici, classées par thème, les principales propriétés de l'ensemble triadique de Cantor :

3.2.1. Du point de vue ensembliste et algébrique :

(E1) K_3 *est l'ensemble des réels de la forme*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n} , \quad ou \quad a_n \in \{0; 2\} .$$

Autrement dit, K_3 est l'ensemble des réels de $[0; 1]$ admettant un développement triadique ne comportant pas de 1 . Cela découle immédiatement du procédé de construction par récurrence, puisqu'à la n-ième étape, on passe de C_{n-1} à C_n en ôtant à C_{n-1} tous les réels de $[0;\,1]$ dans l'écriture desquels, en base 3, le n-ième chiffre est un 1. On notera qu'il s'agit éventuellement d'un développement impropre.

(E2) *Le cardinal de* K_3 *est égal à celui de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

On dit que K_3 a la *puissance du continu* (*cf.* §5.3). En effet, c'est vrai de $[0;1]$, et à tout élément a de K_3 , on peut faire correspondre bijectivement le réel de $[0;\,1]$ dont le développement en base 2 est déduit du développement de a en base 3 en remplaçant les 2 par des 1 . On verra plus loin une autre démonstration de cette propriété de K_3 .

3.2.2. Du point de vue topologique.

(T1) K_3 *est compact.*

En effet, chaque C_n est compact comme union finie de compacts, et K_3 est un compact non vide, comme intersection d'une suite décroissante de compacts non vides.

(T2) K_3 *est totalement discontinu.*

Rappelons qu'un espace topologique X est dit *totalement discontinu* si la composante connexe de chacun de ses points est réduite à ce point (voir la remarque 3.6., p. 106). Cela revient à dire que, pour tout couple $(x;\,y)$ de points distincts de X , il existe une déconnexion de X du type $X = A \cup B$, avec $x \in A,\ y \in B$ (et, par définition d'une déconnexion : $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$) (*cf.* exercice 6).

En effet, soient x et $y \in K_3$, $x \neq y$. Puisque $x \neq y$, il existe un entier n qui est le plus petit p tel que les p-ièmes chiffres, x_p et y_p , des développements triadiques de x et y soient différents. Si $x < y$, $x_p = 0$ et $y_p = 2$. Soit z le réel dont le développement triadique est celui de x jusqu'au (p-1)ième chiffre, dont le p-ième chiffre est 1 , et dont les chiffres au-delà sont tous égaux à 1 . Alors, $x < z < y$, $z \notin K_3$, et $([0;\,z] \cap K_3) \cup ([z;\,1] \cap K_3)$ est une déconnexion de x et y dans K_3 . On verra plus loin une meilleure démonstration de cette propriété.

(T3) *L'intérieur de* K_3 *est vide* (*)

En effet, on vient de voir qu'entre deux éléments distincts de K_3 , il existe toujours un élément de $\mathbb{R} \setminus K_3$. L'ensemble K_3 ne contient donc aucun intervalle ouvert. Son intérieur est vide (*cf.* exercice 7).

(T4) K_3 *est parfait* (⁵)

Rappelons qu'un ensemble *parfait* est un fermé sans points isolés. Cela revient à dire que K_3', *l'ensemble dérivé* de K_3 , ensemble des points d'accumulation de K_3 , est égal à K_3 .

En effet, soient $x \in K_3$, et $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-n} < \varepsilon$. Soit y le réel dont les n+1 premiers termes du développement triadique sont égaux à ceux du développement de x , dont tous les termes au-delà du $(n+3)$-ième sont nuls, et dont le $(n+2)$-ième vaut 0 ou 2, selon que le $(n+2)$-ième terme du développement de x vaut 2 ou 0 . Alors, $y \in K_3$, $x \neq y$ et $|y-x| < 2.3^{-(n+2)} < 3^{-n} < \varepsilon$, ce qui montre que x n'est pas un point isolé.

(T5) K_3 *est homéomorphe à* $\{0;\ 1\}^{\mathbf{N}}$.

Dans cet énoncé, on suppose que $\{0;\ 1\}^{\mathbf{N}}$ est muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0;\ 1\}$. L'espace $\{0;\ 1\}^{\mathbf{N}}$ est appelé *ensemble de Cantor*. On le note C .

En décalant les indices, on voit que $\{0;\ 1\}^{\mathbf{N}}$ est homéomorphe à $\{0;\ 1\}^{\mathbf{N}^*}$. On va donc démontrer que K_3 est homéomorphe à $\{0;\ 1\}^{\mathbf{N}^*}$ ou plus exactement à $\{0;\ 2\}^{\mathbf{N}^*}$, ce qui revient bien entendu au même.

A chaque $x \in K_3$, associons son développement triadique, impropre si x est une extrémité des $I_{p,q}$ définis au début de la section (ces intervalles sont dits *contigus* à K_3) , propre sinon. Désignons par $\lambda_n(x)$ le n-ième chiffre de ce développement. Alors,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(x).3^{-n} .$$

Soient $x, y \in K_3$, et $n \in \mathbf{N}^*$. Si l'on a $|\lambda_n(x) - \lambda_n(y)| = 2$, alors $|x-y| \geq 3^{-n}$. En effet, l'égalité est claire pour $n=1$. Supposons l'avoir démontrée pour tout entier $k \leq n$, et établissons-la pour $n+1$. Supposons donc que l'on ait $|\lambda_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}(y)| = 2$. Alors, ou bien il existe $k \leq n+1$ tel que $|\lambda_k(x) - \lambda_k(y)| = 2$, et dans ce cas, d'après l'hypothèse de récurrence, $|x-y| \geq 3^{-k} > 3^{-(n+1)}$, ou bien $|\lambda_k(x) - \lambda_k(y)| = 0$ pour tous les $k \leq n$.
Dans ce cas,

$$|x-y| = \left|2.3^{-(n+1)} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} (\lambda_k(x) - \lambda_k(y))3^{-k}\right| \geq 2.3^{-(n+1)} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} |\lambda_k(x) - \lambda_k(y)|.3^{-k}$$

$$\geq 2.3^{-(n+1)} - 2\sum_{k=n+2}^{+\infty} 3^{-k} = 2.3^{-(n+1)} - 2\,\frac{3^{-(n+2)}}{1-1/3} = 2.3^{-(n+1)} - 3^{-(n+1)} = 3^{-(n+1)} ,$$

ce qui achève de montrer l'inégalité.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tous $x, y \in K_3$, l'inégalité $|x-y| < 3^{-n}$ implique $\lambda_n(x) = \lambda_n(y)$. Les applications λ_n sont donc continues, et, par définition de la topologie produit, il en est de même de l'application $K_3 \to \{0;\ 2\}^{\mathbf{N}^*}$, $x \mapsto (\lambda_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$. Cette dernière application est par ailleurs bijective (propriété E1). Il s'ensuit que c'est un homéomorphisme du compact K_3 sur le compact $\{0;\ 2\}^{\mathbf{N}^*}$. On retrouve en particulier la propriété E2.

(T6) *Il existe une surjection continue* $K_3 \to [0;\ 1]$.

On considère l'application $f\colon K_3 \to [0;\ 1]$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(x).2^{-n-1}$. Cette application est continue, car si $x, y \in K_3$ vérifient $|x-y| < 3^{-n}$, on a $\lambda_k(x) = \lambda_k(y)$, pour tous les entiers k entre 1 et n . On en déduit alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|(\lambda_n(x) - \lambda_n(y))2^{-n-1}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2.2^{-n-1} = 2^{-n} ,$$

ce qui établit la continuité. Enfin, on a $f(K_3) \subset [0;1]$. L'existence d'un développement dyadique montre $f(K_3) \supset [0;1]$, d'où le résultat.

Notons que f n'est pas injective : elle "recolle" les morceaux de K_3 ; si x a deux écritures binaires possibles, l'équation $h(z) = x$ a deux solutions possibles.

3.2.3. Du point de vue de l'intégration.

(I1) *L'ensemble triadique de Cantor est négligeable pour la mesure de Lebesgue.*

Autrement dit, si λ désigne la mesure de Lebesgue, $\lambda(K_3) = 0$. Plus simplement, c'est-à-dire sans faire intervenir la mesure de Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite J_n d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, dont la réunion contient K_3, et dont la somme des longueurs est inférieure à ε.

En effet, K_3 est défini comme l'intersection des ensembles C_m définis en 3.1. Or, on a : $\lambda(C_m) = 2^n \times 1/3^n = (2/3)^n$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(2/3)^n < \varepsilon$. Donc, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble D_n contenant K_3 et formé d'une réunion dénombrable (et même finie) d'intervalles et dont la somme des longueurs est inférieure à ε . : $\lambda(D_n) < \varepsilon$. C'est la définition d'un ensemble de mesure nulle.

On remarquera que l'on n'a utilisé aucun théorème de la théorie de l'intégration : dans $\mathbb{R}$ les ensembles de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue peuvent être définis directement (*cf.* chapitre 4, dans le volume 2).

3.2.4. Remarque sur les propriétés de K_3.

L'ordre d'exposition choisi ici n'est pas le plus direct pour les démonstrations. Il a toutefois permis d'isoler les différents points de vue. Un plan plus rapide aurait été :

E1 - I1 - T1 - T2 - T3 - T4 - T5 - T6 - E2

3.3. CARACTERISATION TOPOLOGIQUE DE L'ENSEMBLE DE CANTOR.

Théorème 6 — *Un espace topologique* X *est homéomorphe à l'ensemble de Cantor* $\mathbb{C}$ *si et seulement s'il est compact, métrisable, totalement discontinu et sans point isolé.*

Avant de démontrer ce théorème, envisageons le retrait de l'une des hypothèses.

- *La compacité :* $\mathbb{Q}$ est un espace métrisable totalement discontinu et sans point isolé.
- *La métrisabilité :* $\{0;1\}^{\mathfrak{c}}$, où $\mathfrak{c}$ est le cardinal de $\mathbb{R}$, a un cardinal $> \mathfrak{c}$. (d'après le théorème de Cantor). Il ne peut donc être homéomorphe à $\mathbb{C}$ (il n'est pas métrisable, et nous en verrons une raison liée à sa cardinalité au chapitre suivant)
- *La totale discontinuité :* $[0;1]$ est un compact métrisable et sans points isolés.
- *L'absence de points isolés :* Un ensemble fini, $\{0;1\}$ par exemple, est compact, métrisable et totalement discontinu.

Démonstration : Il est clair, d'après les propriétés T1, T2, T4 et T5, qu'une condition nécessaire pour qu'un espace topologique X soit homéomorphe à $\mathbb{C}$ est qu'il ait les propriétés énoncées. Montrons donc que ces conditions sont suffisantes. Soit X un espace topologique compact, métrisable, totalement discontinu et sans points isolés.

● Notons pour commencer que, puisque X est un espace métrisable compact totalement discontinu, tout point de X a admet une base de voisinages qui sont à la fois ouverts et fermés (on dit que X est de *dimension zéro*)

● Cela étant, soit d une distance définissant la topologie de X. Pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, notons $B(x,\varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε ; il existe un voisinage $V(x\,;\varepsilon)$ qui est la fois ouvert et fermé, et est inclus dans $B(x\,;\varepsilon)$. Alors, la fonction caractéristique de $V(x;\varepsilon)$, à savoir $\chi_{V(x;\varepsilon)}$, est une fonction continue $X \to \{0;1\}$.

■ *Construisons, par récurrence, une suite de partitions de* X *, de plus en plus fines.*

● *Première étape :* Prenons $\varepsilon_1 = 1$. Les $V(x;1)$ recouvrent X, et puisque X est compact, il existe un sous-recouvrement fini $V(x;1),\dots,V(x_{n_1};1)$ de X. De ce sous-recouvrement, on peut déduire, en considérant les intersections des $V(x_i\,;1)$ un recouvrement $F_{0,1},\dots,F_{0,P_0}$ de X par des ensembles non vides, disjoints, à la fois ouverts et fermés, et de diamètre inférieur à 2. Les fonctions caractéristiques χ_{F_i}, $1 \le i \le P_o$ sont continues, puisque ces ensembles sont à la fois ouverts et fermés.

● *Récurrence :* Supposons avoir trouvé, pour chaque entier $k \le n$, un entier $P_k \ge 2$, des ensembles $F_{k,1},\dots,F_{k,P_k}$ non vides, ouverts et fermés, disjoints deux à deux, de diamètre $\le 2.\,2^{-k}$ et tels que, si $k \ge 1$, pour chaque entier i, $1 \le i \le P_k$, il existe j, $1 \le j \le P_{k-1}$, tel que $F_{k,i} \subset F_{k-1,j}$ et $F_{k,i} \ne F_{k-1,j}$.

Cette hypothèse étant posée, soit q un entier, $1 \le q \le P_n$. L'ensemble $F_{n,q}$ est un fermé non vide de X. C'est donc un compact, et l'on peut, comme dans la première étape construire un recouvrement $G_{q,1} \cup \dots \cup G_{q,r_q}$ de $F_{n,q}$ par des ensembles non vides, ouverts et fermés, disjoints deux à deux, de diamètre $\le 2.2^{n+1}$, et distincts de $F_{n,q}$. La dernière propriété résulte du fait que X n'a pas de point isolé. Comme $F_{n,q}$ est ouvert, les $G_{q,i}$ sont ouverts dans X.

Effectuons cette construction pour tous les entiers q, $1 \le q \le P_n$. On peut énumérer les $P_{n+1} = \sum_{q-1}^{P_n} r_q$ ensembles obtenus : $G_{1,1}$, $G_{1,2},\dots,G_{1,r_1}$, $G_{2,1},\dots,G_{P_n,r_{P_n}}$ et appeler ces ensembles $F_{n+1,1},\dots,F_{n+1,P_{n+1}}$, ce qui achève la récurrence.

■ *Définissons une application* $f : X \to \{0\,;1\}^{\mathbb{N}}$.

Cela revient à définir une suite d'applications $f_n : X \to \{0\,;1\}$. On procède par récurrence. Chaque f_n est la fonction caractéristique d'une réunion finie d'ensembles $F_{p,q}$, notée U_n. On définit donc les ensembles U_n.

On pose : $U_0 = F_{0,1}$. Soit $F_{1,1},\dots,F_{1,r_1}$ le recouvrement de $F_{0,1}$ par des ensembles de la forme $F_{1,i}$ et $F_{1,r_1+1},\dots,F_{1,r_2}$ celui de $F_{0,2}$.

On pose : $U_1 = F_{1,1}\ F_{0,2}$. Soit $\{F_{2,1}\,;\dots;F_{2,s_1}\}$ le recouvrement de $F_{1,1}$ par des ensembles ensembles de la forme $F_{2,i}$. Pour définir U_2, deux cas sont à distinguer :

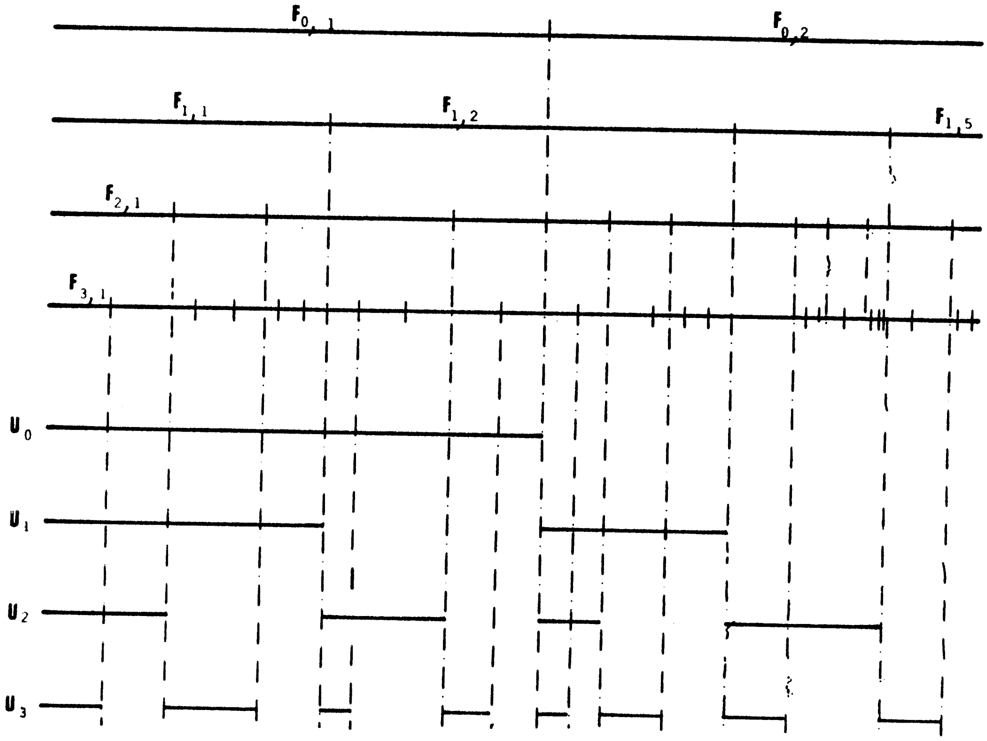


Figure 6
Exemple de construction d'une suite (U_n)

- Si $X = F_{0,1} \cup F_{0,2}$, on pose : $U_2 = F_{2,1} \cup F_{1,2} \cup F_{1,r_1+1}$.
- Si $X = F_{0,1} \cup F_{0,2} \cup F_{0,3} \cup \dots$, on pose : $U_2 = F_{2,1} \cup F_{1,2} \cup F_{1,r+1} \cup F_{0,3}$.

Plus généralement, voici la règle utilisée pour passer de U_n à U_{n+1} . On décompose U_n en ensembles de différents niveaux : soit J l'ensemble des indices j tels que U_n comporte un $F_{j,k}$:

$$U_n = \bigcup_{j \in J} F_{j,k_j(1)} \cup \dots \cup F_{j,k_j(s_j)}$$

Notons l'inclusion $J \subset \{0,\dots,n\}$. En outre, pour tous ℓ , $m \in \{k_j(1),\dots,k_j(s_j)\}$, les $F_{j-1,q}$ et $F_{j-1,r}$ tels que $F_{j,\ell} \subset F_{j-1,q}$ et $F_{j,m} \subset F_{j-1,r}$ sont distincts.

Cela étant, soit $F_{j,\ell} \subset U_n$. Il existe un unique m tel que $F_{j,\ell} \subset F_{j-1,m}$. Si $F_{j,\ell+2} \subset F_{j-1,m}$, on décide que $F_{j,\ell+1}$ est inclus dans U_{n+1}.
De plus, si $F_{j,\ell} = F_{j+1,\,r_{\ell-1}+1} \cup \dots \cup F_{j+1,r_\ell}$, on décide que $F_{j+1,\,r_{\ell-1}+1}$ est inclus dans U_{n+1}. L'ensemble U_{n+1} est obtenu par l'application de ces deux règles à tous les éléments constitutifs de U_n.

■ *Montrons que l'application* f *est un homéomorphisme.*

● *Surjectivité de* f : La décomposition $F_{j,\ell} = F_{j+1,r_{\ell-1}+1} \cup \dots \cup F_{j+1,r_\ell}$ comporte au moins deux éléments. Donc, si $F_{j,\ell} \in U_n$, il existe deux ensembles non vides, ouverts et fermés, inclus dans $F_{j,\ell}$, disons G et H, tels que $f_{n+1}(G) = 0$ et $f_{n+1}(H) = 1$. Par ailleurs, si $U_n \supset F_{j,\ell} \subset F_{j-1,k}$, on a ou bien $(F_{j,\ell+1} \cup F_{j,\ell+2}) \subset F_{j-1,k}$ ou bien $F_{j,\ell+2} \not\subset F_{j-1,k}$ Dans le premier cas, on a $F_{j,\ell+1} \subset U_{n+1}$ et $F_{j,\ell+2} \not\subset U_{n+1}$, et dans le second,

$$F_{j+1,r_{\ell+1}+1} \subset U_{n+1} \quad \text{et} \quad F_{j+1,r_{\ell+1}+2} \not\subset U_{n+2}.$$

Dans tous les cas, si $H = X \setminus U_n$, il existe dans H des ensembles non vides, ouverts et fermés, disons K et L , tels que $f_{n+1}(K) = 1$ et $f_{n+1}(L) = 0$. Cela montre la surjectivité de $(f_n) : X \to \{0;1\}^{\mathbb{N}}$.

● *Injectivité de f :* Si $(a_0,\dots,a_n)$ est une séquence de zéros et de uns, il existe un unique $F_{j,\ell} \in U_{n+1}$ tel que : $F_{j,\ell} = \{x \in X \mid \forall i,\ 0 \le i \le n,\ f_i(x) = a_i, \text{ et } f_{n+1}(x) = 1\}$
De plus, si $t_m = \sum_{k=0}^{m} p_k$, pour tout $n \ge t_m$, U_n et $X \setminus U_n$ sont constitués de $F_{j,r}$ où j est supérieur à m. Leur diamètre est inférieur à 2^{-m}. On vérifie que cela assure l'injectivité de (f_n).

■ *Fin de la démonstration :* L'application $f = (f_n) : X \to \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est une bijection. Comme chacune des f_n est continue, f est continue. La compacité assure que f est un homéomorphisme.■

On verra au chapitre 5 une application de cette propriété des compacts métrisables totalement discontinus de posséder des partitions par des ouverts-fermés de petit diamètre : les ensembles de type Cantor enlaçables dans $\mathbb{R}^3$.

3.4. VARIANTES DE L'ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR.

3.4.1. Ensembles de Cantor de mesure non nulle.

Soit $s = (s_0,s_1,\dots,s_n,\dots)$ une suite de réels de $]0;1[$. Si, dans la construction de l'ensemble triadique de Cantor, au lieu d'enlever aux intervalles de (C_n) leur tiers médian, on leur enlève un intervalle médian de longueur s_n fois leur longueur, on obtient un ensemble de mesure $\prod_n (1-s_n)$. Comme K_3, cet ensemble est un compact totalement discontinu, parfait, d'intérieur vide, ayant la puissance du continu. On note K_s cet ensemble. En particulier, si $\sum_{i=0}^{+\infty} s_i < +\infty$, $\lambda(K_s) \neq 0$.

3.4.2. Ensemble de Cantor constitué de nombres transcendants.

Dans $[0;1]$, l'ensemble des nombres de la forme $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 10^{-n!}$, où $a_n \in \{0;1;2;\dots;9\}$ est homéomorphe à C, et ne contient que des nombres transcendants (ce sont des *nombres de Liouville*, *cf.* chapitre 4)

3.5. PATHOLOGIE, CONTRE-EXEMPLES ET IDEES FAUSSES

Voici quelques résultats, non évidents *a priori*, utilisant les propriétés des ensembles de Cantor.

3.5.1. — La frontière d'une réunion d'intervalles n'est pas forcément égale à la réunion des frontières de ces intervalles : prendre $A = [0;1] \setminus K_3$; on a : $\partial A = K_3$, tandis que la réunion des frontières est l'ensemble des nombres triadiques de K_3 (c'est-à-dire l'ensemble des extrémités des intervalles contigus).

3.5.2. – La frontière d'un compact non dénombrable de $\mathbb{R}$ peut ne pas être de mesure nulle : considérer ∂K_s, où K_s est de mesure non nulle.

3.5.3. – La frontière d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ peut ne pas être de mesure nulle : en effet, si K_s est de mesure non nulle, $\partial(\mathbb{R}^2 \setminus K_s^2) = K_s^2$ est de mesure de Lebesgue non nulle.

3.5.4. – Les contre-exemples liés à l'ensemble de Cantor et portant sur les fonctions d'une variable réelle seront traités dans la deuxième partie. (volumes 3 et 4).

3.6. REMARQUE SUR LES ENSEMBLES TOTALEMENT DISCONTINUS.

3.6.1. - On a vu qu'un espace topologique est dit totalement discontinu si ses composantes connexes sont des singletons. Nous allons ici donner les liens entre cette notion et deux autres axiomes de séparation avec lesquels on la confond parfois.

Définition 5 – Soit X un espace topologique. On appelle *quasi-composante* d'un point x de X l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés qui le contiennent. Si les quasi-composantes de X sont des singletons, on dit que X est *totalement séparé* (Ne pas confondre avec les espaces complètement séparés, *i.e.* $T_{2\frac{1}{2}}$). Si tout point de X a une base de voisinages à la fois ouverts et fermés, on dit que X est *de dimension zéro* (6).

Rappelons enfin qu'un espace topologique X est dit *de Kolmogorov*, ou T_0, si, pour toute paire de points distincts de X, il existe un ouvert de X contenant l'un des deux points et pas l'autre. L'ensemble de Cantor est de dimension zéro, totalement séparé et totalement discontinu.

▶ Cela étant, on considère $\{a;b;c\} = X$, et $\mathcal{T} = \{\emptyset\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\ ;c\}\ ;\ X\}$. L'espace X muni de la topologie $\mathcal{T}$ est de dimension zéro mais il n'est ni totalement séparé, ni totalement discontinu, ni de Kolmogorov. Ainsi, en général, un espace de dimension zéro n'est pas totalement séparé. Toutefois, un espace de Kolmogorov de dimension zéro est totalement séparé. Il en est en particulier ainsi des espaces métriques qui sont séparés, donc de Kolmogorov. Notons également qu'un espace totalement séparé est séparé (c'est heureux pour la terminologie), et qu'un espace totalement séparé est totalement discontinu. Voyons à présent un exemple d'espace totalement discontinu qui n'est pas totalement séparé.

3.6.2. Le teepee de Cantor.

Soit E l'ensemble des extrémités des intervalles contigus à K_3. Posons $F = K_3 \setminus E$. Pour tout $x \in K_3$, soit $S(x)$ le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(x;0)$ et $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$. On pose

$$X_E = \{(x;y) \in \bigcup_{z \in E} S(z)\ |\ y \in \mathbb{Q}\}\ ,\quad X_F = \{(x;y) \in \bigcup_{z \in F} S(z)\ |\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}\ ,\ X = X_E \cup X_F$$

et $X^* = X \setminus \{(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2})\}$. Alors, X^* est totalement discontinu, car ses composantes connexes sont les singletons de X^* . Il n'est pas totalement séparé, car si $x \in S(y)$ appartient à X^* , la quasi-composante de x est égale à $S(y) \cap X^*$.

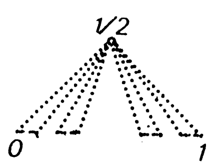


Figure 7
Teepee de Cantor

3.6.3. — Voici un autre exemple d'espace totalement discontinu mais pas totalement séparé. Soit E l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\omega_1 ; \omega_2\}$. On définit une topologie $\mathcal{T}$ sur E en appelant ouverts les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ et les ensembles contenant ω_1 ou ω_2 et dont le complémentaire est fini. Alors, $(E; \mathcal{T})$ est totalement discontinu mais n'est pas totalement séparé. En effet, la quasi-composante de ω_1 est $\{\omega_1 ; \omega_2\}$.

3.6.4. Le treillis de Roy.

Soit $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de parties disjointes denses de $\mathbb{Q}$. On pose $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Q_n \times \{n\}$

On définit une topologie $\mathcal{T}$ sur X à partir des voisinages des points de X :

— si $x = (u, 2n) \in X$, une base de voisinages de x est constituée des ensembles

$V_\varepsilon(u ; 2n) = (\,]u-\varepsilon ; u+\varepsilon[\, \cap Q_n) \times \{2n\}$;

— si $x = (u, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, est un élément de X, une base de voisinages de x est constituée des ensembles $V_\varepsilon(u;2n+1) = (\,]u-\varepsilon ; u+\varepsilon[\, \times \{2n ; 2n+1 ; 2n+2\}) \cap X$.

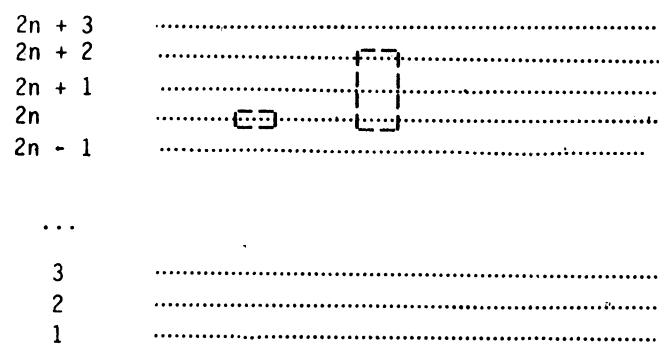


Figure 8

Treillis de Roy

Notons qu'avec cette topologie, un fermé F de X contenant un intervalle de la forme $([a;b] \times \{2n\}) \cap X$ contient également les deux intervalles sur les lignes voisines, à savoir $([a;b] \times \{2n-1; 2n+1\}) \cap X$. De même un ouvert F de X contenant un intervalle de la forme $([a;b] \times \{2n+1\}) \cap X$ contient également $([a;b] \times \{2n; 2n+2\}) \cap X$.
Cela étant, soit $(u;n) \in X$. Les ensembles $(\,]u-\varepsilon ; u+\varepsilon[\, \times \mathbb{N}^*) \cap X$ sont des ouverts-fermés contenant $(u;n)$. Leur intersection est $(\{(u;n)\} \times \mathbb{N}^*) \cap X = \{(u;n)\}$ car les Q_n sont des parties disjointes de Q. Ainsi, X est totalement séparé, donc totalement discontinu. Ce n'est pas un espace de dimension zéro, car tout voisinage ouvert et fermé de x contient un ensemble de la forme $(\{(u;n)\} \times \mathbb{N}^*) \cap X$ qui n'est pas contenu dans $V_\varepsilon(u;n)$.

3.6.5. — En résumé, les diverses relations établies ci-dessus peuvent être regroupées dans le diagramme suivant :

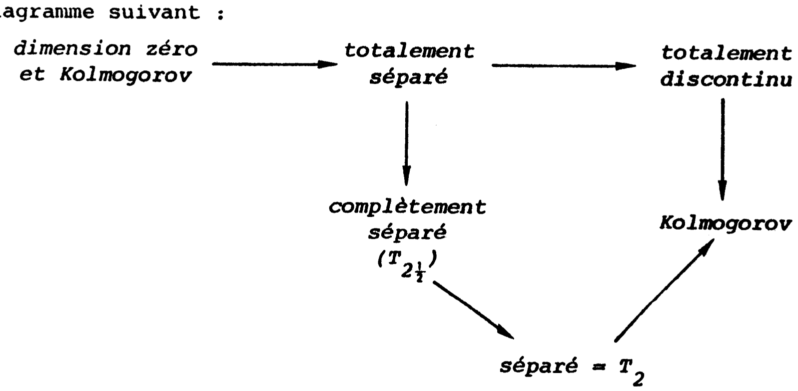


Figure 9

4. L'ENSEMBLE DES RATIONNELS, L'ENSEMBLE DES IRRATIONNELS

Notons tout d'abord quelques propriétés élémentaires de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

▶ $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

▶ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a la puissance du continu.

▶ $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont séparables.

▶ $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont de dimension zéro, donc totalement séparés (car séparés) et totalement discontinus.

▶ $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont *nulle-part-localement-compacts*. Autrement dit, toute partie compacte de l'un de ces ensembles est d'intérieur vide.

▶ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est un G_δ de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$). En effet : $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcap_{x\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R}\setminus\{x\})$.

Par suite, il existe une distance d sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ pour laquelle cet ensemble est complet ; on dit qu'il est *topologiquement complet* (*cf.* chapitre 1 §5).

▶ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ sont des espaces métriques sans points isolés.

Les propriétés élémentaires ci-dessus suffisent à caractériser $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Voyons comment.

Lemme 7 (Eberhart, 1977).— *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques séparables, topologiquement complets, nulle-part-localement-compacts, et de dimension zéro. Soient* D *et* E *des sous-espaces dénombrables denses de, respectivement,* X *et* Y.

Alors, il existe un homéomorphisme h *de* X *sur* Y *tel que* $h(D) = E$.

Notons que cet énoncé affirme plus que l'existence d'un homéomorphisme de X sur Y.

Démonstration.— Comme pour les théorèmes 1 et 6, on va construire une base de voisinages de X et Y à partir de laquelle on construira h.

On va donc définir une suite $(\mathcal{R}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de recouvrements de X ayant, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, les propriétés suivantes :

a) Les éléments de $\mathcal{R}_i$ sont à la fois ouverts et fermés, de diamètre $<1/i$, et disjoints deux à deux.

b) $\mathcal{R}_i$ est infini dénombrable ([7]).

c) Si $A\in\mathcal{R}_{i+1}$, il existe un unique $B\in\mathcal{R}_i$ tel que $A\subset B$.

d) Tout $B\in\mathcal{R}_i$ contient une infinité d'éléments de $\mathcal{R}_{i+1}$.

e) Si (A_i) est une suite décroissante de parties de X telles que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $A_i\in\mathcal{R}_i$, alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ est un singleton.

e') Inversement, pour tout élément x de X, il existe une unique suite décroissante $(A_i\in\mathcal{R}_i)$ d'intersection $\{x\}$.

On peut résumer les propriétés a) à c) en disant que $(\mathcal{R}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement de plus en plus fine de partitions infinies dénombrables de X par des ensembles ouverts et fermés, de diamètre inférieur à $1/i$ pour la i-ième partition. En outre, si l'on a muni X d'une distance pour laquelle il est complet, la propriété e) découle de a) et du théorème d'intersection de Cantor. Cela étant, on procède ainsi pour la construction.

Supposons X muni d'une distance pour laquelle il est complet. Puisque X est complet sans être compact, il n'est pas précompact, et il existe $\varepsilon<1$ tel que X n'admette pas de recouvrement fini par des ouverts de diamètre $<\varepsilon$. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts-fermés de diamètre $<\varepsilon$ (c'est possible car X est de dimension zéro). Puisque X est un espace métrique séparable, il est de Lindelöf et il existe un sous-recouvrement dénombrable extrait de $(O_i)_{i\in I}$, disons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{R}_1$ le recouvrement infini dénombrable formé par les ensembles de la forme $U_{n+1}\setminus(U_0\cup U_1\cup\ldots\cup U_n)$ qui sont non vides. Posons $\mathcal{R}_1 = \{V_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, où les V_n sont les ensembles précédents. Chacun des éléments de $\mathcal{R}_1$ a les mêmes propriétés que X, à savoir : c'est un espace métrique non vide, séparable, complet, sans point isolé, nulle-part-localement-compact, et de dimension zéro. On peut donc appliquer à chaque V_n la construction précédente, qui fournit un recouvrement $\mathcal{R}'(n)$ ayant les mêmes propriétés que $\mathcal{R}_1$, mais où les éléments du recouvrement ont un diamètre $< 1/2$. On pose : $\mathcal{R}_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}'(n)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite $(\mathcal{R}_n)$ de recouvrements ayant les propriétés a) à e). Posons $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}_n$.

Cela étant, soit $\{x_0, x_1, \ldots\}$ une numérotation des éléments de D. Pour tout $V\in\mathcal{R}$, soit $d(V)$ l'indice minimal des éléments de $D\cap V$: $d(V) = \min\{i \mid x_i\in V\}$, l'application d possède la propriété suivante :

f) Si $n\le m$, et si $\mathcal{R}_n \ni V\supset W\in\mathcal{R}_m$, on a $d(V)\le d(W)$, avec égalité si et seulement si $x_{d(V)}\in W$.

Effectuons la même construction pour Y : on définit une suite $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de recouvrements de Y vérifiant les conditions a) à e) (aux notations près). On pose $\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{S}_n$. On numérote $\{y_1, y_2, \ldots\}$ les éléments de E, et l'on appelle e la fonction correspondant à d.

Afin de définir h, construisons par récurrence une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bijections $\mathcal{R}_n\to\mathcal{S}_n$. La construction obéit aux propriétés suivantes :

g) H_1 est une fonction $\mathcal{R}_1\to\mathcal{S}_1$.

Supposons H_n construite. Alors, H_{n+1} est une bijection $\mathcal{R}_{n+1}\to\mathcal{S}_{n+1}$ compatible avec H_n au sens suivant :

h) Si $\mathcal{R}_{n+1}\ni W\subset V\in\mathcal{R}_n$, alors $H_{n+1}(W)\subset H_n(V)$.

i) Si $\mathcal{R}_{n+1}\ni W\ni x_{d(V)}\in V\subset\mathcal{R}_n$, alors $y_{e(H_n(V))}\in H_{n+1}(W)\in\mathcal{S}_{n+1}$.

Les H_n fournissent une bijection $H : \mathcal{R}\to\mathcal{S}$ définie par :

$$\forall V\in\mathcal{R},\quad V\in\mathcal{R}_n \Longrightarrow H(V) = H_n(V).$$

La condition h) montre que H est strictement croissante pour l'inclusion :

j) $\forall V, V'\in\mathcal{R},\quad V\subset V' \Longleftrightarrow H(V)\subset H(V')$

En outre, il découle des propriétés f) et i) que :

k) $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall V\in\mathcal{R}_n,\ \forall m\ge n,\ \forall V'\in\mathcal{R}_m,\ x_{d(V)}\in V' \Longrightarrow y_{e(H(V))}\in H(V')$

Enfin, on définit l'homomorphisme $h : X\to Y$ par :

$$\forall x\in X,\quad h(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{H(V) \mid x\in V\in\mathcal{R}_n\}$$

- Le fait que h soit une bijection résulte de e), e') et de h).
- La continuité de h et de h^{-1} découle des propriétés a), c), d), e) et e').
- Montrons que $h(D) = E$. Soit $x_i\in D$. Puisque $\mathcal{R}$ est une base de la topologie (séparée) de X, il existe $V\in\mathcal{R}$ tel que $x_i\in V$ et $V\cap\{x_0, x_1, \ldots x_{i-1}\} = \emptyset$. Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $V\in\mathcal{R}_n$. Alors, si $m\ge n$, si $W\in\mathcal{R}_m$, et si $x_i\in W$, on a $d(W) = i$, et par suite, d'après k), $y_{e(H(V))}\in H(W)$. Mais, d'après i) et f), sous ces hypothèses, on a $y_{e(H(W))} = y_{e(H(V))}$, d'où l'on tire $h(x_i) = y_{e(H(V))}$, ce qui montre l'inclusion $h(D)\subset E$.

Inversement, soit $y_j\in E$, et soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $j = e(V)$, avec $V\in\mathcal{S}_n$. Soit $U = H^{-1}(V)$. D'après k), si $m\ge n$, si $W\in\mathcal{R}_m$, et si $x_{d(U)}\in W$, on a $y_j\in H(W)$. Par suite,

$$y_j\in \bigcap_{m\ge n} \{H(W) \mid W\in\mathcal{R}_m,\ x_{d(U)}\in W\}.$$

Comme cette intersection est un singleton (propriété e)) on a $y_j = h(x_{d(U)})$, ce qui montre l'inclusion $h(D) \supset E$, et achève la démonstration. ■

Théorème 8 (*Hausdorff, 1937*)

Caractérisation topologique des irrationnels

Tout espace métrique séparable, topologiquement complet, de dimension zéro, et nulle-part-localement-compact est homéomorphe à l'ensemble des nombres irrationnels.

C'est une conséquence immédiate du lemme 7.

En particulier, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $N = \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$ sont homéomorphes à l'ensemble des nombres irrationnels. Un homéomorphisme entre $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et N est fourni par les fractions continues.

Proposition 9 (*Urysohn, 1925*) — *Tout espace métrique séparable de dimension zéro est homéomorphe à une partie de l'ensemble de Cantor.*

Démonstration. Soit $(X;d)$ un tel espace. La même démonstration que pour le lemme 7 montre que X admet une base dénombrable (finie ou infinie) $\mathcal{B} = \{B_n, n \in A \subset \mathbb{N}\}$ par des ensembles à la fois ouverts et fermés. On va montrer que X est homéomorphe à $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$.

Prenons $B_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N}\backslash A$, et soit $\chi : X \to \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ l'application produit des fonctions caractéristiques des B_n. L'application χ est continue car la fonction caractéristique d'un ensemble à la fois ouvert et fermé est continue. Montrons que $\chi^{-1} : \chi(X) \to X$ est, elle aussi, continue. Soit $y = \chi(x)$, $x \in X$, un point de $\chi(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in A$ tel que $x \in B_n \subset B(x;\varepsilon)$, où $B(x;\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon ε. Soit U le voisinage de y formé de points de $\chi(X)$ dont la n-ième coordonnée dans $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est 1. Alors, si $z \in U$, on a $\chi^{-1}(z) \in B_n$, d'où $d(\chi^{-1}(z);\chi^{-1}(y)) = d(\chi^{-1}(z);x) < \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. ■

Notons qu'il découle du théorème 8 et de la proposition 9 que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est homéomorphe à une partie de K_3. Il découle également de la proposition 9 que tout compact métrisable totalement discontinu est homéomorphe à un fermé de K_3. (Comparer avec le théorème 14 du chapitre 3).

Théorème 10 (*Sierpinski, 1920*)

Caractérisation topologique des rationnels

Tout espace métrique infini dénombrable sans point isolé est homéomorphe à l'ensemble $\mathbb{Q}$.

La démonstration utilise T5 (*cf.* §3), le théorème 6, le lemme 7, la proposition 9, ainsi que le théorème 56 (d'Aleksandrov) du chapitre 1.

Démonstration. Soit X un tel espace. Il est clair que c'est un espace de dimension zéro. D'après la proposition 9, et T5, X est homéomorphe à une partie Y de l'ensemble triadique de Cantor, K_3. L'adhérence $\overline{Y}$ de Y dans K_3 est un compact totalement discontinu. Comme Y n'a pas de point isolé, $\overline{Y}$ n'en a pas non plus. D'après T5 et le théorème 6, $\overline{Y}$ est homéomorphe à K_3. On peut donc supposer que Y est une partie partout dense de K_3. Soit E l'ensemble (dénombrable) des extrémités des intervalles $I_{p,q}$ utilisés dans la construction de K_3 (*cf.* § 3.1).

Soit F une partie dénombrable partout dense de K_3, disjointe de $Y \cup E$. Alors $K_3\setminus F$ est un espace métrique séparable de dimension zéro. En tant que G_δ de K_3, c'est un espace métrique topologiquement complet. Enfin, c'est une partie partout dense de K_3 dont le complémentaire est aussi partout dense (on dit que c'est un *ensemble frontière*) ; c'est donc un espace nulle-part-localement-compact auquel on peut appliquer le lemme 7 : $K_3\setminus F$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, et les sous-ensembles dénombrables denses Y et E de $K_3\setminus F$ sont homéomorphes. En prenant $X = \mathbb{Q}$, on voit que $\mathbb{Q}$ est homéomorphe à E, ce qui montre le théorème. ■

Remarque et contre-exemple 11 — L'hypothèse de métrisabilité du théorème 10 ne peut être omise. en effet, il existe des espaces topologiques qui sont à la fois séparés, dénombrables, connexes et localement connexes. En voici un exemple, dû à Rittler (1976).

Soit θ un nombre irrationnel. On considère $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*$. Pour tout $(a;b) \in X$, et tout $\varepsilon > 0$, on désigne par $T(a;b;\varepsilon)$ et par $R(a;b;\varepsilon)$ l'intérieur des triangles de $\mathbb{R}^2$ de sommets respectifs A, B, C et A', B', C' de coordonnées : $A(a-b/\theta;0)$, $B(a-b/\theta+\varepsilon;0)$, $C(a-b/\theta+\varepsilon/2;\theta\varepsilon/2)$, $A'(a+b/\theta-\varepsilon;0)$, $B'(a+b/\theta;0)$, $C'(a+b/\theta-\varepsilon/2;\theta\varepsilon/2)$. On pose :

$$V(a;b;\varepsilon) = X \cap (\{(a;b)\} \cup T(a;b;\varepsilon) \cup R(a;b;\varepsilon))$$

On munit X de la topologie où les $V(a;b;\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de $(a;b)$. Comme θ est un nombre irrationnel, l'intersection de X et des droites passant par $(a;b)$ et de pente θ et $-\theta$ est réduite à $(a;b)$. Il s'ensuit que la topologie de X est séparée. En outre, il est clair que X est dénombrable.

La fermeture d'un voisinage de $(a;b)$ de la forme $V(a;b;\varepsilon)$ est l'intersection de X avec la réunion des quatre bandes dont les frontières sont les 8 droites passant par A, A', B, B' de pentes θ et $-\theta$, et contenant l'un des segments $[A;B]$ ou $[A';B']$ (Voir figure).

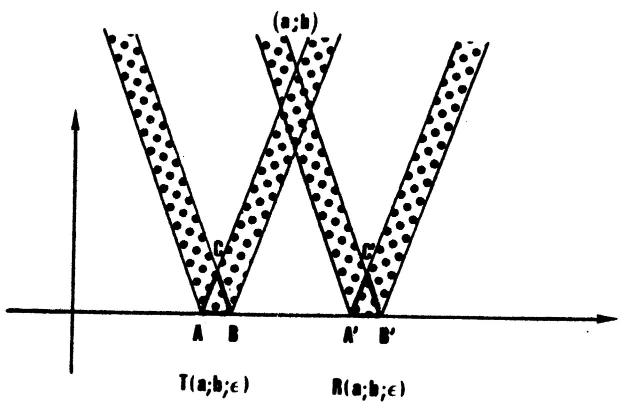


Figure 10

Ainsi, les fermetures de deux voisinages de la base ont toujours une intersection non vide : l'espace X n'admet pas de déconnexion ; il est connexe. Pour la même raison, les $V(a;b;\varepsilon)$ sont connexes, et X est localement connexe. Notons que X n'est pas régulier ; il n'est donc pas métrisable. Il n'est pas non plus $T_{2\frac{1}{2}}$.

5. L'ENSEMBLE DES ORDINAUX DÉNOMBRABLES

5.1. RAPPELS SUR LES ENSEMBLES BIEN ORDONNES

Définition 6.— Soit E un ensemble. On dit qu'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E est un *bon ordre*, ou que E est *bien ordonné* par $\preccurlyeq$, si toute partie non vide de E possède un plus petit élément. On appelle alors *segment initial* toute partie S de E telle que tout élément de E inférieur à un élément de S appartienne à S :

$$(\forall x \in E)(\exists y \in S,\ x \preccurlyeq y) \Rightarrow x \in S.$$

▶ Soient x et $y \in E$. La partie $\{x;y\}$ a un plus petit élément : une relation de bon ordre est donc une relation d'ordre total.

▶ Soit S un segment initial de E. Alors, ou bien $S = E$, ou bien il existe $x \in E$ tel que : $S = \{y \in E \mid y \preccurlyeq x,\ y \neq x\}$. En effet, si $S \neq E$, $E \setminus S$ est non vide et a un plus petit élément, x, qui convient. Si S est un segment initial de E non égal à E, on dit que S est un *segment initial strict* de E.

Proposition 12.— *Soient* $(E,\preccurlyeq)$ *et* $(F,\leq)$ *deux ensembles bien ordonnés, et* ϕ *une bijection monotone de* E *sur un segment initial de* F.

Alors, toute application injective croissante $\Psi : E \to F$ *vérifie :* $\forall x \in E,\ \phi(x) \leq \Psi(x)$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in E$ tel que : $\Psi(x) \leq \phi(x)$ et $\Psi(x) \neq \phi(x)$. [8]. Soit x_o le plus petit x ayant cette propriété. Alors $\Psi(x_o)$ n'appartient pas à l'image de ϕ, car si $y \preccurlyeq x_o$, on a $\phi(y) \leq \Psi(y) \leq \Psi(x_o)$. Ceci contredit le fait que $\phi(E)$ soit un segment initial de F. ◼

Corollaire 13.— *Si* S *et* T *sont deux segments initiaux respectifs des deux ensembles bien ordonnés* $(E;\preccurlyeq)$ *et* $(F;\leq)$, *il y a au plus une bijection croissante* $S \to T$.

Théorème 14.— *Comparaison des ensembles bien ordonnés.*

Soient $(E;\preccurlyeq)$ *et* $(F;\leq)$ *deux ensembles bien ordonnés. Alors l'une des trois assertions exclusives suivantes est vraie :*

1) *Il existe une unique bijection croissante* $E \to F$.
2) *Il existe une unique bijection croissante de* E *sur un segment initial strict de* F.
3) *Il existe une unique bijection croissante de* F *sur un segment initial strict de* E.

La démonstration utilise le corollaire 13.

Démonstration.

◼ Montrons pour commencer le caractère exclusif de ces trois assertions :

● On ne peut avoir simultanément 1 et 2, ou 1 et 3. En effet, cela contredirait le corollaire 13.

● On ne peut avoir simultanément 2 et 3, car si ϕ (resp. Ψ) était une bijection croissante de E (resp. F) sur un segment initial strict de F (resp. E), $\Psi \circ \phi$ serait une bijection croissante de E sur un segment initial strict de E, ce qui contredirait encore le corollaire 13, en raison de la bijection croissante $Id_E : E \to E$.

■ Montrons à présent que l'une des trois assertions du théorème est vraie.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des segments initiaux S de E qui admettent une bijection croissante de S sur un segment initial T de F.

● Soit $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ une union quelconque d'éléments de $\mathcal{S}$. Soit, pour chaque $\alpha \in A$, ϕ_α la bijection croissante de S_α sur un segment initial de F. Il résulte du corollaire 13 que, pour tous $\alpha,\beta \in A$, on a : $\phi_\alpha|_{S_\alpha \cap S_\beta} = \phi_\beta|_{S_\alpha \cap S_\beta}$, de sorte qu'il existe une unique bijection croissante ϕ de $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ sur un segment initial $\bigcup_{\alpha\in A} \phi_\alpha(S_\alpha)$ de F. Autrement dit, $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha \in \mathcal{S}$.

● Il y a deux possibilités :
- ou bien $E \in \mathcal{S}$, et alors l'une des assertions 1 ou 2 est vraie ;
- ou bien $E \notin \mathcal{S}$. Considérons alors $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$. D'après ce qui précède, c'est un élément de $\mathcal{S}$, différent de E. C'est donc un segment initial strict, du type $S(x) = \{y \in E | y \preccurlyeq x,\ y \neq x\}$, pour un $x \in E$. Soit ϕ la bijection croissante de $S(x)$ sur un segment initial de F. On doit avoir $\phi(S(x)) = F$ (*i.e.* l'assertion 3). Autrement, $\phi(S(x))$ serait un segment initial strict de F, de la forme $T(z) = \{t \in F | t \leq z\ ;\ t \neq z\}$. On pourrait alors prolonger ϕ à $S(x) \cup \{x\}$ par : $\phi(x) = z$, ce qui contredirait la définition de $S(x)$. ▣

Corollaire 15.— *Pour toute partie* F *d'un ensemble bien ordonné* $(E,\preccurlyeq)$ *il existe une unique bijection croissante de* F *sur un segment initial de* E.

Corollaire 16.— *Si* S *est un segment initial strict d'un ensemble bien ordonné* $(E,\preccurlyeq)$, *il n'existe pas de bijection croissante de* S *sur* E.

5.2. LES ORDINAUX

Les ordinaux constituent une classe particulière d'ensembles bien ordonnés telle que, si E est un ensemble bien ordonné, il existe un unique ordinal (membre de cette classe) auquel E est isomorphe (*i.e.* il existe une bijection croissante de E sur cet ordinal).

Définition 7.— On dit qu'un ensemble α est un *ordinal* si la relation d'inclusion est une relation de bon ordre dans α telle que, pour tout élément x de α, le segment initial $S(x)$ défini par x soit égal à x.

Autrement dit, un ordinal α est un ensemble bien ordonné par la relation $\in$ et tel que, si $x \in \alpha$, alors $x \subset \alpha$. Les premiers ordinaux s'écrivent :

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset;\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset;\{\emptyset\};\{\emptyset;\{\emptyset\}\}\},\quad \{\emptyset;\{\emptyset\};\{\emptyset;\{\emptyset\}\};\{\emptyset;\{\emptyset\};\{\emptyset;\{\emptyset\}\}\}\}$$

Voici quelques propriétés élémentaires des ordinaux :

(O1) *Si* α *est un ordinal, les segments initiaux stricts de* α *ne sont autres que les éléments de* α.

En effet, par définition, les éléments de α sont des segments initiaux. Réciproquement, si S est un segment initial strict de α, il existe un unique $x \in \alpha$ tel que $S = S(x)$. Puisque α est un ordinal, $S(x) = x$, et par suite $S = x$.

(O2) *Les segments initiaux d'un ordinal* α *sont encore des ordinaux.*

Autrement dit, tout élément d'un ordinal est un ordinal. De plus, si α est un ordinal non vide, on a $\emptyset \subset \alpha$, et $\emptyset \in \alpha$ est le plus petit élément de α.

Notons $\mathfrak{On}$ la classe des ordinaux. Pour tout couple $(\alpha;\beta)$ d'ordinaux, on pose $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subset \beta$. Alors,

(03) *$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathfrak{On}$.*

Autrement dit, si α et β sont deux ordinaux, on a $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$. En effet, considérons $\gamma = \alpha \cap \beta$. Si $\delta \in \gamma$, on a $\delta \in \alpha$ et $\delta \in \beta$, et si $\varepsilon \in \delta$, on a aussi $\varepsilon \in \alpha$ et $\varepsilon \in \beta$. Ainsi, γ est un segment initial de α, et un segment initial de β. D'après 01, on a $\gamma = \alpha$ ou $\gamma \in \alpha$, et de même pour β. Si $\gamma = \alpha = \beta$, c'est terminé. Si $\gamma = \alpha$ et $\gamma \in \beta$, on a $\alpha \in \beta$, d'où $\alpha \subset \beta$. De même, si $\gamma = \beta$ et $\gamma \in \alpha$, alors $\beta \subset \alpha$. Enfin, le cas où $\gamma \in \alpha$ et $\gamma \in \beta$ est à exclure, car il implique $\gamma \in \gamma$, ce qui est contradictoire.

(04) *$\leq$ est une relation de bon ordre sur $\mathfrak{On}$.*

Autrement dit, si E est un *ensemble* non vide d'ordinaux, E a un plus petit élément pour la relation $\leq$. Montrons-le.

Soit $\alpha \in E$. On pose $A = \alpha \cap E = \{x | x \in \alpha \text{ et } x \in E\}$. Si $A = \emptyset$, α est le plus petit élément de E, d'après (03). Si $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ tel que $a \in x$ ou $a = x$ pour chaque $x \in A$. On a donc $a \in E$ et $a \subset x$ pour chaque $x \in A \cap E$. Comme $a \subset \alpha$ et que $\alpha \subset y$ pour chaque $y \in E \setminus (\alpha \cap E)$, on a également $a \subset y$ pour chaque $y \in E \setminus (\alpha \cap E)$, de sorte que a est le plus petit élément de E.

Joint au théorème 14, la propriété (04) permet d'énoncer :

Proposition 17.— *Soient α, β deux ordinaux. Alors $\alpha = \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha \in \beta$, et ces trois cas s'excluent l'un l'autre.*

(05) *La classe $\mathfrak{On}$ des ordinaux ne constitue pas un ensemble.*

En effet, supposons par l'absurde que $\mathfrak{On}$ soit un ensemble, A. Alors, A serait un ensemble bien ordonné par la relation $\in$, et tout élément de A serait un ordinal. L'ensemble A serait donc lui-même un ordinal et vérifierait $A \in A$, ce qui est impossible d'après la proposition 17. ([9]).

(06) *Si α est un ordinal, le plus petit ordinal strictement supérieur à α est $\alpha \cup \{\alpha\}$.*

En effet, il est clair que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal strictement supérieur à α. De plus, si β est un ordinal strictement supérieur à α, on a $\alpha \subset \beta$, et $\alpha \in \beta$, donc $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$.

Définition 8.— On dit que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est le *successeur* de α, et l'on pose : $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha+1$.

(07) *Si E est un ensemble d'ordinaux, il existe un ordinal plus grand que tous les éléments de E.*

Soit α un tel ordinal. Alors, puisque α est bien ordonné, l'ensemble des $\beta \subset \alpha$ tels que β soit plus grand que tous les éléments de E a un plus petit élément, γ, qui est la borne supérieure de E. En fait, $\gamma = \bigcup_{\delta \in E} \delta$. Il est facile de voir que γ est bien un ordinal. Comme pour chaque $\delta \in E$, on a $\delta \in \gamma$, la relation $\delta \leq \gamma$ est vraie. Enfin, si ε est un ordinal $\geq \delta$, pour tout $\delta \in E$, on a $\delta \subset \varepsilon$ pour tout $\delta \in E$, donc $\bigcup_{\delta \in E} \delta \subset \varepsilon$.

(08) *Toute suite décroissante d'ordinaux est asymptotiquement constante.*

Autrement dit, si $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$ est une suite décroissante d'ordinaux, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait : $\alpha_n = \alpha_N$. En effet, soit α un ordinal $\geq \alpha_0$, $\alpha \neq \alpha_0$. Comme α est bien ordonné, l'ensemble $\{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\}$ a un plus petit élément, α_N. Alors, pour tout $n \geq N$, on a : $\alpha_n = \alpha_N$.

Théorème 18.— *Soit* E *un ensemble bien ordonné. Alors il existe un unique ordinal* α *isomorphe à* E.

La démonstration utilise les énoncés 13, 14, 17, ainsi que les propriétés 04 et 07.

Démonstration.

■ *Unicité* : Soient α et β deux ordinaux isomorphes à E, et $f : E \to \alpha$, $g : E \to \beta$ les isomorphismes (uniques d'après le théorème 14) correspondants. Alors $g \circ f^{-1}$ est un isomorphisme $\alpha \to \beta$, et, d'après la proposition 17, $\alpha = \beta$.

■ *Existence* : Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sections initiales de E isomorphes à des ordinaux. D'après la structure des segments initiaux, les éléments de $\mathcal{S}$ sont de la forme E ou $S(x) = \{y \in E,\ y \leq x$ et $y \neq x\}$. On veut montrer $E \in \mathcal{S}$. Supposons donc, par l'absurde, $E \notin \mathcal{S}$. Soit S l'ensemble des x tels que $S(x) \in \mathcal{S}$.

• Alors, S est un segment initial de E. En effet, soient $x \in S$, $y < x$ et ϕ_x l'isomorphisme $S(x) \to \alpha(x)$ où $\alpha(x)$ est un ordinal. Alors $S(y) \subset S(x)$, et $\phi_x(S(y))$ est un segment initial de $\alpha(x)$, donc un ordinal, $\alpha(y)$, avec $\alpha(y) < \alpha(x)$. En outre, $\alpha(y)$ est isomorphe à $S(y)$, et donc $y \in S$. Il résulte alors du corollaire 13 que : $\phi_y = \phi_x|_{S(y)}$. Considérons l'ensemble des ordinaux de la forme $\alpha(x)$, $x \in S$. D'après 07 et 04, cet ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure, qui est un ordinal, β. L'application $S \to \beta$, $x \mapsto \alpha(x)$ est un isomorphisme de S sur β.

• Puisqu'on a supposé $E \notin \mathcal{S}$, S est un segment initial strict de E. Il existe $x \in E$ tel que $S = S(x)$. Mais alors, puisque S est isomorphe à β, $S(x)$ l'est aussi, et donc $x \in S$, c'est-à-dire $x \in S(x)$, ce qui contredit la définition de $S(x)$.

Cela achève la démonstration. ■

Puisque tout ordinal contient $\emptyset$, $\emptyset$ est le plus petit ordinal. On le note 0. L'ordinal suivant est $\{\emptyset\}$, noté 1. Ensuite viennent $\{\emptyset;\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset;\{\emptyset\};\{\emptyset;\{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset;\{\emptyset\};\{\emptyset;\{\emptyset\}\};\{\emptyset;\{\emptyset\};\{\emptyset;\{\emptyset\}\}\}\}$ notés respectivement 2, 3 et 4.

L'axiome de l'infini assure de l'existence d'ensembles infinis, donc d'ordinaux infinis. Ainsi, on pose : $\omega = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} \alpha$ le premier ordinal infini ([10]). Cet ordinal a un successeur, $\omega+1$, qui a lui-même un successeur, $\omega+2$. On peut poursuivre, et l'on pose : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega+n = \omega+\omega = \omega.2$ On obtient ainsi la suite des premiers ordinaux :

$0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+n, \dots, \omega.2, \omega.2+1, \dots$ Cela permet de voir qu'il y a deux types d'ordinaux :

- Ceux qui sont de la forme $\alpha+1$, où α est un ordinal ; on dit que ce sont des *ordinaux successeurs*.
- Ceux qui sont de la forme $\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \alpha$, sans être de la forme $\beta = \alpha+1$. De tels ordinaux sont appelés *ordinaux limites*.

Nous utiliserons désormais les notations classiques des intervalles, pour les ordinaux.

5.3. L'ARITHMETIQUE DES ORDINAUX (*G. LELIEVRE*)

On peut définir les opérations arithmétiques sur les ordinaux (addition, multiplication, exponentiation) ou bien de façon implicite, par récurrence transfinie (en appliquant le théorème de définition par récurrence transfinie), ou bien directement, en spécifiant explicitement un ensemble bien ordonné associé à chacune de ces opérations, et l'unique ordinal qui lui est isomorphe (d'après le théorème 18). Selon la nature du problème posé, il est avantageux d'appliquer l'une ou l'autre définition, les définitions récurrentes pour les propriétés générales de l'arithmétique des ordinaux, la construction d'un bon ordre pour les exemples particuliers.

5.3.1. Définition des opérations arithmétiques sur les ordinaux par récurrence transfinie.

Les règles récurrentes qui définissent implicitement les opérations arithmétiques sur les ordinaux comportent trois clauses : l'une pour l'élément initial, 0, une autre pour les ordinaux successeurs, et la troisième pour les ordinaux limites ; cette dernière clause exprime la continuité des opérations arithmétiques en la variable sur laquelle porte la récurrence.

▶ *Addition ordinale*

L'addition ordinale $(\alpha;\beta) \mapsto \alpha+\beta$ est définie par récurrence sur β :

(i) $\alpha+0 = \alpha$

(ii) $\alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1$

(iii) Si η est un ordinal limite, $\alpha+\eta = \bigcup_{\mu<\eta} (\alpha+\mu)$

▶ *Multiplication, ou produit ordinal*

Le produit ordinal $(\alpha;\beta) \mapsto \alpha.\beta$ (noté aussi $\alpha\beta$) est défini par récurrence sur β :

(i) $\alpha.0 = 0$

(ii) $\alpha.(\beta+1) = \alpha.\beta+\alpha$

(iii) Si η est un ordinal limite, $\alpha.\eta = \bigcup_{\mu<\eta} (\alpha.\mu)$

▶ *Exponentiation ordinale*

L'exponentiation ordinale α^β est définie par récurrence sur β :

(i) $\alpha^0 = 1$

(ii) $\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta.\alpha$

(iii) Si η est un ordinal limite, $\alpha^\eta = \bigcup_{\mu<\eta} \alpha^\mu$.

5.3.2. Bons ordres associés aux opérations arithmétiques sur les ordinaux.

▶ *Addition* : si α et β sont des ordinaux, où la relation de bon ordre sur α et β est notée $<$, on définit sur l'ensemble $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ le bon ordre suivant, appelé *ordre lexicographique à droite*, et noté également $<$:

$$((x;y) < (x';y')) \iff (y < y' \text{ ou } (y = y' \text{ et } x < x'))$$

L'ordinal $\alpha+\beta$ est l'unique ordinal isomorphe à ce bon ordre (d'après le théorème 18). L'ordinal $\alpha+\beta$ est donc l'ordinal associé à la réunion disjointe de α et de β, *i.e.* au bon ordre obtenu en disposant l'ordre associé à β après l'ordre associé à α. Le bon ordre de $\alpha+\beta$ peut être représenté ainsi : $\underset{\alpha}{\to}\ \underset{\beta}{\to}$ (tous les éléments de α précèdent chacun des éléments de β), ou ainsi : $\begin{array}{l} \beta \to \\ \alpha \to \end{array}$.

De façon générale, si $(\alpha_i)_{i\in\beta}$ est une suite d'ordinaux indexée par l'ordinal β, la somme $\sum_{i\in\beta}\alpha_i$ est l'unique ordinal isomorphe à la réunion disjointe $\bigcup_{i\in\beta}(\alpha_i \times \{i\})$ munie de l'ordre lexicographique à droite, appelé aussi ordre par dernière différence. Le bon ordre de $\sum_{i\in\beta}\alpha_i$ est obtenu en disposant les uns après les autres les ordres de α_i suivant l'ordre de β. On peut le représenter ainsi :

$$\underset{\alpha_0}{\longrightarrow}\ \ \underset{\alpha_1}{\longrightarrow}\ \ \underset{\alpha_2}{\longrightarrow}\dots\ \ \underset{\alpha_i\,(i\in\beta)}{\longrightarrow}\ \dots$$

ou ainsi :

$$\begin{array}{ll} & \dots \\ \alpha_i & \longrightarrow \\ & \dots \\ \alpha_2 & \longrightarrow \\ \alpha_1 & \longrightarrow \\ \alpha_0 & \longrightarrow \end{array} \qquad i \in \beta$$

▶ *Produit (multiplication)*

Si α et β sont des ordinaux, l'ordinal $\alpha.\beta$ est l'unique ordinal isomorphe à l'ensemble $\bigcup_{i\in\beta}(\alpha \times \{i\})$ muni de l'ordre lexicographique à droite : $((x;y) < (x';y')) \iff (y < y'$ ou $(y = y'$ et $x < x'))$. Le bon ordre de $\alpha.\beta$ est obtenu en disposant β copies de l'ordre associé à α selon l'ordre associé à β. On peut le représenter ainsi :

$$\beta \left\{ \begin{array}{c} \cdots\cdots \\ \longrightarrow \\ \cdots\cdots \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \right. \\ \qquad\qquad \alpha$$

On voit donc que, comme dans l'arithmétique des entiers, le produit ordinal se ramène à l'addition ordinale itérée.

De façon générale, si $(\alpha_i)_{i\in\beta}$ est une suite d'ordinaux indexée par l'ordinal β, on définit le produit $\prod_{i\in\beta}\alpha_i$ comme étant l'ensemble des applications $f : \beta \to \bigcup_{i\in\beta}\alpha_i$ telles que $f(\gamma) = 0$ sauf pour un nombre fini de $\gamma < \beta$ où $f(\gamma) \in \alpha_\gamma$. On le munit du bon ordre suivant (ordre lexicographique à droite)

$$(f < g) \iff (\exists\delta[\forall\gamma(\delta < \gamma < \beta \Rightarrow f(\gamma) = g(\gamma)) \text{ et } f(\delta) < f(\gamma)])$$

Autrement dit, $f < g$ si f a une valeur inférieure à celle de g sur le plus grand argument pour lequel f et g diffèrent. Le produit $\prod_{i\in\beta}\alpha_i$ est l'unique ordinal isomorphe à ce bon ordre (en vertu du théorème 18).

▶ *Exponentiation*

Si α et β sont des ordinaux, on considère l'ensemble $\prod_{i\in\beta}\alpha_i$ où $\alpha_i = \alpha$ pour tout $i\in\beta$, *i.e.* l'ensemble des applications f de β dans α telle que $f(\gamma) = 0$ sauf pour un nombre fini de $\gamma < \beta$. On le munit du bon ordre suivant :

$$(f < g) \iff (\exists\gamma[\forall\delta(\gamma < \delta < \beta \Rightarrow f(\delta) = g(\delta)) \quad \text{et} \quad f(\gamma) < g(\gamma)])$$

Le bon ordre adopté ici est encore l'ordre lexicographique à droite des suites de longueur β d'éléments de α dont les composantes sont nulles sauf pour un nombre fini d'entre elles. On peut encore regarder cet ordre comme celui des polynômes à β indéterminées et à coefficients dans α.

L'exponentiation α^β est l'unique ordinal isomorphe à ce bon ordre (en vertu du théorème 18). On voit ici encore que, comme dans l'arithmétique des entiers, l'exponentiation ordinale se ramène à l'itération du produit ordinal.

5.3.3. Les cardinaux et leur arithmétique

Par abus d'écriture, on note usuellement de la même façon les opérations arithmétiques sur les ordinaux et les cardinaux, bien que les opérations soient totalement différentes, selon qu'on les applique aux ordinaux ou aux cardinaux infinis.

On appelle *ordinal initial* tout ordinal qui n'est pas équipotent à un ordinal plus petit. Lorsqu'on dispose de l'axiome du choix, on définit le *cardinal* d'un ensemble X, que l'on note $\mathrm{card}(X)$ ou $\overline{\overline{X}}$, comme le plus petit ordinal équipotent à X. C'est l'ordinal initial équipotent à X.

Cela étant, mentionnons rapidement les opérations arithmétiques sur les cardinaux, afin de faire ressortir la différence entre l'arithmétique transfinie des ordinaux et celle des cardinaux. Si $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{v}$ sont des cardinaux, la somme $\mathfrak{k}+\mathfrak{v}$ est le cardinal de la réunion disjointe $(\mathfrak{k}\times\{0\})\cup(\mathfrak{k}\times\{1\})$; le produit $\mathfrak{k}.\mathfrak{v}$ est le cardinal de l'ensemble produit $\mathfrak{k}\times\mathfrak{v}$, et l'exponentiation $\mathfrak{k}^{\mathfrak{v}}$ est le cardinal de l'ensemble de toutes les applications de $\mathfrak{v}$ dans $\mathfrak{k}$.

Si $(\mathfrak{k}_i)_{i\in I}$ est une famille de cardinaux, la somme de la famille, notée $\sum_{i\in I}\mathfrak{k}_i$, est le cardinal de l'ensemble $\bigcup_{i\in I}(\mathfrak{k}_i\times\{i\})$, c'est-à-dire le cardinal de la réunion disjointe des $\mathfrak{k}_i$; le produit de la famille, notée $\prod_{i\in I}\mathfrak{k}_i$, est le cardinal du produit cartésien $\bigtimes_{i\in I}\mathfrak{k}_i$ de cette famille.

La propriété caractéristique de la relation fonctionnelle *card* est utilisée fréquemment dans les problèmes sur les cardinaux : $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ si et seulement s'il existe une bijection de X sur Y. Ainsi, tous les ordinaux qui seront étudiés au §5.4 sont dénombrables : ils ont pour cardinalité le premier cardinal infini. Si x est un ensemble infini, on note $\aleph(x) = \{\alpha \mid \alpha \leq x\}$, lu "*aleph de x*", la collection de tous les ordinaux équipotents à une partie de x. On démontre que $\aleph(x)$ est un ordinal initial, donc un cardinal. De plus, on a, pour tout ordinal α, $\alpha\in\aleph_\alpha$, *i.e.* $\alpha < \aleph_\alpha$. Par le théorème de Schröder-Bernstein (deux ensembles x et y sont équipotents ssi $x \leq y$ et $y \leq x$), $\aleph_\alpha$ est le plus petit cardinal strictement supérieur à α. Nous pouvons donc définir la suite transfinie $(\aleph_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{On}}$ des cardinaux transfinis par récurrence :

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = \aleph(\aleph_\alpha) \\ \text{Si } \eta \text{ est un ordinal limite, } \aleph_\eta = \bigcup_{\alpha<\eta}\aleph_\alpha. \end{cases}$$

Cette suite est strictement croissante : $\alpha<\beta \Rightarrow \aleph_\alpha<\aleph_\beta$. Etant donné notre définition des cardinaux, on note indifféremment ω_α ou $\aleph_\alpha$ le (α+1)-ième ordinal initial (= cardinal) transfini, bien qu'il soit commode, pour éviter les confusions, d'utiliser ω_α pour les opérations ordinales, et $\aleph_\alpha$ pour les opérations cardinales. La fonction $\aleph : \alpha \mapsto \aleph_\alpha$ établit un isomorphisme de $\mathfrak{On}$ sur la classe $\mathfrak{Cn}'$ de tous les cardinaux infinis (qui est bien ordonnée), ce qui prouve que la classe $\mathfrak{Cn}$ de tous les cardinaux n'est pas un ensemble.

5.3.4. Comparaison de l'arithmétique des ordinaux et de l'arithmétique des cardinaux.

Les exemples suivants montrent que l'arithmétique transfinie des ordinaux et celle des cardinaux sont complètement différentes : pour tout entier n, on a $\omega+n>\omega$, mais $\aleph_0+n=\aleph_0$, $\omega.n>\omega$, mais $\aleph_0.n=\aleph_0$, $\omega^n>\omega$, mais $\aleph_0^n=\aleph_0$.

Nous pouvons maintenant nous demander si la fonction *card*, qui à un ensemble A associe son cardinal card(A), réalise un homomorphisme de la classe des ordinaux dans celle des cardinaux pour les opérations arithmétiques respectives. On a bien $\mathrm{card}(\alpha+\beta)=\mathrm{card}(\alpha)+\mathrm{card}(\beta)$, et $\mathrm{card}(\alpha.\beta)=\mathrm{card}(\alpha).\mathrm{card}(\beta)$. En revanche, sauf si $\beta=0$, ou si $\alpha\leq 0$ ou si α et β sont finis, on a $\mathrm{card}(\alpha^\beta)\neq(\mathrm{card}(\alpha))^{\mathrm{card}(\beta)}$, et plus précisément, $\mathrm{card}(\alpha^\beta)=\max(\mathrm{card}(\alpha);\mathrm{card}(\beta))$.

Revenons sur la différence entre l'exponentiation ordinale et l'exponentiation cardinale. L'exponentiation k^ν de deux cardinaux k et ν est le cardinal de l'ensemble de *toutes* les applications de ν dans k, *i.e.* de l'ensemble de toutes les suites de longueur ν (autrement dit indexées par ν) d'éléments de k, tandis que l'exponentiation α^β de deux ordinaux α et β est l'ordinal isomorphe au bon ordre (ordre lexicographique à droite) défini sur l'ensemble des applications de β dans α qui n'ont de valeurs non nulles que pour un *nombre fini* d'éléments de β, *i.e.* sur l'ensemble des suites de longueur β d'éléments de α dont les composantes sont nulles sauf un nombre fini d'entre elles. On retrouve en algèbre cette différence entre l'exponentiation ordinale et l'exponentiation cardinale, par exemple dans celle des polynômes algébriques et des séries formelles, ou dans celle du produit faible d'algèbres et du produit d'algèbres. Ainsi, le continu, $2^{\aleph_0}$, est le cardinal (non dénombrable) de l'ensemble de toutes les parties de $\aleph_0$, c'est-à-dire le cardinal de toutes les suites infinies de 0 et de 1, tandis que l'ordinal 2^ω a pour cardinal celui de l'ensemble des parties finies de $2^{\aleph_0}$, *i.e.* celui de l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1, dont un nombre fini de composantes sont 1. Par conséquent $\mathrm{card}(2^\omega)=\aleph_0$.

Mais, se demandera-t-on, peut-être n'avons-nous pas donné la bonne définition de l'exponentiation ordinale et serait-il possible de définir une exponentiation ordinale qui vérifie : $\mathrm{card}(\alpha^\beta)=(\mathrm{card}(\alpha))^{\mathrm{card}(\beta)}$? Si tel était le cas, l'existence d'un bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ serait conséquence de ZF (Zermelo-Frenekel, voir l'appendice), et l'existence d'un bon ordre définissable sur $\mathbb{R}$ serait conséquence de ZF+AC. (On dit qu'un ensemble a est *définissable* s'il existe une formule $\phi(x)$, sans autre variables libres que x, telle que $a=\{x|\phi(x)\}$). Or P.J. Cohen a démontré en 1963 qu'on ne peut pas démontrer dans ZF qu'il existe un bon ordre sur les ensembles de cardinalité $2^{2^{\aleph_0}}$ (comme $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Si l'on postule l'axiome du choix, on peut bien entendu prouver (dans ZF+AC) l'existence d'un bon ordre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Mais S. Feferman a démontré en 1965 qu'on ne peut pas démontrer dans ZFC qu'il existe un bon ordre définissable sur $\mathcal{P}(\omega)$, et *a fortiori* sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

5.4. L'ENSEMBLE Ω DES ORDINAUX DENOMBRABLES

5.4.1. Définition.

Revenons sur la suite des premiers ordinaux. On peut la développer :
$0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,\omega+\omega = \omega.2,\omega.2+1,\ldots,\omega.3,\ldots,\omega.n,\ldots\omega.\omega = \omega^2,\omega^2+1,\ldots,\omega^2+\omega,\ldots,\omega^2+\omega n,\ldots,\omega^3,$
$\ldots,\omega^n,\ldots\omega^\omega,\ldots$

En continuant ainsi, on obtient toujours des ordinaux dénombrables, c'est-à-dire qui peuvent être mis en bijection avec une partie de ω. Pourtant, le théorème de Cantor affirme que le cardinal de $\mathcal{P}(\omega)$ est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$. En outre, d'après le théorème de Zermelo, équivalent à l'axiome du choix, $\mathcal{P}(\omega)$ peut être muni d'un bon ordre, de sorte qu'il existe un ordinal β, isomorphe à $\mathcal{P}(\omega)$ bien ordonné, strictement supérieur à tous les ordinaux dénombrables. Dans β, l'ensemble des ordinaux non dénombrables admet un plus petit élément, Ω, qui est l'ensemble des ordinaux dénombrables. On appelle donc Ω le premier ordinal non dénombrable. C'est un ordinal initial, donc un cardinal : $\Omega = \aleph_1$.

5.4.2. Propriétés algébriques de Ω.

Théorème 19.— *Toute partie dénombrable de* $[0;\Omega[$ *a une borne supérieure dans* $[0;\Omega[$.

Démonstration. Soit A une partie dénombrable de Ω. Soit $B = \bigcup_{\alpha\in A} \alpha$. D'après (06), B est la borne supérieure des éléments de A, et comme union dénombrable d'ensembles dénombrables, c'est un ordinal dénombrable. Cet ensemble ne peut être égal à Ω qui n'est pas dénombrable. C'est donc un élément de $[0;\Omega[$. ▣

5.4.3. Topologie de Ω.

On définit que $[0;\Omega]$ une topologie dont une base est formée des intervalles du type $]\alpha;\beta]$, $]\alpha;\beta] = \{x|\alpha < x \leq \beta\}$, avec $\alpha,\beta \in [0;\Omega]$. Une base de la trace de cette topologie sur $[0;\Omega[$ est formée des intervalles du type $]\alpha;\beta] =]\alpha;\beta+1[$. La topologie obtenue est engendrée par les ensembles de la forme $\{x|x > \alpha\}$ ou $\{x|x < \beta\}$. Un intervalle de la forme $[\alpha;\beta[$ est ouvert si et seulement si $\alpha = 0$ ou si α est un ordinal successeur.

Voici les principales propriétés de cette topologie.

(U1) $[0;\Omega]$ *est séparé.*

En effet, si α est β sont deux ordinaux tels que $\alpha < \beta$, $[0;\alpha+1[$ et $[\alpha+1;\Omega]$ sont des voisinages disjoints de α et β.

(U2) $[0;\Omega]$ *est compact.*

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[0;\Omega]$ par des ouverts. Comme les intervalles de la forme $]\alpha;\beta]$ forment une base de la topologie, définissons une application $\phi :]0;\Omega] \to [0;\Omega]$ en associant à chaque $\alpha \in]0;\Omega]$ un ordinal $\phi(\alpha) < \alpha$ tel que $]\phi(\alpha);\alpha]$ soit un ouvert inclus dans l'un des U_i. Itérons l'application ϕ, et posons $\alpha_o = \Omega$, $\alpha_1 = \phi(\Omega)$, $\alpha_2 = \phi^2(\Omega), \dots$ On obtient une suite décroissante d'ordinaux qui est donc asymptotiquement constante, d'après (07). Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_N = \alpha_{N+1}$. Si $\alpha_N \neq 0$, $\phi(\alpha_N) < \alpha_N$. On a donc $\alpha_N = 0$, et par suite, $\bigcup_{i=1}^{N}]\alpha_i;\alpha_{i-1}] =]0;\Omega]$. Soit, pour chaque i, $1 \leq i \leq N$, j_i un élément de I tel que $]\alpha_i;\alpha_{i-1}] \subset U_{j_i}$, et soit U_{j_o} un élément de $\{U_i \mid i \in I\}$ contenant 0. Alors $\bigcup_{k=0}^{N} U_{j_k} = [0;\Omega]$, ce qui achève de montrer la compacité de $[0;\Omega]$.

(U3) $[0;\Omega[$ *n'est ni compact, ni paracompact.*

Le recouvrement $\bigcup_{\alpha \in]0,\Omega[} [0;\alpha[$ n'a en effet pas de sous-recouvrement fini, ni de recouvrement plus fin localement fini (même démonstration que pour U2). En particulier, $[0;\Omega[$ n'est pas métrisable. En outre, $[0;\Omega]$ ne l'est pas, car sinon $[0;\Omega[$ le serait.

(U4) *Toute fonction continue* $[0;\Omega[\to \mathbb{R}$, *est asymptotiquement constante.*

Il en est donc de même de toute fonction continue $[0;\Omega] \to \mathbb{R}$. Montrons la première assertion. Soit f une fonction continue $[0;\Omega[\to \mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $\alpha_{o,p} = 0$, et supposons que l'on puisse construire par récurrence une suite $(\alpha_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ d'ordinaux telle que : $(\alpha_{n,p}) > \alpha_{n-1,p}$ et $|f(\alpha_{n,p}) - f(\alpha_{n-1,p})| > \frac{1}{p}$. La suite $(\alpha_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ serait convergente vers un ordinal β_p. La continuité de f en β_p empêcherait la fonction d'osciller de plus de $\frac{1}{p}$ au voisinage de β_p. Donc, la construction d'une telle suite est impossible, et il existe γ_p tel que $|f(\alpha) - f(\gamma_p)| < \frac{1}{p}$ pour tout $\alpha > \gamma_p$. Considérons la suite $(\gamma_p)_{p \in \mathbb{N}}$, et soit $\delta = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \gamma_p$ la borne supérieure de cette suite (définition des ordinaux et (06)). Alors, pour tout $\alpha > \delta$, on a $|f(\alpha) - f(\delta)| < \frac{2}{p}$, pour tout p, et par suite $f(\alpha) = f(\delta)$.

(U5) $[0;\Omega]$ *n'est pas à base dénombrable.*

En effet, le point Ω n'a pas de base de voisinages dénombrable.

(U6) *Ni* $[0;\Omega]$ *ni* $[0;\Omega[$ *ne sont séparables.*

En effet, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $[0;\Omega[$, elle est bornée, donc incluse dans $[0;\beta]$, avec $\beta < \Omega$, et l'intervalle $[\beta+1;\Omega[$ ne contient aucun point de la suite qui ne peut donc être dense. Il s'ensuit que ni $[0;\Omega]$, ni $[0;\Omega[$ ne sont à base dénombrable.

(U7) *Dans* $[0;\Omega[$, *tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages.*

EXERCICES DU CHAPITRE 2

1. DIFFERENTES DEFINITIONS DE LA CONNEXITE

Soit X un espace topologique. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

a) X contient une partie propre à la fois ouverte et fermée.

b) $\exists A,B \subset X,\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,\ X = A \cup B,\ \overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

c) Il existe une fonction continue surjective $X \to \{0;1\}$.

2. CONNEXITE DE $\mathbb{R}$, DES INTERVALLES ; DIFFERENTES DEMONSTRATIONS

a) Sachant que $[0;1]$ est compact, montrer que $[0;1]$ est bien enchaîné, et en déduire que $[0;1]$ est connexe.

b) On suppose connues la propriété de la borne supérieure, et la propriété de la borne inférieure. En supposant que $\mathbb{R}$ ne soit pas connexe, considérer une partie propre A de $\mathbb{R}$ à la fois ouverte et fermée, un point $x \in \mathbb{R}\setminus A$, et les ensembles $B = [x;+\infty[\cap A$ (ou $B =]-\infty;x]$), et $C = \inf B$ (ou $C = \sup B$) pour aboutir à une contradiction.

3. POINTS DE COUPURE DES CONTINUS METRISABLES

Soit X un continu métrisable non réduit à un point.

a) On suppose que X n'a pas plus d'un point qui ne soit pas un point de coupure. En s'inspirant de la démonstration du théorème 3, montrer que cela n'est pas possible.

b) En déduire que, dans tout continu métrisable non réduit à un point, il y a au moins deux points qui ne sont pas des points de coupure.

4. CHIFFRES HOMEOMORPHES

On considère les dix chiffres : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 comme des parties du plan.

a) Quels sont les chiffres homéomorphes ?

b) On regroupe ces chiffres en classes disjointes de chiffres homéomorphes. En comptant les points de coupure, expliquer pourquoi les éléments des différentes classes ne sont pas homéomorphes.

*5. COURBES OUVERTES, SIMPLES FERMEES, RAYONS

Soit X un espace métrisable localement compact, connexe et non réduit à un point.

a) On suppose que, pour toute partie connexe Y de X, $X\setminus Y$ est connexe. Montrer qu'il n'existe pas de partie connexe Z de X, non réduite à un point et telle que : $Z \subset \overline{(X\setminus Z)}$. En déduire que X est une courbe simple fermée (on pourra admettre, pour simplifier, que X est connexe par arcs simples. Voir chapitre suivant) (Caractérisation de Kline des courbes simples fermées, 1924).

b) On suppose que X est déconnecté par tout point $x \in X$ avec une déconnexion de la forme $X\setminus\{x\} = X_1 \cup X_2$, où X_1 et X_2 sont connexes. Montrer que X est homéomorphe à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit alors que X est une *courbe ouverte*. (Caractérisation de Moore des courbes ouvertes, 1916).

c) On suppose que X n'est pas compact, et que, pour toute partie connexe $Y \subset X$ non relativement compacte, et distincte de X, $X\setminus Y$ est connexe. Montrer, en utilisant les résultats des questions a) et b), et les théorèmes 1 et 4 que X est nécessairement de l'une des trois formes suivantes :

i) Une *courbe simple ouverte*, c'est-à-dire un espace homéomorphe à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

ii) Un *rayon*, c'est-à-dire un espace homéomorphe à un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.

iii) Un espace homéomorphe à la réunion, dans $\mathbb{R}^2$, du cercle de centre O et de rayon 1, et de l'intervalle $[(1;0);(2;0)[$.

d) On appelle *point de connexité* de X tout point x tel que, si Y est une partie connexe de X contenant x, $X\setminus Y$ soit connexe. On suppose que X contient un point de connexité. Montrer qu'alors, ou bien X est une courbe simple fermée, ou bien X est un rayon, ou bien X est un arc simple, ou bien X est homéomorphe à la réunion, dans $\mathbb{R}^2$, du cercle de centre $(0;0)$ et de rayon 1, et du segment fermé $[(1;0);(2;0)]$.

En déduire de nouvelles caractérisations des arcs simples, des courbes simples fermées, et des rayons. (Caractérisations de Zarankiewicz, 1924).

e) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble X constitué de la réunion de l'axe $x = 0$, du segment d'équation $(x = 1,\ 0 \leq y \leq 1)$, et des graphes des fonctions $]0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}$, et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}$.

Montrer que, pour toute partie connexe bornée $Y \subset X$, l'ensemble $X \setminus Y$ est connexe. (Comparer avec la question c).

6. ESPACES TOTALEMENT DISCONTINUS

Soit X un espace métrique.

a) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) Pour tout $x \in X$, la composante connexe de x est égale à $\{x\}$.

(ii) Pour tout $(x;y) \in X^2 \setminus \Delta$, il existe une déconnexion de X de la forme $X = A \cup B$, avec $x \in A$ et $y \in B$.

b) On suppose à présent $X \subset \mathbb{R}$, et l'on désigne par λ la mesure de Lebesgue. Montrer que, si $\lambda(X) = 0$, alors X est totalement discontinu. La réciproque est-elle vraie ? Une partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide est-elle totalement discontinue ?

7. INTERIEUR DE K_3

Quel est l'intérieur de K_3 considéré comme partie des ensembles suivants ?

a) Ensemble des réels de $[0;1]$ dont le développement triadique comporte zéro ou une fois le chiffre 1.

b) Ensemble des réels de $[0;1]$ dont le développement triadique comporte zéro ou une fois le chiffre 1, et tels que, si leur développement triadique comporte une fois le chiffre 1, ce dernier est le n-ième chiffre du développement, où n est impair.

c) L'ensemble obtenu par le procédé du "tiers médian" en enlevant à chaque étape le tiers médian, sauf son milieu.

8. MESURE DE LEBESGUE D'UNE VARIANTE DE L'ENSEMBLE DE CANTOR

Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor constitué de nombres transcendants du § 3.4.2 ?

*9. TEEPEE DE CANTOR

Montrer que le Teepee de Cantor X défini en 3.6.2 est connexe.

10. ESPACES METRIQUES COMPACTS TOTALEMENT DISCONTINUS

Montrer qu'un espace métrique compact est de dimension zéro si et seulement s'il est totalement discontinu.

11. REUNIONS D'ENSEMBLES DE DIMENSION ZERO

a) Soit X un espace métrique complet. Montrer qu'une réunion dénombrable de fermés de X de dimension zéro est de dimension zéro.

b) Pour tout $x \in K_3$, on pose $K_3(x) = \{y+x ; y \in K_3\}$. A l'aide de ces ensembles, montrer que la réunion des membres d'une famille de fermés de dimension zéro indexée par un ensemble de dimension zéro n'est pas forcément de dimension zéro.

12. REUNION DE FERMES TOTALEMENT DISCONTINUS

Soient X l'ensemble des rationnels dyadiques, $Y = \mathbb{Q} \setminus X$, et Z l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On définit sur l'ensemble E des nombres réels [11] une topologie, plus fine que la topologie usuelle, en appelant ouverts de E les ensembles suivants :

- X, Y.
- Les parties de X (resp. Y) qui sont des ouverts relatifs de X (resp. Y) pour la topologie usuelle.
- Les ensembles de la forme $\{z\} \cup \{x \in X \cup Y \mid |x-z| < \varepsilon\}$ avec $z \in Z$ et $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que X et Y sont des sous-espaces totalement discontinus de E, et que Z est un sous-espace discret.

b) Montrer que $E\setminus X$ et $E\setminus Y$ sont des fermés totalement discontinus de E.

c) Montrer que E est connexe.

d) En déduire que si un espace E est la réunion de deux sous-espaces fermés totalement discontinus, non seulement E n'est pas forcément totalement discontinu, mais il peut être connexe.

13. ESPACES COMPACTS DENOMBRABLES

a) Montrer que tout espace compact dénombrable est métrisable.

b) Un espace métrisable compact et de cardinalité dénombrable a-t-il nécessairement des points isolés ?

14. $\mathbb{Q}\cap[0;1]$ EST HOMEOMORPHE A $\mathbb{Q}\cap]0;1[$

a) Déduire du théorème 10 que $\mathbb{Q}\cap]0;1[$ est homéomorphe à $\mathbb{Q}\cap[0;1]$.

b) Soit α un nombre irrationnel de $]0;1[$. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de rationnels de $]0;1[$ dont $\frac{1-\alpha}{4}$ est la limite. On définit une application f, de $\mathbb{Q}\cap[0;1]$ vers $\mathbb{Q}\cap]0;1[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{4} \\ f(t) = \frac{1}{4} - 2^{k-1}t & \text{si } \alpha.2^{-2k-2} < t < \alpha.2^{-2k-1}, \quad k\in\mathbb{N} \\ f(t) = \frac{1}{4} + 2^{k-1}t & \text{si } \alpha.2^{-2k-1} < t < \alpha.2^{-2k}, \quad k\in\mathbb{N}^* \\ f(t) = \frac{1}{2} - t - r_{k-1} - r_k & \text{si } \frac{1+\alpha}{4} - r_k < t < \frac{1+\alpha}{4} - r_{k-1}, \quad k\in\mathbb{N}^* \\ f(t) = t & \text{si } \frac{1+\alpha}{4} < t \leq \frac{1}{2} \\ f(t) = 1 - f(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que f est un homéomorphisme $\mathbb{Q}\cap[0;1]\to\mathbb{Q}\cap]0;1[$.

c) Montrer de même que $\mathbb{Q}\cap[0;1]$ et $\mathbb{Q}\cap[0;1[$ sont homéomorphes. Construire explicitement un homéomorphisme entre ces deux espaces.

15. UNE PARTITION DES IRRATIONNELS

a) Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\setminus D$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un $\mathcal{G}_\delta$ de I dense dans I, et V une partie dense de I homéomorphe à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Montrer que U et V ne sont pas disjoints.

c) Soit C un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $\mathbb{R}$, de mesure 0. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une partie dénombrable de $C\cap I$, notée E, telle que $(C\setminus E)\cap I$ soit homéomorphe à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

d) On considère les ensembles C et I définis à la question c). Montrer qu'il existe une partie dénombrable de $(\mathbb{R}\setminus C)\cap I$, notée F, telle qu'il existe une bijection continue de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sur $(\mathbb{R}\setminus C\setminus F)\cap I$.

e) Déduire de ce qui précède qu'il existe une partition $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = A\cup B$ de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ telle que, pour tout couple $(I;J)$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$:
- $A\cap I$ et $B\cap J$ ne soient pas homéomorphes ;
- il existe une bijection continue $A\cap I\to B\cap J$.

16. FRACTIONS CONTINUES ET TOPOLOGIE

Soit $n_0\in\mathbb{N}$. Quelle est la nature topologique de l'ensemble des $x\in[0;1]$ qui sont rationnels et dont l'écriture en fraction continue est de longueur $\leq n_0$?

17. ARITHMETIQUE DES ORDINAUX

Montrer les assertions et formules suivantes, après avois mis les quantificateurs :

a) La somme ordinale et le produit ordinal sont associatifs.

b) La somme ordinale et le produit ordinal ne sont pas commutatifs (indication = $1+\omega = \omega$, $2\omega = \omega$).

c) Le produit est distributif à gauche par rapport à la somme : $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$.

d) Le produit n'est pas distributif à droite par rapport à la somme (indication : montrer que $(1+1).\omega=\omega$ tandis que $1.\omega+1.\omega = \omega.2$).

e) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{(\beta.\gamma)}$

f) $\alpha^\beta.\alpha^\gamma = \alpha^{(\beta+\gamma)}$

g) Pour tout entier n, $n+\omega = \omega$, et pour tout entier $n > 0$, $n.\omega = \omega$.

h) Si $\alpha < \beta$, alors $(\gamma+\alpha) < (\gamma+\beta)$.

i) Si $\alpha < \beta$ et si $\gamma > 0$, alors $\gamma.\alpha < \gamma.\beta$.

j) Si $\alpha < \beta$ et si $\gamma > 1$, alors $\gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$.

18. ARITHMETIQUE DES CARDINAUX

Montrer les propriétés suivantes des opérations sur les cardinaux, après avoir quantifié les formules qui ne le sont pas.

a) *Propriétés de la somme cardinale*

(i) la somme est associative

(ii) la somme est commutative

(iii) $\mathfrak{a}+0 = 0 = 0+\mathfrak{a}$

(iv) la somme est monotone : si $\mathfrak{a} \le \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b} \le \mathfrak{b}'$, alors $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'$; mais la somme n'est pas strictement monotone.

b) *Propriétés du produit cardinal*

(i) le produit est associatif

(ii) le produit est commutatif

(iii) $\mathfrak{a}.0 = 0.\mathfrak{a} = 0$

(iv) $\mathfrak{a}.1 = 1 = 1.\mathfrak{a}$

(v) le produit est distributif par rapport à la somme : $\mathfrak{a}.(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}.\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}.\mathfrak{d})$

(vi) le produit est monotone : si $\mathfrak{a} \le \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b} \le \mathfrak{b}'$, alors $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}'.\mathfrak{b}'$; mais le produit n'est pas strictement monotone.

c) *Propriétés de l'exponentiation*

(i) $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}.\mathfrak{a}^{\mathfrak{d}}$

(ii) $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{d}} = \mathfrak{a}^{(\mathfrak{b}.\mathfrak{d})}$

(iii) $0^0 = 1$ et $0^{\mathfrak{a}} = 0$ si $\mathfrak{a} \neq 0$

(iv) $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$

(v) $1^{\mathfrak{a}} = 1$

(vi) l'exponentiation est monotone : si $\mathfrak{a} \le \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b} \le \mathfrak{b}'$, alors $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \le \mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}'}$; mais l'exponentiation n'est pas strictement monotone.

(vii) $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

d) *Propriétés des alephs*

(i) $\aleph_\alpha$ est un ordinal limite

(ii) $\aleph_\alpha+\aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)} = \aleph_\alpha.\aleph_\beta$.

(iii) Pour tout entier n, $n+\aleph_\alpha = \aleph_\alpha = n\aleph_\alpha$.

(iv) $\sum_{\beta\le\alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$.

(v) $\prod_{\beta\le\alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha^{\bar{\bar{\alpha}}}$ ($\bar{\bar{\alpha}}$ est le cardinal de l'ordinal α).

(vi) $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$, et, de façon générale, pour tout entier $n \ge 1$, $\aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$.

(vii) Si $\alpha \le \beta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(viii) $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$, et, de façon générale, pour tout entier n, on a $\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+n}$.

(ix) Pour tout entier n, $\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}.\aleph_n$.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE DU CHAPITRE 2

1. COURBES

Les résultats des §1 et 2 sont dus à R.L. Moore qui les a publiés dans cette série d'articles :

[1] R.L. MOORE : *A theorem concerning continuous curves*. Bul. Amer. Math. Soc. 23 (1917).

[2] R.L. MOORE : *Concerning simple continuous curves*. Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), 333-347.

[3] R.L. MOORE : *Concerning the cut points of continuous curves and of other closed and connected point sets*. Proc. Nat. Acad. Sc. 9 (1923), 101-106.

La présentation adoptée ici est celle de G.T. Whyburn :

[5] G.T. WHYBURN and E. DUDA : *Dynamic Topology*. UTM, Springer-Verlag Pub. New-York (1979).

[4] G.T. WHYBURN : *Analytic Topology*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXVIII, New-York (1942).

Les autres caractérisations des intervalles proposées en exercices proviennent de :

[6] J.R. KLINE : *Closed connected sets which remain connected upon the removal of certain connected subsets*. Fund. Math. V (1924), 3-10.

[7] C. ZARANKIEWICZ : *Remarque sur un théorème de M. Kline*. Fund. Math. V (1924), 11-13.

2. ENSEMBLE DE CANTOR

Sur l'ensemble de Cantor, on trouvera des compléments et une présentation différente dans :

[1] H.E. LACEY and J. HARDY : *Notes on perfectness and total disconnectedness*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 602-606.

Pour des variantes exotiques de l'ensemble de Cantor, on pourra consulter :

[4] W.A. COPPEL : *An interesting Cantor set*. Amer. Math. Monthly 90 (1983), 456-460.

[3] D. BOES, R. DARST et P. ERDOS : *Fat, symmetric, irrational Cantor sets*. Amer. Math. Monthly 88 (1981), 340-341.

[2] R.B. DARST : *Some Cantor sets and Cantor functions*. Math. Mag. 45 (1972), 2-7.

3. NOMBRES RATIONNELS, NOMBRES IRRATIONNELS

Les caractérisations topologiques de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ proviennent historiquement de :

[1] W. SIERPINSKI : *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables dense en soi*. Fund. Math. 1 (1920), 11-16.

[2] F. HAUSDORFF : *Die schlichten stetigen Bilder des nulbraums*. Fund. Math. 29 (1937), 151-158.

La présentation suivie ici est celle de :

[3] C. EBERHART : *Some remarks on the irrational and rational numbers*. Amer. Math. Monthly, 84 (1977), 32-35.

Pour des compléments sur le sujet, on pourra consulter :

[4] J.E. VAUGHAN : *Examples of ultrametrics*. Amer. Math. Monthly 82 (1975), 749-752.

[5] D.P. ROBBINS, A. MEIR et J. MULDONNEY : *An explicit map* $(0;1) \cap \mathbb{Q} \simeq [0;1] \cap \mathbb{Q}$. Amer. Math. Monthly 88 (1981), 357-358.

[6] F.S. CATER : *Complementary subsets of the irrationals*. Amer. Math. Monthly 88 (1981), 447-448.

4. ORDINAUX

Pour les propriétés non topologiques, et les questions de théorie des ensembles, voir :

[1] J.L. KRIVINE : *Théorie axiomatique des ensembles*. P.U.F. Ed., Paris (1972).

[2] L. CHAMBADAL : *Les ensembles*. Bordas Connaissance n° 91, Paris (1971).

Pour les propriétés topologiques, on pourra consulter :

[3] J. DUGUNDJI : *Topology*. Allyn and Bacon, Boston (1966).

NOTES DU CHAPITRE 2

(1) En anglais, on parle de *separation*. En français, le mot *séparé* est déjà utilisé dans la même théorie ; c'est pourquoi il n'est pas possible de l'utiliser ici sans risque de confusion.

(2) On prendra garde de ne pas confondre *extrémité* et *bout* qui sont deux choses différentes : un bout d'un espace topologique est un point x tel que tout voisinage U de x contienne un voisinage V de x dont la frontière est réduite à un point.

(3) Conformément à l'usage bourbachique, nous employons *suite* pour des familles infinies dénombrables, et *séquence* pour des familles finies.

(4) Quand on dit que l'intérieur de K_3 est vide, il va de soi que cet énoncé est relatif à K_3 en tant que partie de $\mathbb{R}$. L'énoncé peut devenir faux quand on considère K_3 comme partie d'un autre espace. Par exemple, dans K_3, $\overset{\circ}{K_3} = K_3$ (*cf.* exercice 7). En outre, cet énoncé ne vaut que pour K_3, et pas pour un espace K homéomorphe à K_3.

(5) Comme l'intérieur, la notion de parfait est en général relative à l'espace support de l'ensemble. Toutefois, dans le cas de K_3 ce n'est plus tout à fait vrai : la propriété de n'avoir pas de point isolé est une propriété topologique que possède donc tout ensemble H homéomorphe à K_3. En outre, la compacité est également une propriété topologique, et si l'espace support est séparé, les compacts sont fermés. Donc, si E est un espace séparé, et si $H \subset E$ est homéomorphe à K_3, H est un parfait de E.

(6) Cette terminologie n'a pas toujours été utilisée. Ainsi, jusque dans les années 1940-1960, certains auteurs qualifiaient de *dispersés* ou *d'héréditairement discontinus* les espaces dont les composantes sont des singletons. Ils appelaient *totalement discontinus* ou *nulle part continus* les espaces dont les quasi-composantes sont des singletons.

(7) En français, *dénombrable* signifie *"qui peut être mis en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$". En particulier, les ensembles finis sont dénombrables. C'est pour les exclure que l'on a précisé ici : *infini dénombrable*. Notons que cela diffère de l'usage anglo-saxon : en anglais, le terme *countable*, et ses synonymes *denumerable* et *enumerable*, désignent exclusivement les ensembles pouvant être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire en français, les ensembles infinis dénombrables.

(8) Comme la relation $\leq$ n'est pas la relation d'ordre sur un ensemble usuel, nous évitons d'écrire $(x < y)$ pour $(x \leq y$ et $x \neq y)$.

(9) On aurait pu éviter de faire référence à la proposition 12 pour montrer que la relation $A \in A$ est contradictoire. Il aurait suffit de considérer $A \cup \{A\}$. Mais plus généralement, on peut se demander à quelle condition la relation $A \in A$, où A est un ensemble, est contradictoire. Historiquement, la première contradiction de ce type a été dégagée par Russel et est connue sous le nom de *"paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles"*. Pour éviter ce paradoxe, deux solutions ont été proposées :
- La *théorie des types de Russel*, où l'appartenance fait changer de type. Cette théorie est très compliquée et n'a jamais eu de succès.
- L'*axiome de compréhension*, introduit par *Zermelo*, qui, intuitivement, affirme que toute propriété ne constitue pas un ensemble : pour toute propriété $P(x)$ et tout ensemble A, l'ensemble des $x \in A$ qui satisfont à P est un ensemble.

Le fait qu'en général, la relation $A \in A$ soit contradictoire découle d'un autre axiome, l'axiome de *fondation* : tout ensemble non vide a un élément qui n'a aucun élément commun avec cet ensemble.

$$\forall E, \quad (E \neq \emptyset) \Rightarrow \exists x \ (x \in E \text{ et } E \cap x = \emptyset)$$

Compte-tenu de cet axiome, la relation $A \in A$ est contradictoire : en effet, l'ensemble $\{A\}$ ne vérifierait pas l'axiome.

Notons que l'axiome de fondation est indépendant des autres axiomes de la théorie des ensembles, et que, si celle-ci n'est pas contradictoire, l'apport de l'axiome de fondation ne peut conduire à des contradictions. Le fait de ne pas prendre cet axiome conduit à l'existence d'ensembles dont on ne sait trop que faire, et c'est pourquoi il est généralement compté parmi les axiomes de la théorie des ensembles.

(10) ω n'est qu'une autre notation pour $\mathbb{N}$, utilisée quand on s'intéresse aux propriétés ordinales des entiers.

(11) Le symbole $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels muni de sa topologie usuelle. C'est pourquoi l'on change de notation lorsqu'on considère cet ensemble muni d'une autre topologie.

Chapitre 3

LES PROPRIETES UNIVERSELLES DE QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES FONDAMENTAUX

Nous avons vu au chapitre 2 quelques caractérisations d'espaces topologiques. Ces espaces sont fondamentaux, car ils permettent l'étude de nombreux autres espaces qui, définis de façon abstraite, pourraient au premier abord sembler n'avoir que peu de liens avec les premiers. Ainsi, les parties de $\mathbb{R}$ que sont $[0;1]$, K_3 et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ interviennent dans les propriétés des espaces métriques, des espaces métriques compacts, des espaces métriques connexe, soit qu'elles soient topologiquement contenues dans ces derniers, soit que ceux-ci soient "recouverts" par celles-là, ou représentés à l'aide de produits, réunions... de celles-là.

La présentation axiomatique abstraite des structures topologiques est justifiée par son caractère esthétique, et par ses avantages pédagogiques. Mais il ne faut pas qu'elle conduise à surévaluer la généralité mathématique des espaces étudiés : ainsi, on a vu au chapitre 1 que la classe des espaces métriques est incluse dans celle des espaces vectoriels normés et de leurs parties.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les liens entre ces espaces particuliers et certains espaces généraux ([1]).

1 - $[0;1]$ ET LES ESPACES CONNEXES

1.1. $[0;1]$ COMME IMAGE

Proposition 1.— *Soit* $(X;d)$ *un espace métrique connexe non réduit à un point. Il existe une surjection continue* $X\to[0;1]$.

Démonstration. Soient y et z deux points distincts de X. L'application $f : X\to[0;1]$, $x\mapsto\dfrac{d(x;y)}{d(x;y)+d(x;z)}$ est continue. Elle vérifie $f(y)=0$, $f(z)=1$, $f(X)\subset[0;1]$. L'ensemble $f(X)$ est un connexe de $[0;1]$ contenant 0 et 1. C'est $[0;1]$. ■

1.2. LES IMAGES DE $[0;1]$

Définition 1. Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X\to Y$ est *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y. Cela revient à dire que, pour toute partie A de X on a l'inclusion : $f(\mathring{A})\subset[f(A)]^{\circ}$.

Pour une application bijective $X \to Y$, on a l'équivalence :

$$f \text{ homéomorphisme} \iff f \text{ continue ouverte}$$

(*cf.* Dugundji, *Topology*, p. 89). Dans le cas où X est égal à $[0;1]$, et où Y est séparé et non réduit à un point, on a l'existence d'un homéomorphisme (pas forcément égal à f), lorsqu'on suppose seulement que f est surjective :

Théorème 2.— (*L.F. Mc Auley 1968* [2.9] *et S.S. Mitra 1969* [2.11])
Soit f une surjection continue ouverte de $[0;1]$ sur un espace topologique séparé Y non réduit à un point.

Alors, Y et $[0;1]$ sont homéomorphes.

Attention : dire que Y et $[0;1]$ sont homéomorphes ne signifie pas que f soit un homéomorphisme.

Démonstration. Comme d'habitude, on pose $I = [0;1]$. Notons pour commencer que Y est un continu, comme espace séparé image continue d'un continu. L'ensemble J des $x \in I$ tels que $f([0;x]) = Y$ a une borne inférieure, a, qui vérifie $f([0;a]) = Y$. On va montrer que $f_{|[0;a]}$ est une bijection. En vertu de l'équivalence rappelée plus haut, cela montrera que I et Y sont homéomorphes. Supposons qu'il existe x_1 et x_2, $0 \le x_1 < x_2 \le a$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

• *Premier cas* : $0 \le x_1 < x_2 < a$. Alors, $f([0;x_2]) = f([0;x_2[)$, ce qui montre que $f([0;x_2])$ est à la fois ouvert et fermé. Comme Y est connexe, on a $x_2 \in J$, ce qui contredit la définition de a.

• *Deuxième cas* : $0 \le x_1 < x_2 = a$. On a alors $Y = f([0;a]) = f([0;a[) = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0;a-\frac{1}{n}[) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([0;a-\frac{1}{n}[)$. Comme f est ouverte, chacun des $f([0;a-\frac{1}{n}[)$ est un ouvert de Y, et, par définition de a, une sous-famille finie de ces ensembles ne recouvre pas Y. Cela en contredit la compacité. ■

On sait par ailleurs que toute application continue ouverte $I \to I$ est un homéomorphisme-par-morceaux. De plus, si f est une application vérifiant les hypothèses du théorème 2, et si h est un homéomorphisme $Y \to I$ (le théorème 2 affirme qu'il en existe), alors $h \circ f$ est une application continue ouverte $I \to I$. On en déduit le

Corollaire 3.— *Toute surjection continue ouverte de I sur un espace séparé non réduit à un point Y est un homéomorphisme-par-morceaux.*

Définition 2.— On dit qu'un espace topologique X est *localement connexe* s'il admet une base d'ouverts connexes.

Cela est équivalent à chacune des assertions suivantes :

▶ Pour tout point $x \in X$ et tout voisinage U de x, il existe une partie connexe de U dont l'intérieur contient x.

▶ Les composantes (connexes) des ouverts de X sont des ouverts.

Si de plus, X est un espace métrisable, et si d est une distance compatible avec sa topologie, X est localement connexe si et seulement si, pour tout $x \in X$, tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout couple $(y;z)$ de points de $B(x;\delta)$, il existe une partie connexe de $B(x,\varepsilon)$ contenant y et z.

Exemples 4.

- Tout ouvert d'un espace localement connexe est localement connexe.
- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Tout convexe de E est localement connexe.
- Un espace connexe n'est pas forcément localement connexe (*cf.* contre-exemple 8 ci-après).

Lemme 5.— *Un espace métrique* $(X;d)$ *est compact et localement connexe si et seulement si, pour tout* $\varepsilon>0$*, il existe un recouvrement fini de* X *par des compacts connexes de diamètre inférieur à* ε.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Si X est localement connexe, tout point x de X admet un voisinage ouvert connexe V_x de diamètre inférieur à $\varepsilon/2$. Puisque X est compact, le recouvrement $(V_x)_{x\in X}$ de X admet un sous-recouvrement fini $(V_{x_i})_{i\in I}$, et les $(\overline{V}_{x_i})_{i\in I}$ forment le recouvrement cherché de X.

■ Réciproquement, supposons que X soit tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un recouvrement fini par des compacts connexes de diamètre $<\varepsilon$. Alors, X est compact comme réunion finie de compacts. En outre, soient $x\in X$, $\varepsilon>0$, et $(X_i)_{1\le i\le n}$ un recouvrement fini de X par des compacts de diamètre $\varepsilon/2$. Posons $J=\{i \mid x\in X_i\}$, $F=\bigcup_{j\in J} X_j$. Alors, F est un voisinage compact de x de diamètre inférieur à ε. C'est en effet un compact comme réunion finie de compacts. Il est de diamètre inférieur à ε d'après l'inégalité triangulaire. Enfin, $\bigcup_{i\notin J} X_i$ est un compact ne contenant pas x. Il existe donc $\eta>0$ tel que $B(x;\eta)\cap\bigcup_{i\notin J} X_i=\emptyset$, et par suite $B(x;\eta)\subset\bigcup_{j\in J} X_j=F$. ■

Théorème 6.— *Hahn-Mazurkiewicz-Sierpinski-Moore-Menger (de 1914 à 1929 pour les différentes étapes)*

Soit $(X;d)$ *un espace métrique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est l'image continue de* $[0;1]$.

(ii) X *est un continu localement connexe.*

La démonstration fait appel au lemme 5.

Démonstration. (*D'après Newman* [2.8]).

▶ (i) ⇒ (ii) L'image continue d'un continu est un continu. Il suffit donc de montrer qu'un espace métrique $(X;d)$, image d'un compact métrisable localement connexe $(Y;\delta)$ par une application continue f, est localement connexe.

En effet, soit $\varepsilon>0$. Il existe $\zeta>0$ tel que $d(f(y);f(z))<\varepsilon$ si $(y;z)\in Y^2$ et si $\delta(y;z)<\zeta$. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de Y par des compacts connexes de diamètre $<\zeta$. Alors $(f(X_i))_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X par des compacts connexes de diamètre $<\varepsilon$.

▶ (ii) ⇒ (i) Soient x et y deux points de X. Quitte à changer d en $\frac{d}{1+d}$, on peut supposer que X est de diamètre ≤ 1. On va définir une suite de recouvrements chaînés de plus en plus fins de X par des compacts connexes. Posons : $N_0=1$, $K_{1,0}=X$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Ayant défini, pour tout $p\le n$ un entier N_p, et un recouvrement $K_{1,p},\dots,K_{N_p,p}$ de X par une chaîne (*chaîne* : $K_{i,p}\cap K_{i+1,p}\neq\emptyset$) de compacts connexes de diamètre $\le 2^{-p}$, on définit ainsi le recouvrement $(K_{i,n+1})_{1\le i\le N_{n+1}}$.

Soit $(F_j)_{j\in J}$ un recouvrement fini de X par des connexes compacts de diamètre $\leq 2^{-(n+1)}$ (*cf.* lemme 5) ; pour tout i, $1\leq i\leq N_n$, soit $x_i \in K_{i,n}\cap K_{i+1,n}$, avec $x_1 = x$, $x_{N_n-1} = y$; les $F_j\cap K_{i,n}$ qui sont non vides forment un recouvrement fini de $K_{i,n}$ par des compacts de diamètre $\leq 2^{-(n+1)}$. Comme $K_{i,n}$ est connexe, il existe un entier M_i, et un arrangement avec répétition de M_i des $F_j\cap K_{i,n}$, disons $(G_{1,i};G_{2,i};\dots;G_{M_i,i})$, tel que :

$$x_{i-1}\in G_{1,i},\ x_i\in G_{M_i,i},\quad G_{k,i}\cap G_{k+1,i}\neq\emptyset \ \text{ si } \ 1\leq k\leq M_i-1 \ \text{ et } \ \bigcup_{k=1}^{M_i} G_{k,i}\supset K_{i,n}.$$

Posons $P_n = \max\{M_i,\ 1\leq i\leq N_n\}$. Quitte à répéter le dernier terme, on peut supposer que l'arrangement $(G_{1,i};\dots;G_{M_i,i})$ a P_n termes et le noter $(G_{1,i};\dots;G_{P_n,i})$. A cet arrangement correspond un arrangement $(H_{1,i};H_{2,i};\dots;H_{P_n,i})$ des F_j, obtenu en posant : $H_{j,i} = F_k$ si $G_{j,i} = F_k\cap K_{i,n}$. Cet arrangement $(H_{1,i};\dots;H_{P_n,i})$ constitue une chaîne de compacts connexes de diamètre $< 2^{-(n+1)}$ recouvrant $K_{i,n}$. En mettant bout à bout ces N_n chaînes, on obtient une chaîne $K_{1,n+1};\dots;K_{N_{n+1},n+1}$ de compacts connexes de diamètre inférieur à $2^{-(n+1)}$, avec $N_{n+1} = P_n.N_n$.

Comparons cette chaîne à la précédente : si $0\leq k\leq N_n$ et si $P_n.(k-1)\leq i\leq P_n.k$, on a : $K_{k,n}\cap K_{i,n+1}\neq\emptyset$, et, puisque le diamètre $\operatorname{diam}(K_{i,n+1})$ de $K_{i,n+1}$ est inférieur à $2^{-(n+1)}$, on a aussi :

$$B(K_{i,n+1};2^{-(n+1)})\subset B(K_{k,n};2^{-n}) \qquad (1)$$

Soit $t\in[0;1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique entier m, $1\leq m\leq N_n$ tel que $(m-1)/N_n\leq t<m/N_n$. On pose $A_n(t) = B(K_{m,n};2^{-n})$. On pose également $A_n(1) = B(K_{N_n,n};2^{-n})$, et enfin : $f(t) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n(t)$. Il découle de la relation (1) que l'on a : $A_{n+1}(t)\subset A_n(t)$, et comme $\operatorname{diam}(A_n(t))\leq 2^{-n+1}$, $f(t)$ est un singleton. En outre, f est continue : en effet, si $|t-t'|<1/N_n$, $f(t)$ et $f(t')$ appartiennent à deux éléments consécutifs de la chaîne $(B(K_{m,n};2^{-n}))_{1\leq m\leq N_n}$, ou bien au même. On a donc alors : $d(f(t);f(t'))\leq 2^{-n+2}$. Enfin, f est surjective. En effet, soit $z\in X$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe m tel que $z\in B(K_{m,n+1};2^{-n-1})$. Mais alors $d(z;f(m/N_n))\leq \operatorname{diam}(B(K_{m,n+1};2^{-n-1}))\leq 2^{-n+1}$. Cela étant vrai pour tout z et tout n, on en déduit que les $f(m/N_n)$, $n\in\mathbb{N}$, $1\leq m\leq N_n$ sont denses dans X, donc que $f([0;1])$ est dense dans X, et que, du fait de la compacité, $f([0;1]) = X$. ■

Corollaire 7.— *Un continu métrisable localement connexe est connexe par arcs.*

On montre même qu'il est connexe par arcs simples, c'est-à-dire que, pour tout couple $(x;y)$ de points distincts d'un tel espace, il existe un arc simple d'extrémités x et y. [2]

La réciproque du corollaire 7 est fausse, ainsi que le montre le

Contre-exemple 8 : *Cercle de Varsovie trafiqué.*

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble E constitué de la réunion :

- du segment $\{0\}\times[-2;+1]$
- du graphe de $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$, $x\in\,]0;\frac{1}{\pi}]$
- du segment $[0;\frac{1}{\pi}]\times\{-2\}$

du segment $\{\frac{1}{n}\}\times[-2;0]$

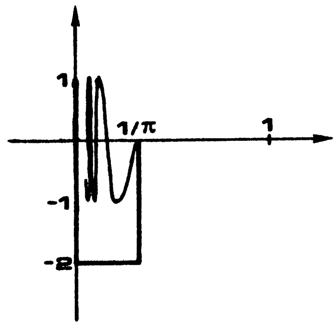


Figure 1

L'espace E est un continu connexe par arcs qui n'est pas localement connexe. Notons au passage que cet espace est simplement connexe, mais qu'il n'est pas unicohérent, c'est-à-dire qu'il existe deux fermés connexes U et V dont E est réunion et tels que $U \cap V$ n'est pas connexe.

En conjuguant la proposition 1 et le théorème 6, on obtient :

Corollaire 9.— *Soient* X *et* Y *deux continus localement connexes et non réduits à un point. Il existe une surjection continue* $X \to Y$.

En particulier, les continus localement connexes ont tous le cardinal du continu.

Comme application du théorème 6, on retrouve le fait qu'il existe une surjection continue $[0;1] \to [0;1]^2$. Une telle surjection avait été donnée pour la première fois par *Peano* en 1890. C'est un mémoire de cet exemple fameux qui avait traumatisé une partie de la communauté mathématique de l'époque que l'on a posé la définition suivante :

Définition 3. Un continu métrisable localement connexe est appelé *espace de Peano*, ou *espace péanien*.

Remarque et contre-exemple 10. On a vu plus haut qu'un continu métrisable localement connexe est connexe par arcs simples. Si l'espace X n'est pas séparé, il peut être connexe, localement connexe et connexe par arcs sans être connexe par arcs simples. C'est le cas de $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ muni de la *topologie* dite *des diviseurs* qui est engendrée par les ouverts U_n de la forme
$U_n = \{x \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\} \mid x \text{ divise } n\}$, $n \geq 2$.

1.3. ESPACES DE PEANO : LE POINT DE VUE PROBABILISTE

Le théorème de Hahn-Mazurkiewicz *et al* nous assure de l'existence d'une surjection continue $[0;1] \to [0;1]^2$. Mais la construction n'est pas vraiment effective, et deux problèmes se posent :

- Construire effectivement de telles applications.
- Analyser la nature de ces surjections : est-ce juste une pathologie folklorique, ou bien y-a-t-il des problèmes d'analyse conduisant naturellement à de telles fonctions ?

Entre 1974 et 1981, A.M. Garsia et S.A. Holbrock ont établi entre indépendance stochastique et courbes de Peano un lien qui va nous permettre de répondre à ces deux questions.

Rappelons que, si P est une mesure borélienne de probabilité sur $[0;1]$, deux fonctions f et $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ sont dites *stochastiquement indépendantes* si, pour tous intervalles J et K de $\mathbb{R}$, les ensembles $f^{-1}(I)$ et $g^{-1}(K)$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :

$$P(f^{-1}(J) \cap g^{-1}(K)) = P(f^{-1}(J)).P(g^{-1}(K))$$

Proposition 11.— *Soient* f *et* g *deux fonctions continues non constantes* $[0;1] \to \mathbb{R}$, *stochastiquement indépendantes relativement à la mesure de Lebesgue,* λ.
Alors, $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (f(t);g(t))$ *est une courbe de Peano de* $[0;1]$ *sur* $f([0;1]) \times g([0;1])$.

Démonstration. Comme f et g sont des fonctions continues non constantes, $f(I)$ et $g(I)$ sont des intervalles compacts non réduits à un point. Soit $(x;y) \in f([0;1]) \times g([0;1])$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f et g sont continues, on a $\lambda(f^{-1}(]x-\varepsilon;x+\varepsilon[)) > 0$ et $\lambda(g^{-1}(]y-\varepsilon;y+\varepsilon[)) > 0$. Et puisque f et g sont indépendantes :
$\lambda(f^{-1}(]x-\varepsilon;x+\varepsilon[) \cap g^{-1}(]y-\varepsilon;y+\varepsilon[)) = \lambda(f^{-1}(]x-\varepsilon;x+\varepsilon[)).\lambda(g^{-1}(]y-\varepsilon;y+\varepsilon[)) > 0$. Il existe donc $t \in (f^{-1}(]x-\varepsilon;x+\varepsilon[) \cap g^{-1}(]y-\varepsilon;y+\varepsilon[))$. Pour un tel t, on a $||\gamma(t)-(x;y)||_2 \leq \sqrt{2}.\varepsilon$, où $||.||_2$ est la norme euclidienne. Ainsi, $\gamma([0;1])$ est dense dans $f([0;1]) \times g([0;1])$. Comme ce dernier ensemble est compact et que $\gamma([0;1])$ l'est aussi, ces deux ensembles sont égaux. ■

Ainsi le problème de la construction de courbes de Peano est-il ramené à celui de la détermination de fonctions continues stochastiquement indépendantes. Le théorème suivant affirme l'existence de telles fonctions et sa démonstration en donne un procédé de construction. Mais là, il n'y a pas de miracle : cette construction revient à celle des courbes de Peano classiques...

Théorème 12.— (*J.A.R. Holbrook, 1981*)
Soit P *une mesure de probabilité borélienne sur* $[0;1]^2$ *dominant uniformément la mesure de Lebesgue,* λ, *c'est-à-dire telle qu'il existe* $c > 0$ *vérifiant* $P(B) > c.\lambda(B)$, *pour tout borélien* B *de* $[0;1]^2$.
Alors, il existe deux fonctions continues f *et* $g : [0;1] \to [0;1]$ *dont la loi conjointe est* P.

Rappelons que la loi conjointe $P_{f,g}$ de f et g est la probabilité borélienne sur $[0;1]^2$ vérifiant, pour tout borélien B de $[0;1]^2$:

$$P_{f,g}(B) = \lambda(\{t \in [0;1] \mid (f(t);g(t)) \in B\})$$

Démonstration. Construisons, par récurrence, une suite $(\mathcal{R}_n)$ de recouvrements chaînés de plus en plus fins de $[0;1]^2$ par des carrés contigus.

On prend $\mathcal{R}_0 = ([0;1]^2)$. Supposons $\mathcal{R}_n$ construit ; il est formé des 4^n carrés de $[0;1]^2$ de la forme $[k.2^{-n};(k+1)2^{-n}] \times [q2^{-n};(q+1)2^{-n}]$, avec $0 \leq k < 2^{-n}$ et $0 \leq q < 2^{-n}$. Soit $C_{n,r}$ un tel carré, de centre $\Omega_{n,r}$. Alors, puisque $\mathcal{R}_n$ est un recouvrement chaîné par des carrés contigus, $C_{n,r-1}$ et $C_{n,r+1}$ sont des carrés contigus à $C_{n,r}$. Supposons avoir construit les $4(r-1)$ premiers carrés de $\mathcal{R}_{n+1}$, et que $C_{n+1,4(r-1)}$ soit l'un des deux carrés contigus à $C_{n,r}$, parmi les quatre carrés obtenus en coupant $C_{n-1,r}$ par ses médianes. Alors, on construit

$C_{n+1,4r-3},\dots,C_{n+1,4r}$ en suivant l'un des trois diagrammes suivants, représentatifs aux rotations près des positions relatives de $C_{n,r-1}$, $C_{n,r}$, $C_{n,r+1}$ et $C_{n+1,4(r-1)}$ qui peuvent se présenter :

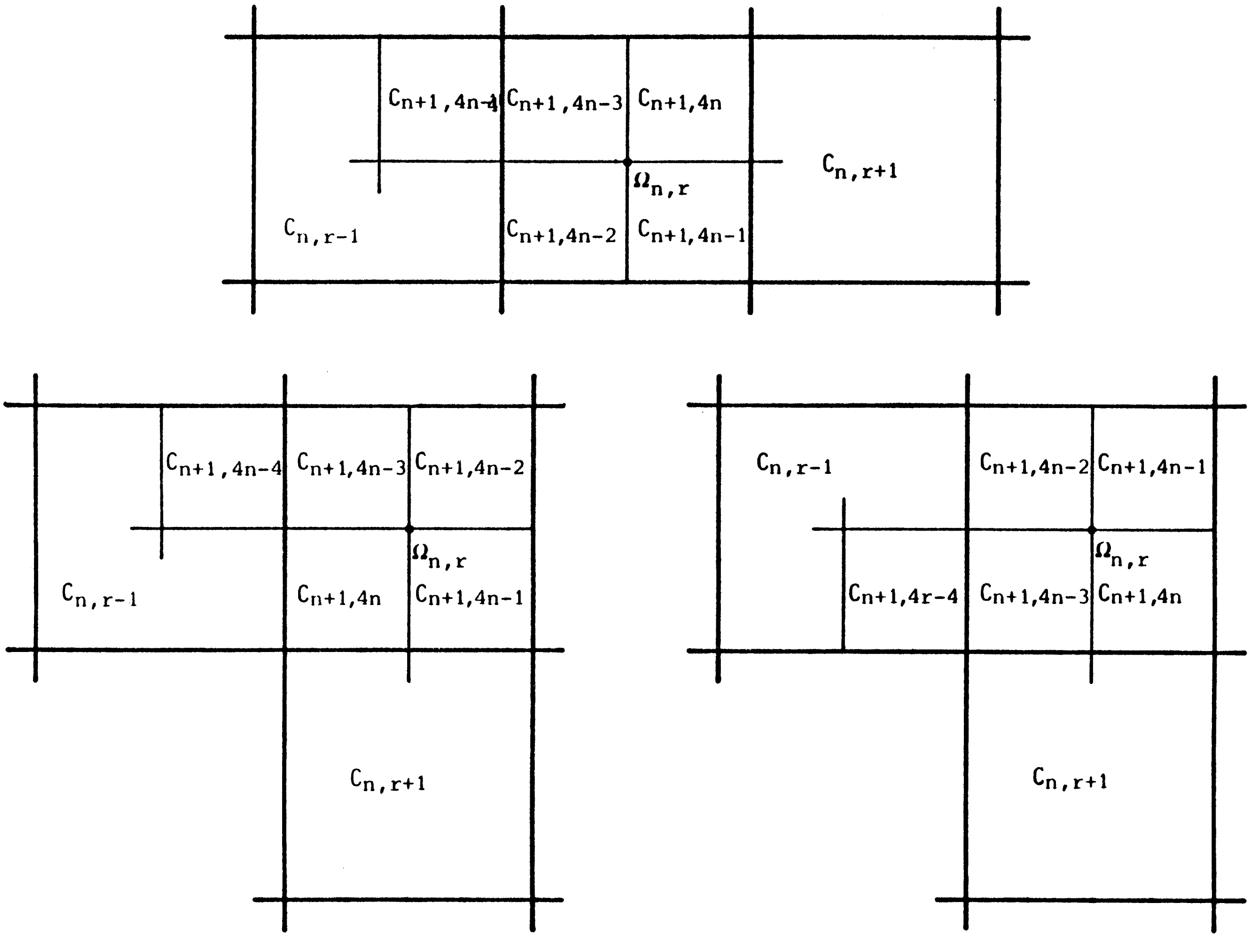


Figure 2

Les centres $\Omega_{n,p}$ des carrés du recouvrement $\mathcal{R}_n$ vérifient : $\|\Omega_{n,p}-\Omega_{n,p+1}\|_2 = 2^{-n}$, si $1 \le p < 4^{-n}$. Si $C_{n,p} \subset C_{n-1,q}$, désignons par $\hat{C}_{n,p}$ l'intersection de $C_{n-1,q}$ avec le carré $C_{n,p}$ privé du côté contigu au carré qui le précède dans le recouvrement. Pour tout n, les $\hat{C}_{n,p}$ forment une partition $\hat{\mathcal{R}}_n$ de $[0;1]^2$. Définissons à présent, pour chaque n, une séquence $I_{n,p}$, $1 \le p \le 4^n$ d'intervalles contigus de $[0;1]$ définis par :

$$I_{n,1} = [0;P(C_{n,1})] \quad \text{et, si} \quad I_{n,p} =]a_{n,p};b_{n,p}],$$
$$I_{n,p+1} =]b_{n,p};b_{n,p}+P(\hat{C}_{n,p+1})], \quad 2 \le p < 4^n.$$

Comme $\hat{\mathcal{R}}_n$ est une partition de $[0;1]^2$, et que P est une probabilité, les $I_{n,p}$ forment une partition de $[0;1]$.

On définit pour chaque n une fonction en escalier $\gamma_n : [0;1] \to [0;1]^2$ par : $\gamma_n(I_{n,p}) = \{\Omega_{n,p}\}$. Les $\hat{\mathcal{R}}_n$ formant des partitions de plus en plus fines de $[0;1]^2$, les $I_{n,p}$ forment également des partitions de plus en plus fines de $[0;1]$. On a même, plus précisément : $I_{n,p} = \bigcup_{i=0}^{3} I_{n+1,4p-i}$. De plus, comme $\| \Omega_{n+1,4p-i} - \Omega_{n,p} \|_2 = 2^{-(n+3/2)}$, en appelant f_n et g_n les composantes de γ_n, on a : $|f_{n+1}(t)-f_n(t)| \le 2^{-(n+2)} \ge |g_{n+1}(t)-g_n(t)|$, $\forall t \in [0;1]$. Ainsi, les suites de fonctions discontinues (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers des fonctions f et g. Montrons que f et g sont continues, et que $P_{f,g} = P$.

Puisque P domine uniformément λ, on a $\lambda(I_{n,p}) \ge c4^{-n}$, de sorte que si $|t-s| < c4^{-n}$, t et s sont dans deux intervalles consécutifs $I_{n,p}$ et $I_{n,p+1}$, ou bien dans le même. On a dans tous les cas : $|f_n(t)-f_n(s)| \le 2^{-n}$ et $|g_n(t)-g_n(s)| \le 2^{-n}$. Par ailleurs, $|(f-f_n)(t)| \le \sum_{k=n+2}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-(n+1)}$. On en déduit, si $|t-s| < c4^{-n}$:

$$|f(t)-f(s)| \le |f(t)-f_n(t)| + |f_n(t)-f_n(s)| + |f_n(s)-f(s)| \le 2^{-(n+1)} + 2^{-n} + 2^{-(n+1)} = 2^{-(n-1)}.$$

Ainsi, f est continue. Il en est de même de g.

Montrons l'égalité $P_{f,g} = P$. Notons γ la courbe de composantes f et g. Soient $\hat{C} = \hat{C}_{n,p}$ un carré de $\hat{\mathcal{R}}_n$, et $J = I_{n,p}$. On va montrer : $\lambda(J \setminus \gamma^{-1}(\hat{C})) = 0$. Pour tout $m \ge n$, posons :

$$H_m = \{q \mid (J\setminus\gamma^{-1}(\hat{O})) \cap I_{m,q} \ne \emptyset\} \; ; \quad E_m = \bigcup_{q\in H_m} I_{m,q} \qquad F_m = \bigcup_{q\in H_m} \hat{C}_{m,q}.$$

Les suites (E_m) et (F_m) sont décroissantes. On a donc : $P(\bigcap_{m\ge n} F_m) = \lim_{m\to\infty} P(F_m)$, et par ailleurs :

$$\lambda(J\setminus\gamma^{-1}(\hat{C})) \le \sum_{q\in H_m} \lambda(I_{m,q}) = \sum_{q\in H_m} P(\hat{C}_{m,q}) = P(F_m)$$

C'est pourquoi il suffit de montrer : $P(F) = 0$, où $F = \bigcap_{m\ge n} F_m$.

Soit $Q \in F$. Alors, pour tout $m \ge n$, il existe $p_m \in H_m$ tel que $Q \in \hat{C}_{m,p_m}$. Soit $t_m \in (J\setminus\gamma^{-1}(\hat{C})) \cap I_{m,p_m}$. Comme $\lim_{m\to\infty} \| \gamma_m(t_m) - \gamma(t_m) \|_2 = 0$, et que $\gamma_m(t_m) \in \hat{C}_{m,p_m}$, on a : $\lim_{m\to\infty} \| \gamma(t_m) - Q \|_2 = 0$. Ainsi : $F \subset \overline{\gamma(J\setminus\gamma^{-1}(\hat{C}))}$. Par ailleurs, $\gamma(J) \subset \hat{C}^-$ car $\gamma_m(J) \subset \hat{C}$ pour tout $m \ge n$.

Comme $\gamma(J\setminus\gamma^{-1}(\hat{C})) \subset \hat{C}^c$, on en déduit : $F \subset (\hat{C}^- \cap \hat{C}^c)^-$. Puisque $\hat{C}$ est un carré privé d'un ou deux des quatre côtés constituant sa frontière, $\hat{C}^- \cap \hat{C}^c$ est un segment, ou la réunion de deux segments. Donc $(\hat{C}^- \cap \hat{C}^c)^- = \hat{C}^- \cap \hat{C}^c$, et $F \subset \hat{C}^- \cap \hat{C}^c$. Mais comme chaque F_m est inclus dans $\hat{C}$ (les partitions sont de plus en plus fines), il en est de même de F qui est donc vide. Il s'ensuit $P(F) = 0$, et $\lambda(J\setminus\gamma^{-1}(\hat{C})) = 0$. On en déduit : $P_{f,g}(\hat{C}) = \lambda(\gamma^{-1}(\hat{C})) \ge \lambda(J) = P(\hat{C})$. Cela étant vrai pour tout $\hat{C} \in \hat{\mathcal{R}}_n$, et la somme des $P_{f,g}(\hat{C})$ valant $1 = P([0;1]^2)$, on en déduit $P_{f,g}(\hat{C}) = P(\hat{C})$. Enfin, les termes des recouvrements $\hat{\mathcal{R}}_n$ engendrent $\mathcal{B}_{[0;1]^2}$, la tribu borélienne de $[0;1]^2$. Donc $P_{f,g} = P$, et le théorème est démontré. ∎

<u>Remarque 13.</u> Pour avoir simplement l'existence de fonctions continues stochastiquement indépendantes, il suffit de traiter le cas $P = \lambda$. Comme l'aire d'un segment est nulle, il est alors inutile dans la démonstration de distinger les recouvrements $\mathcal{R}_n$ des partitions $\hat{\mathcal{R}}_n$. Cela allège d'autant la démonstration du théorème 12.

2. L'ENSEMBLE DE CANTOR ET LES ESPACES COMPACTS

Définition 4. On appelle *espace de Cantor* tout espace topologique du type $\{0;1\}^I$, $I \neq \emptyset$ muni de la topologie produit. (Si I est infini dénombrable, on parle *d'ensemble de Cantor*).

Rappelons qu'en français, un espace *compact* est séparé.

Théorème 14.

1. *Tout espace compact* $(X;\mathcal{T})$ *est l'image continue d'un sous-ensemble fermé d'un espace de Cantor.*
2. *Si de plus* X *est métrisable, il est l'image continue de l'ensemble de Cantor.*

Nous allons voir deux démonstrations de ce théorème : la première englobe les deux assertions, mais fait appel au théorème de prolongement de Taimanov vu au chapitre 1 ; la seconde est une preuve directe de l'assertion. 2. Les deux démonstrations utilisent la caractérisation topologique de l'ensemble de Cantor, *i.e.* le théorème 6 du chapitre 2.

Démonstration du théorème 14. Soit $\{O_i,\ i \in J\}$ une base d'ouverts de $(X;\mathcal{T})$. Si X est métrisable, on peut prendre J infini dénombrable : $J = \mathbb{N}$. Pour chaque $x \in X$, soit f_x l'application $J \to \{0;1\}$ définie par : $f_x(i) = \chi_{O_i}(x)$. Puisque X est séparé, si x et y sont deux points distincts de X, les fonctions f_x et f_y sont distinctes, et X peut être identifié avec une partie X' de $\{0;1\}^J$. Soit ϕ la bijection $X \to X'$. Soit $\mathcal{T}'$ la topologie induite par ϕ sur X'. Alors $(X;\mathcal{T})$ et $(X';\mathcal{T}')$ sont homéomorphes, et $\{\phi(O_i), i \in J\}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}'$. Désignons par C_J l'ensemble $\{0;1\}^J$ muni de sa topologie produit, $\mathcal{S}$, et, pour tout $A \subset C_J$, notons $\overline{A}^J$ l'adhérence de A dans C_J. Désignons également par $\mathcal{S}_{X'}$ la trace sur X' de la topologie $\mathcal{S}$. Un ouvert de $\mathcal{T}'$ est un ouvert de $\mathcal{S}_{X'}$. En effet, pour tout $i \in J$, $\phi(O_i) = \{(\mu_j)_{j \in J} \mid \mu_j = 0 \text{ si } j \neq i,\ \mu_i = 1\} \cap \phi(X)$. Ainsi, l'application identique, $\Psi : (X';\mathcal{S}_{X'}) \to (X';\mathcal{T}')$ est continue. On va montrer le théorème en établissant que Ψ admet un prolongement continu à $\overline{X'}^J$. Pour cela, on va invoquer le théorème de Taimanov (chapitre I, théorème 36). Il faut établir que, si K et L sont deux fermés disjoints de $(X';\mathcal{T}')$, alors $\overline{K}^J \cap \overline{L}^J = \emptyset$. Soient donc K et L deux telles parties de X', et $\mu = (\mu_i)_{i \in J}$ un élément de $\overline{K}^J \cap \overline{L}^J$. Pour tout $i \in J$, posons

$$F_i = \{(k_j)_{j \in J} \in \{0;1\}^J \mid k_i = \mu_i\}.$$

Alors, F_i est un ouvert de C_J qui est un voisinage de μ. On a donc $F_i \cap K \neq \emptyset$, et $F_i \cap L \neq \emptyset$. En outre, pour toute partie finie $M \subset J$, on a $K \cap \bigcap_{i \in M} F_i \neq \emptyset$ et $L \cap \bigcap_{i \in M} F_i \neq \emptyset$. Mais F_i est également un fermé de C_J. L'ensemble $F_i \cap X'$ est donc un fermé de $(X';\mathcal{S}_{X'})$, et par suite un fermé de $(X';\mathcal{T}')$. Comme $(X';\mathcal{T}')$ est compact, il en est de même de K et L pour la trace sur ces ensembles de $\mathcal{T}'$. Comme pour toute partie finie M de J, on a $K \cap \bigcap_{i \in M} F_i \neq \emptyset$, et $L \cap \bigcap_{i \in M} F_i \neq \emptyset$, on a également $K \cap \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$, et $L \cap \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$. Mais $\bigcap_{i \in J} F_i = \{\mu\}$, de sorte que $\mu \in K \cap L$, ce qui contredit l'hypothèse $K \cap L = \emptyset$ et achève la démonstration de l'assertion 1.

■ Pour l'assertion 2, on a vu que si X est un compact métrisable, il est l'image continue d'un fermé de l'ensemble de Cantor, C. Mais il résulte du théorème 2.6 qu'un fermé F de l'ensemble de Cantor se décompose sous la forme $D \cup C' = F$, où D est un ensemble dénombrable, et où C' est homéomorphe à C, ou vide. Dans les deux cas, F est l'image continue de C, et cela montre l'assertion 2, par composition.

Démonstration directe de l'assertion 2.

• Nous reprenons les notations du chapitre 2, §3. Il résulte du théorème 6 du chapitre 2 (caractérisation topologique de l'ensemble de Cantor) que si $I_{p,q}$ et $I_{p',q'}$ sont deux intervalles disjoints contigus de l'ensemble triadique de Cantor, l'intersection de K_3 et de l'intervalle compris entre $I_{p,q}$ et $I_{p',q'}$ est homéomorphe à K_3.

• Cela étant, soit $(X;d)$ un espace métrique compact. C'est un espace précompact, et il se décompose sous la forme $X = \bigcup_{i=1}^{n_o} X_i$, où les X_i sont des fermés non vides de diamètre <1. On peut supposer $n_o \geq 2$. Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $2^r \geq n_o$. Les intervalles $I_{p,q}$, $1 \leq p \leq r$, $1 \leq q \leq 4^p$ partagent K_3 en 2^r parties disjointes, $C_1, \ldots, C_{2^r}$, toutes homéomorphes à K_3, et de diamètre $1/3^r$. On associe C_1 à $X_1, \ldots, C_{n_o}$ à X_{n_o}, et, si $2^r > n_o$, $C_{n_o+1}, \ldots, C_{2^r}$ à X_{n_o}.

• Itérons ce processus : chaque X_i se décompose en une réunion de fermés non vides de diamètre $<1/2$, au moins 2. On pose $X_i = \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{i,j}$. Soit $m_1 = \max\{s_i,\ 1 \leq i \leq n_o\}$. Il existe r_2 tel que $2^{r_2} \geq m_1$. On partage chacun des C_i en une réunion disjointe de 2^{r_2} ensemble homéomorphes à K_3, et de diamètre $(1/3^r).(1/3^{r_2})$, à savoir :
$C_i = \bigcup_{j=1}^{2^{r_2}} C_{i,j}$. On associe les $C_{i,j}$ aux $X_{i,j}$, et, pour $j > s_i$, on associe $C_{i,j}$ à X_{i,s_i}. On procède ainsi par récurrence.

• Soit $x \in K_3$. Pour tout entier k, il existe un unique $C_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ auquel appartienne x, noté $C_{x(k)}$. On a : $x = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} C_{x(k)}$. Désignons par $X_{x(k)}$ la partie de X associée à $C_{x(k)}$. On pose : $f(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} X_x(k)$. C'est un singleton car les $X_{x(k)}$ forment une suite décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers zéro. L'application f est bien définie, car pour chaque k, x appartient à un unique $C_{x(k)}$. Elle est surjective car pour chaque k, les $X_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ recouvrent X. Enfin, f est continue : soient $x \in K_3$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k < \varepsilon$. Il existe également $\delta > 0$ tel que, si $y \in K_3$ et $|y-x| < \delta$, alors $y \in C_{x(k)}$. Alors $f(y) \in X_{x(k)}$, et $d(f(x);f(y)) \leq 2^k < \varepsilon$. ■

En combinant la proposition 1 et le théorème 14, assertion 2, on obtient :

Corollaire 15.— *Le cardinal d'un continu métrisable non réduit à un point est celui du continu.*

▶ Rappelons que l'on a vu à la suite de la proposition 9 du chapitre 2 que tout espace compact métrisable totalement discontinu est homéomorphe à un fermé de K_3, l'ensemble triadique de Cantor. Par ailleurs, on verra plus loin (Corollaire 26) que l'hypothèse de connexité du corollaire 15 peut être remplacée par : non dénombrable.

3. L'ENSEMBLE DE CANTOR, LES IRRATIONNELS ET LES ESPACES POLONAIS

Définition 5 — On dit qu'un espace topologique X est *polonais* s'il est métrisable, séparable, et s'il existe une distance compatible avec la topologie de X pour laquelle X est complet.

Les espaces polonais ont les propriétés élémentaires suivantes (*cf.* Bourbaki TG IX57 *sqq* pour les démonstrations) :

- ▶ Tout sous-espace fermé d'un espace polonais est polonais.
- ▶ Tout sous-espace ouvert d'un espace polonais est polonais.
- ▶ Un produit dénombrable d'espaces polonais est polonais.
- ▶ La somme d'une famille dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais.
- ▶ En tant qu'espace métrique séparable, tout espace polonais est de Lindelöf.
- ▶ On a vu au chapitre 1 (Théorèmes 1, 56-57) d'Aleksandrov et Mazurkiewicz) que les sous-espaces polonais d'un espace polonais X sont exactement les $\mathcal{G}_\delta$ de X. En outre, tout espace polonais est homéomorphe à un $\mathcal{G}_\delta$ de $[0;1]^{\mathbb{N}}$ (chapitre 1, corollaire 58).

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble ${\mathbb{N}^*}^{\mathbb{N}^*}$ des suites d'entiers ≥ 1. On a vu au chapitre 2 qu'une conséquence du théorème 2.8 (de Hausdorff) caractérisant topologiquement $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est que $\mathcal{N}$ est homéomorphe à l'ensemble des nombres irrationnels. C'est donc un espace polonais de dimension zéro nulle-part-localement-compact. (Bourbaki qualifie d'*éparpillés* les espaces séparés de dimension zéro ; *cf.* Note (6) du chapitre 2).

Théorème 16 — *Soit* X *un espace polonais. Il existe une surjection continue ouverte* $\phi : \mathcal{N} \to X$.

Démonstration — Soit d une distance sur X compatible avec la topologie de X, et pour laquelle X est complet. Pour tout $A \subset X$, notons diam(A) le diamètre de A relativement à d. Comme X est séparable, il existe une décomposition de X de la forme $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, où les A_i sont des ouverts non vides de diamètre ≤ 1. Par récurrence sur k, on définit une famille $(A_{n,k})_{n\in{\mathbb{N}^*}^k, k\in\mathbb{N}^*}$ d'ouverts non vides de X en posant $A_{n,1} = A_n$, puis en prenant une suite $(\{A_{n,k}\}_{n\in{\mathbb{N}^*}^k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de recouvrements de plus en plus fins vérifiant :

$$\begin{cases} A_{(n_1,\ldots,n_k),k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{(n_1,\ldots,n_k,j),k+1}, \\ \operatorname{diam}(A_{(n_1,\ldots,n_k,j),k+1}) \leq 1/(k+1) \quad \text{et} \\ (A_{(n_1,\ldots,n_k,j),k+1})^- \subset A_{(n_1,\ldots,n_k),k}, \text{ pour tous les termes de la famille.} \end{cases}$$

A tout $n = (n_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{N}$, on associe la suite décroissante $\overline{A_{n_1,1}}, \overline{A_{(n_1,n_2),2}}, \ldots$ C'est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers zéro. D'après le théorème de Cantor (*cf.* Dugundji *Topology*, p. 296 *sq*), son intersection est un singleton, que nous noterons $\phi(n)$. Notons également que l'on a $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{(n_1,\ldots,n_i),i} = \bigcap_{i=1}^{\infty}((A_{(n_1,\ldots,n_i),i})^-)$, car pour tout i, on a :

$\ldots (A_{(n_1,\ldots,n_{i+1}),i+1})^- \subset A_{(n_1,\ldots,n_i),i} \subset (A_{(n_1,\ldots,n_i),i})^- \subset \ldots$ Soit $x \in X$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x \in A_{n_1,1}$. Il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_{(n_1,n_2),2}$ etc. Si, pour tout k, on a $x \in A_{(n_1,\ldots,n_k),k}$, alors $\phi((n_1;n_2;\ldots)) = x$, ce qui montre que ϕ est surjective.

Montrons à présent que ϕ est continue. Soient $n = (n_1,\ldots) \in N$, et $x = \phi(n)$. Soient $\varepsilon > 0$, et $B(x;\varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $1/(p+1) < \varepsilon$; alors, pour tout $k \geq p$, on a $A_{(n_1,n_2,\ldots,n_k),k} \subset B(x;\varepsilon)$. Cela étant, soit U le voisinage de n dans N défini par $U = \{m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in N \mid \forall i,\ 1\leq i\leq p+1,\ m_i = n_i\}$. Il vérifie $\phi(U) \subset B(x;\varepsilon)$, ce qui montre la continuité de ϕ.

L'application ϕ est ouverte. Pour le démontrer, il suffit d'établir que, pour tout ouvert Ω d'une base d'ouverts de N, $\phi(\Omega)$ est un ouvert de X. On considère la base $\{\Omega_{n_1,\ldots,n_k} \mid k \in \mathbb{N}^*,\ (n_1,\ldots,n_k) \in \mathbb{N}^{*k}\}$ définie par : $\Omega_{n_1,\ldots,n_k} = \{p = (p_j) \in N \mid p_1 = n_1,\ldots,p_k = n_k\}$. Alors, $\phi(\Omega_{n_1,\ldots,n_k}) = A_{(n_1,\ldots,n_k),k}$, et cela achève la démonstration. ■

Définition 6 — On dit qu'une partie E d'un espace polonais est *analytique* s'il existe une surjection continue $N \to E$.

Le théorème 16 exprime donc qu'un espace polonais est analytique.

Théorème 17 — *Soit* X *un espace polonais. Alors, il existe un espace polonais de dimension zéro,* Y, *et une bijection continue* $Y \to X$.

La démonstration utilise les théorèmes 56, 57 et 58 du chapitre 1, ainsi que la propriété T6 du chapitre 2 (§ 3.2).

Démonstration — Reprenons les notations du chapitre 2. Soit E l'ensemble des extrémités des intervalles $I_{p,q}$ utilisés dans la construction de l'ensemble triadique de Cantor, K_3. L'ensemble $K_3 \backslash E$ est un $\mathfrak{G}_\delta$ de K_3 ; c'est donc un espace polonais, et il est de dimension zéro. La surjection continue définie à la propriété T6 du chapitre 2 § 3.2 (p.101) induit une bijection continue $K_3\backslash E \to [0;1]$. De cette bijection, on déduit qu'il existe une bijection continue Ψ du polonais de dimension zéro $(K_3\backslash E)^{\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]^{\mathbb{N}^*}$. Ce dernier espace est polonais, et X admet un plongement $X \hookrightarrow [0;1]^{\mathbb{N}^*}$, de sorte que l'on peut considérer X comme une partie de $[0;1]^{\mathbb{N}^*}$. Cette partie, topologiquement complète, est un $\mathfrak{G}_\delta$ de $[0;1]^{\mathbb{N}^*}$, et son image réciproque par Ψ est un $\mathfrak{G}_\delta$ de $(K_3\backslash E)^{\mathbb{N}^*}$, noté Y. L'espace Y est polonais et de dimension zéro. C'est ce que l'on voulait. ■

Remarque : Bourbaki appelle *espace de Lusin* un espace séparé qui est l'image par une bijection continue d'un espace polonais de dimension zéro (*i.e.* éparpillé). Le théorème 17 peut donc, grâce à une réciproque évidente, s'exprimer sous cette forme : *un espace séparé* X *est lusinien si et seulement s'il existe un espace polonais* P *et une bijection continue* $P \to X$ (Bourbaki TG IX 62 prop. 11).

On a vu au chapitre 1 que tout espace polonais est homéomorphe à un $\mathfrak{G}_\delta$ de $[0;1]^{\mathbb{N}}$. Dans le théorème 17, on a utilisé des espaces polonais de dimension zéro. Ces espaces peuvent être représentés de la façon particulière que voici :

Théorème 18 — *Tout espace polonais* X *de dimension zéro est homéomorphe à un fermé de* $\mathcal{N}$.

Démonstration — Soit X un espace polonais de dimension zéro. Si $X = \emptyset$, le théorème est évident. Supposons $X \neq \emptyset$, et munissons X d'une distance d pour laquelle il est complet. On définit par récurrence sur n une suite $(\mathcal{B}_n)$ de partitions de X de plus en plus fines, par des parties de X à la fois ouvertes et fermées, et de diamètre $< 1/n$.

● Pour $n = 1$: tout point x de X admet une base de voisinages à la fois ouverts et fermés, car X est de dimension zéro. Soit, pour chaque $x \in X$, V_x un tel ouvert fermé de diamètre ≤ 1. Puisque X est métrisable et séparable, c'est un espace de Lindelöf (*cf.* Chapitre 1, § 6.1, Déf. 14 *sqq*), et le recouvrement $(V_x)_{x \in X}$ admet un sous-recouvrement dénombrable $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = W_n \setminus (W_n \cap \bigcup_{k<n} W_k)$. Alors A_n est un ouvert-fermé de diamètre < 1 et $\{A_p \mid p \in \mathbb{N}\} = \mathcal{B}_1$ est une partition de X.

● Supposons avoir construit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$, avec $\mathcal{B}_n = \{A_{p_1,\dots,p_n} \mid (p_1,\dots,p_n) \in \mathbb{N}^{*n}\}$. Pour tout $(p_1,\dots,p_n) \in \mathbb{N}^{*n}$, on construit ainsi une partition $\{A_{p_1,\dots,p_{n,q}} \mid q \in \mathbb{N}^*\}$ de $A_{p_1,\dots,p_n}$ par des ouverts-fermés de diamètre $< 1/(n+1)$. Si $A_{p_1,\dots,p_n} = \emptyset$, on pose $A_{p_1,\dots,p_{n,q}} = \emptyset$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Si $A_{p_1,\dots,p_n} \neq \emptyset$, on refait avec cet ensemble la construction effectuée avec X dans le cas $n = 1$. Pour chaque $x \in A_{p_1,\dots,p_n}$, soit V_x un voisinage ouvert et fermé de x inclus dans $A_{p_1,\dots,p_n}$, et de diamètre $< 1/(n+1)$. Soit $\{B_q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$ un sous-recouvrement dénombrable de $\{V_x \mid x \in A_{p_1,\dots,p_n}\}$. On pose, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$: $A_{p_1,\dots,p_{n,q}} = B_q \setminus (B_q \cap \bigcup_{k<n} B_k)$.

● Posons $Y = \{n = (n_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{N} \mid \forall j \in \mathbb{N}^*,\ A_{n_1,\dots,n_j} \neq \emptyset\}$. Alors Y est un fermé de $\mathcal{N}$. En effet, Y^c est ouvert, car si $n = (n_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in Y^c$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_{n_1,\dots,n_j} = \emptyset$, et alors le voisinage $\Omega_{n_1,\dots,n_j} = \{(p_q) \in \mathcal{N} \mid p_1 = n_1, \dots, p_j = n_j\}$ de n vérifie $Y \cap \Omega_{n_1,\dots,n_j} = \emptyset$.

● On définit une application $\phi : Y \to X$ par : $\phi((n_j)) = \bigcap_{q \in \mathbb{N}} A_{n_1,\dots,n_q}$. C'est bien une application car d'après le théorème de Cantor (*cf.* Dugundji, *Topology*, p. 296), dans l'espace complet X, l'intersection de la suite décroissante $(A_{n_1,\dots,n_q})_{q \in \mathbb{N}^*}$ de fermés dont le diamètre tend vers zéro est un singleton.

● L'application ϕ est surjective car les $\mathcal{B}_n$ forment des partitions. Elle est injective car si $x, y \in X$ et $d(x;y) > 1/n$, alors $\mathcal{B}_n$ sépare x et y (*i.e.* $St(x;\mathcal{B}_n) \neq St(y;\mathcal{B}_n)$). ELle est continue : si l'on munit $\mathcal{N}$ de la distance δ définie par
$\delta((n_j);(p_q)) = \inf\{1/k \mid (n_1;\dots;n_k) = (p_1;\dots;p_k)\}$, l'application ϕ est lipschitzienne de rapport 1. Enfin, $\phi(\Omega_{n_1,\dots,n_j} \cap Y) = A_{n_1,\dots,n_j}$, ce qui montre que ϕ est ouverte.

● Ainsi, l'application ϕ est une bijection continue ouverte. C'est l'homéomorphisme cherché. ∎

Théorème 19 — *Soient* X *un espace polonais, et* Y *un espace métrique séparable non dénombrable tel qu'il existe une surjection continue* $\phi : X \to Y$.

Alors, il existe une partie A *de* X *homéomorphe à* C *et telle que* $\phi|_A$ *soit un homéomorphisme.*

En particulier, $\phi(A)$ *est une partie compacte de* Y *homéomorphe à* C. *En outre, si* X *est un espace polonais non dénombrable, son cardinal est* $\mathfrak{c}$, *le cardinal du continu.*

Pour démontrer que le cardinal d'un espace polonais non dénombrable est $\mathfrak{c}$, on utilise le corollaire 58 du chapitre 1.

Démonstration ■ Pour tout $y \in Y$, soit $x_y \in X$ un point tel que $\phi(x_y) = y$ (Axiome du choix). Posons $Z = \{x_y | y \in Y\}$. L'espace métrique Z est séparable et non dénombrable. Soit N l'ensemble des $z \in Z$ ayant un voisinage dénombrable, N_z. On a $N = \bigcup_{z \in N} N_z$, et, puisque Z est séparable, il existe une partie dénombrable $M \subset N$ telle que $N = \bigcup_{z \in M} N_z$. Par suite, N est dénombrable. Cela étant, si $z \in Z \backslash N$, tout voisinage de z contient un nombre non dénombrable de points de $Z \backslash N$. Autrement dit, tout point de $Z \backslash N$ est point d'accumulation de $Z \backslash N$ (on dit que $Z \backslash N$ est *dense en lui-même*).

• L'application ϕ est une bijection $Z \backslash N \to \phi(Z \backslash N)$. Soient x_o et x_1 deux points distincts de $Z \backslash N$. Puisque ϕ est continue, il existe deux boules fermées disjointes B_o et B_1 de centres respectifs x_o et x_1, de rayons <1, et vérifiant : $\phi(B_o) \cap \phi(B_1) = \emptyset$. Comme tout point de $Z \backslash N$ est point d'accumulation de $Z \backslash N$, $B_o \cap (Z \backslash N)$ et $B_1 \cap (Z \backslash N)$ sont des ensembles non dénombrables. Il existe donc deux points distincts de B_o, $x_{o,o}$ et $x_{o,1}$, et deux boules fermées disjointes $B_{o,o}$ et $B_{o,1}$ de centres respectifs $x_{o,o}$ et $x_{o,1}$, de rayons $<\frac{1}{2}$, et vérifiant $\phi(B_{o,o}) \cap \phi(B_{o,1}) = \emptyset$. De même pour B_1. Par récurrence, on construit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et tout k-uple $(i_1,\dots,i_k) \in \{0;1\}^k$ une boule fermée $B_{i_1,\dots,i_k}$ de centre $x_{i_1,\dots,i_k}$, de rayon $<1/k$, dont l'intersection avec $Z \backslash N$ est un ensemble non dénombrable, et qui est reliée aux autres boules de la famille par les deux conditions suivantes :

(i) $B_{i_1,\dots,i_k} \subset B_{i_1,\dots,i_{k-1}}$

(ii) $\phi(B_{i_1,\dots,i_k}) \cap \phi(B_{j_1,\dots,j_k}) = \emptyset$ si $(i_1,\dots,i_k) \neq (j_1,\dots,j_k)$.

• Pour tout $c \in C$, $c = (c_1, c_2, \dots)$, posons : $\Psi(c) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_{c_1,c_2,\dots,c_k}$. Comme le diamètre des $B_{c_1,\dots,c_k}$ tend vers 0, $\Psi(c)$ est un singleton. On vérifie facilement que Ψ est continue et injective. Puisque C est compact, $\Psi(C)$ est homéomorphe à C.

• Montrons à présent que ϕ est un homéomorphisme $\Psi(C) \to \phi(\Psi(C))$. On vient de voir que $\Psi(C)$ est compact. Il suffit donc de s'assurer que ϕ est injective sur $\Psi(C)$. Cela résulte immédiatement de la condition (ii).

■ Enfin, si X est un espace polonais, il est homéomorphe à un $\mathcal{G}_\delta$ de $[0;1]^{\mathbb{N}}$. Il vérifie donc : $\mathrm{card}(X) \leq \mathfrak{c}$. Si X est de plus non dénombrable, il contient une partie compacte homéomorphe à C. On a donc : $\mathfrak{c} = \mathrm{card}(C) \leq \mathrm{card}(X)$, et finalement : $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{c}$. ■

4. APPLICATION : LES BORÉLIENS DES ESPACES POLONAIS

4.1. DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES.

Définition 7 – Soit X un espace métrique. On appelle *tribu de Borel* de X, et l'on note $\mathcal{B}_X$, ou plus simplement $\mathcal{B}$, la plus petite tribu contenant les ouverts de X. Les éléments de cette tribu sont appelés les *boréliens* de X.

Puisque dans un espace métrisable les ouverts sont des $\mathcal{F}_\sigma$ et que les fermés sont des $\mathcal{G}_\delta$, la tribu $\mathcal{B}_X$ est aussi engendré par les fermés. En outre, puisque les fermés sont les complémentaires des ouverts, $\mathcal{B}_X$ n'est autre que la plus petite partie de $\mathcal{P}(X)$ contenant les ouverts de X, et stable par réunion dénombrable et intersection dénombrable.

Proposition 20 – *La tribu* $\mathcal{B}_X$ *est la plus petite tribu rendant mesurables les applications continues bornées* $X \to \mathbb{R}$.

Cet énoncé suppose que $\mathbb{R}$ soit muni de sa tribu de Borel. La démonstration utilise le fait que tout espace métrisable est normal, ainsi que le théorème de Tietze-Urysohn (chapitre 1, théorème 37).

Démonstration – Soit $\mathcal{C}$ la plus petite tribu rendant mesurables les applications continues bornées. $X \to \mathbb{R}$.

■ *Montrons d'abord* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_X$. Soit f une application continue bornée $X \to \mathbb{R}$. Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X, donc un borélien de X. Par suite, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est un borélien de X, et l'on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_X$.

■ *Montrons à présent* $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{C}$. Soit F un fermé de X. Puisqu'un espace métrisable est normal, et que F est un $\mathcal{G}_\delta$ de X, il existe une suite décroissante $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ d'ouverts de X vérifiant $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = F$, et il existe une suite (f_n) d'applications continues $X \to [0;1]$ vérifiant : $f_n = 1$ sur F, et $f_n = 0$ sur $X \setminus U_n$. On pose $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$. La fonction f est continue et bornée. On a en outre : $F = \{x \mid f(x) = 1\}$. Il s'ensuit $F \in \mathcal{C}$, et donc $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{C}$, ce qui achève la preuve. ■

4.2. CLASSIFICATION DES BORELIENS PAR ISOMORPHISMES.

Définition 8 – Soient X_1 et X_2 deux espaces polonais. On dit que deux boréliens $B_1 \subset X_1$ et $B_2 \subset X_2$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\phi : B_1 \to B_2$ telle que ϕ et ϕ^{-1} soient mesurables.

On désigne toujours par K_3 l'ensemble triadique de Cantor, et par $\mathcal{C}$ l'ensemble de Cantor $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$.

Lemme 21. – *L'intervalle* $[0;1]$ *est isomorphe à* K_3.

Démonstration — La bijection définie au début de la démonstration du théorème 17 convient : si E est l'ensemble des extrémités des intervalles $I_{p,q}$ utilisés dans la définition de K_3, la surjection $K_3 \to [0;1]$ définie à la propriété T6 du chapitre 2, § 3.3. induit une bijection $\phi : K_3 \setminus E \to I$. Cette bijection est strictement croissante, de même que son application réciproque. Or les applications croissantes entre boréliens de $\mathbb{R}$ sont mesurables. ■

Lemme 22 — *L'ensemble* $[0;1]^{\mathbb{N}}$ *est isomorphe à un borélien de* K_3.

Comme un borélien d'un borélien est un borélien, on en déduit que tout borélien de $[0;1]^{\mathbb{N}}$ est isomorphe à un borélien de K_3

La démonstration utilise le lemme 21, ainsi que les énoncés T5 et 6 du chapitre 2.

Démonstration — L'ensemble triadique de Cantor, K_3, est homéomorphe à C, l'ensemble de Cantor. (*cf*. chapitre 2 § 3, propriété T5, p.101), qui est lui-même homéomorphe à $C^{\mathbb{N}}$, d'après le théorème 2.6. ; par suite, il est aussi homéomorphe à $K_3^{\mathbb{N}}$.

L'application ϕ définie dans la démonstration du lemme 21 induit un isomorphisme $\psi : (K_3 \setminus E)^{\mathbb{N}} \to [0;1]^{\mathbb{N}}$ d'un borélien de $K_3^{\mathbb{N}}$ sur $[0;1]^{\mathbb{N}}$.

Comme $K_3^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à K_3, $[0;1]^{\mathbb{N}}$ est isomorphe à un borélien de K_3. ■

Théorème 23 — *Soient* X *un espace polonais et* B *un borélien de* X. *Alors il existe un borélien* C *de* K_3 *isomorphe à* B.

La démonstration utilise le corollaire 58 du chapitre 1, et le lemme 22.

Démonstration — Grâce au lemme précédent, on est ramené à démontrer que B est isomorphe à un borélien de $[0;1]^{\mathbb{N}}$. Le théorème d'Urysohn et Aleksandrov (chapitre 1, corollaire 58) affirme que X est homéomorphe à un $\mathcal{G}_\delta$ de $[0;1]^{\mathbb{N}}$

Le borélien B de X est donc isomorphe à un borélien d'un $\mathcal{G}_\delta$ de $[0;1]^{\mathbb{N}}$, qui est aussi un borélien de $[0;1]^{\mathbb{N}}$. ■

Le théorème 23 ramène l'étude des boréliens isomorphes d'un espace polonais à celle des boréliens isomorphes de K_3 (c'est-à-dire de C).

On continue à poser $N = \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$; cet ensemble est homéomorphe à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*cf*. chapitre 2, théorème 8)

Théorème 24 — *Soient* X *un espace polonais, et* B *un borélien de* X. *Alors, il existe une application continue* $\phi : N \to X$ *vérifiant* $\phi(N) = B$.

Autrement dit : *Les boréliens des espaces polonais sont analytiques.*

Pour la démonstration, on utilise le théorème 16.

Démonstration — On a vu au théorème 16 qu'un espace polonais est image continu de N. Un fermé d'un espace polonais étant lui-même polonais, l'ensemble A des parties de X images continues de N contient $\mathcal{F}_X$, l'ensemble des fermés de X. Il suffit donc de montrer que A est stable par réunions dénombrables et par intersections dénombrables.

■ Soient $A_1,\dots,A_n,\dots \in \mathcal{A}$, et pour chaque n, $\phi_n : N \to X$ une application continue telle que $\phi_n(N) = A_n$. Posons : $\hat{N} = \{(n_1, n_2,\dots) \in N^{\mathbb{N}^*} \mid \phi_1(n_1) = \phi_2(n_2) = \dots\}$ comme les applications ϕ_i sont continues, $\hat{N}$ est fermé dans N. On définit ϕ sur $\hat{N}$ par : $\phi((n_1,n_2,\dots)) = \phi_1(n_1)$. L'application est continue, et vérifie $\phi(\hat{N}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Par ailleurs, $\hat{N}$ est fermé dans $N^{\mathbb{N}^*}$ qui est homéomorphe à N. Ainsi, $\hat{N}$ est un espace polonais. Il existe donc une application continue ψ de N sur $\hat{N}$ (théorème 16). L'application $\phi \circ \psi$ est continue, et c'est une surjection $N \to \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Cela montre que $\mathcal{A}$ est stable par intersections dénombrables.

■ Considérons à présent $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, et posons, pour tout entier $k>1$, $N_k = \{(n_1,n_2,\dots) \in N \mid n_1 = k\}$. Alors les N_k, tous homéomorphes à N, forment une partition de N en parties à la fois ouvertes et fermées. Comme $A_i \in \mathcal{A}$, il existe une surjection continue $\phi_i : N_i \to A_i$. L'application $\phi : N \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ définie par $\phi\restriction_{N_i} = \phi_i$ est une surjection continue, ce qui achève la démonstration. ■

Par une démonstration similaire, on obtient le

<u>Théorème 25</u> — *Soient* X *un espace polonais et* B *un borélien de* X .
Alors il existe un espace polonais de dimension zéro Y *et une bijection continue* $Y \to B$.

Passons aux conséquences des théorèmes précédents.

<u>Corollaire 26</u> (*Aleksandrov et Hausdorff, 1916*)
Soient X *un espace polonais et* B *un borélien non dénombrable de* X .
Il existe un compact $K \subset B$ *homéomorphe à* C . *En particulier,* B *a la puissance du continu.*

La démonstration utilise les théorèmes 19 et 24.

<u>Démonstration</u> — D'après le théorème 24, il existe une surjection continue $\phi : N \to B$. Il résulte alors du théorème 19 qu'il existe une partie A de N homéomorphe à C et telle que $\phi\restriction_A$ soit un homéomorphisme : $\phi(A)$ est une partie de B homéomorphe à C. ■

En particulier, si X est un compact métrisable non dénombrable, c'est aussi un espace polonais et un borélien de lui-même. Il a la puissance du continu (ce que l'on avait vu au théorème 19).

<u>Lemme 27</u> — *Soient* A_1, B *et* A_o *des boréliens de* C *vérifiant* $A_1 \subset B \subset A_o$, *et tels que* A_1 *et* A_o *soient isomorphes.*
Alors, B *et* A_o *sont isomorphes.*

<u>Démonstration</u> — Posons $B_1 = A_o \setminus A_1$. Soit ϕ un isomorphisme de A_o sur A_1. De la relation $A_o = A_1 \cup B_1$, on tire $A_1 = \phi(A_1) \cup \phi(B_1)$ où $\phi(A_1)$ et $\phi(B_1)$ sont des boréliens disjoints isomorphes respectivement à A_1 et B_1. On pose : $A_2 = \phi(A_1)$ et $B_2 = \phi(B_1)$. En procédant par récurrence, on construit deux suites (A_n) et (B_n) de boréliens satisfaisant aux relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- A_n et B_n sont disjoints
- A_{n-1} et A_n d'une part, B_{n-1} et B_n d'autre part sont isomorphes.
- $A_{n-1} = A_n \cup B_n$.

On obtient alors $A_o = (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

Revenons au borélien B, et posons :

$$D_1 = A_o \setminus B, \quad E_1 = B \setminus A_1 .$$

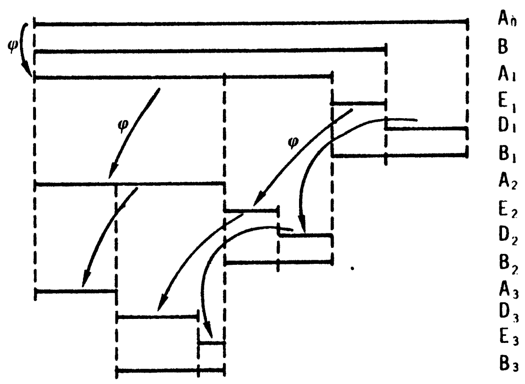


figure 3

Alors, $B_1 = E_1 \cup D_1$, et, comme les B_n sont tous isomorphes, on construit deux suites (E_n) et (D_n) de boréliens vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $E_n \cap D_n = \emptyset$
- E_n et E_1 d'une part, D_n et D_1 d'autre part sont isomorphes.
- $B_n = E_n \cup D_n$.

On obtient alors :

$$A_o = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

et ceci est isomorphe à

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} D_n$$
$$= E_1 \cup (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n)$$
$$= E_1 \cup A_1$$
$$= B$$

ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 28 — *Soient* X *et* Y *deux espaces polonais, et* $A \subset X$ *et* $B \subset Y$ *deux boréliens. Alors* A *et* B *sont isomorphes si et seulement s'ils ont même cardinalité.*

Démonstration — La condition est visiblement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. D'après le théorème 23, on peut se ramener au cas où X et Y sont tous deux égaux à l'ensemble de Cantor, $\mathcal{C}$. Si A et B sont finis ou infinis dénombrables, le résultat est évident. Sinon, d'après le corollaire 26, il existe un borélien K de A isomorphe à $\mathcal{C}$. Comme on a $K \subset A \subset \mathcal{C}$, et K isomorphe à $\mathcal{C}$, le lemme précédent montre que A et $\mathcal{C}$ sont isomorphes. De même pour B, et le résultat énoncé est établi. ■

4.3 LE THEOREME D'ISOMORPHISME DE KURATOWSKI

Soient X et Y deux espaces polonais. On suppose ces espaces munis de leur tribu borélienne. Si f est une application $X \to Y$, on dit que f est mesurable si *l'image réciproque* de tout borélien de Y est un borélien de X. En général, cela ne fournit rien quant à la nature des *images directes* par f des boréliens de X. Le théorème de Kuratowski vient combler cette lacune ; il affirme que si $E \subset X$ est un borélien, et si f est une bijection mesurable $E \to f(E)$, alors $f(E)$ est un borélien de Y. C'est ce théorème que nous allons établir.

Rappelons (définition 6) qu'une partie A d'un espace polonais X est dite *analytique* s'il existe une application continue $\phi : \mathcal{N} \to X$ telle que $\phi(\mathcal{N}) = A$. On note $\mathcal{A}_X$, ou plus simplement $\mathcal{A}$ la classe des parties analytiques de X. On a établi au théorème 24 l'inclusion $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{A}_X$.

Lemme 29 — *Soient* (A_m) *et* (B_n) *deux suites de parties d'un espace polonais* X *telles que, pour tout* $(m;n) \in \mathbb{N}^2$, *il existe deux boréliens disjoints* $C_{m,n}$ *et* $D_{m,n}$ *contenant respectivement* A_m *et* B_n .
Alors, il existe deux boréliens disjoints E *et* F *vérifiant :* $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \subset E$ *et* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset F$.

Démonstration — On pose :

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m,n}$$

et

$$F = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{m,n} \ . \ ■$$

Proposition 30 : *Séparation des ensembles analytiques.*
Soient X *un espace polonais, et* A *et* B *deux parties analytiques disjointes de* X .
Alors, il existe des boréliens disjoints D *et* E *vérifiant :* $A \subset D$, $B \subset E$.

Démonstration — Soient ϕ et ψ deux applications continues $\mathcal{N} \to X$ telles que : $\phi(\mathcal{N}) = A$, $\psi(\mathcal{N}) = B$. Posons $\mathcal{N}_k = \{(n_1;n_2 \ldots) \in \mathcal{N} \mid n_1 = k\}$. Il vient : $\mathcal{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k$, d'où $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \phi(\mathcal{N}_k)$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_k)$.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas deux boréliens disjoints D et E contenant respectivement A et B. D'après le lemme 29, il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $q_1 \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il n'existe pas deux boréliens disjoints contenant $\phi(\mathcal{N}_{k_1})$ et $\psi(\mathcal{N}_{q_1})$.

Recommençons en décomposant $\mathcal{N}_p$, $p \in \mathbb{N}^*$ sous la forme : $\mathcal{N}_p = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{N}_{p,r}$, avec

$N_{p,r} = \{(n_1,n_2,\ldots) \in N \mid n_1 = p,\ n_2 = r\}$. Pour la même raison que précédemment, il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ et $q_2 \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il n'existe pas deux boréliens disjoints contenant respectivement $\phi\ (N_{k_1,k_2})$ et $\psi(N_{q_1,q_2})$. Bref, par récurrence, on obtient $x = (k_1,k_2,\ldots)$ et $y=(q_1,q_2,\ldots) \in N$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\phi\ (N_{k_1,\ldots,k_p})$ et $\psi\ (N_{q_1,\ldots,q_p})$ ne soient pas contenus dans des boréliens disjoints.

Comme $\phi\ (x) \in A$, que $\psi\ (y) \in B$, et que $A \cap B = \emptyset$, on a $\phi\ (x) \neq \psi\ (y)$, de sorte qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\phi(x);\varepsilon) \cap B(\psi(y);\varepsilon) = \emptyset$. Les applications ϕ et ψ étant continues, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : diam $\phi(N_{k_1,\ldots,k_N}) < \varepsilon$ et diam $\psi\ (N_{q_1,\ldots,q_N}) < \varepsilon$. Alors, $B(\phi\ (x);\varepsilon)$ et $B(\psi(y);\varepsilon)$ sont deux boréliens disjoints contenant respectivement $N_{k_1,\ldots,k_N}$ et $N_{q_1,\ldots,q_N}$, d'où la contradiction. ∎

Lemme 31 – *Soient* X *un espace polonais et* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite de parties analytiques de* X *disjointes deux à deux.*
Alors, il existe une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ *de boréliens de* X *disjoints deux à deux et vérifiant, pour tout* $n\geq 1$: $B_n \supset A_n$.

Démonstration – Une réunion dénombrable d'ensembles analytiques est analytique (*cf.* troisième partie de la démonstration du théorème 24). D'après la proposition 30, il existe donc deux boréliens disjoints B_1 et C_1 contenant respectivement A_1 et $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$. Il existe également deux boréliens disjoints D_1 et C_2 contenant respectivement A_2 et $\bigcup_{i=3}^{\infty} A_i$. On pose $B_2 = C_1 \cap D_1$. Il existe deux boréliens disjoints D_2 et C_3 contenant respectivement A_3 et $\bigcup_{i=4}^{\infty} A_i$. On pose $B_3 = C_1 \cap C_2 \cap D_2$; et ainsi de suite ; par récurrence. ∎

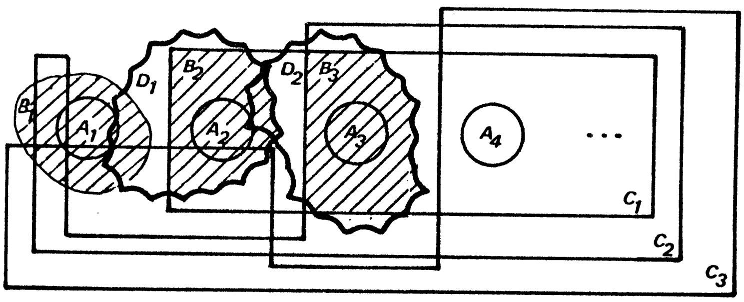


Figure 4

Lemme 32 – *Soient* X *et* Y *deux espaces polonais, et* ϕ *une application mesurable de* X *sur* Y.
Alors $\mathfrak{G}(\phi)$ *, le graphe de* ϕ *, est un borélien de* $X \times Y$.

Démonstration – Notons pr_X et pr_Y les projections de $X \times Y$ sur respectivement X et Y. Les applications pr_Y et $\phi \circ pr_X$ sont toutes deux mesurables. Donc, l'application $\psi : X \times Y \to Y \times Y$, $(x;y) \mapsto (y\ ;\phi\ (x))$ est mesurable. La diagonale Δ_Y est un borélien de $Y \times Y$, et l'on a $\mathfrak{G}(\phi) = \psi^{-1}(\Delta_Y)$, ce qui montre le lemme. ∎

Lemme 33 — *Soient* X *et* Y *deux espaces polonais,* A *une partie analytique de* X , *et* ϕ *une application mesurable* $A \to Y$.
Alors, $\phi(A)$ *est une partie analytique de* Y .

La démonstration utilise le lemme 32 et le théorème 24.

Démonstration — ■ Traitons d'abord le cas où A est borélien de X. D'après le lemme 32, $\mathcal{G}(\phi)$ est un borélien de $X \times Y$. C'est donc un ensemble analytique (théorème 24), et il existe une surjection continue $\psi : N \to \mathcal{G}(\phi)$. Alors, la relation $\phi(A) = pr_Y \circ \psi(N)$ montre que $\phi(A)$ est analytique.

■ Passons au cas général. Puisque A est analytique, il existe une application continue $\tau : N \to X$ telle que $\tau(N) = A$. Il suffit donc d'appliquer à $\phi \circ \tau$ le résultat démontré dans le cas particulier, et le lemme est établi. ■

Lemme 34 — *Soient* X *un espace polonais,* Z *un espace polonais totalement discontinu et* ϕ *une injection continue* $Z \to X$.
Alors, $\phi(Z)$ *est un borélien de* X.

La démonstration utilise les lemmes 31 et 33.

Démonstration — Comme Z est totalement discontinu il existe une famille $(A_{n_1,n_2,\dots,n_k})_{(n_1,n_2,\dots,n_k)\in \mathbb{N}^{*k}, k\in\mathbb{N}^*}$ de parties à la fois ouvertes et fermées de Z ayant la propriété que les $A_{n_1,\dots,n_k,j}$, $j\in\mathbb{N}^*$, forment une partition de $A_{n_1,\dots,n_k}$ par des ensembles de diamètre $\leq 1/k$. D'après le lemme 33, pour tout k, les $\phi(A_{n_1,\dots,n_k})$ sont des ensembles analytiques disjoints de sorte que d'après le lemme 31, il existe une suite de boréliens disjoints deux à deux, $B_{n_1,\dots,n_k} \supset \phi(A_{n_1,\dots,n_k})$. Quitte à remplacer $B_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}}$ par $B_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} \cap B_{n_1,\dots,n_k}$, on peut supposer $B_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} \subset B_{n_1,\dots,n_k}$, cette relation étant bien entendu vérifiée pour tous les multi-indices.

■ Posons à présent : $C_{n_1,\dots,n_k} = B_{n_1,\dots,n_k} \cap \overline{\phi(A_{n_1,\dots,n_k})}$.

Comme, à k fixé, les $B_{n_1,\dots,n_k}$ sont disjoints deux à deux, il en est de même des $C_{n_1,\dots,n_k}$. On en déduit :

$$\bigcup_{n=(n_1,\dots,n_k,\dots)\in N} \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n_1,\dots,n_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{(n_1,\dots,n_k)} C_{n_1,\dots,n_k} .$$

Soit D cet ensemble. La deuxième expression montre que D est un borélien. On va montrer $D = \phi(Z)$.

■ Soit $x \in \phi(Z)$. Il existe $z \in Z$ tel que $\phi(z) = x$. A k fixé, les $A_{n_1,\dots,n_k}$ forment un recouvrement de Z, et il existe donc $n = (n_1,n_2,\dots) \in N$ tel que $z \in A_{n_1,\dots,n_k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors $x \in \phi(A_{n_1,\dots,n_k})$, et donc $x \in D$.

■ Inversement, soit $x \in D$. Comme $C_{n_1,\dots,n_k} \subset \overline{\phi(A_{n_1,\dots,n_k})}$, on a : $x \in \bigcup_{n=(n_1,\dots)\in N} \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\phi(A_{n_1,\dots,n_k})}$, et il existe $n = (n_1,\dots) \in N$ tel que $x \in \overline{\phi(A_{n_1,\dots,n_k})}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Cela implique la non vacuité des $\phi(A_{n_1,\dots,n_k})$, puis celle des $A_{n_1,\dots,n_k}$, de sorte que l'intersection de ces derniers ensembles est non vide. Le diamètre de cette intersection étant nul, c'est un singleton, $\{z\}$. Comme ϕ est continue en z, on a : $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} \phi(A_{n_1,\dots,n_k}) = 0$. On en déduit aussi : $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} (\overline{\phi(A_{n_1,\dots,n_k})}) = 0$, d'où $\{x\} = \{\phi(y)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\phi(A_{n_1,\dots,n_k})}$ c'est-à-dire $D \subset \phi(Z)$, ce qui achève la démonstration ■

Théorème 35 (*Kuratowski*) –
Soient X *et* Y *deux espaces polonais,* A *un borélien de* X , B *une partie de* Y , *et* ϕ *une injection mesurable* $X \to Y$ *telle que* $\phi(A) = B$.
Alors, B *est un borélien.*

Démonstration – D'après le lemme 32, le graphe de ϕ , $\mathcal{G}(\phi)$, est un borélien de $X \times Y$. La projection pr_Y de $X \times Y$ sur Y induit, puisque ϕ est injective, une bijection $\mathcal{G}(\phi) \to B$. D'après le théorème 25, le borélien $\mathcal{G}(\phi)$ est l'image continue d'un espace polonais de dimension zéro, Z, par une bijection $\psi : Z \to \mathcal{G}(\phi)$. L'application $pr_Y \circ \psi$ est une bijection $Z \to B$. D'après le lemme 34, B est un borélien. ■

4.4. CLASSIFICATION ORDINALE DES BORELIENS.

Soit X un espace polonais. On a vu que la tribu $\mathcal{B}_X$ des boréliens de X est la plus petite famille de parties de X stable par réunions dénombrables et par intersections dénombrables et contenant la famille $\mathcal{F}$ des fermés de X. La famille $\mathcal{F}$ est stable par intersections dénombrables car une intersection de fermés est un fermé. La tribu $\mathcal{B}_X$ doit donc contenir la famille $\mathcal{F}_\sigma$ des réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{F}$. On a $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma$, et $\mathcal{F}_\sigma$ est stable par réunions dénombrables. Pour être stable par intersections dénombrables, la tribu $\mathcal{B}_X$ doit contenir la famille $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ des intersections dénombrables de membres de $\mathcal{F}_\sigma$. Posons $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{\sigma\delta}$. On peut continuer ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et définir par récurrence la classe $\mathcal{F}_{n+1}$ comme la famille des intersections (resp. réunions) dénombrables d'éléments de $\mathcal{F}_n$, lorsque n est impair (resp. pair). Ayant fait ceci pour tout n, on a obtenu une suite $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$ de classes de parties de X. La réunion de ces classes est bien sûr stable par réunions dénombrables.

Mais $\mathcal{B}$ doit contenir les intersections dénombrables des membres de ces classes. On pose donc : $\mathcal{F}_\omega = \{A \subset X \mid A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ A_n \in \bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{F}_\alpha\}$. Et l'on continue ainsi par récurrence transfinie : Pour tout ordinal α ,

– si α est pair (un ordinal limite est pair), la classe $\mathcal{F}_\alpha$ est formée des intersections dénombrables des membres des classes $\mathcal{F}_\beta$, avec $\beta<\alpha$;

– si α est impair, la classe $\mathcal{F}_\alpha$ est formée des réunions dénombrables des membres des classes $\mathcal{F}_\beta$, avec $\beta<\alpha$.

Une récurrence transfinie montre que $\mathcal{B}$ contient les $\mathcal{F}_\alpha$,$\alpha < \Omega$. Inversement, puisque toute suite d'ordinaux dénombrables est majorée dans Ω , la classe $\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{F}_\alpha$ est stable par intersections et réunions dénombrables. On a donc bien $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{F}_\alpha$.

Avant de préciser cette classification, voyons une première conséquence. Si l'espace polonais X n'est pas dénombrable, on a vu (corollaire 26 p.145) qu'il a la puissance du continu, $\mathfrak{c}$. Il a donc $\mathfrak{c}$ ouverts, et autant de fermés. En prenant les réunions dénombrables ou les intersections dénombrables de membres d'une famille de $\mathfrak{c}$ éléments, on obtient une famille ayant moins de $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ éléments, mais ayant bien sûr plus de $\mathfrak{c}$ éléments. Elle en a donc exactement $\mathfrak{c}$. De plus, on a $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$, et la réunion de $\aleph_1$ classes de $\mathfrak{c}$ éléments en a $\mathfrak{c}$. Il y a donc $\mathfrak{c}$ boréliens dans X, alors qu'il y a $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ parties. Cela signifie qu'il existe des ensembles non boréliens. Dans cette démonstration, on n'a utilisé ni l'axiome du choix, ni l'hypothèse du continu, seulement l'axiome du choix dépendant .

Proposition 36 *Soit* X *un espace polonais non dénombrable.*
Alors, $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{c} = \mathrm{card}\,(\mathcal{B}_X) < \mathrm{card}\,(\mathcal{P}(X))$.

Remarque 37 — Dans le cas de $\mathbb{R}$, on prendra garde au fait que l'existence d'ensembles non boréliens n'est pas l'existence d'ensembles non mesurables pour la mesure de Lebesgue. En effet, quand on parle de ces derniers, on se réfère à des ensembles n'appartenant pas à la tribu de Borel complétée pour la mesure de Lebesgue par des ensembles de mesure nulle. Or les ensembles de mesure nulle sont nombreux. Soit L la classe de ces ensembles. Comme $\mathrm{card}\ K_3 = \mathrm{card}\ \mathbb{R} = \mathfrak{c}$, et que $\lambda\,(K_3) = 0$, on a $\mathcal{P}(K_3) \subset L$, d'où $\mathrm{card}\ L \geq \mathrm{card}\ (\mathcal{P}(K_3)) = 2^{\mathfrak{c}}$. Par ailleurs, puisque $L \subset \mathcal{P}\,(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{card}\ L \leq 2^{\mathfrak{c}}$, d'où finalement $\mathrm{card}\ L = 2^{\mathfrak{c}}$. Ainsi, en ajoutant à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ les ensembles de mesure nulle, on ne sait pas ce que l'on a ajouté. Plus précisément, ce que l'on a ajouté n'est pas évaluable sans axiomes supplémentaires (*cf.* Appendice § 4.9).

Revenons à la classification des boréliens. On désigne toujours par X un espace polonais. On a vu que $\mathcal{B}_X$ est engendrée par les ouverts. On peut donc refaire avec la classe $\mathcal{G}$ des ouverts de la même construction qu'avec $\mathcal{F}$. Mais comme une réunion d'ouverts est un ouvert, on commencera par prendre les intersections dénombrables d'ouverts, c'est-à-dire par construire la classe $\mathcal{G}_\delta$.
On définit donc, par récurrence transfinie une famille $\mathcal{G}_\alpha$, $\alpha < \Omega$:

- On pose $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$.
- Si α est un ordinal pair $\neq 0$, $\mathcal{G}_\alpha$ est l'ensemble des réunions dénombrables d'éléments des $\mathcal{G}_\beta$, $\beta < \alpha$
- Si α est un ordinal impair, $\mathcal{G}_\alpha$ est l'ensemble des intersections dénombrables d'éléments des $\mathcal{G}_\beta$, $\beta < \alpha$.

On a ici aussi : $\mathcal{B}_X = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{G}_\alpha$.

Cela étant, dans un espace polonais, les ouverts sont des $\mathcal{F}_\sigma$, tandis que les fermés sont des $\mathcal{G}_\delta$.
Partant, on a les inclusions

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \subset & \mathcal{F}_\sigma & \subset & \mathcal{F}_{\sigma\delta} & \subset & \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma} \quad \cdots \\ & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & \\ \mathcal{G} & \subset & \mathcal{G}_\sigma & \subset & \mathcal{G}_{\sigma\delta} & \subset & \mathcal{G}_{\sigma\delta\sigma} \quad \cdots \end{array}$$

Avant de voir les propriétés de ces classes, introduisons un peu de vocabulaire :

Définition 9 — Les familles $\mathcal{F}_\alpha$, où α est pair, ainsi que les familles $\mathcal{G}_\alpha$, où α est impair sont stables par intersections dénombrables : les ensembles constituant ces familles sont dits de *classe* α *multiplicative*. De même, les ensembles de classe $\mathcal{F}_\alpha$, où α est impair, ainsi que les ensembles de classe $\mathcal{G}_\alpha$, où α est pair, sont dits de *classe* α *additive*. Un ensemble qui est à la fois un $\mathcal{F}_\alpha$ et un $\mathcal{G}_\alpha$ est dit *ambigu de classe* α .

Voici quelques propriétés élémentaires des classes $\mathcal{G}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\alpha$ que nous énoncerons sans démonstration. (*cf.* Kuratowski , Topologie vol. 1 pp. 252 *sqq*)

▶ Le complémentaire d'un ensemble de classe $\mathcal{F}_\alpha$ est de classe $\mathcal{G}_\alpha$.

▶ Les classes $\mathcal{G}_\alpha$ (resp. $\mathcal{F}_\alpha$) sont stables par réunions finies et par intersections finies.

▶ Le produit cartésien de deux ensembles de classe $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$) est de la même classe.

▶ Soient X et Y deux espaces polonais, et $Z \subset X \times Y$ un borélien de classe $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$). Alors, pour tout $y \in Y$, $\{x \in X \mid (x; y) \in Z\}$ est un borélien de classe $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$). De plus, si $X = Y$, $\{x \subset X \mid (x; x) \in Z\} = pr_X(Z \cap \Delta)$ est de classe $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$).

▶ La réunion, l'intersection, la différence de deux ensembles ambigus de classe α est un ensemble ambigu de classe α.

▶ De la relation $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. = A_1 \cup A_2 \backslash A_1 \cup A_3 \backslash (A_2 \cup A_1) \ldots$, on tire que tout borélien de classe $\alpha > 0$ (resp. $\alpha > 1$) additive est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles *disjoints* ambigus de classe α (resp. disjoints de classe $< \alpha$ multiplicatives).

La classification des boréliens en classes $\mathcal{G}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\alpha$ est-elle justifiée ? On a vu que nécessairement, $\mathcal{B}$ contient tous les $\mathcal{G}_\alpha$, et que ceux-ci forment une famille croissante. Mais la classification n'aura de sens que si, dans certains espaces, la famille des $\mathcal{G}_\alpha$ (donc celles des $\mathcal{F}_\alpha$) est *strictement* croissante. C'est ce problème que nous allons à présent aborder.

Définition 10 — Soit X un espace polonais. On dit qu'une partie A de $X \times N$ est un ensemble *borélien universel de classe* $\mathcal{G}_\alpha$ (resp. $\mathcal{F}_\alpha$) si A est de classe $\mathcal{G}_\alpha$ (resp. $\mathcal{F}_\alpha$), et si, pour tout borélien $Z \subset X$ de classe $\mathcal{G}_\alpha$ (resp. $\mathcal{F}_\alpha$), il existe $c \in N$ tel que $A[c] \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid (x; c) \in A\} = Z$.

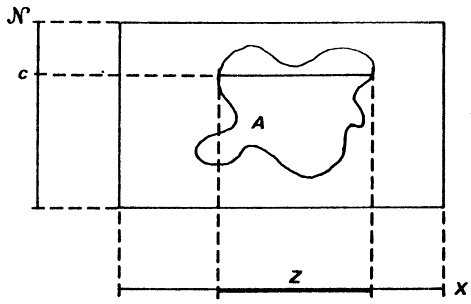


Figure 5

Proposition 38 — *On admet l'axiome du choix. Soit* X *un espace polonais. Alors, pour tout* $\alpha < \Omega$, *il existe un borélien universel pour* X *de classe* $\mathcal{G}_\alpha$ *(resp.* $\mathcal{F}_\alpha$*).*

Demonstration — Soit ϕ un homéomorphisme $N \to N^N$. On pose, pour $z \in N$: $\phi(z) = (\phi(z)_0 ; \phi(z)_1 ; \ldots)$. Par application de l'axiome de choix, à tout ordinal limite $\lambda < \Omega$, associons une suite croissante $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ d'ordinaux convergeant vers λ. Soit également, puisque X est métrisable et séparable, $(O_n)_{n \in N}$ une base dénombrable de la topologie de X. On va définir, par récurrence transfinie, des ensembles $A_\alpha \in X \times N$, à partir de leurs sections $A_\alpha[z]$, $z \in N$.

On pose, pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in N$:

1) $$A_o[z] = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{z_n}$$

2) $$A_{\alpha+1}[z] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_\alpha[\phi(z)_n] \qquad \text{si } \alpha \text{ est pair}$$

$$A_{\alpha+1}[z] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_\alpha[\phi(z)_n] \qquad \text{si } \alpha \text{ est impair}$$

3) $$A_\lambda[z] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\lambda_n}[\phi(z)_n]$$

On va montrer successivement

a) Si $B \subset X$ est de classe α, il existe $z \in N$ tel que $A_\alpha[z] = B$.

b) A_α est de classe $\mathfrak{G}_\alpha$.

c) Pour tout $\alpha < \Omega$, $A_\alpha[z]$ est de classe $\mathfrak{G}_\alpha$.

a) On va procéder par récurrence transfinie. Soit O un ouvert de X. Par définition, il existe une suite (O_{k_n}) extraite de la suite (O_n) et telle que : $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_{k_n}$. Considérons $z = (k_1; k_2; \ldots)$. On a $A_o[z] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_{k_n} = O$, ce qui montre que a) est vrai pour $\alpha = 0$.

● Supposons que a) soit vrai pour α, et montrons qu'il en est de même pour $\alpha+1$. Soit B un ensemble de classe $\mathfrak{G}_{\alpha+1}$. Par définition, on a $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ si α est pair, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ si α est impair, où les B_n sont de classe $\mathfrak{G}_\alpha$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une suite (t_n) d'éléments de N telle que, pour tout n, on ait : $A_\alpha[t_n] = B_n$. Mais par définition de ϕ, il existe $z \in N$ tel que $\phi(z) = (t_n)$. On a alors

$$A_{\alpha+1}[z] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_\alpha[\phi(z)_n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_\alpha[t_n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = B \qquad \text{si } \alpha \text{ est pair, ou}$$

$$A_{\alpha+1}[z] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_\alpha[\phi(z)_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_\alpha[t_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B, \qquad \text{si } \alpha \text{ est impair.}$$

● Supposons enfin que λ soit un ordinal limite, et que, pour tout λ_n, la propriété a) soit vraie. Soit B un borélien de classe λ. Il se décompose sous la forme $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, où B_n est d'une classe $\mathfrak{C}_{\alpha_n}$, avec $\alpha_n < \lambda$. Puisque la suite (λ_n) converge vers λ, pour tout n, il existe λ_{k_n} tel que $\alpha_n \leq \lambda_{k_n}$. Le borélien B_n est alors de classe $\mathfrak{G}_{\lambda_{k_n}}$, et il existe $t_{k_n} \in N$ tel que : $B_n = A_{\lambda_{k_n}}[t_{k_n}]$. Si λ_n est un terme de la suite (λ_n) n'appartenant pas à la suite (λ_{k_n}), soit $t_n \in N$ tel que : $A_{\lambda_n}[t_n] = \emptyset$. Soit enfin $z \in N$ tel que $\phi(z) = t_n$. Il vient :

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_{\lambda_{k_p}}[t_{k_p}] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\lambda_n}[t_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\lambda_n}[\phi(z)_n] = A_\lambda[z],$$

ce qui achève de montrer a).

■ b) Pour $\alpha = 0$: soit $(x; z) \in A_o \subset X \times N$. Il existe, par définition de A_o un entier n tel que $x \in O_{z_n}$. De par la topologie de N, il existe un voisinage ouvert V de z dans N tel que, pour tout $t \in V$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, on ait : $t_n = z_n$. Alors, $O_{z_n} \times V \subset A_o$, ce qui montre que A_o est un ouvert.

● Supposons la propriété b) établie au rang α. Alors, A_α est un borélien de classe α de $X \times N$, et, puisque ϕ est continue, pour tout n, $\{(x; z) \in X \times N,\ (x; (\phi(z)_n)) \in A_\alpha\}$ est un borélien de $X \times N$ de classe $\mathcal{G}_\alpha$. Si n est pair (resp. impair), comme intersection (resp. réunion) de ces boréliens de classe α, $A_{\alpha+1}$ est un borélien de classe $\alpha+1$.

- Le même raisonnement donne le résultat pour un ordinal limite λ.

■ c) Cette propriété découle de b), car si Z est un borélien du produit cartésien $X \times Y$ de deux espaces métriques X et Y, les ensembles du type $Z(y) = \{x \mid (x; y) \in Z\}$ sont des boréliens de X de la même classe que Z. ▣

Corollaire 39 — *Dans* N, *il existe, pour tout* $\alpha < \Omega$ *des boréliens de classe* $\mathcal{G}_\alpha$ *qui ne sont pas de classe* $\mathcal{F}_\alpha$.

Compte tenu des inclusions entre les classes de boréliens, cela signifie que les familles $\mathcal{G}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\alpha$ sont strictement croisantes. On ne peut donc pas réduire la classification ordinale des boréliens sans perte pour cette classification.

Démonstration — D'après la proposition précédente, il existe, pour chaque α, un ensemble universel $A_\alpha \subset N \times N$. Soit Z_α la projection sur N de $\Delta_N \cap A_\alpha$, où Δ_N désigne la diagonale de $N \times N$. L'ensemble $\Delta_N \cap A_\alpha$ étant de classe $\mathcal{G}_\alpha$, il en est de même de Z_α. Montrons que Z_α n'est pas de classe $\mathcal{F}_\alpha$. Si cela était, l'ensemble $N \setminus Z_\alpha$ serait un $\mathcal{G}_\alpha$, de sorte qu'il existerait $z \in N$ tel que $A_\alpha[z] = N \setminus Z_\alpha$, car A_α est un ensemble universel de classe $\mathcal{G}_\alpha$. Si l'on avait $z \in Z_\alpha$, on aurait $(z; z) \in A_\alpha$ par définition de Z_α, d'où $z \in A_\alpha[z] = N \setminus Z_\alpha$ ce qui est contradictoire. Si l'on avait $z \in N \setminus Z_\alpha$, on aurait $(z; z) \notin A_\alpha$, d'où $z \notin N \setminus Z_\alpha = A_\alpha[z]$, ce qui est encore contradictoire. Cela montre que $N \setminus Z_\alpha$ n'est pas un $\mathcal{G}_\alpha$. ▣

EXERCICES DU CHAPITRE 3

1. CONNEXITE

Soient X un espace connexe, et Y une partie connexe de X.

a) Soit Z une partie de $X\setminus Y$, à la fois ouverte et fermée dans $X\setminus Y$. Montrer que $Y\cup Z$ est connexe.

b) Soit T une composante de $X\setminus Y$. Montrer que $X\setminus T$ est connexe.

2. CONNEXITE LOCALE

a) Montrer que si X et Y sont des compacts localement connexes, il en est de même de $X\cup Y$.

b) En utilisant le graphe de $x \mapsto \sin 1/x$, $x\in \left]0\,;\,1\right]$, montrer qu'en général, la réunion de deux ensembles localement connexes n'est pas localement connexe.

3. COURBE DE PEANO

Pour $k\in \{0;1;\ldots 9\}$, on pose : $A_k = [\frac{k}{10}\,;\,\frac{k+1}{10}]$.

On définit deux fonctions continues $\mathbb{R} \to [0;1]$, périodiques de période 1 en posant :

$$\begin{cases} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\in A_1 \cup A_3 \\ 1 & \text{si } t\in A_5 \cup A_7 \end{cases} \\ f(0) = f(1). \\ f \text{ affine sur } A_k,\ k\in\{0;\ldots 9\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\in A_1 \cup A_5 \\ 1 & \text{si } t\in A_3 \cup A_7 \end{cases} \\ g(0) = g(1) \\ g \text{ affine sur } A_k,\ k\in\{0;\ldots 9\} \end{cases}$$

On pose enfin :

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(10^{k-1}t)\ ,\ \psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(10^{k-1}t)$$

a) Montrer que Φ et ψ sont continues.

b) Montrer que $t \mapsto (\Phi(t)\,;\,\psi(t))$ est une surjection continue $[0;1] \to [0;1]^2$.

4. ESPACES BIEN ENCHAINES

On dit qu'un espace métrique $(X;d)$ est *bien enchaîné* si, pour tous $x,y\in X$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n\in\mathbb{N}$, et $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ tel que : $x_1 = x$, $x_n = y$, et, pour tout $i, 1\le i\le n-1$, $d(x_i;x_{i+1}) \le \varepsilon$.

Montrer que les cinq assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace métrique $(X;d)$ est bien enchaîné.

(ii) Pour toute fonction uniformément continue $f : X \to \mathbb{R}$, l'image $f(X)$ est bien enchaînée.

(iii) Pout tout $\varepsilon > 0$, et tous $x,y\in X$, il existe des composantes distinctes $C_1,\ldots,C_n$ telles que $x\in C_1$, $y\in C_n$, et $d(C_i\,;\,C_{i+1}) < \varepsilon$, pour $1\le i\le n-1$.

(iv) Ou bien X est connexe, ou bien toute déconnexion $X = A\cup B$ vérifie $d(A;B) = 0$.

(v) Pour tout recouvrement uniforme ouvert $(C_i)_{i\in I}$ de X, et tous $x,y\in X$, il existe un sous-recouvrement fini $C_1,\ldots,C_n$ de X tel que : $x\in C_1$, $y\in C_n$, et $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, pour $1\le i\le n-1$.

5. CONNEXITE, ESPACES BIEN ENCHAINES ET ESPACES COMPLETS

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'espace X constitué de la réunion de la branche d'hyperbole Y : $xy = 1$, $x>0$, et de la demi-droite Z : $y=0$, $x\geq 0$.

a) Montrer que X est bien enchaîné pour la distance euclidienne d_2. L'espace $(X;d_2)$ est complet et bien enchaîné, mais il n'est pas connexe [3].

b) On munit X de la distance δ définie par :

$$\begin{cases} \delta(x;y) = d_2(x;y) & \text{si } (x;y) \in Y^2 \cup Z^2 \\ \delta(x;y) = 1 & \text{si } (x;y) \in Y\times Z \cup Z\times Y. \end{cases}$$

Montrer que les topologies induites sur X par δ et d_2 sont identiques, mais que $(X;\delta)$ n'est pas bien enchaîné.

c) Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ bien enchaînée et complète (pour la distance usuelle) est connexe. Ce résultat est-il vrai pour une distance quelconque sur $\mathbb{R}$?

6. IMAGES DES ESPACES BIEN ENCHAINES

Soient $(X;d)$ un espace métrique bien enchaîné, (T,d') un espace métrique, et f une application uniformément continue $(X;d) \to (T;d')$. Montrer que $f(X)$ est bien enchaîné.
Si $(X;d_2)$ est l'espace défini dans l'exercice 5, l'application $\chi_Y : (X;d_2) \to \{0;1\}$ est continue, mais son image n'est pas bien enchaînée.

7. FONCTIONS STOCHASTIQUEMENT INDEPENDANTES : LES FONCTIONS DE RADEMACHER

On pose $R_n(t) = (-1)^k$ pour $t \in [k\,2^{-n} ; (k+1)\,2^{-n}[$, $0 \leq k \leq 2^n-1$.
Montrer que les fonctions $R_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ sont mutuellement stochastiquement indépendantes.

8. FONCTIONS STOCHASTIQUEMENT INDEPENDANTES ET ITERATIONS

Soient f et g deux fonctions continues $[0;1] \to [0;1]$ stochastiquement indépendantes et de loi uniforme. Montrer que les fonctions fog^n sont de loi uniforme et sont mutuellement indépendantes.

9. TRIBU BORELIENNE

Soit X un espace polonais. Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}_X$ est la plus petite famille qui contient les ouverts, les intersections dénombrables de ses éléments, et les réunions dénombrables *disjointes* de ses éléments (on effectuera une récurrence transfinie).

10. TRIBU BORELIENNE D'UN CARRE

Soit (B_n) une base dénombrable d'ouverts de $[0,1]^2$ dont les éléments sont des boules ouvertes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\hat{B}_n$ une partie de $[0;1]^2$ vérifiant : $B_n \subset \hat{B}_n \subset \overline{B}_n$.

a) Montrer que la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par les $\hat{B}_n$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $[0;1]^2$.

b) Donner un exemple de parties $\hat{B}_n$ telles que $\mathcal{C}$ contienne strictement $\mathcal{B}$.

11. TRACES DE LA TRIBU BORELIENNE

Soient X un espace métrique, et $Y\subset X$.

a) Montrer : $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}_X\}$

b) Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$, et f une fonction croissante $A \to B$. Montrer que f est mesurable pour les tribus $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE DU CHAPITRE 3

1. REFERENCES GENERALES

Une grosse partie des résultats de ce chapitre sont exposés dans :

[1] K. KURATOWSKI : *Topology*. Academic Press, New York 1968. (2 volumes)

(se méfier du vocabulaire employé, car la terminologie a souvent évolué)

2. [0;1] ET LES ESPACES CONNEXES

En français, les sources originales du théorème de Hahn-Mazurkiewicz *et al* sont :

[2] S.MAZURKIEWICZ : *Sur les lignes de Jordan*. Fund. Math. 1 (1920), 201.

[1] W. SIERPINSKI : *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*. Fund. Math.1. (1920), 44.

En anglais, les deux traités suivants donnent une démonstration de ce théorème :

[4] G.T. WHYBURN : *Analytic Topology*. Amer. Math. Soc. 1942.

[8] M.H.A. NEWMAN : *Elements of the topology of plane sets of points*. Cambridge Univ. Press (1964).

C'est la présentation de Newman que nous avons à peu près suivi dans le paragraphe 1.
La connexité par arcs simples des continus métrisables localement connexes est démontrée correctement dans le livre de Whyburn ci-dessus, et dans les livres suivants :

[14] A.W. SCHURLE : *Topics in Topology*. North Holland, 1979.

[7] G.T. WHYBURN : *Topological Analysis*. Princeton Univ. Press, 1964.

[6] D.W. HALL and G.L. SPENCER : *Elementary Topology*. Wiley, 1955.

[5] R.L. WILDER : *Topology of Manifolds*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol.32, 1949.

[3] R.L. MOORE : *Foundations of point set Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 13, 1932.

Les deux articles suivants signalent les pièges de la démonstration de ce théorème, et celui de Ball dresse une liste de traités où la preuve est incorrecte.

[16] B.J. BALL : *Arcwise connectedness and the persistence of errors*. Amer. Math. Monthly 91 (1984), 431-433.

[12] R.E. SMITHSON : *A Counterexample to a lemma on the existence of simple refinements*. Amer. Math. Monthly 77. (1970), 293-294.

Les images continues et ouvertes de [0;1] ont été étudiées indépendamment dans ces deux articles :

[11] S.S. MITRA : *Continuons open maps on the unit interval*. Amer. Math. Monthly 76 (1969), 817-818.

[9] L.F. Mc AULEY : In *Topological Conference*. Arizona State University (1968), 184-202.

Le lien entre courbes de Peano et indépendance stochastique a été mis en évidence dans ces deux articles :

[15] J.A.R. HOLBROOK : *Stochastic independance and space-filling curves*. Amer. Math. Monthly 88 (1981), 426-432.

[13] A.M. GARSIA : *Combinatorial inequalities and smoothness of functions*. Bull. Amer. Math. Soc.82 (1976), 157-170.

Pour des compléments sur la connexité, on pourra consulter :

[10] J.C. MATHEWS : *A note on well-chained spaces*. Amer. Math. Monthly 75 (1968) 273-275.

3. L'ENSEMBLE DE CANTOR ET LES ESPACES COMPACTS

La démonstration du théorème 14, à partir du théorème de Taimanov est tirée de :

[1] W.B. JOHNSON : *On continuous images of Cantor spaces*. Amer. Math. Monthly 75 (1968),869-871.

Pour des compléments, ou pour d'autres démonstrations, dans le cadre métrique, outre les ouvrages de Newman et Whyburn mentionnés en 2, on pourra consulter :

[2] G. WHYBURN and E. DUDA : *Dynamic topology*. U.T.M. Springer Verlag Pub. New-York 1979.

4. LES ESPACES POLONAIS ET LEURS BORELIENS

Tout est dans le traité de Kuratowski cité plus haut. Mais il faut le trouver et le convertir en langage moderne. Le § 4.4. est un tel exemple de traduction. Pour le reste des § 3. et 4, le parti pris de ne donner que les résultats utiles pour les applications en analyse (intégration, probabilités...) nous a conduit à adopter la présentation d'un auteur qui avait fait le même choix, à savoir

[1] K.R. PARTHASARATHY : *Probability measures on metric spaces*. Academic Press, New-York 1967.

Autrement, cachés sous un vocabulaire étrange, on trouve la plupart des résultats du § 3 et des § 4.1. et 4.2. dans

[2] N. BOURBAKI:*Topologie générale* (chapitre IX). Hermann ed., Paris 1974.

NOTES DU CHAPITRE 3

[1] Pour des applications de ces espaces particuliers à la notion générale d'ensemble, voir l'appendice, § 4.10.

[2] Le fait qu'un continu métrisable localement connexe X soit connexe par arcs simples est une conséquence du théorème 6, si l'on admet l'axiome du choix. Avec cet axiome, on montre en effet que tout espace topologique séparé qui est connexe par arcs est également connexe par arcs simples, s'il a plus d'un point. Sans cet axiome, il faut refaire une construction que l'on peut résumer ainsi : Si x et y sont deux points distincts de X, on construit une suite C , C^2,... de chaînes simples de x à y, $C^n = (C_1^n, C_2^n, \dots, C_{k_n}^n)$ telle que, pour tout n :

(a) Tout C_i^n est un ouvert connexe de X de diamètre $< 1/n$

(b) Pour tout C_i^{n+1} , il existe C_j^n tel que C_i^{n+1} C_j^n

(c) Il existe des chaînes $\mathcal{D}_1^n$, $\mathcal{D}_2^n$,..., $\mathcal{D}_{k_n}^n$ telles que $C^{n+1} = \mathcal{D}_1^n + \mathcal{D}_2^n + \dots + \mathcal{D}_{k_n}^n$ et telles que tout $D_{i,j}^n$ de $\mathcal{D}_i^n$ soit inclus dans l'un des C_k^n .

Une construction satisfaisant à c) est délicate et nombre d'ouvrages proposent une démonstration fautive sur ce point (voir la bibliographie , § 2).

[3] Un problème ouvert est la recherche des espaces métriques pour lesquels *"bien enchaîné et complet"* implique *"connexe"*.

APPENDICE

APERCU DE THEORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES

par Gilbert Lelièvre

Cet appendice n'a pas pour objet d'apprendre à manier les concepts de la théorie des ensembles. Le language des ensembles étant celui dans lequel on exprime usuellement les théories mathématiques (y compris la théorie des ensembles elle-même et l'interprétation des théories logiques), nous supposerons connues les principales notions ensemblistes. Mais nous montrerons que ces notions et les résultats les plus importants de la théorie des ensembles résultent d'un système d'axiomes relativement simple et communément admis.

Afin de traiter de quelques problèmes dits métamathématiques, touchant aux axiomes de la théorie des ensembles — pour examiner notamment si certains axiomes sont indépendants des autres, si certains énoncés sont démontrables dans la théorie des ensembles considérée, s'ils sont incompatibles avec la théorie, *i.e.* réfutables ou encore s'ils sont indépendants de la théorie — nous présenterons l'axiomatique des ensembles dans un langage formalisé ; c'est d'ailleurs la seule façon de poser clairement des problèmes de cette nature et de donner un aperçu intelligible de leur solution. Mais on ne devra pas, par une émulation inconsidérée, regarder cette présentation comme une invitation à formaliser ses propres démonstrations sous le vain prétexte de rigueur mathématique ; nous ne saurions trop mettre en garde contre une telle tentation pernicieuse, qui attirerait inévitablement des conséquences fâcheuses. L'écriture des textes mathématiques, qu'il s'agisse de la rédaction de problèmes, d'articles ou de livres, doit se conformer à l'usage répandu dans la communauté mathématique.

L'objet de cette présentation formelle est simplement, sans entrer dans les détails superflus pour ceux dont la théorie des ensembles n'est pas le domaine de recherche, de faire en sorte que l'on ait des idées claires et non erronnées sur des questions qu'il est légitime de se poser, au moins une fois dans sa vie. Ce sont des problèmes que l'on n'a pas l'occasion de rencontrer souvent dans sa pratique quotidienne des mathématiques, mais le peu d'accointance que l'on aura ainsi acquise, qui ne dépasse pas ce qui devrait constituer la culture générale de tout mathématicien, doit permettre d'éviter d'être arrêté, troublé, désarçonné et dérouté, si un jour, on vient à tomber sur ces questions. Certaines d'entre elles ne sont d'ailleurs pas sans conséquences sur l'analyse mathématique : la cardinalité du continu (*i.e.* de $\mathbb{R}$), les différentes formes de l'axiome du choix, la mesurabilité des parties de $\mathbb{R}$, etc. Aussi est-il bon d'avoir à leur sujet une attitude éclairée qui ne soit pas en contradiction avec les résultats métamathématiques qui les concernent. Comme ces résultats laissent généralement une grande liberté d'attitude à l'égard de ces questions, mais comme toutes les hypothèses logiquement possibles n'ont pas le même degré de fécondité, il importe de discerner ce qui relève d'un choix, peut-être motivé par certaines pratiques mathématiques, et ce qui découle d'un choix antérieur ou implicite, dont il est préférable de mesurer auparavant les conséquences.

1. INTRODUCTION

1.1. – UNE THEORIE OU DES THEORIES DES ENSEMBLES

Présenter une théorie axiomatique des ensembles, c'est présenter un menu. On attend d'un bon repas, généralement, qu'il soit suffisamment varié, mais qu'il ne cause pas d'indigestion. On attend de même d'une théorie des ensembles qu'on puisse y exprimer l'essentiel des mathématiques sans conduire à une contradiction. Mais ces exigences peuvent être remplies par différents systèmes axiomatiques selon l'idée intuitive, acquise par la pratique des mathématiques, qu'on se fait de la notion d'ensemble.

On exposera d'abord un menu type, le système axiomatique des ensembles appelé *système de Zermelo-Fraenkel* et noté ZF ; c'est le système dans lequel le mathématicien travaille avec le maximum d'agrément et d'assurance, et auquel il se rapporte couramment dans la pratique mathématique. Après quoi, on étudiera les principaux systèmes qu'on peut former soit en retranchant des axiomes au système ZF (on obtient alors des systèmes plus faibles que ZF), soit en modifiant la formulation de certains axiomes du système ZF (on obtient alors des variantes de ZF), soit surtout en ajoutant à ZF d'autres énoncés ; les derniers systèmes ont leur raison d'être en ce qu'ils permettent de décider certains problèmes mathématiques importants qui sont indécidables dans le système ZF (un énoncé mathématique est dit *indécidable* dans un système axiomatique si ni cet énoncé ni la négation de cet énoncé ne sont démontrables dans ce système).

On obtient alors des systèmes plus forts que ZF dans la mesure où tous les théorèmes de ZF sont aussi des théorèmes de ces nouveaux systèmes, tandis que la réciproque est fausse car les énoncés rajoutés à ZF ne seront, en général, pas démontrables dans ZF . Mais on a, en principe, plus de risque d'obtenir une contradiction dans un système plus fort dans la mesure où l'on peut y démontrer davantage d'énoncés mathématiques et, à la limite, un système contradictoire n'est pas autre chose qu'un système où l'on peut tout démontrer. Il faut donc s'assurer que si le système ZF est *consistant* (*i.e.* non contradictoire), alors les systèmes axiomatiques des ensembles obtenus en rajoutant d'autres axiomes sont aussi consistants, *i.e.* que si l'on pouvait trouver une contradiction dans ces sytèmes, ce ne serait pas à cause de l'adjonction de ces énoncés : la contradiction se trouverait déjà dans le système ZF .

1.2. – LES RAISONS ET LES CARACTERISTIQUES DE L' AXIOMATISATION EN THEORIE DES ENSEMBLES

L'indétermination de la notion d'ensemble et la hiérarchie cumulative des ensembles

On étudiera "la" (il faudrait dire *des*) théories des ensembles comme on le fait habituellement pour les autres théories mathématiques. Pourtant le projet d'axiomatisation d'une théorie des ensembles diffère en deux points de celui de la plupart des autres théories mathématiques.

D'une part, les différents systèmes d'axiomes qui ont été proposés historiquement ne sont pas, en général, équivalents, et, ils donnent, pour cette raison, autant de représentations et de définitions différentes de la notion d'ensemble. Si la théorie ZF est celle qui correspond le plus naturellement à l'idée intuitive d'ensemble que se font la plupart des mathématiciens, elle n'est pas la seule concevable, et il est assez arbitraire de n'exposer qu'une seule théorie des ensembles. D'ailleurs, il n'y a pas à proprement parler de conception unitaire de la notion d'ensemble sauf, peut-être, pour des raisons de facilité et d'opportunité, au niveau de la pratique naîve des ensembles. Il importe de comprendre que si tel mathématicien est conduit à telle conception de la notion d'ensemble plutôt qu'à telle autre, ce n'est pas parce que le monde des êtres mathématiques est ainsi fait, mais parce que la pratique des mathématiques à tel moment de leur histoire se fait de la sorte. Il est vrai que la conception réaliste des mathématiques conduit naturellement à s'imaginer que les ensembles sont des entités dont notre monde serait peuplé ; mais cette vision platoniste des mathématiques est plutôt une sorte d'hypostase de la pratique naïve, *i.e.* non formalisée, des mathématiques.

Il y a, d'ailleurs, une distorsion inévitable entre la pratique naïve des ensembles et le traitement axiomatique de la notion d'ensemble. Le choix des axiomes n'est pas arbitraire ; les axiomes doivent nous fournir tous les objets qu'on utilise dans la pratique intuitive, mais, en général, ils nous en donnent beaucoup plus : parmi eux, se trouveront des objets qui ne correspondent à aucune intuition. De plus, comme l'a montré Skolem, l'axiomatisation en théorie des ensembles conduit inévitablement à une conception relativiste des mathématiques. On reviendra sur cette caractéristique fondamentale du traitement axiomatique des ensembles dans la conclusion générale de cet appendice, mais celle-ci apparaitra tout au cours de celui-là, en particulier dans le §5 de cette introduction.

D'autre part, les axiomatisations courantes de la théorie des ensembles ont été élaborées pour remédier aux contradictions qu'on pouvait tirer des premières théories ensemblistes (Cantor, Dedekind, Frege), et la forme de ces axiomatisations se ressent de leur reconstruction sur de nouvelles fondations, à la différence de l'axiomatisation des autres théories mathématiques. On verra, en effet, que les axiomes de ZF ou bien posent l'existence d'ensembles dont on pense qu'ils ne sont pas contradictoires, ou bien donnent des procédés de construction d'ensembles déjà construits, procédés dont on pense qu'ils ne conduisent pas non plus à des contradictions. A l'opposé, les premières théories ensemblistes, qui se sont avérées contradictoires, ressemblaient davantage aux théories mathématiques classiques.

On obtiendra donc, dans le système ZF , une hiérarchie des ensembles en types, les ensembles du type $n+1$ étant construits après ceux du type n au moyen, éventuellement, d'ensembles du type n . Afin de multiplier le moins possible les êtres mathématiques, on admet en général qu'un ensemble d'un type donné est aussi un ensemble d'un type plus élevé, si bien qu'en montant dans l'échelle des types on obtient de nouveaux ensembles tout en conservant les ensembles acquis à des niveaux plus bas. De la sorte, un ensemble de type $n+1$ peut être considéré comme une collection dont les éléments sont des ensembles de type n . Il est clair qu'il faut se donner au moins un ensemble qui sera au premier rang (*i.e.* au niveau zéro), *i.e.* un ensemble qui sera donné d'emblée et à partir duquel tous les autres ensembles seront construits ; on prend le plus souvent l'ensemble vide comme point de départ de la hiérarchie, mais on se donne aussi parfois, au niveau zéro, des objets qui ne sont pas à strictement parler des ensembles puisqu'ils n'ont pas d'éléments et qu'ils sont différents de l'ensemble vide ; ces objets sont appelés *atomes* ou *individus* . La relation d'appartenance $\in$ permet de mesurer le rang des ensembles ; le rang d'un ensemble est le premier type où il est construit, *i.e.* le type où il apparait pour la première fois. Un ensemble x sera dit de *rang* n s'il existe une suite minimale d'ensembles $x_o, \dots, x_n$ possèdant les propriétés $x_o \in x_1 \in \dots \in x_{n-1} \in x_n$, $x_o = \emptyset$ ou un individu et $x_n = x$. On appelle *structure* (ou *théorie*) *cumulative des types* cette façon, due à Russell et à Zermelo, de construire les ensembles par hiérarchie ou itération des procédés de construction, au lieu de se donner d'emblée tous les ensembles comme une totalité indifférenciée ; cette méthode de construction se retrouve dans la plupart des axiomatisations ensemblistes actuelles.

1.3. - LE MATHEMATICIEN ET LE LOGICIEN DEVANT LA THEORIE DES ENSEMBLES

Il importe de bien se convaincre qu'une théorie des ensembles n'a pas essentiellement pour objectif de faire mieux comprendre les notions intuitives de la pratique mathématique, ni même, à proprement parler, de rendre celles-ci plus rigoureuses ; en particulier, elle n'a pas pour but essentiel de répondre à la question : "Qu'est-ce qu'un ensemble ?". D'ailleurs le projet de fondation et de formalisation des mathématiques, qui a conduit aux axiomatisations actuelles de la théorie des ensembles, n'a jamais été un projet gnoséologique, *i.e.* destiné à résoudre des problèmes du type "Comment mieux connaitre et comprendre les êtres mathématiques?". Le projet était plutôt de se donner un cadre suffisamment bien adapté pour traiter le problème de la non-contradiction des mathématiques.

Ce qu'on attend généralement d'une théorie des ensembles, c'est qu'elle fournisse suffisamment d'ensembles (dont on est censé avoir la connaissance intuitive dans la pratique mathématique) pour permettre la construction de tout ce dont le mathématicien a besoin pour faire de "bonnes" mathématiques, sans qu'on soit en mesure d'obtenir trop d'ensembles pour ne pas exposer la théorie à des contradictions.

Toutefois il ne vient pas naturellement à l'esprit du mathématicien courant l'idée d'introduire des axiomes permettant d'obtenir, en plus des ensembles dont il a besoin pour ses constructions, d'autres ensembles dont il n'a aucune raison de se servir. Mais il arrive que les ensembles bizarres qu'on obtient alors en supplément intéressent momentanément le logicien qui regarde la théorie des ensembles d'un autre point de vue que le mathématicien courant.

Le mathématicien considère la théorie des ensembles

- soit comme un *langage* dans lequel il peut écrire toutes les mathématiques, et comme une *structure universelle* sous-jacente à toute espèce de structure mathématique dans la mesure où il peut traiter comme un ensemble le (ou les) référentiels d'une structure mathématique quelconque ;

- soit comme un *outil auxiliaire,* lorsqu'il utilise tel axiome de la théorie des ensembles (par exemple l'axiome du choix, l'hypothèse du continu) pour répondre à tel type de problème posé par les mathématiques classiques.

En revanche, le logicien qui étudie la théorie des ensembles, après avoir montré (en général assez rapidement car ce n'est plus là son problème) qu'on peut représenter toutes les théories mathématiques dans la théorie des ensembles (y compris la théorie des ensembles elle-même!), prend la théorie ou plutôt les théories des ensembles comme objet de son étude, au même titre que tout autre structure mathématique est un objet d'étude pour le mathématicien. Les problèmes spécifiques au logicien ne manquent pas et si ces problèmes n'intéressent pas directement le mathématicien, leur résolution a des conséquences souvent importantes pour le reste des mathématiques.

Il résulte du théorème d'incomplétude de Gödel que si une théorie des ensembles T pouvant représenter l'arithmétique est "non-contradictoire", l'assertion "la théorie T n'est pas contradictoire" n'est pas un théorème de cette théorie. C'est pourquoi on part toujours de l'hypothèse selon laquelle la théorie des ensembles qu'on étudie est non contradictoire. On exprime cette hypothèse en disant par exemple "Soit un modèle de ZF ...", et on travaille dans ce modèle ou à partir de ce modèle.

Refuser cette hypothèse équivaudrait à ne pouvoir rien tirer de la théorie des ensembles en question, tandis qu'au moyen de cette hypothèse on démontre des résultats intéressants, en particulier ceux du type suivant : si ZF est non contradictoire, la théorie ZF à laquelle on ajoute tel autre axiome est aussi non contradictoire. Ce type de problème s'appelle problème où étude de la *consistance relative* d'une théorie des ensembles. On parle parfois de consistance relative d'un énoncé (par exemple l'axiome du choix, l'hypothèse du continu) par rapport au système ZF : cela veut dire pour parler correctement qu'il s'agit de la consistance relative (à celle de ZF) de la théorie obtenue en ajoutant cet énoncé à ZF . Les problèmes de consistance relative sont très importants et leur résolution (mais pas la démonstration) intéresse le mathématicien dans la mesure où elle lui garantit la légitimité relative de tels axiomes.

Les problèmes de consistance relative conduisent aux problèmes d'indépendance. Un énoncé (par exemple l'axiome du choix, l'hypothèse du continu, l'hypothèse de Souslin) est dit *indépendant* d'un système d'axiome donné si cet énoncé et d'autre part la négation de cet énoncé sont consistants relativement à ce système d'axiomes, *i.e.* si dans ce système d'axiomes on ne peut ni démontrer l'énoncé ni le réfuter (*i.e.* démontrer la négation de cet énoncé), ce qui implique qu'on peut l'admettre ou le refuser en ayant l'assurance de ne pas rendre la théorie plus contradictoire. La résolution des problèmes d'indépendance a surtout le grand intérêt de mettre fin aux querelles interminables d'écoles dont les plus importantes ont porté sur la légitimité du principe du choix et de l'hypothèse du continu. Le logicien, en bon roi Salomon (du moins lorsqu'il peut l'être, *i.e.* lorsqu'il a démontré l'indépendance d'un problème par rapport à un système d'axiomes donné) peut renvoyer dos à dos les mathématiciens qui s'étaient querellés sur ces problèmes et les inciter à d'autres travaux plus fructueux, en leur laissant toutefois la responsabilité (relative) du choix des axiomes qui ont les conséquences les plus intéressantes pour la pratique mathématique.

Bien d'autres problèmes font encore l'objet de l'étude de la théorie des ensembles. La plupart des mathématiciens les croient dénués d'intérêt mathématique, comme, par exemple, l'étude des grands cardinaux. Mais il s'avère parfois que ces problèmes ont des conséquences importantes pour le reste des mathématiques; par exemple, le problème de l'existence certains grands cardinaux est lié à des questions de mesurabilité d'ensembles.

1.4. – LE LANGAGE FORMEL DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

Le système ZF est construit sur la logique des prédicats avec égalité. Le seul symbole non logique de ce système est le symbole binaire d'appartenance. D'autres symboles non logiques ne faisant pas partie du langage de la théorie seront introduits à titre d'abréviations : ce seront des symboles de relation (par exemple $\subset$ désignant la relation d'inclusion ou bien des symboles de termes (par exemple $\emptyset$, $\mathcal{P}(\emptyset)$, ω) qui serviront à nommer des ensembles fréquemment utilisés.

Le *langage* L de la théorie des ensembles ZF comprend un *alphabet* constitué des symboles suivants :

- Un nombre infini dénombrable de *variables d'individu* , dites aussi *variables d'ensembles* car elles dénoteront des ensembles : $x_o, x_1, \dots, x_n \dots$
- Une constante de prédicat logique = , dite *symbole* de relation *d'identité* .
- Une constante de prédicat non logique ϵ , dite *symbole* de relation *d'appartenance*.
- Des symboles logiques : $\neg$ (*négation*), $\vee$ (*disjonction*), $\wedge$ (*conjonction*), $\Rightarrow$ (*implication* matérielle), $\Longleftrightarrow$ (*équivalence* matérielle), $\forall$ (*quantificateur universel*) $\exists$ (*quantificateur existentiel*).
- Des symboles auxiliaires : "(" (*parenthèse ouvrante*), ")" (*parenthèse fermante*).

On utilise encore d'autres symboles qui ne sont pas des symboles du langage L , mais des symboles du *métalangage* (ici le français) qui nous serviront à parler du langage et de la théorie qu'on étudie. On dira : "Soit A (resp. a, ϕ) un(e) ..." pour "Soit A (resp. a, ϕ) un symbole du métalangage désignant un(e) ..." (On confond pour la simplicité les noms des êtres et les êtres qu'ils dénotent). Le lecteur verra clairement quand les paranthèses sont celles du langage et quand elles sont celles du métalangage!

On appelle *mot* ou *assemblage* de L toute suite finie de symboles de L . La *longueur d'un mot* est le nombre de symboles qui le constituent. Un mot de longueur 1 est un symbole de l'alphabet de L . On appelle *mot vide* la suite (unique) qui n'a pas de symbole, *i.e.* la suite de longueur 0 . L'opération de juxtaposition des suites s'appelle la *concaténation ;* si A et B sont des mots, on note AB ("A concaténé à B") le mot obtenu en mettant les symboles de B après ceux de A et en réindexant convenablement (*i.e.* selon l'ordre indiqué) la suite ainsi obtenue. Si un mot A s'écrit BCD où C est un mot non vide mais où B et D peuvent être des mots vides, on dit que C est une *occurrence* de A ou que le mot A a une occurrence du mot C. Le mot A peut avoir plusieurs occurrences de C ; chacune de ces occurrences est alors déterminée par les mots B et D tels que A = BCD ("=" désigne ici l'identité des mots).

Les *formules* du langage L, dites aussi *formules du premier ordre* pour le langage L, sont les mots dont chacun est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les 3 règles suivantes :

1) Les mots de la forme $(x_m = x_n)$ ("l'ensemble désigné par x_m est identique à l'ensemble désigné par x_n") et $(x_m \in x_n)$ ("l'ensemble désigné par x_m appartient à l'ensemble désigné par x_n") sont des formules, dites *formules atomiques*, et leurs seules *variables libres* sont x_m et x_n.

2) Si ϕ et ψ sont des formules, alors $\neg\phi$ ("non ϕ"), $(\phi \vee \psi)$ ("ϕ ou ψ"), $(\phi \wedge \psi)$ ("ϕ et ψ"), $(\phi \Rightarrow \psi)$ ("si ϕ alors ψ"), $(\phi \Longleftrightarrow \psi)$ ("ϕ si et seulement si ψ") sont aussi des formules, et leurs variables libres sont celles de ϕ ou de ψ.

3) Si ϕ est une formule, alors $\exists x_n\, \phi$ ("il existe un x_n tel que ϕ") et $\forall x_n \phi$ ("pour tout x_n on a ϕ") sont aussi des formules, et leurs variables libres sont celles de ϕ moins la lettre x_n qui est dite *liée* par le quantificateur existentiel $\exists$ ou par le quantificateur universel $\forall$.

On désigne des formules de L par ϕ, ψ, χ,..., des variables arbitraires de L par x, y, z,... On écrit $x \notin y$ pour $\neg(x \in y)$ et $x \neq y$ pour $\neg(x = y)$. On omet généralement les parenthèses extérieures d'une formule, *i.e.* (A) s'écrira A. On écrit $\phi(x)$ pour dire que x est une variable qui a uneoccurrence libre dans ϕ. Si $\phi(x_1 ; \ldots ; x_n)$ est une formule dont toutes les variables libres figurent parmi $x_1,\ldots,x_n$, on dit que $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \phi(x_1 ; \ldots ; x_n)$ est la *clôture universelle* de ϕ. Une formule sans variable libre est appelé un *énoncé* ou une *formule close*. Une formule est sous *forme prénexe* si elle s'écrit QA où Q est une suite finie de quantificateurs immédiatement suivis d'une variable et A une formule sans quantificateur. Toute formule est équivalente à une formule sous forme prénexe. Pour faciliter la lecture des formules on utilise souvent des *quantificateurs universels* et *existentiels relativisés*, *i.e.* on écrit $\forall x \in A\ P(x)$ au lieu de $\forall x (x \in A \Rightarrow P(x))$ et $\exists x \in A\ P(x)$ au lieu de $\exists x (x \in A \wedge P(x))$.

On écrira $ZF \vdash \phi$ ou $\vdash_{ZF} \phi$ pour dire que la formule ϕ est un *théorème* de ZF, *i.e.* une formule démontrable dans le système ZF.

Une *réalisation* pour un langage donné L est la donnée d'un ensemble appelé domaine de la réalisation, de relations et de fonctions interprétant les symboles de relation et de fonction du langage. Donner une réalisation pour un langage revient à l'interpréter en termes d'ensembles; cette manière ensembliste de donner un référent à un langage formel permet de représenter toute théorie mathématique dans la théorie des ensembles.

Une *théorie* pour un langage donné est, par définition, un ensemble de formules de ce langage ; la théorie ZF est ainsi constituée par tous les théorèmes du système ZF. Un *modèle* ou *structure d'une théorie* pour un langage donné est défini comme une réalisation pour ce langage qui satisfait à toutes les formules de cette théorie, *i.e.* une réalisation qui rend vraie l'interprétation de ces formules.

1.5. – LES MODELES DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

On désignera par $\mathcal{M} = (|\mathcal{M}|, \in_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{U}, \in_{\mathcal{U}})$, ou plus simplement par $(\mathcal{U}, \in)$ (la relation d'appartenance $\in_{\mathcal{U}}$ étant souvent confondue pour la simplicité avec le symbole de relation d'appartenance $\in$), ou encore plus brièvement par $\mathcal{U}$ (ou $\mathcal{M}$) un modèle d'une théorie des ensembles (on précisera chaque fois laquelle). On ne dira pas que la structure $(\mathcal{U}, \in)$ est un ensemble $\mathcal{U}$ muni d'une relation d'appartenance $\in$ ni que les objets de $\mathcal{U}$ sont des éléments de (appartenant à) $\mathcal{U}$ car ce sont les objets de $\mathcal{U}$ qu'on appellera ensembles. On pourra appeler $\mathcal{U}$ un *univers* ou *domaine de référence* de la structure d'ensemble ($\mathcal{U}$, ϵ). La relation d'appartenance ϵ (*i.e.* $\epsilon_{\mathcal{U}}$) n'est donc définie que pour deux objets quelconques de $\mathcal{U}$ mais pas pour un objet quelconque de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ lui-même. Il serait plus correct d'appeler les objets de $\mathcal{U}$ des $\mathcal{U}$ - *ensembles* car la notion d'ensemble sera relative au domaine $\mathcal{U}$ d'une structure d'ensemble ($\mathcal{U}$, ϵ). Dans ce cas il n'y aurait aucun inconvénient à dire que $\mathcal{U}$ est un ensemble ; seulement $\mathcal{U}$ ne sera pas un $\mathcal{U}$-ensemble.

Il s'agit dès lors pour toute notion mathématique, en particulier pour les notions de la théorie naïve des ensembles, de construire ou d'associer un $\mathcal{U}$-objet correspondant. Mais comme un système formel n'est jamais totalement adéquat à la théorie naïve qu'il formalise, il y aura des $\mathcal{U}$-objets qui ne correspondront à aucune notion intuitive d'ensemble, par exemple différentes sortes d'infini dans $\mathcal{U}$.

On continuera à parler des notions intuitives avec les mêmes mots, souvent même avant de les introduire comme $\mathcal{U}$-ensembles pour une structure d'ensemble ($\mathcal{U}$, ϵ), car, étant donnée une structure d'ensemble ($\mathcal{U}$, ϵ), on ne s'intéresse pas à la question de savoir ce qu'est un ensemble ni quels sont les ensembles (la question n'a d'ailleurs pas de sens), mais quels sont les $\mathcal{U}$-objets *i.e.* quels sont les $\mathcal{U}$-ensembles et quelles propriétés vérifie le domaine $\mathcal{U}$ des $\mathcal{U}$-ensembles.

Cette façon de procéder, acquise à ses dépens par la pratique logique, met une fin de non-recevoir à certains beaux esprits en mal de fondements, qui se demandent encore comment il peut être légitime de parler de l'infini, et de l'utiliser, avant le l'introduire par un axiome ou par une définition formelle (car on serait censé ne pas connaître encore ce qu'est l'infini !). La réponse est claire : c'est que l'on sait parler et écrire au niveau du métalangage avant même d'avoir étudié un langage ou un système formel comme objet. Faudrait-il interdire la numérotation des pages dans un livre de théorie des ensembles avant d'avoir introduit les entiers comme ensembles ou bien signaler en note qu'on dira plus tard ce que signifie les signes en haut des pages et à quoi ils servent lorsque l'occasion viendra de les étudier ! Serait-il inconvenant d'écrire une grammaire française en français ou d'enseigner le français dans la langue française !).

Toujours est-il qu'un infini du métalangage et un infini qui est un $\mathcal{U}$ -objet sont des entités conceptuelles distinctes désignées pour la commodité par le même nom. Lorsqu'il y aura risque d'ambiguïté sur la nature des êtres dont on parlera, on ajoutera l'adjectif *"intuitif"* pour dire que l'objet ou l'être correspondant n'est pas un $\mathcal{U}$-objet mais un objet du métalangage. Par exemple, l'ensemble des variables en nombre infini dénombrable (au sens intuitif) du langage (*i.e.* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$) n'est pas posé comme un $\mathcal{U}$-objet, mais on pourrait le faire et représenter ainsi toute formule du langage $\mathcal{L}$ de ZF par des $\mathcal{U}$- ensembles.

Un modèle $\mathcal{M}$ de ZF sera une réalisation ($\mathcal{U}$, $\epsilon_{\mathcal{U}}$) du langage $\mathcal{L}$ qui vérifie les axiomes de ZF ; comme ϵ est le seul symbole du langage $\mathcal{L}$ spécifique de la théorie ZF, on voit que les axiomes de ZF ne font que préciser les propriétés de la relation $\epsilon_{\mathcal{U}}$ pour tout modèle ($\mathcal{U}$, $\epsilon_{\mathcal{U}}$). Il n'y a pas de modèle canonique de ZF pas plus qu'il n'y a de modèle naturel de la théorie des groupes (tout groupe, en effet, est un modèle de la théorie des groupes). Le logicien étudie donc les principales structures ensemblistes de la même façon que le mathématicien étudie les différentes structures algébriques topologiques, etc. On dira "soit $\mathcal{M} = (|\mathcal{M}| , \epsilon) = (\mathcal{U} , \epsilon)$ un modèle de ZF", et on écrira $\mathcal{M} \models$ ZF , de la même façon que l'on dit "soit (G,.) un groupe" (*i.e.* un modèle de la théorie des groupes).

Démontrer qu'une formule ϕ du langage $\mathcal{L}$ n'est pas un théorème de ZF, ce que l'on note ZF $\nvdash \phi$ ou $\nvdash_{ZF} \phi$, équivaut, par le théorème de complétude, à l'existence d'un modèle $\mathcal{M}$ de ZF qui ne vérifie pas ϕ , *i.e.* pour lequel l'interprétation de ϕ est fausse (et on note non ($\mathcal{M} \models \phi$) ou $\mathcal{M} \not\models \phi$), ce qui est encore équivalent à l'existence d'un modèle de ZF + $\neg\phi$.

2. LE SYSTÈME ZF (ZERMELO-FRAENKEL)

Le système ZF est la donnée des formules ZF_1 à ZF_9 ci-dessous. Pour la simplicité, on n'a pas écrit les quantificateurs en tête des formules ; les axiomes de ZF sont donc à proprement parler la clôture universelle des formules ZF_1 à ZF_9.

2.1. (ZF_1) AXIOME D'EXTENSIONALITE

$\forall z\ (z \in y \iff z \in y) \Rightarrow (x = y)$

Si deux ensembles quelconques x *et* y *ont exactement les mêmes éléments, alors ils sont égaux.*

Cet axiome affirme le caractère extensionel des ensembles : les ensembles sont complètement déterminés par la donnée de leurs éléments et il n'existe pas deux ensembles distincts qui ont les mêmes éléments ; tout ensemble est égal à l'ensemble de ses éléments, et on écrit $x = \{y \mid y \in x\}$. Peu importe la façon dont sont définis les ensembles ; ainsi l'ensemble des réels positifs ou nul est le même que l'ensemble des réels qui sont des carrés, bien qu'on ait ici deux définitions différentes du même ensemble.

Cet axiome introduit en quelque sorte un principe d'économie ontologique, interdisant les jumeaux, empêchant la multiplication inutile des êtres, suivant en cela le principe d'Occam : "*entia non est multiplicanda, praeter necessitate*". Il assure l'unicité des ensembles que l'on construit avec les autres axiomes, ce qui permet de donner des noms, et des symboles pour les représenter, aux plus courants d'entre eux. Il exclut l'existence d'individus (ou atomes), *i.e.* d'objets différents de l'ensemble vide et ne contenant aucun élément.

La converse ($A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont dites *converses* l'une de l'autre) de l'axiome d'extensionalité , à savoir

$$(x = y) \Rightarrow \forall z\ (z \in x \iff z \in y),$$

est logiquement valide, si bien qu'on peut exprimer cet axiome sous la forme suivante

$$\forall z\ (z \in x \iff z \in y) \iff (x = y).$$

On définit $x \subset y$ par $\forall z\ (z \in x \Rightarrow z \in y)$, et on dit que x est un *sous-ensemble* ou une *partie* de y. On dit que $\subset$ est *la relation d'inclusion* entre les ensembles. Les relations $\in$ et $\subset$ sont conceptuellement différentes ; elles n'ont pas les mêmes propriétés. Avec la relation d'inclusion, on peut écrire l'axiome d'extensionnalité sous la forme simple suivante

$$(x \subset y \wedge y \subset x) \Rightarrow (x = y).$$

Lorsqu'on définit $x = y$ par $\forall z\ (z \in x \iff z \in y)$, on prend généralement pour axiome d'extensionalité

$$(y = z \wedge y \in x) \Rightarrow (z \in x).$$

Sous cette forme, l'axiome d'extensionalité a quelque ressemblance avec le principe de substitution des identiques (indiscernabilité des identiques), mais cette formulation de l'axiome d'extensionalité est plus forte que celle du principe de substitution et n'est pas un théorème logique. Bien qu'il introduise le symbole d'égalité dans la théorie des ensembles, l'axiome d'extensionalité exprime en fait une propriété de la relation d'appartenance et non pas une propriété logique d'égalité des ensembles.

2.2. (ZF_2) AXIOME DES PARTIES DEFINISSABLES (DE COMPREHENSION, DE SEPARATION)

Pour toute formule $\phi(x)$ avec x pour variable libre et ne contenant pas y, et pour tout ensemble a, on a l'axiome : $\exists y \forall x\ (x \in y \Leftrightarrow (x \in a \wedge \phi(x))$

Etant donné un ensemble a *et une formule* $\phi(x)$ *il existe un sous-ensemble de* a *ne contenant que les éléments de* a *qui satisfont à la formule* $\phi(x)$.

ZF_2 est un schéma d'axiome ; il fournit, pour toute formule $\phi(x)$, un axiome appelé *instance* du schéma ZF_2 qui nous assure l'existence d'un ensemble noté $\{x \mid x \in a \wedge \phi(x)\}$, pour tout ensemble a ; l'unicité de cet ensemble est garantie par ZF_1. Ce schéma d'axiome n'est pas équivalent à un nombre fini de ses instances. ZF comporte donc un nombre infini d'axiomes et n'est pas finiment axiomatisable.

Pour toute formule $\phi(x)$ à une variable libre x, on utilise la notation $\phi = \{x \mid \phi(x)\}$ et on l'appelle *la collection définie par la formule* ϕ : elle est déterminée de façon unique par la formule $\phi(x)$ car on étend naturellement l'axiome d'extensionalité ZF_1 aux collections. Pour la simplicité on dit que $\{x \mid \phi(x)\}$ est *la collection* ϕ, et plus généralement on appelle *collection* toute formule à une variable libre (éventuellement avec paramètres).

Pour deux collections quelconques $\phi(x)$ et $\psi(x)$, on définit les opérations *d'intersection*, de *réunion* et de *complémentaire relatif*

$$\phi \cap \psi = \{x \mid \phi(x) \wedge \psi(x)\},$$
$$\phi \cup \psi = \{x \mid \phi(x) \vee \psi(x)\},$$
$$\phi - \psi = \{x \mid \phi(x) \wedge \neg\psi(x)\}.$$

On dit que $\psi(x)$ est une *sous-collection* de $\phi(x)$ si l'énoncé $\forall x\ (\psi(x) \Rightarrow \phi(x))$ est vrai.

En général la collection $\{x \mid \phi(x)\}$ n'est pas un ensemble, mais tout ensemble x est défini par une collection à paramètre x, à savoir $x = \{y \mid y \in x\}$ (*cf.* §2.1)

On dit qu'une collection $\phi(x)$ *correspond à un ensemble*, ou *définit un ensemble*, ou plus simplement encore *est un ensemble* s'il existe un ensemble a tel que $\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow \phi(x))$.

Il y a des collections qui ne correspondent à aucun ensemble. Ainsi $x \notin x$ ne définit aucun ensemble, car s'il existait un ensemble a tel que $\forall x (x \in x \Leftrightarrow x \in a)$ on aurait en particulier $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$, ce qui est contradictoire. De même, la collection $x = x$ qui définit l'univers $\mathcal{U}$ n'est pas un ensemble ; car, si $x = x$ définissait un ensemble a, on aurait $\forall x\ (x \in a)$; par le schéma de compréhension ZF_2 il existerait un ensemble b tel que $\forall x (x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge x \in x)$, *i.e.* tel que $\forall x (x \in b \Leftrightarrow x \in x)$ et cela prouverait que la collection $x \in x$ définit un ensemble, ce qui est faux. Par contre on verra que la collection $x \neq x$ définit un ensemble (*cf.* §2.3). La collection $x = x$ se note couramment V et s'appelle la *collection universelle* ou la *collection de tous les ensembles* (bien fondés ; *cf.* §2.9).

On peut formuler l'axiome des parties définissables ZF_2 de la façon suivante :

L'intersection d'une collection ϕ *et d'un ensemble* a *est un ensemble*, ou :
toute collection ϕ *restreinte à un ensemble (i.e. bornée par un ensemble) est un ensemble*.

En théorie de l'intégration, on définit les fonctions intégrables comme étant les fonctions mesurables (la propriété d'être mesurable est une propriété locale, comme celle d'être continue et de mesure finie. On peut dire aussi que la propriété d'être une collection est une propriété locale qui assure une sorte de "régularité" à ce qui est définissable par une formule. Le schéma d'axiome ZF_2 est un principe de limitation relative de la taille des ensembles ; il correspond, en intégration, à la propriété que toute fonction mesurable dont la valeur absolue est majorée par une fonction intégrable est intégrable.

Conséquences de l'axiome ZF_2

▶ Pour tous ensembles a et b, il existe un ensemble unique, noté $a \cap b$, dont les éléments sont les ensembles qui appartiennent à la fois à a et à b; en effet, on a $a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$ (ici $\phi(x)$ est $x \in b$).

▶ Plus généralement, pour toute famille non vide d'ensembles $(a_i)_{i \in I}$, on définit l'ensemble $\bigcap_{i \in I} a_i = \{x \mid x \in a_1 \wedge \forall i\ (i \in I \Rightarrow x \in a_i)\}$ (ioi $\phi(x)$ est $\forall i\ (i \in I \Rightarrow x \in a_i)$).

▶ Aucun ensemble ne contient tous les ensembles ; en effet, quelque soit a, l'ensemble $b = \{x \mid x \in a \wedge x \notin x\}$ est tel que $b \notin a$. En particulier il n'existe de complémentaire d'un ensemble a que par rapport à un ensemble donné.

▶ Existence du complémentaire relatif : Pour tous a et b, l'ensemble $b \smallsetminus a = \{x \mid x \in b \wedge x \notin a\}$ est dit le *complémentaire* de a par rapport à b.

▶ L'axiome ZF_2 est conséquence de l'axiome de remplacement (ZF_8).

2.3. (ZF_3) AXIOME DE L'ENSEMBLE VIDE

$$\exists y\ \forall x\ (x \notin y)$$

Il existe un ensemble qui n'a pas d'éléments.

Cet axiome assure l'existence de l'ensemble $\{x \mid x \neq x\}$ qui n'a pas d'éléments ; cet ensemble est unique d'après ZF_1 et il est noté $\emptyset$.

Si l'on suppose qu'il existe au moins un ensemble a (ce qu'on fait en admettant l'existence d'un ensemble infini, ZF_7), l'axiome ZF_3 est conséquence de ZF_2, car

$$\{x \mid x \neq x\} = \{x \mid x \in a \wedge x \neq x\}.$$

2.4. (ZF_4) AXIOME DE LA PAIRE

$$\exists y\ \forall x\ (x \in y \Rightarrow x = a \vee x = b)$$

Etant donnés deux ensembles a *et* b *, il existe un ensemble dont les seuls éléments sont* a *et* b.

Cet axiome assure l'existence de l'ensemble $\{x \mid x = a \vee x = b\}$ qu'on note $\{a;b\}$, l'unicité de cet ensemble résultant, comme toujours, de ZF_1. Si $a \neq b$, l'ensemble $\{a;b\}$ est appelé une *paire* ("la paire a, b"). La paire $\{x\,;x\}$ est notée $\{x\}$ et est appelée un ***singleton*** ("le singleton x").

Avec l'axiome ZF_3 (fondation), on montre que l'ensemble $\{a ; b\}$ est différent de a et de b.

Conséquence de ZF_4

▶ *Existence des couples :* On définit $(a ; b)$ par $\{\{a\} ; \{a ; b\}\}$, que l'on appelle *paire ordonnée*, ou *couple* ; un couple est donc la paire formée d'une paire et d'un singleton inclus dans elle. Cette définition, due à Wiener et à Kuratowski assure, avec son existence, la propriété caractéristique d'un couple : $(a ; b) = (a' ; b')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. Si $a \neq a'$ ou $b \neq b'$, on a donc $(a ; b) \neq (a' ; b')$, tandis qu'on a toujours $\{a ; b\} = \{b ; a\}$. Cette définition du couple correspond bien à l'idée qu'on s'en faisait dans la pratique sociale où la hiérarchie tenait souvent lieu de l'ordre : un couple humain était la donnée d'un singleton homme et d'une paire homme-femme.

▶ L'axiome de la paire est conséquence de l'axiome de remplacement (ZF_8) et de l'axiome ZF_5.

2.5. (ZF_5) AXIOME DE L'ENSEMBLE DES PARTIES

$$\exists y \ \forall x \ (x \in y \Longleftrightarrow \forall z \ (z \in x \Rightarrow z \in a))$$

ou en abrégé

$$\exists y \ \forall x \ (x \in y \Longleftrightarrow x \subset a)$$

Etant donné un ensemble a, *il existe un ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de* a.

Cet axiome assure l'existence de l'ensemble $\{x ; x \subset a\}$; il est unique par ZF_1, se note $\mathcal{P}(a)$ et s'appelle *l'ensemble des parties de* a.

Quel que soit l'ensemble a, la cardinalité de $\mathcal{P}(a)$ est strictement supérieure à celle de a. L'axiome ZF_5 permet donc de construire des cardinaux de plus en plus grands. On a besoin de l'axiome de l'ensemble des parties pour construire l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$. des nombres rationnels : un nombre réel est défini comme un ensemble de nombres rationnels, quelle que soit la façon de construire les réels. Sans cet axiome, on ne pourrait pas démontrer l'existence d'ensembles non dénombrables.

2.6. (ZF_6) AXIOME DE LA SOMME (REUNION)

$$\exists y \ \forall x \ (x \in y \Longleftrightarrow \exists z (x \in z \wedge z \in a))$$

Les éléments des éléments d'un ensemble forment un ensemble.

Cet axiome assure l'existence de l'ensemble $\{x \mid \exists z (x \in z \wedge z \in a)\}$ qu'on note $\bigcup a$ ou $\bigcup_{x \in a} x$. On a $x \in \bigcup\{a;b\}$ si et seulement si $x = a$ ou $x = b$ et on définit $a \cup b$ par $\bigcup\{a;b\}$.

Conséquence de cet axiome :

▶ Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille (éventuellement vide) d'ensembles, alors $\bigcup_{i \in I} a_i$ est un ensemble appelé *réunion des* a_i, et $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Conséquences des axiomes de la paire (ZF_4) et de la somme (ZF_6)

Pour tout x, $x \cup \{x\}$ existe.

Si a,b,c sont trois ensembles, on peut former l'ensemble $\{a;b;c\} = \cup\{\{a;b\},\{c\}\}$.

Par récurrence on montre que si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ensembles, on peut former l'ensemble $\{a_i \mid i\in I\}$ (Si I est infini, il faut utiliser l'axiome de remplacement ZF_8).

Conséquences des axiomes précédents

Existence du produit cartésien : si a et b sont deux ensembles, on peut former l'ensemble $\{(x;y) \mid x\in a \wedge x\in b\}$ noté $a\times b$.

Si a et b sont deux ensembles, on peut former l'ensemble b^a, ensemble des applications de a dans b.

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, on peut former l'ensemble $\prod_{i\in I} a_i = \{a \in (\bigcup_{i\in I} a_i)^I \; ; \; \forall i(i\in I \Longrightarrow a(i) \in a_i\}$ appelé produit de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

2.7. (ZF_7) AXIOME DE L'INFINI

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y\in x \Rightarrow \exists z(z\in x \wedge \forall u(u\in z \Longleftrightarrow u\in y \vee u=y)))$$

Avec les abréviations usuelles, on peut écrire cet axiome plus simplement

$$\exists x(\emptyset\in x \wedge\forall y(y\in x \Rightarrow y \cup\{y\} \in x))$$

Il existe un ensemble x *qui a* $\emptyset$ *pour premier élément (pour l'ordre induit par* $\in$ *) et qui est tel que si* $y\in x$ *, alors* $y\cup\{y\}\in x$.

On note ω (ou $\mathbb{N}$ dans les mathématiques courantes) le plus petit ensemble qui vérifie ZF_7 ; ainsi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset ; \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset; \{\emptyset\} ; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$,... appartiennent tous à ω.

On définit les *ordinaux* à la manière *de von Neumann*, en commençant par les ordinaux finis ou entiers naturels, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset ; \{\emptyset\}\} = \{0;1\} \\
&\dots \\
n+1 &= n \cup \{n\} = \{0;1;\dots;n\} = \{\emptyset ; \{\emptyset\} ; \{\emptyset ; \{\emptyset\}\} ;\dots\} \\
&\dots
\end{aligned}$$

ce qui a fait dire à certains que les mathématiques reposaient sur du vide !

Si α est un ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ est le *successeur immédiat* de α et α *le prédécesseur immédiat* de $\alpha \cup \{\alpha\}$. D'après la définition ci-dessus, un ordinal est l'ensemble des ordinaux qui le précèdent pour la relation $\in$. Un ordinal est dit *successeur* s'il est de la forme $\alpha \cup \{\alpha\}$, *i.e.* s'il a un prédecesseur immédiat. Un ordinal est dit *limite* s'il est différent de $\emptyset$ et s'il n'est pas successeur; si λ est un ordinal limite, on a $\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda}\alpha$ (voir chapitre 2, § 5).

Autre façon d'énoncer l'axiome de l'infini (due à Zermelo), équivalente à ZF_7 si l'on admet l'axiome de remplacement (ZF_8):

$$\exists x(\emptyset \in x \ \wedge \ \forall y\ (y \in x \Rightarrow \{y\} \ \in x)).$$

Cette formulation de l'axiome de l'infini a motivé une autre définition des ordinaux, appelés *ordinaux de Zermelo* :

$$0' = \emptyset$$
$$1' = \{\emptyset\} = \{0'\}$$
$$2' = \{\{\emptyset\}\} = \{1'\}$$
$$\ldots\ldots$$
$$n{+}1' = \{n'\}$$
$$\ldots\ldots$$

Enoncés équivalents à l'axiome de l'infini et utilisant la notion d'ordinal

Il existe un ordinal non fini . Le premier ordinal non fini, noté ω , est alors l'ensemble des ordinaux finis.

Les ordinaux finis forment un ensemble.

Il existe un ordinal limite.

Un ensemble a est dit *fini* si son cardinal est fini, *i.e.* s'il existe un entier n et une bijection entre a et l'ensemble $n = \{0 ; \ldots ; n-1\}$ des entiers inférieurs à n. Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à une partie de ω *i.e.* s'il est fini ou bien infini dénombrable.

Autres énoncés de l'axiome de l'infini, équivalents aux précédents si l'on admet l'axiome de remplacement ZF_8 :

Il existe un ensemble réflexif, i.e. équipotent à l'une de ses parties propres (A est *équipotent* à B s'il existe une bijection de A sur B).

Il existe un ensemble infini.

Ces deux énoncés de l'axiome de l'infini semblent plus naturels que les énoncés précédents, mais ils sont moins appropriés aux calculs, notamment à la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. L'avantage de l'énoncé ZF_7 est qu'il nous donne immédiatement, en plus de l'existence d'un ensemble infini, une représentation des entiers naturels.

Tant qu'on n'a affaire qu'à l'arithmétique, *i.e.* tant qu'on s'en tient aux entiers naturels ou même aux nombres rationnels, il n'est pas indispensable de postuler l'existence d'un ensemble infini. Il n'est pas tellement plus gênant d'étudier les entiers sans avoir à sa disposition l'ensemble de tous les entiers que de faire la théorie des ensembles sans qu'il soit possible de postuler l'existence d'un ensemble de tous les ensembles. Mais pour développer l'analyse on ne peut se dispenser d'axiome de l'infini car on ne peut construire les nombres réels à l'aide seulement des ensembles finis. C'est pour cela qu'il faut garantir l'existence d'un ensemble infini et, sans l'axiome de l'infini, on ne peut démontrer qu'il existe un ensemble infini. En effet, la collection V_ω des ensembles héréditairement finis (un ensemble est *héréditairement fini* si x , les éléments de x , les éléments des éléments de x, etc. sont tous finis) définie par $V_\omega = \bigcup_{\alpha\in\omega} V_\alpha$ avec $V_o = \emptyset$ et $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ satisfait à tous les axiomes de ZF, sauf l'axiome de l'infini.

2.8. (ZF_8) AXIOME DE REMPLACEMENT (SUBSTITUTION)

Si $\Phi(x;y)$ est une formule avec les variables x et y libres, ne contenant pas b, alors on a l'axiome : $\forall x\forall y\forall z(\Phi(x;v)\wedge\Phi(x;z) \Rightarrow y=z) \Rightarrow \exists b\forall y(y\in b \Leftrightarrow \exists x(x\in a \wedge \Phi(x;y)))$. L'antécédent de l'implication exige que Φ définisse une fonction partielle : *Pour tout* x *il existe au plus un* y *tel qu'on ait* $\Phi(x;y)$. Le conséquent affirme qu'on peut former l'ensemble $\{y \mid \exists x(x\in a\wedge\Phi(x;y))\}$: *Si le domaine de définition de l'application* Φ *est un ensemble, son image est aussi un ensemble.* L'axiome de remplacement revient donc à dire qu'on peut former un ensemble b en remplaçant les éléments d'un ensemble donné a par d'autres ensembles, à condition de remplacer chaque élément de a par au plus un ensemble. Si cette condition n'est pas remplie, *i.e.* si $\Phi(x;y)$ n'est pas fonctionnelle, on obtient facilement une contradiction ; en effet, l'image de l'ensemble $\{\emptyset\}$ par la relation (non fonctionnelle) $x\subset y$ est la collection de tous les ensembles.

L'"axiome" ZF_8, comme ZF_2 dont il est en quelque sorte une généralisation, est en fait un schéma d'axiome ; il fournit un axiome pour chaque formule ayant au moins deux variables libres et telle que l'une des variables soit fonction de l'autre. Il n'est pas équivalent à un nombre fini de ces instances, et il est plus fort que ZF_2. Il est non constructif (d'autres axiomes ont par nature cette propriété, par exemple l'axiome du choix) dans la mesure où la fonction définie par la relation fonctionnelle $\Phi(x;y)$ peut être non constructive.

Par ailleurs, on a besoin de l'axiome de remplacement lorsqu'on veut utiliser la méthode de définition par induction transfinie, en particulier lorsqu'on veut prouver qu'à chaque ensemble bien ordonné correspond un ordinal. Lorsqu'on ajoute ZF_8 aux axiomes précédents, on est en mesure de prouver l'existence d'ensembles ayant de "grands cardinaux"; on ne pourrait, par exemple, pas démontrer, sans cet axiome, l'existence d'ensemble de cardinalité $\aleph_\omega$. Disons qu'avec l'axiome des parties ZF_5 on peut construire des cardinaux infinis successeurs, tandis qu'avec l'axiome de la somme ZF_6 et du remplacement ZF_8, on peut construire des cardinaux limites et des ordinaux limites, ces deux types de construction reposant, bien entendu, sur l'axiome de l'infini ZF_8.

L'axiome de remplacement nous garantit l'existence d'ensembles que les autres axiomes de ZF ne peuvent nous donner. Si, avec les autres axiomes, on peut former les ensembles ω, $\mathcal{P}(\omega)$, $\mathcal{P}^2(\omega) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, ..., $\mathcal{P}^n(\omega) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{n-1}(\omega))$,..., ce n'est qu'avec l'axiome de remplacement qu'on peut démontrer que la collection de ces ensembles forment un ensemble.

On a besoin aussi de l'axiome de remplacement pour développer l'analyse mathématique, en particulier pour démontrer la détermination des jeux boréliens de type infini.

2.9. ($ZF9$) AXIOME DE FONDATION (FONDEMENT, REGULARITE)

$$\exists y(y\in x) \Rightarrow \exists y(y\in x \wedge \forall z \neg(z\in x \wedge z\in y))$$

Si l'ensemble x *contient des éléments (i.e. s'il n'est pas vide), alors il contient un élément* y *qui n'a aucun élément en commun avec* x, i.e. *un élément qui est minimal pour la relation d'ordre induite par* $\in$. Autrement dit, *la relation* $\in$ *est bien fondée.*

On écrit généralement cet axiome avec les abréviations usuelles comme suit

$$(x \neq \emptyset) \Longrightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$$

Cet axiome empêche qu'un ensemble soit élément de lui-même ; il implique, en effet, que pour tout ensemble x, on a $x \notin x$. Il est donc incompatible avec l'existence de *singletons non fondés*, *i.e.* d'ensembles x tels que $x = \{x\}$. Il empêche aussi la formation des boucles pour la relation $\in$, *i.e.* de suites finies de la forme $x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1$, et plus généralement la formation de suites infiniment descendantes pour $\in$, *i.e.* de suites de la forme $\ldots x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_2 \in x_1$. Si l'on admet l'axiome du choix, l'axiome de fondation équivaut à la non existence de suites infiniment descendantes pour la relation $\in$.

L'axiome de fondation assure que tous les ensembles sont construits à partir de l'ensemble vide $\emptyset$. Explicitons cette construction. Définissons par induction sur la classe, notée $\mathbf{On}$, des ordinaux la relation fonctionnelle $y = V_\alpha$:

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite}$$
$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

Notons $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ la collection définie par la formule $V(x) = \exists\alpha\, (\mathbf{On}(\alpha) \wedge x \in V_\alpha)$; elle est appelée *la collection des ensembles bien fondés*.

Avec ces notations, l'axiome de fondation équivaut à l'énoncé $\forall x V(x)$, *i.e.* à l'assertion que V est la collection de tous les ensembles, autrement dit, que tous les ensembles sont bien fondés (un ensemble est dit *bien fondé* s'il est élément de V_α pour un ordinal α). On définit, pour tout objet x de V, le *rang* de x, noté $rg(x)$, comme le plus petit ordinal α (pour la relation d'ordre induite par $\in$) tel que $x \in V_\alpha$.

Propriétés de la relation rg et de la collection V

- ▶ Pour tout x de V, $rg(x)$ est un ordinal successeur.
- ▶ $V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$.
- ▶ $\mathbf{On} \subset V$, *i.e.* la collection V contient la collection de tous les ordinaux.
- ▶ $x \in V \Longleftrightarrow x \subset V$. ($\Longrightarrow$ équivaut à dire que la collection V est transitive).
- ▶ Si $x \in y$ dans V, alors $rg(x) < rg(y)$.
- ▶ Pour tout ordinal α, $rg(\alpha) = \alpha+1$.
- ▶ Le schéma d'axiome suivant est équivalent à l'axiome de fondation :

Pour toute formule $\phi(x)$ avec x pour variable libre et y non libre dans ϕ, on a

$$\exists x\ \phi(x) \Longrightarrow \exists x\ (\phi(x) \wedge \forall y (y \in x \Longrightarrow \neg\phi(y))$$

S'il y a un ensemble qui satisfait à $\phi(x)$, alors il y a un élément minimal pour la relation $\in$ qui satisfait à $\phi(x)$, i.e. la relation ϕ est bien fondée.

▶ Si $ZF \setminus ZF_9$ (*i.e.* ZF sans l'axiome ZF_9) est consistant, alors ZF est consistant ; en effet, la collection V, construite sans ZF_9, satisfait à ZF_9 et aux autres axiomes de ZF.

On n'a pas besoin de l'axiome de fondation pour développer les mathématiques classiques. Mais sans l'axiome de fondation, on obtient des ensembles bizarres (pour notre conception intuitive d'ensemble, par exemple des éléments qui sont éléments d'eux-mêmes) dont le mathématicien n'a aucunement besoin et dont le logicien ne se sert que pour démontrer des résultats d'indépendance (*cf.* § 3).

Avec l'axiome de fondation, on voit très bien comment sont construits les ensembles à partir de l'ensemble vide. On se représente alors un univers de la théorie des ensembles ZF sous la forme d'un grand V , de pointe $\emptyset$, de ligne verticale (la colonne vertébrale) les ordinaux, les ensembles de rang $\alpha + 1$ étant disposés sur une ligne horizontale correspondant au niveau de l'ordinal α .

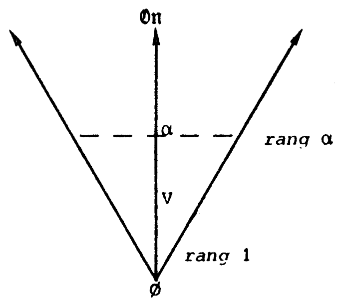


Figure 1

De plus, l'axiome de fondation simplifie la définition des ordinaux ; il permet de remplacer la condition " $\in$ *est un bon ordre sur* α " par la condition " $\in$ *est un ordre total sur* α "

2.10. REMARQUES SUR LES AXIOMES DE ZF

■ La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, notée ZF , est ainsi constituée par les axiomes ZF_1 à ZF_9 . On peut répartir ces axiomes en trois catégories :

- Des axiomes qui posent purement et simplement l'existence d'ensembles : l'ensemble vide (ZF_3) et un ensemble infini (ZF_7). Ce sont des axiomes d'existence simple.
- Des axiomes qui limitent la profusion des ensembles en exigeant que les ensembles aient certaines propriétés : extensionalité (ZF_1) et fondation (ZF_9). Ce sont des axiomes de limitation ou de restriction.
- Des axiomes (les autres axiomes de ZF) qui donnent des procédés de "construction" d'ensembles à partir d'ensembles déjà donnés. Ce sont des axiomes d'existence conditionnelle.

■ Les axiomes d'existence simple ou conditionnelle assurent qu'il y a suffisamment d'ensembles, et, si l'on se privait de l'un quelconque d'entre eux, c'est à toute une partie des mathématiques qu'on serait forcé de renoncer. Les axiomes de limitation garantissent que les ensembles ainsi obtenus sont décents.

3. VARIANTES DE ZF

Donnons quelques unes des nombreuses variantes de la théorie des ensembles (il faudrait dire : *des* théories des ensembles), plus faibles que ZF .

■ Le système constitué des axiomes ZF_1 à $ZF_7 + ZF_9$ est appelé *système de Zermelo*, et noté Z . On peut établir dans Z une bonne partie de l'analyse.

■ On a vu que l'axiome d'extensionalité exclut l'existence d'individus ou atomes, *i.e.* d'objets qui ne sont pas des ensembles dans la mesure où ils n'ont pas d'éléments (ils ne sont donc pas, à la différence des ensembles, caractérisés par des éléments) et sont différents de l'ensemble vide $\emptyset$, et que l'axiome de fondation exclut l'existence de singletons non fondés, *i.e.* d'ensembles x tels que $x = \{x\}$. On a parfois affaibli ces axiomes, permettant ainsi l'existence d'individus ou de singletons non fondés, notamment pour démontrer la consistance de la négation de l'axiome du choix.

(ZF'_1) Axiome d'extensionalité affaibli

$$(\exists z(z \in x) \wedge \forall z(z \in x \Longleftrightarrow z \in y)) \Longrightarrow x=y$$

Cet axiome permet l'existence d'individus car la restriction qu'on a ajouté fait qu'il ne s'applique qu'aux ensembles qui ont des éléments.

(ZF'_9) Axiome de fondation affaibli

$$\forall x \ (x \neq \emptyset \Longrightarrow \exists y \ (y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset \vee y = \{y\})))$$

L'existence d'ensembles x tels que $x = \{x\}$ contredit l'axiome de fondation, mais cet axiome de fondation affaibli dit que l'axiome de fondation est vérifié, pour tous les ensembles qui ne contiennent pas de singletons non fondés.

On appelle *système de Fraenkel-Mostowski*, noté FM, le système constitué par les axiomes $ZF'_1 + ZF_2$ à ZF_8 , et *système de Fraenkel-Mostowski-Specker*, noté FMS, le système constitué par les axiomes ZF_1 à $ZF_8 + ZF'_9$. Ces deux systèmes ont été utilisés pour démontrer la consistance relative de la négation de l'axiome du choix (*cf.* p. 191).

On peut toutefois démontrer directement la consistance relative de la négation de l'axiome du choix, sans affaiblir ni l'axiome d'extensionalité ni l'axiome de fondation, par la méthode du forçage de Cohen.

4. THEORIES PLUS FORTES QUE ZF

4.1. REMARQUES SUR LES AXIOMES QU'ON PEUT AJOUTER A LA THEORIE DES ENSEMBLES ZF

Si la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF) est en quelque sorte le plat du jour des mathématiciens, on peut y ajouter d'autres énoncés à titre de régimes. Mais chacun de ces régimes ne convient pas à tous les mathématiciens ni, d'ailleurs, à toutes les mathématiques.

Certains de ces énoncés sont indépendants du système ZF. Leur admission ou leur exclusion se fait en fonction de ce qu'on veut faire de la théorie des ensembles. La pratique mathématique (ou, du moins, certains secteurs de la pratique mathématique) est, bien entendu, déterminante dans ce choix. L'adjonction d'un axiome peut, par exemple, décider un problème important en mathématiques. Mais on verra que certains énoncés sont incompatibles avec d'autres ; il y aura donc plusieurs façons possibles, parfois incompatibles entre elles, d'enrichir la théorie ZF.

Certains de ces énoncés sont appelés "hypothèse" au lieu "d'axiomes",
-soit que le problème de leur consistance ait été longtemps une question ouverte : par exemple l'hypothèse du continu, l'hypothèse de Suslin ;

-soit qu'on n'ait pas de démonstration de consistance relative de ces énoncés : par exemple l'hypothèse des cardinaux inaccessibles, l'hypothèse des cardinaux mesurables. Pour les deux derniers énoncés, on sait, d'ailleurs, qu'il n'existe pas de démonstration de consistance relative car ces deux énoncés impliquent la consistance de ZF (et on sait qu'il n'existe pas de démonstration de consistance de ZF! *cf.* §1.3). On dit alors que ces énoncés sont plus forts que ZF.

La plupart de ces énoncés ont été ajoutés à ZF , non pas parce qu'ils étaient déjà suggérés par la conception naïve des ensembles, mais dans le seul but de construire des modèles satisfaisant à des propriétés intéressantes. C'est ainsi que Gödel a introduit (1938-1940) l'axiome de constructibilité $V = L$ pour démontrer la consistance relative de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix, et qu'il a suggéré (1946) l'axiome des ensembles définissables (resp. héréditairement définissables) en termes d'ordinaux ($V = DO$, resp. $V = HDO$) pour démontrer la consistance relative de l'axiome du choix. Mais il est intéressant de connaître toutes les propriétés (du moins les principales d'entre elles) auxquelles satisfont les modèles de la théorie ZF à laquelle on ajoute l'un ou l'autre de ces énoncés ; car, si ces énoncés sont relativement consistants et s'ils ont des conséquences importantes pour les mathématiques, il est naturel de penser que les modèles de ces énoncés ont un intérêt intrinsèque et méritent une étude propre ; et, si l'on n'a pas de preuve de consistance relative de ces énoncés, on peut espérer qu'on prouvera de cette façon (si cela est possible, ce qu'on ne sait pas à l'avance!) qu'ils sont en contradiction avec ZF .

4.2. LES AXIOMES DU CHOIX

4.2.1. L'émergence de l'axiome du choix

L'axiome du choix est l'exemple typique d'un énoncé qui a profondément divisé la communauté mathématique, durant la première moitié de ce siècle, mais qui a aussi suscité beaucoup de travaux qui ont contribué à son éclaircissement. Il s'agissait essentiellement de se prononcer sur le statut de cet énoncé : pouvait-on le refuser comme principe de démonstration en mathématiques ? Pouvait-on l'accepter comme axiome de la théorie des ensembles ? Quelles raisons avait-on de se prononcer sur l'un ou l'autre choix ?

La plupart des mathématiciens de cette époque ont été conduits à expliciter leurs positions philosophiques afin de justifier leur attitude à l'égard de l'axiome du choix. Les enjeux concernant l'axiome du choix étaient les suivants :

Si l'on se passait de cet énoncé comme principe de démonstration en mathématiques, on risquait de perdre une partie intéressante du corpus mathématique, de mutiler l'édifice majestueux de la science mathématique, et d'écarter des propositions précieuses mais indémontrables sans l'axiome du choix.

Si l'on acceptait l'axiome du choix, on risquait peut-être de se trouver confrontés aux revers inévitables de ce "choix". N'allait-on pas obtenir des conséquences inattendues, indésirables ou paradoxales ? A la limite, l'enrichissement de la théorie des ensembles grâce à l'adjonction d'un principe puissant ne risquait-il pas de la faire sombrer dans l'enfer des théories contradictoires ?

L'axiome du choix acculait les mathématiciens à une alternative dont les deux issues étaient aussi peu satisfaisantes. On souhaitait préserver la vérité de certaines propositions mathématiques qui ne sont démontrables qu'à partir de l'axiome du choix : par exemple, l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue n'est démontrable qu'à partir d'une forme de l'axiome du choix, assez faible d'ailleurs, mais qui n'est toutefois pas conséquence des axiomes de ZF ; et en même temps, on voulait résoudre de façon positive certains problèmes mathématiques auxquels le recours à l'axiome du choix apportait une solution négative, par exemple le problème de la mesure : existe-t-il une mesure invariante par translation susceptible d'être définie sur l'ensemble de *toutes* les parties bornées de $\mathbb{R}^n$?

Or l'axiome du choix était à prendre, avec toutes ses conséquences, désirables aussi bien que fâcheuses et paradoxales, ou à laisser. On ne pouvait pas utiliser les services magiques et féériques de l'axiome du choix sans en payer assez chèrement le prix, sans être pris dans les filets de ses sortilèges. Il semblait qu'on fût mis en demeure de se prononcer sur l'axiome du choix et qu'on ne pût point se contenter d'une attitude neutre à son égard : ne pas s'en occuper, ne pas y prendre garde, c'était en quelque sorte le refuser, au risque de s'en servir sans en avoir conscience et sans le vouloir.

L'histoire des débats et des travaux autour de l'axiome du choix parcourt en quelque sorte les différents actes d'une tragédie, qui ne respecterait pas toutefois à la lettre les trois règles d'unité, dans la mesure où ils se sont déroulés en partie en même temps et ont réagi les uns sur les autres. On peut aussi considérer que les jalons suivant lesquels nous retraçons les péripéties de l'axiome du choix constituent les différentes phases ou étapes d'une prise de conscience progressive du statut de l'axiome du choix et de la formation d'une attitude réfléchie et rationnelle à son égard.

▶ Première phase : Attitude de la conscience naïve ou de l'inconscience

Avant que le principe du choix ne fût explicité, certains mathématiciens, tels cantor et Dedekind, estimaient qu'ils avaient "démontré" des théorèmes, ou du moins ils étaient persuadés de la vérité de propositions mathématiques, qu'on ne put en fait démontrer rigoureusement plus tard que grâce à l'axiome du choix.

Cette attitude naïve sera battue en brèche avec la troisième phase, mais elle ressurgira sous la forme de la conscience malheureuse, à cause de multiples formes (non encore reconnues) du choix : même après l'accession de l'énoncé du choix au titre d'axiome, certains mathématiciens (français notamment) qui le refusaient comme méthode légitime de démonstration croyaient pourtant à la vérité des propositions qui sont indémontrables sans l'axiome du choix, et ils démontraient des théorèmes à partir d'hypothèses dont on s'aperçut par la suite qu'elles étaient équivalentes à l'axiome du choix.

Cette attitude se poursuivit aussi longtemps que suffisamment d'énoncés équivalents à l'axiome du choix ne furent dégagés. Aussi, il arrivait fréquemment que l'axiome du choix se cachât dans des démonstrations, et que les mathématiciens de cette époque, quelle que fût d'ailleurs l'attitude officielle qu'ils professassent, postulassent implicitement, le principe du choix dans leur pratique mathématique.

▶ Deuxième phase : Attitude de la conscience négative, ou prise de conscience du principe du choix à travers une attitude de refus

Avant même que l'énoncé du choix ne fût posé comme un principe utile de démonstration, Peano en 1890, et à sa suite d'autres mathématiciens comme Beppo Levi, refusèrent explicitement d'y recourir dans leurs démonstrations. Ainsi avaient-ils dégagé la méthode de démonstration à partir d'un principe de choix, pas pas certes pour s'en servir et l'ériger en axiome, mais pour s'en mieux garder.

▶ Troisième phase : Prise de conscience positive du caractère indispensable d'un axiome du choix pour démontrer rigoureusement certaines propositions mathématiques

C'est avec Zermelo en 1904 qu'une forme du principe du choix fait son entrée officielle comme méthode de démonstration reconnue (utilisée pour la démonstration de l'existence d'un bon ordre sur tout ensemble). En 1908, Zermelo intègre un énoncé de choix parmi les propositions primitives de la première théorie axiomatique des ensembles.

▶ Quatrième phase : Prise de conscience de la richesse et des propriétés magiques de l'axiome du choix

Les nombreux travaux suscités ou entrepris par les adversaires et les partisans de l'axiome du choix contribuèrent à la découverte de ses multiples conséquences dans des branches très diverses des mathématiques. Certaines d'entre elles avaient l'air de choquer l'intuition et paraissaient paradoxales. Parmi les conséquences de l'axiome du choix, on s'aperçut peu à peu que certaines d'entre elles entrainaient à leur tour cet axiome, et étaient de ce fait des énoncés équivalents à l'axiome du choix. Au début des années 60, H. et J. Rubin en recensèrent une centaine de versions équivalentes. Depuis on en a trouvé beaucoup d'autres, et les recherches dans cette direction sont loin de s'épuiser, sans être toutes stériles.

▶ Cinquième phase : Prise de conscience objective du statut de l'axiome du choix relativement aux autres axiomes de la théorie des ensembles

En 1938, Gödel démontra que l'adjonction de l'axiome du choix aux autres axiomes de la théorie des ensembles ne risquait nullement de rendre la théorie enrichie contradictoire, pourvu que la théorie initiale ne le soit pas. Cela revenait à dire que l'on ne pouvait pas réfuter l'axiome du choix au sein de la théorie fondamentale des ensembles.

En 1963, Cohen démontra qu'en retour la négation de l'axiome du choix est compatible avec les autres axiomes ensemblistes ; autrement dit, que l'on ne peut pas démontrer l'axiome du choix à partir de la théorie fondamentale des ensembles.

Ainsi l'axiome du choix, et tous les énoncés équivalents, sont-ils des propositions indécidables par rapport à l'axiomatique usuelle des ensembles (disons la théorie ZF). On peut dès lors renvoyer dos à dos les partisans et les adversaires de l'axiome du choix, avec le verdict suivant : du seul point de vue de la logique, on a toute liberté d'admettre ou de refuser l'axiome du choix, sans que l'on puisse légitimement contester une attitude contradictoire.

Depuis cette époque, on utilise la méthode féconde de Cohen pour démontrer l'indépendance de nombreux énoncés de choix plus faibles que la formulation usuelle, et l'on s'intéresse aux conséquences de ces énoncés plus faibles, surtout aux propositions qui leur sont équivalentes.

▶ Sixième phase : Vers un affaiblissement de l'axiome du choix et la recherche d'hypothèses alternatives

L'étude des conséquences des formes affaiblies de l'axiome du choix a fait prendre conscience peu à peu aux mathématiciens que la plupart des théorèmes qu'ils démontraient grâce à l'axiome du choix étaient en fait démontrables à partir d'énoncés de choix strictement plus faibles, et elle les a convaincu qu'il était inutile de poser des hypothèses de choix plus fortes que celles dont ils se servent effectivement. C'est ainsi que de nombreux travaux ont été entrepris, en vue de raffiner les démonstrations connues qui font appel à un axiome de choix. On recherche surtout maintenant les meilleures hypothèses de choix possibles, *i.e.* les plus faibles qui soient suffisantes pour obtenir telle ou telle proposition mathématique. Parfois certaines de ces conditions suffisantes s'avèrent par la suite également nécessaires : C'est ainsi que l'on découvre de nouveaux énoncés équivalents à une forme donnée d'axiome de choix.

Par ailleurs, la découverte de l'indépendance de l'axiome du choix (et de ses formes affaiblies) ont mis fin aux discussions intranchables et stériles à son sujet, mais elle n'a pas tari les recherches métamathématiques qui le touchent. Que l'axiome du choix ne soit ni réfutable ni démontrable et que dès lors on puisse en principe le postuler ou le refuser indifféremment, sans risque de rendre la théorie initiale des ensembles plus contradictoire, cela n'entraîne pas que l'une et l'autre voie de l'alternative aient le même degré de fécondité. Mais la reconnaissance que l'une des voies est préférable — si l'on veut faire de "bonnes mathématiques" (et socialement reconnues) — dépend beaucoup de convictions et de normes qui évoluent et changent d'une génération à l'autre. Naguère encore, la plupart des mathématiciens estimaient qu'il était plus avantageux de postuler l'axiome du choix que de le nier, car il y a beaucoup de propositions mathématiques auxquelles ils tiennent et qui ne sont pas démontrables sans une forme d'axiome de choix. Par exemple, presque tous les algébristes désirent que tout idéal soit inclus dans un idéal premier, et même dans un idéal maximal. Aussi se donnent-ils les moyens *ad hoc* de prendre leurs désirs pour des réalités. Autrement dit, ils postulent une hypothèse équivalente respectivement au théorème de l'idéal premier et à l'axiome du choix. De même, la majorité des géomètres algébristes bornent leur champ d'investigation aux corps algébriquement clos. Mais depuis quelques années, on prend peu à peu conscience des avantages mathématiques que procurent l'affaiblissement de l'axiome du choix, et même sa négation. Ils ouvrent en effet la voie à des structures mathématiques beaucoup plus complexes et plus riches, qui auraient paru naguère complètement aberrantes, comme certaines classes de fonctions pathologiques au XIX° siècle, et qu'on aurait banni pour ces raisons du champ noble de la recherche mathématique. Mais, soit que les théories mathématiques classiques donnent les premiers signes d'épuisement, soit que le champ qu'on labourait avec bonheur à la génération précédente soit devenu trop difficile, soit enfin par une curiosité légitime ou par simple défi, les mathématiciens d'aujourd'hui se tournent peu à peu vers des voies qui auraient horrifié leurs aînés. C'est ainsi que :

- les algébristes s'intéressent depuis peu à la théorie des idéaux qui ne sont pas inclus dans des idéaux maximaux, ce qui semble prometteur ;

- les analystes sont tout à fait disposés à abandonner l'axiome du choix général au profit d'une forme beaucoup plus faible, l'axiome du choix dépendant, depuis qu'en niant le premier et en postulant le second (ainsi que l'existence des cardinaux inaccessibles !) Solovay a construit un modèle de ZF dans lequel toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue ;

- les logiciens ensemblistes recherchent des énoncés incompatibles avec l'axiome du choix ; certains de ces énoncés, comme l'axiome de détermination (voir §4.10), promettent d'être riches en conséquences intéressantes, s'ils ne s'avèrent pas contradictoires.

4.2.2. L'axiome du choix général ou usuel (en abrégé : AC)

■ Formulations ensemblistes de l'axiome du choix. Donnons tout d'abord quelques formulations, équivalentes, de l'axiome du choix usuel, n'utilisant que les notions les plus générales de la théorie des ensembles.

▶ *Formulation en termes de fonctions de choix* (Zermelo, 1904) :

> *Pour toute famille (= ensemble)* $a = \{a_i \mid i \in I\}$ *d'ensembles non vides, il existe une fonction* f *telle que, pour tout* $i \in I$, *on ait* $f(a_i) \in a_i$.

La fonction f dont l'axiome du choix affirme l'existence est appelée *fonction de choix* pour la famille, ou l'ensemble, a .

▶ *Formulation en termes d'ensembles de choix* (B. Russel, 1906) :

> *Pour toute famille* $a = \{a_i \mid i \in I\}$ *d'ensembles non vides et deux à deux disjoints, il existe un ensemble* c *tel que, pour tout* $i \in I$, $c \cap a_i$ *soit constitué d'un seul élément.*

L'ensemble c dont l'axiome du choix affirme l'existence est appelé *ensemble de choix* pour a .

▶ *Formulation en terme de produit* (B. Russel, 1906) :

> *Le produit cartésien d'une famille non vide d'ensembles non vides est non vide.*

L'expression "*axiome du choix*" est due à Zermelo (1908). La version qu'il en donna en 1904, issue de conversations avec Erhard Schmidt dans le courant de cette année-là est une généralisation d'un principe formulé par Beppo Levi (1901), qui refusait d'ailleurs d'y recourir. B. Russel (1906) appelait ses versions de l'axiome du choix "*axiome multiplicatif*" ou "*principe multiplicatif*". Il pensait qu'elles étaient plus faibles que celle utilisée par Zermelo en 1904. En 1908, Zermelo démontra que les trois versions ci-dessus sont équivalentes, et il prit la seconde formulation dans son système axiomatique. C'est généralement sous cette seconde forme que l'on introduit l'axiome du choix dans une théorie axiomatique des ensembles comme suit :

$$\forall x(x \in a \Longrightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \in a \Longrightarrow x \cap y = \emptyset \vee x = y)) \Longrightarrow \exists c\, \forall x\, \exists u(x \in a \Longrightarrow c \cap x = \{u\})$$

> *Pour tout ensemble* a *dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble* c *dont l'intersection avec chaque élément de* a *est un ensemble à un seul élément.*

L'axiome du choix est en quelque sorte un axiome (conditionnel) d'existence, mais c'est comme un coup de baguette magique : sous l'effet d'un postulat, disons d'une hypothèse *ad hoc*, il assure l'existence d'un ensemble de choix, ou d'une fonction de choix, sans que ceux-là fassent l'objet d'une construction effective. Bien qu'en un sens l'ensemble de choix c ou la fonction de choix f "choisissent" un élément u dans chaque élément non vide x de a , il n'y a, en général, aucune règle exprimable par une formule du langage de la théorie pour effectuer ce choix.

L'axiome du choix assure l'existence de sous-ensembles qui ne sont pas donnés par l'axiome des parties définissables ZF_2 . On a vu que l'axiome ZF_2 impose deux conditions restrictives pour qu'une collection d'ensembles soit elle-même un ensemble, afin d'éviter les paradoxes de la première théorie (cantorienne):

- une régularité dans l'énumération des éléments de la collection : la collection doit être paramétrée par (les valeurs d') une formule à une variable libre;

- une limitation dans la grandeur (taille) des collections : la collection doit être relativisée à un ensemble, c'est-à-dire incluse dans un ensemble.

Si l'on compare l'axiome du choix au principe de construction des ensembles fourni par l'axiome ZF_2 , il ressort que l'axiome du choix lève la première contrainte de ZF_2 . Il pose comme ensemble n'importe quelle collection obtenue par l'effectuation simultanée d'un nombre infini de choix. De la sorte, si $a = \{a_i \mid i \in I\}$ vérifie les conditions d'application de l'axiome du choix, ce dernier procure l'existence d'une partie c de $\cup a$ qui ne pourrait pas être obtenue par l'axiome ZF_2 . On devine que de telles parties sont très compliquées et n'ont pas toujours les bonnes propriétés des autres parties obtenues à partir de ZF_2 (par exemple la mesurabilité).

La comparaison de l'axiome ZF_2 à l'axiome du choix fait comprendre l'erreur de la première objection qui s'éleva, avec Peano (1891), contre un principe qui allait devenir l'axiome du choix. Elle consistait à voir dans le principe du choix :

- soit une généralisation abusive et indue en une itération infinie d'une méthode de choix qui est inoffensive lorsqu'on ne l'itère qu'un nombre fini de fois,

- soit une extension en une règle *arbitraire* de choix d'une méthode qui est légitime lorsque le choix s'effectue un nombre quelconque (infini) de fois, pourvu qu'il se fasse selon une loi uniforme, une règle déterminée. On voit aussi que Peano n'admettait que les seules instances du principe du choix qui sont démontrables à partir seulement de l'axiome ZF_2 .

4.2.3. Enoncés équivalents à l'axiome usuel du choix (AC)

L'axiome du choix présente deux caractéristiques qui ont contribué à lui donner de l'importance et qui ont stimulé sans relâche l'intérêt que les mathématiciens lui ont porté :

- sa fécondité : de multiples énoncés mathématiques en sont conséquences et ne sont pas démontrables sans une certaine forme de "choix".

- sa stabilité : parmi les énoncés qui en sont conséquence, un grand nombre sont issus de branches très diverses de mathématiques et l'entraînent à leur tour.

De ce fait, loin d'être un principe *ad hoc* , marginal, l'axiome du choix apparaît comme un lieu de passage obligé et comme un point de concours de théories mathématiques éloignées et sans liens apparents.

Nous allons donner ici un échantillon des propositions mathématiques équivalentes à l'axiome du choix. Nous ne présenterons que les plus dignes de retenir l'attention des mathématiciens, et les classerons par famille en fonction de la parenté des concepts utilisés dans la formulation de ces énoncés. Les mathématiciens préfèrent, aujourd'hui encore, considérer la plupart de ces énoncés comme des théorèmes plutôt que comme des formes équivalentes de l'axiome du choix, mais il importe de prendre conscience que recourir à ces énoncés dans la démonstration d'un théorème revient purement et simplement à le démontrer à partir de l'axiome du choix. Le scénario, maintes fois répété, qui a conduit à la découverte de beaucoup de propositions qui lui sont équivalentes s'est déroulé selon le schéma suivant. Parfois, conjecturées ou considérées comme évidentes, ce n'est que grâce à cet axiome que l'on parvint à les démontrer rigoureusement, sans hypothèses tacites et sans pétition de principe. On prenait ainsi conscience que la démonstration de ces propositions exigeait toute la force de l'axiome du choix. Puis, d'autres mathématiciens s'aperçurent plus ou moins longtemps après que ces propositions l'entraîneraient à leur tour, et que dès lors toute démonstration faisant appel à ces énoncés reposait en fait sur cet axiome.

Les travaux mathématiques qui ont conduit à la prolifération des énoncés équivalents à l'axiome du choix présentent une grande parenté avec ceux qui ont entraîné la découverte de propositions équivalentes au postulat des parallèles. Depuis l'Antiquité jusqu'au XIXe siècle, beaucoup de mathématiciens cherchèrent à démontrer le postulat des parallèles jugé obscur ou contestable, en comparaison de la simplicité et de la clarté des autres axiomes de la géométrie d'Euclide ; ils cherchèrent également à démontrer les propositions de la géométrie d'Euclide à partir d'autres principes estimés plus clairs et moins sujets à être mis en doute. Ils découvrirent de la sorte un grand nombre d'énoncés susceptibles de remplacer avantageusement le postulat d'Euclide, mais plus tard ceux-ci furent reconnus équivalents à ce postulat. Ces travaux furent loin d'être stériles ; on y gagna notamment à répérer le caractère euclidien de l'espace à travers des propriétés qui semblaient n'en refléter que des cas particuliers. On peut souligner une autre analogie frappante entre le postulat des parallèles et l'axiome du choix : lorsqu'on cherchait à les éviter dans les démonstrations, ils revenaient subrepticement sous le déguisement d'un autre énoncé, avant qu'on eût démontré qu'ils étaient des axiomes indépendants du système auquel ils se rattachaient. C'est le sort inévitable des énoncés indécidables et importants. Ce que nous apprend la liste des énoncés équivalents à l'axiome du choix, c'est que cet axiome peut revêtir de multiples déguisements.

Equivalence de l'axiome du choix à l'existence d'ensembles bien ordonnés

▶ *Le principe du bon ordre (ou théorème de Zermelo, 1904 et 1908).*

Tout ensemble peut être bien ordonné.

▶ *Le théorème des alephs :*

Tout cardinal infini est un aleph.

▶ *Trichotomie ou comparabilité des cardinaux* (équivalence démontrée par *Hartog, 1915*)

Equivalences de l'axiome du choix à des propriétés arithmétiques des cardinaux infinis

▶ *Inégalité de Zermelo-König* (théorème démontré par König en 1904, dans le cas où I est dénombrable, démontré dans le cas général par Zermelo en 1908 ; équivalence dans H. et J. Rubin).

Si pour tout $i \in I$ $\mathfrak{m}_i < \mathfrak{n}_i$, *alors* $\sum_{i \in I} \mathfrak{m}_i < \prod_{i \in I} \mathfrak{n}_i$.

En 1924, Tarski donna sept propriétés de l'arithmétique des cardinaux qui sont toutes équivalentes à l'axiome du choix. Elles sont l'extension aux cardinaux infinis de propriétés arithmétiques des entiers, sauf les deux suivantes :

$\mathfrak{m}.\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ *pour tous cardinaux infinis* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{n}$,

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ *pour tout cardinal infini* $\mathfrak{m}$.

Equivalences de l'axiome du choix à des propriétés de maximalité

Nous présenterons les principes de maximalité, équivalents à l'axiome du choix, qui sont les plus couramment utilisés en mathématiques. En 1914 puis en 1927, Hausdorff démontra des principes de maximalité à partir de l'axiome du choix, ainsi que Kuratowski en 1922. En 1935, Zorn fut le premier à faire usage d'un principe de maximalité en algèbre et à démontrer qu'il est équivalent à l'axiome du choix. O. Teichmüller (1939), N. Bourbaki (1939) et J. W. Tukey (1940) trouvèrent plusieurs principes de maximalité; le premier, indépendamment du travail de Zorn, en vue de leurs applications à l'algèbre, les deux autres, à partir du "lemme de Zorn", pour les applications à la topologie. Ces principes de maximalité avaient l'avantage sur la formulation zermelienne de l'axiome du choix d'être plus appropriés aux utilisations algébriques et topologiques.

Lemme de Zorn (1935) : Si $(X, \leq)$ *est un ensemble non vide partiellement ordonné tel que toute chaine (partie totalement ordonnée) dans* X *ait une borne supérieure, alors* X *a un élément maximal.*

On dit (Bourbaki, 1939, et Tukey, 1940) qu'une famille F d'ensembles est *de caractère fini* si, pour tout X, X appartient à la famille F si, et seulement si toute partie finie de X appartient à F.

Principe de maximalité pour les familles de caractère fini ou *Lemme de Teichmüller-Tukey (Teichmüller, 1939, Bourbaki, 1939, Tukey, 1940) : Toute famille non vide* F *d'ensembles de caractère fini possède un élément maximal (pour la relation d'inclusion).*

Existence de branches pour les arbres (voir §4.11) *: Tout arbre (non vide) possède une branche.*

Equivalents algébriques de l'axiome du choix

Ces versions exprimées dans le langage des algèbres, des treillis ou des espaces vectoriels sont très proches des principes de maximalité. Plusieurs énoncés de cette famille étaient utilisés comme des théorèmes avant qu'on ne démontrât qu'ils étaient équivalents à l'axiome du choix. C'est J. Schmidt en 1953 et D. Scott en 1954 qui démontrèrent les premiers, que plusieurs de ces formulations sont équivalentes à l'axiome du choix.

Théorème sur les idéaux maximaux des treillis (équivalence démontrée par D. Scott en 1954)
Tout treillis unifère ayant au moins deux éléments a un idéal maximal.

Existence d'idéaux maximaux pour les anneaux (Krull, 1929) : Tout anneau commutatif tel que $1 \neq 0$ *inclut un idéal maximal* (équivalence : Scott, 1954). On a même un résultat d'équivalence encore plus fin : *Tout anneau factoriel inclut un idéal maximal* (équivalence : W. Hodges, 1979).

▶ *Théorème d'existence de supplémentaires dans un espace vectoriel.* (M. N. Bleicher, 1964, démontra que ce théorème joint à une hypothèse faible sur l'axiome du choix l'axiome du choix restreint aux familles d'ensembles finis est équivalent à l'axiome du choix. Jech (1973) montra que le théorème tout seul est déjà équivalent à cet axiome du choix).

Pour tout espace vectoriel V *sur* $\mathbb{R}$ *, si* S *est un sous-espace vectoriel de* V *, alors il existe un sous-espace vectoriel* S' *de* V *tel que* $S \cap S' = \{0\}$ *et que* $S \cup S'$ *engendre* V *.*

Théorème de la base (équivalence démontrée par J. Halpern en 1968).
Si une partie A *d'un espace vectoriel* V *engendre* V *, alors* A *inclut une base.*

Existence de bases pour les espaces vectoriels : Tout espace vectoriel possède une base.

Hausdorff démontra en 1932 que cette proposition résultait du principe du bon ordre. Jech et Sochor ont montré en 1966 que la démonstration de cette proposition dans la théorie ZF + AC exigeait vraisemblablement toute la force de l'axiome du choix : ils exhibèrent, en effet, d'une part un modèle de ZF, ne vérifiant pas AC, dans lequel il existe un espace vectoriel qui ne possède pas de base, d'autre part un modèle de ZF + non-AC dans lequel il existe un espace vectoriel (de dimension 6 sur $\mathbb{R}$) qui possède deux bases de cardinalité différente. Pour obtenir ces résultats surprenants, Jech et Sochor appliquèrent une méthode de transfert. Celle-ci permettait de transposer à la théorie ZF les résultats curieux précédents que Läuchli avait déjà trouvés en 1963 pour des modèles appropriés, appelés *modèles de permutation*, d'une variante de la théorie des ensembles, à savoir "ZF + *il existe un ensemble infini de singletons non fondés*", notée FMS (voir § 3). L'espace vectoriel sans base est précisément l'ensemble infini dénombrable des singletons non fondés $x = \{x\}$, muni des opérations qui en font un espace vectoriel de dimension *infinie* sur $\mathbb{Q}$; or le modèle de FMS est choisi de telle façon que toute partie linéairement indépendante de cet espace vectoriel est de cardinalité *finie*. Enfin, Blass et Brenner, de façon indépendante, ont démontré en 1983 que le théorème d'existence de bases est équivalent à l'axiome du choix (voir l'article de A. Blass dans [29]).

▶ *Théorème d'existence de points extrémaux.* (équivalence démontrée par J.L. Bell et N.H. Fremlin en 1972, et indépendamment par W.A.J. Luxemburg).
La boule unité du dual topologique d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ *possède un point extrémal, i.e. un élément* a *tel que, pour tout point* x *et* y *de cette boule, la relation* $a = (x+y)/2$ *entraine* $a = x = y$.

Versions topologiques de l'axiome du choix

Théorème de Tihonov (démontrée par Tihonov en 1935, équivalence établie par Kelley en 1950)
Un produit d'espaces quasi-compacts est quasi-compact.

Théorème affaibli de Tihonov (équivalence démontrée par L.E. Ward en 1962). *Le produit d'une famille quelconque de copies d'un espace quasi-compact est quasi-compact.*

Equivalents logiques de l'axiome du choix

▶ *Théorème descendant de Löwenheim-Skolem-Malcev* (théorème démontré par Malcev en 1936, équivalence établie par R. Vaught en 1956).
Tout modèle d'un ensemble infini, de cardinalité $\mathbf{k}$ *, de formules du premier ordre possède un sous-modèle de cardinalité* $\leq \mathbf{k}$.

▶ *Théorème ascendant de Löwenheim-Skolem-Tarski* (R. Vaught (1974) assure que Tarski a démontré ce ce théorème vers 1928 ; l'équivalence est due à R. Vaught (1956)).
Si un ensemble infini dénombrable de formules du premier ordre possède un modèle infini ; alors il admet un modèle en chaque cardinal infini.

4.2.4. Versions affaiblies de l'axiome du choix

Parmi les conséquences de l'axiome du choix, certaines ne lui sont pas équivalentes et sont néanmoins, comme l'axiome du choix, indépendantes de la théorie ZF, et riches en conséquences ; ce sont des versions strictement affaiblies de cet axiome. La recherche de ces formes faibles présente beaucoup d'intérêt. Souvent, lorsqu'on démontre un théorème au moyen de l'axiome du choix, on n'a pas besoin de toute la force de cet axiome, mais d'une hypothèse plus faible. Certains de ces énoncés affaiblis suffisent pour une bonne part de la pratique mathématique, sans avoir les conséquences indésirables de l'axiome du choix.

Théorème de l'idéal premier (M. Stone, 1936).
Toute algèbre de Boole inclut un idéal premier.

ou, de façon équivalente (Tarski, 1954) :

Dans toute algèbre de Boole, tout idéal s'étend en un idéal premier.

ou, de façon équivalente encore (Scott, 1954) :

Dans tout anneau commutatif unifère, tout idéal propre est inclus dans un idéal premier.

Le théorème de l'idéal premier présente trois avantages en tant que principe de choix :

- il est un principe de choix strictement plus faible que l'axiome du choix habituel ;
- il est riche en conséquences qui ne sont pas démontrables dans ZF, du fait de son indépendance ;
- il a un caractère naturel en raison de sa grande stabilité : il est en effet équivalent à une série d'énoncés variés.

Voici certains énoncés équivalents au théorème de l'idéal premier :

Théorème de l'ultrafiltre (H. Cartan, 1937, ignorant la dualité entre filtre et idéal dans une algèbre de Boole) :
Toute algèbre de Boole inclut un ultrafiltre.

ou de façon équivalente, sous une forme affaiblie :

Tout filtre dans une algèbre de Boole s'étend en un ultrafiltre.

ou de façon équivalente encore (Tarski, 1954) :

Tout filtre sur un ensemble quelconque s'étend en un ultrafiltre.

Remarquons que l'énoncé "*Pour tout ensemble E, il existe un ultrafiltre sur E*" est démontrable sans axiome du choix.

Théorème d'existence d'une mesure (A. Jarski, 1930 ; équivalence démontrée par J. Łoś, et C. Ryll-Nardzewski, 1955).
Sur tout ensemble infini, il existe une mesure additive à deux valeurs telle que chaque singleton ait une mesure nulle.

Théorème de représentation pour les algèbres de Boole (Stone, 1936, et d'autres mathématiciens, indépendamment, à la même époque).
Toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre de parties d'un ensemble.

Théorème de Tihonov pour les espaces séparés. (Théorème donné par Bourbaki en 1940 ; équivalence démontrée par Łoś et Ryll-Nardzewski en 1955, et par Rubin et Scott en 1954).
Tout produit d'espaces compacts est compact.

Compacité des espaces de Cantor (J. Mycielski, 1966).
Pour tout ensemble I *, l'espace de Cantor* $C_I = \{0;1\}^I$ *est compact.*

Définition (*J. Mycielski, 1961*). On dit qu'un graphe est *coloriable avec* n *couleurs*, ou est n-*coloriable* s'il existe une partition des sommets du graphe en n classes telles qu'aucune paire de sommets appartenant à la même classe (*i.e.* ayant la même couleur) ne soit reliée par une flèche.
Soit P_n la propriété : "*Pour tout graphe* X *, si tout sous-graphe strict de* X *est* n-*coloriable, alors* X *est également* n-*coloriable*".

Proposition (*Läuchli 1971*). *Pour tout entier* $n > 2$, *la propriété* P_n *est équivalente au théorème de l'idéal premier.*

En 1954, H. Rubin et D. Scott ont démontré que le théorème de compactification de Stone-Čech est équivalent au théorème de l'idéal premier.
(*cf.* chapitre 1, Théorème 8, et chapitre 6)

Théorème de complétude (pour la logique des propositions, pour la logique les prédicats du premier ordre ; théorème dû à L. Henkin, 1947, équivalence établie par L. Henkin en 1954).
Si un ensemble quelconque de formules du langage de la logique est non-contradictoire, alors il possède un modèle (i.e. *il existe une structure sur le langage de la logique —une interprétation ensembliste de ce langage — pour laquelle toutes les formules de cet ensemble sont vraies).*

ou, de façon équivalente :

Si une formule A *est conséquence sémantique d'un ensemble quelconque* Γ *de formules du langage de la logique, alors* A *est démontrable formellement à partir de* Γ *comme ensemble d'hypothèses,* soit en abrégé : si $\Gamma \models A$, alors $\Gamma \vdash A$.

La réciproque de ce dernier énoncé est vraie, mais n'exige pas d'hypothèses supplémentaires.

Théorème de compacité pour la logique des prédicats du premier ordre (théorème: K. Gödel 1930 et Malcev 1936 ; équivalence : L. Henkin , 1954)
Soit Γ *un ensemble quelconque de formules de la logique des prédicats du premier ordre. Si toute partie finie de* Γ *possède un modèle, alors* Γ *tout entier admet aussi un modèle. (la réciproque est triviale).*

où, de façon équivalente :

Si une formule A *est conséquence sémantique d'un ensemble* Γ *de formules, alors* A *est conséquence sémantique d'un sous-ensemble fini* Γ' *de formules de* Γ .

Une application f définie sur une partie d'un ensemble S ayant pour image l'ensemble $\{0;1\}$ est appelée (Robinson, 1963) une *valuation partielle* sur S ; si f a pour domaine de définition l'ensemble S tout entier, on dit que f est une *valuation totale* sur S.

Principe de consistance pour une famille de valuations de caractère fini (E. Engeler, 1959, A. Robinson, 1963) : *Soit S une famille de valuations sur un ensemble* s *telles que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) Toute partie finie de s *est le domaine de définition d'une valuation de S.*

(2) La restriction de toute valuation de S à une partie finie de S est une valuation de S.

(3) Si f *est une valuation de S dont le domaine de définition est une partie de* s *et dont la restriction à toute partie finie de son domaine de définition est une valuation de S, alors* f *appartient à S.*

Alors il existe une valuation totale dans S.

On dit que la famille S est *de caractère fini* lorsqu'elle vérifie les conditions (1), (2) et (3) précédentes, parfois même lorsqu'elle vérifie seulement les conditions (1) et (2). Une valuation f vérifiant la condition (3) ci-dessus est dite *consistante* relativement à la famille S. Les conditions précédentes (1) , (2) et (3), qui avaient été données par Engeler, ont été formulées par Robinson en termes de propriétés d'une base de filtre (ou de filet) sur le domaine de définition I de la famille $S = \{f_i ; i \in I\}$.

■ Axiome du choix dépendant pour ω (CD_ω ou CD)

Si a *est un ensemble non vide, et si* r *est une relation binaire telle que pour tout élément* $x \in a$ *il existe un* $y \in a$ *tel que* $(x;y) \in r$ *, alors il existe une suite dénombrable d'éléments de* a , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *, telle que* $(x_n ; x_{n+1}) \in r$ *, pour tout entier* n .

Remarque : Pour chaque cardinal k , on peut formuler un principe du choix dépendant pour k (CD_k) qui nous permet de faire k choix tels que chaque choix dépende des précédents. L'axiome du choix AC équivaut à : $\forall k\, CD_k$.

■ Axiome du choix dénombrable ($AC(\aleph_0; -)$)

Pour toute famille dénombrable $(x_n)_{n<\omega}$ *d'ensembles non vides, il existe une fonction de choix.*

Remarque : Pour tout cardinal k , on peut formuler le principe du choix pour k ($AC(k;-)$)

Pour toute famille de cardinalité k *d'ensembles non vides, il existe une fonction de choix.*

L'hypothèse $\forall k\, AC(k;-)$ est strictement plus faible que l'axiome du choix AC : On a bien $\forall k\, AC(k;-) \Rightarrow CD_\omega$, mais $\forall k\, AC(k;-)$ n'entraîne pas CD_{ω_1}.

Nous allons maintenant présenter un échantillon des conséquences remarquables des différentes versions, non équivalentes, des axiomes de choix. Nous nous rendrons alors compte que la plupart des théorèmes mathématiques que l'on démontre habituellement grâce à l'axiome du choix sont en fait démontrables à partir d'une forme de choix plus faible que l'axiome général.

4.2.5. Conséquences des axiomes de choix

■ Conséquences de l'axiome du choix AC

- Le théorème de l'idéal premier : ce théorème n'est pas équivalent à AC, mais est strictement plus faible (résultat de J. D. Halpern, 1964, pour la théorie ZFA, de Halpern et Levy, 1967, pour la théorie ZF).

■ Conséquences du théorème de l'idéal premier

▶ *Le théorème de Hahn-Banach* (Łoś et Ryll-Nardzewski 1951, Luxemburg 1967). Pincus (1972) a démontré que ce théorème n'entraîne pas le théorème de l'idéal premier. Ryll-Nardzewski (non publié) et Luxemburg (1969) ont démontré que le théorème de Hahn-Banach équivaut à l'énoncé suivant :

Toute algèbre de Boole possède une mesure à valeurs réelles positives telle que le plus petit et le plus grand élément élément de cette algèbre aient respectivement pour image 0 et 1 (voir volume 4).

Le théorème de l'ultrafiltre faible : Pour tout ensemble infini X, *il existe un ultrafiltre non principal sur* X.

Cet énoncé est strictement plus faible que le théorème de l'idéal premier. L'existence d'une partie non mesurable pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ résulte du théorème de l'ultrafiltre faible.

▶ *L'axiome du choix dépendant* : Cet axiome est strictement plus faible que le théorème de l'idéal premier.

■ Conséquences de l'axiome du choix dépendant (CD)

▶ *Cardinal des boréliens : Le cardinal de la tribu borélienne* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *de* $\mathbb{R}$ *est* $\mathfrak{c}$ (voir chapitre 3, §4 pour la démonstration). On en déduit qu'il existe une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un borélien. Cependant, il existe un modèle de ZF dans lequel toute partie de $\mathbb{R}$ est borélienne (Feferman et Levy, 1963).

▶ *Le théorème d'Urysohn* : Voir chapitre 1, théorème 37, assertion (i) $\Longrightarrow$ (ii), p. 42).

Pour mémoire, signalons également le "lemme de König" , exprimable en termes de graphes, ou d'arbres.

■ Enoncés compatibles avec l'axiome du choix dépendant (Solovay, 1964)

▶ *Toute partie de* $\mathbb{R}$ *est mesurable pour la mesure de Lebesgue.*

▶ *Toute partie de* $\mathbb{R}$ *a la propriété de Baire.*

▶ *Toute partie non dénombrable de* $\mathbb{R}$ *inclut un sous-ensemble parfait.*

■ Conséquences de l'axiome du choix dénombrable

▶ *Tout ensemble infini possède un sous-ensemble infini dénombrable.* (Cantor, 1895, Borel, 1898, Russel, 1902, tous avec l'utilisation implicite de l'axiome du choix dénombrable). Cette proposition est équivalente à celle-ci : *Un ensemble fini au sens de Dedekind est fini.* Rappelons qu'un ensemble est dit *infini au sens de Dedekind* s'il contient une partie propre qui lui est équipotente. Les deux propositions équivalentes précédentes sont strictement plus faibles que l'axiome du choix dénombrable.

▶ *Théorème de la réunion dénombrable : La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.* (Cantor). Cette proposition est strictement plus faible que l'axiome du choix dénombrable, mais elle a pour conséquence : *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *n'est pas une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.* (Sierpinski, 1918). Cette dernière proposition peut être fausse sans l'axiome du choix dénombrable : on peut en effet trouver un modèle de ZF dans lequel l'ensemble des nombres réels, tout en étant non dénombrable, est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables (Feferman et Levy, 1963). De ce fait, sans l'axiome du choix dénombrable, on est obligé de renoncer aux constructions classiques de l'analyse réelle que sont la mesure de Lebesgue, la théorie des ensembles boréliens, etc.

▶ *La réunion d'une famille dénombrable de parties analytiques de* $\mathbb{R}$ *est analytique* (voir chapitre 3, théorème 24, p. 144)(Sierpinski, 1918). Ce théorème a pour corollaire l'analycité des boréliens de $\mathbb{R}$ (Suslin, 1917). (C'est d'ailleurs sous cette forme que l'on a énoncé le théorème 24 du chapitre 3).

▶ *Tout espace topologique à base dénombrable est un espace de Lindelöf* (voir p. 62).

▶ *Tout espace topologique à base dénombrable est séparable* (voir chapitre 1, §2.1) (Kuratowski, 1933,avec utilisation implicite de l'axiome du choix dénombrable).

▶ *Tout espace topologique séparé à base dénombrable est un espace de Lindelöf* (voir p. 62).

▶ *Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable* (Chapitre 1, proposition 30, p.40) (Hausdorff, 1927). Cette propriété peut être fausse sans l'axiome du choix dénombrable : on peut en effet trouver un modèle de ZF dans lequel il existe un sous-espace de $\mathbb{R}$ qui n'est pas séparable (Jech, 1973).

▶ *Axiome du choix dénombrable pour les ensembles finis* ($AC(\aleph_0 ; \aleph_0)$): *Pour toute famille dénombrable d'ensembles finis disjoints, il existe une fonction de choix.* Cet énoncé n'est pas équivalent à l'axiome du choix dénombrable.

▶ *Axiome du choix dénombrable pour les paires* ($AC(\aleph_0 ; 2)$) : *Pour toute famille dénombrable de paires disjointes, il existe une fonction de choix.* Ce dernier énoncé est strictement plus faible que le précédent.

4.2.6. Indépendance des axiomes de choix

La démonstration de l'indépendance des axiomes de choix relativement à ZF est l'aboutissement de nombreux travaux qui ont exploité quelques méthodes remarquables pour construire des modèles de ZF ayant les propriétés requises, à partir de modèles de ZF ne les ayant pas. Gödel (1938, 1940) a inventé la notion d'ensemble constructible (voir §4.4) pour démontrer la consistance de l'axiome du choix, et de l'hypothèse du continu, relativement à ZF (en fait, relativement à une théorie des ensembles équiconsistante à ZF). La méthode de Gödel était géniale, mais longtemps, elle n'a eu d'autre but que de démontrer ce résultat. Ce n'est qu'avec les travaux de Jensen que la méthode a révélé sa fécondité (voir §4.11).

Fraenkel a démontré en 1922 que la négation de l'axiome de l'axiome du choix dénombrable pour les paires est compatible avec la théorie de Zermelo (voir p. 177) en utilisant la méthode des "modèles de permutation". Pour démontrer la consistance relative de la négation de diverses formes de l'axiome du choix, Mostowski a amélioré la méthode de Fraenkel, en y faisant notamment apparaître un groupe de permutations. Les résultats de consistance fournis par la méthode de Fraenkel-Mostowski présentaient un inconvénient : ils n'étaient pas obtenus relativement à la théorie ZF, mais relativement à la théorie ZFA (ZF + existence d'atomes), qui n'est pas compatible avec l'axiome de fondation. En 1957, Specker a modifié la méthode de Fraenkel-Mostowski afin de démontrer la consistance de la négation de l'axiome du choix relativement à une théorie des ensembles sans atomes, mais toujours incompatible avec l'axiome de fondation, car elle contenait des ensembles de la forme $x = \{x\}$, qui sont aussi étrangers à la pratique mathématique que les atomes. La méthode de Fraenkel-Mostowski-Specker était plus féconde que la précédente, mais les résultats de consistance qu' elle fournissait étaient aussi peu satisfaisants. On souhaitait en effet savoir si la négation des axiomes de choix était compatible avec la théorie des ensembles de référence, à savoir ZF. C'est enfin grâce à la méthode du forçage (voir §5.8) que Cohen a pu démontrer la consistance de la négation de l'axiome du choix, et la négation de l'hypothèse du continu, relativement à la théorie ZF.

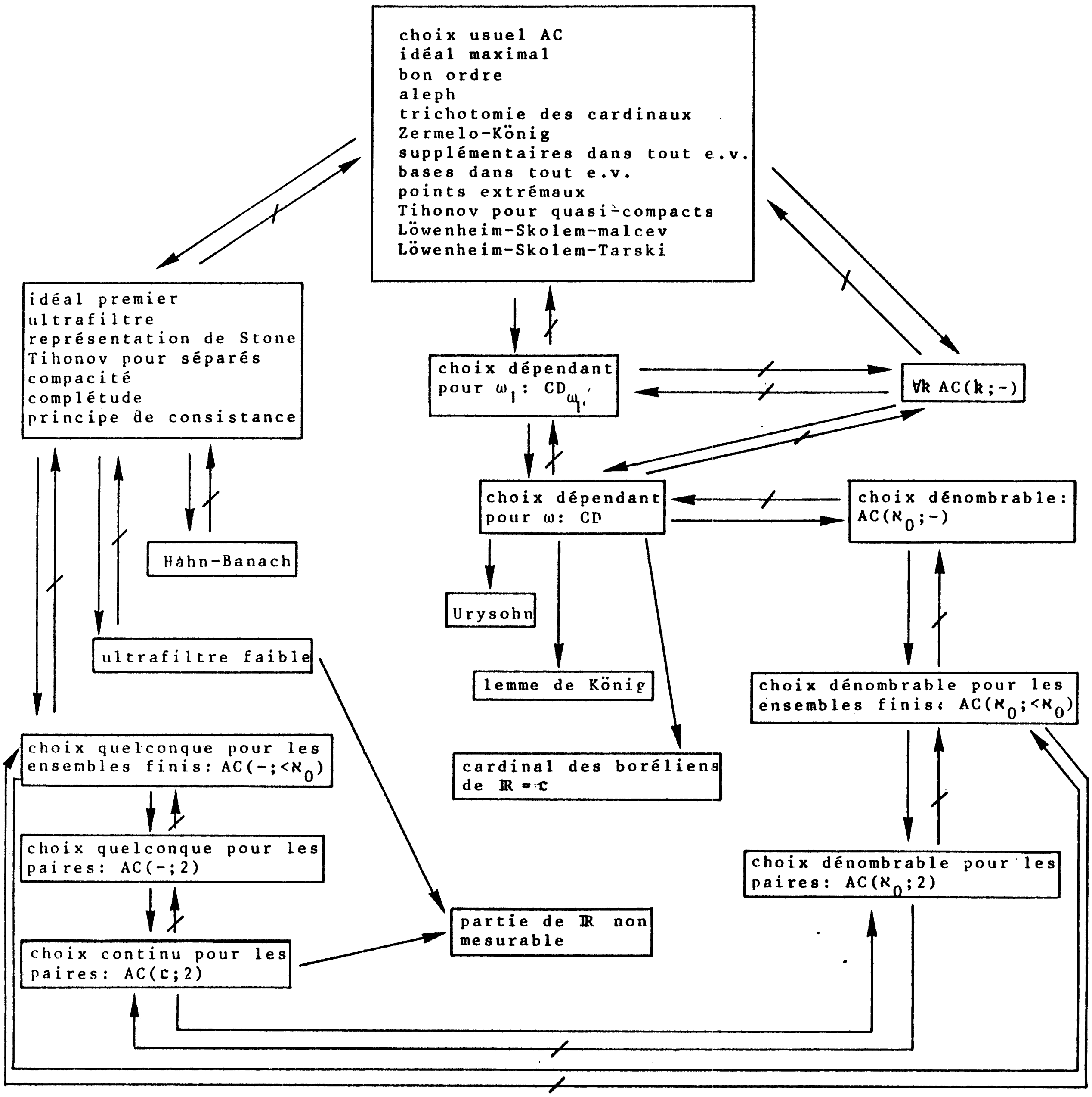


Figure 2

Si ZF n'est pas contradictoire, on pourra chercher les flèches qui manquent. Si ZF s'avère contradictoire, on pourra remplacer les flèches par des courbes de Peano.

Dans la pratique mathématique, au-dessus de la ligne en pointillés, on se réfère simplement à l'axiome du choix ; au-dessous de cette ligne, on ne précise pas qu'il est fait usage d'une forme d'axiome de choix.

4.3. LE PROBLEME DU CONTINU

Tout ensemble a est équipotent à un sous-ensemble de $\mathcal{P}(a)$ mais a n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(a)$ car la cardinalité de $\mathcal{P}(a)$ est strictement supérieure à la cardinalité de a (théorème de Cantor). Il est naturel de se demander s'il y a des cardinaux intermédiaires entre ceux de a et de $\mathcal{P}(a)$. La réponse est évidemment positive dans le cas où la cardinalité de a est finie. Mais dans le cas où a est infini, la question ne peut être décidée dans ZF. De même, il résulte de l'axiome du choix que $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$, mais on ne peut décider $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ dans ZFC. C'est pour décider ces problèmes relatifs à la puissance des cardinaux qu'on rajoute à ZF des énoncés appelés hypothèse (resp. hypothèse généralisée) du continu.

■ (HC) Hypothèse du continu

Formulation en termes d'ordinaux : $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Formulation en termes de cardinaux

Il n'existe pas de cardinal compris strictement entre $\aleph_0$ *, premier cardinal infini, et* $2^{\aleph_0}$

Cela revient à postuler que la puissance du continu $2^{\aleph_0}$, *i.e.* la cardinalité de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est égale au premier cardinal non dénombrable, $\aleph_1$.

Formulation en termes de bon ordre :

Il existe sur $\mathcal{P}(\omega)$ *un bon ordre dont ous les segments initiaux stricts sont dénombrables.*

Il en résulte que $\mathcal{P}(\omega)$, non dénombrable d'après le théorème de Cantor, est le premier ordinal non dénombrable, *i.e.* $\aleph_1$:

On peut généraliser l'hypothèse du continu HC sous deux formes (équivalentes dans ZF) :

- Forme ordinale :

(HA) *Hypothèse des alephs* : *Pour tout ordinal* α *, on a* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

On définit les *nombres beths* par la relation fonctionnelle $y = \beth_\alpha$

$$\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \beth_\alpha \quad \text{si } \lambda \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

HC s'écrit aussi $\forall\alpha(\beth_\alpha = \aleph_\alpha)$ ("les beths sont des alephs").

- Forme cardinale :

(HGC) *Hypothèse généralisée du continu*

Pour tout cardinal transfini $\mathfrak{k}$ *il n'existe pas de cardinal compris strictement entre* $\mathfrak{k}$ *et* $2^{\mathfrak{k}}$.

■ Conséquences

- HGC implique que tous les $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ sont déterminés (dans ZFC).
- HGC $\Longrightarrow$ AC (dans FMS).

- HA $\Longrightarrow$ AC (dans ZF).
- HGC $\Longleftrightarrow$ HA+AC (dans FMS).
- HGC $\Longleftrightarrow$ HA (dans ZF).

HGC est indépendante de ZFC

Gödel a démontré que HGC ne peut être réfutée dans ZFC (la collection des ensembles constructibles satisfait, en effet, à ZF+HGC; *cf.*p.196), et Cohen a montré que HC (et *a fortiori* HGC) ne peut être démontrée dans ZFC, tout cela sous l'hypothèse que ZFC est consistant.

4.4. LES ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES

La relation Def

Soit X un ensemble ou une collection qui n'est pas un ensemble. A toute formule $\phi\ (x_1,\ldots,x_n)$ du premier ordre dans le langage L, on associe la formule $\phi\lfloor_X(x_1;\ldots;x_n)$, dite *formule* ϕ *restreinte à l'ensemble (à la collection)* X. Elle est obtenue à partir de $\phi\ (x_1;\ldots;x_n)$ en remplaçant chaque occurence de $\forall z\ \psi(z)$ et de $\exists z\ \psi(z)$ dans ϕ respectivement par $\forall z\ (z \in X \Longrightarrow \psi(z))$ et $\exists z (z \in x \wedge \psi(z))$. On dit aussi que $\phi\lfloor_X$ est obtenue à partir de ϕ en relativisant à X les quantificateurs universels et existentiels apparaissant dans ϕ. Si X est un ensemble, on désigne par Def(X) l'ensemble de tous les sous-ensembles y de X pour lesquels il existe une formule $\phi(z;b_1;\ldots;b_n)$ à paramètre $b_1,\ldots,b_n$ dans X et avec z pour variable libre, telle que l'on ait $y = \{a\in X \mid \phi\lfloor_X(a;b_1;\ldots;b_n)\}$. Autrement dit, Def(X) est *l'ensemble de tous les sous-ensembles de* X *définissables* par une formule du premier ordre à paramètre dans X et relativisée à X.

Propriétés de la relation Def

▶ Pour tout ensemble X, on a $X\in \mathrm{Def}(X)$.

On dit qu'un ensemble (ou une collection) X est *transitif* si on a $\forall y\ (y\in X \Longrightarrow y\subset X)$, *i.e.* si les éléments de X sont des éléments de X.

▶ Si X est transitif, alors Def(X) l'est aussi, et on a $X\subset \mathrm{Def}(X)$.

▶ Def(X) peut s'exprimer en termes de ZF ; plus précisément Def(X) est Δ_1^{ZF}

▶ Si y est une partie de X qui n'est pas définissable avec paramètres, on a $\mathrm{Def}(y) \not\in \mathrm{Def}((X)$.
Par contre, si $y\subset X$ et $y\in X$, alors $\mathrm{Def}(y) \subset \mathrm{Def}(X)$.

La collection L

On définit par induction sur les ordinaux la relation fonctionnelle $y = V_\alpha$:

$$\begin{cases} L_0 = \emptyset \\ L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}\ (L_\alpha) \\ L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \quad \text{si } \lambda \text{ est un ordinal limite} \end{cases}$$

$(L_\alpha \mid \alpha\in\mathbf{On})$ est appelée la *hiérarchie constructible*, et la collection $L = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} L_\alpha$ *l'univers constructible* ou la *collection des ensembles constructibles*. Un ensemble X est dit *constructible* si

$X \in L$, et on a $X \in L$ si et seulement si $\exists \alpha\ (X \in L_\alpha)$; $X \in L$ peut donc s'exprimer dans ZF. On définit, pour tout ensemble constructible X, *l'ordre* de X, noté $od(X)$, comme le plus petit ordinal α tel que $X \in L_\alpha$.

Propriétés de la relation od et de la collection L_α

- Pour tout ensemble constructible X, $od(X)$ est un ordinal successeur.
- Si $\alpha \leq \beta$ on a $L_\alpha \subset L_\beta$, et si $\alpha < \beta$ on a $L_\alpha \in L_\beta$.
- Pour tout ordinal α, L_α est transitif : si X est constructible, tout élément de X est constructible et l'ordre des éléments de X est strictement inférieur à celui de X. Il en résulte que L est transitif (*i.e.* $X \in L_\alpha \Longrightarrow X \subset L_\alpha$).
- Pour tout ordinal α, $\alpha \subset L_\alpha$ et $\alpha \in L_{\alpha+1}$. Il en résulte que $\mathbf{On} \subset L$, *i.e.* que tout ordinal α est constructible, et l'ordre de α est $\alpha+1$.
- $L_\omega = V_\omega$, *i.e.* les ensembles héréditairement finis sont exactement les ensembles constructibles d'ordre fini.
- La collection L n'est pas un ensemble.

Première propriété fondamentale de L (Gödel)

Si A est un axiome de ZF, alors $ZF \vdash A|_L$ (A relativisé à L), ce qui revient à dire :
"*On démontre dans* ZF *que la collection* L *satisfait aux axiomes de* ZF".
La collection L satisfait à tous les axiomes de ZF et contient tous les ordinaux ; il est donc naturel de se demander si tous les ensembles sont constructibles. La seule façon de répondre positivement à la question est d'admettre la réponse pour axiome.

(V = L) Axiome de constructibilité

$$\forall X (X \in L),\ i.e.\ \forall X\ \exists \alpha (X \in L_\alpha)$$

Tous les ensembles sont constructibles

$V=L$ est l'abréviation usuelle de l'énoncé $\forall X\ \exists \alpha (X \in L_\alpha)$. L'axiome de constructibilité ajoute en quelque sorte un principe d'économie ; il affirme qu'il n'existe pas d'autres ensembles que ceux dont on prouve l'existence dans ZF et qu'on est obligé d'admettre pour satisfaire aux axiomes de ZF. Plus précisément, l'univers constructible, *i.e.* la collection des ensembles constructibles, est le plus petit modèle transitif de ZF qui contient tous les ordinaux.

Seconde propriété fondamentale de L (Gödel)

$$ZF \vdash (V = L)|_L$$

On démontre dans ZF *que la collection* L *satisfait à l'axiome* V=L.

On utilise dans cette démonstration la propriété fondamentale suivante : la formule $X \in L_\alpha$ est absolue.

On dit qu'une formule ϕ est *absolue pour une collection transitive* M si on a

$\forall x_1 \dots \forall x_n\ (M(x_1) \wedge \dots \wedge M(x_n) \Longrightarrow (\phi(x_1,\dots,x_n) \Longleftrightarrow \phi|_M(x_1,\dots,x_n)))$, ce qui revient à dire que connaître la valeur de ϕ dans un modèle de ZF équivaut à connaître sa valeur dans une collection transitive suffisamment grande pour contenir tous les paramètres de ϕ. On dit que ϕ est *absolue* si elle est absolue pour toute collection transitive. Le caractère absolu d'une formule dépend de sa complexité logique ; la formule $X \in L_\alpha$ est de complexité Δ_1^{ZF}.

On a donc $ZF \vdash L_\alpha|_L = L_\alpha$ pour tout ordinal α, donc aussi $ZF \vdash L|_L = L$, et comme on a évidemment $V|_L = L$, on obtient finalement $ZF \vdash (V=L)|_L$.

▶ *Conséquence immédiate de cette propriété* : l'axiome de constructibilité $V=L$ est consistant relativement à ZF.

■ Conséquences importantes de V=L (dans ZF)

- ▶ $V=L \Longrightarrow ZF_9$ (axiome de fondation)
- ▶ $V=L \Longrightarrow AC$, d'où la consistance relative de l'axiome du choix
- ▶ $V=L \Longrightarrow HGC$, d'où la consistance relative de l'hypothèse du continu ; mais on n'a pas $ZF+HGC \to V=L$
- ▶ $V=L$ contredit l'existence des cardinaux mesurables CM(*cf.* 4.8.)
- ▶ $V=L \Longrightarrow$ négation de l'hypothèse de Suslin

4.5. ENSEMBLES (HEREDITAIREMENT) DEFINISSABLES EN TERMES D'ORDINAUX

■ La collection DO

On dit qu'un ensemble X est *définissable en termes d'ordinaux*, et on écrit $DO(X)$, s'il existe un ordinal α et une formule $\phi(x;\alpha_1;\dots;\alpha_n)$ à une variable libre, à paramètres des ordinaux $<\alpha$, et tels que $\{X\} = \{b \mid \phi|_{V_\alpha}(b;\alpha_1;\dots;\alpha_n)\}$, *i.e.* tels que X soit le seul ensemble pour lequel on ait $\phi|_{V_\alpha}(X;\alpha_1;\dots;\alpha_n)$. On note DO la collection de tous les ensembles définissables en termes d'ordinaux.

■ Clôture transitive d'un ensemble

Le plus petit ensemble transitif contenant X se note $cl(X)$ et s'appelle la *clôture transitive* de X. On construit $cl(X)$ à partir de l'axiome de remplacement ZF_8, comme suit :

$$cl(X) = \bigcup_{n\in\omega} f(n) \qquad \text{avec } f(0) = X \text{ et } \quad f(n+1) = \bigcup_{y\in f(n)} y$$

$$= X \cup \bigcup X \cup \bigcup\bigcup X \cup \dots \cup \bigcup^n X \cup \dots \quad \text{, ou l'on a posé : } \bigcup X = \bigcup_{y\in X} y$$

Propriété de la clôture transitive d'un ensemble : $cl(X) : X \cup \bigcup_{y\in X} cl(y)$

■ La collection HDO

La collection DO peut ne pas être transitive ; il se peut, en effet, qu'un ensemble soit définissable sans que tous ses éléments le soient. C'est pour cela qu'on définit une sous-collection de DO, notée HDO, dite collection des *ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux* ; HDO est, par définition, la collection de tous les ensembles X tels que $cl(\{X\}) \overset{\text{déf}}{=} X \cup cl(X) \subset DO$.

Axiomes V=DO et V=HDO

(V=DO) $\forall x \mathrm{DO}(x)$	*Tout ensemble est définissable en termes d'ordinaux*
(V=HDO) $\forall x \mathrm{HDO}(x)$	*Tout ensemble est héréditairement définissable en termes d'ordinaux* .

Propriétés et conséquences

- $\mathcal{O}n \subset \mathrm{HDO}$, *i.e.* la collection HDO contient tous les ordinaux.
- $L \subset \mathrm{HDO} \subset V$.
- HDO satisfait aux axiomes de ZF.
- HDO satisfait à AC, d'où la consistance relative de AC relativement à ZF (Gödel).
- Les énoncés $L=\mathrm{HDO} \neq V$, $L \neq \mathrm{HDO} = V$, $L \neq \mathrm{HDO} \neq V$ sont consistants relativement à ZF.

4.6. HYPOTHESE DES CARDINAUX INACCESSIBLES

Justification de l'introduction des cardinaux inaccessibles

L'axiome de l'ensemble des parties (ZF_5) permet d'obtenir des cardinaux successeurs de plus en plus grands, et les axiomes de la somme (ZF_6) et du remplacement (ZF_8) permettent de passer aux cardinaux limites. Il est naturel de se demander si l'on obtient tous les cardinaux à partir des deux opérations $\lambda \to 2^\lambda$ et $(\lambda_i)_{i<\lambda} \to \bigcup_{i<\lambda} \lambda_i$; l'axiome (de l'existence) des cardinaux inaccessibles affirme que non.

Cardinaux inaccessibles

Un cardinal $\mathfrak{k}$ est dit *inaccessible*, et on écrit $\mathrm{Inac}(\mathfrak{k})$, s'il vérifie les 3 propriétés suivantes :

(i) Si λ est un cardinal $< \mathfrak{k}$, alors $2^\lambda < \mathfrak{k}$.
(ii) Pour toute famille $(\lambda_i)_{i<\alpha}$ de cardinaux $\lambda_i < \mathfrak{k}$ indexée par un cardinal $\alpha < \mathfrak{k}$, on a
$\sup_{i<\alpha} (\lambda_i) = \bigcup_{i<\alpha} \lambda_i < \mathfrak{k}$.
(iii) $\mathfrak{k} > \omega$.

Remarque : Si l'on omet la condition (iii), alors ω est le premier inaccessible infini, le seul dont on peut prouver l'existence dans ZF.

Axiomes des cardinaux inaccessibles

(Inac)	$\forall \alpha\, \exists \mathfrak{k} (\mathrm{Inac}(\mathfrak{k}) \wedge \alpha < \mathfrak{k})$	*Pour tout ordinal* $>\alpha$ *il existe un cardinal inaccessible* $> \alpha$.
(Inac')	$\exists \mathfrak{k}\ \mathrm{Inac}(\mathfrak{k})$	*Il existe un cardinal inaccessible* .

Conséquence de Inac :

Il existe une suite transfinie $\mathfrak{k}_0 < \mathfrak{k}_1 < \ldots < \mathfrak{k}_\alpha < \ldots$ de cardinaux inaccessibles indexée par les ordinaux.

Conséquence de Inac ou de Inac' :

Il existe un plus petit cardinal inaccessible.

Propriétés des inaccessibles

▶ Si k est un cardinal inaccessible, alors V_k satisfait à ZFC (ZF+AC).

▶ Si k est le premier cardinal inacessible, V_k satisfait à ZF +"tout cardinal est accessible". Autrement dit, la négation de l'axiome des cardinaux inaccessibles est consistante relativement à ZF.

▶ Conséquence de la première propriété et du 2° théorème d'incomplétude de Gödel : si ZFC est consistant, on ne peut pas prouver l'existence de cardinaux inaccessibles dans ZF.

Utilité des inaccessibles

L'axiome des cardinaux inaccessibles permet la construction d'un modèle de la théorie des ensembles dans lequel tout ensemble de réels est Lebesgue-mesurable (*cf.* p. 202). Shelah a montré en 1979 que cette hypothèse est indispensable.

4.7. HYPOTHESE DES POINTS FIXES

Fonctions normales

Une fonction $f : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ (*i.e.* définie sur les ordinaux et à valeurs dans les ordinaux) est dite *normale* si

(i) f est croissante, *i.e.* si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$.

(ii) f est continue, *i.e.* si α est un ordinal limite, alors $f(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi)$.

Remarques.

▶ La condition (i) entraîne que pour tout ordinal α , $\alpha \leq f(\alpha)$.

▶ La condition (ii) exprime que f est continue pour la topologie de l'ordre sur les ordinaux.

Structure d'ordre sur $\mathbf{On}$ et sur les ordinaux limites

Soit $A \subset \mathbf{On}$. On dit que A est *fermé* dans $\mathbf{On}$ si $\cup(A \cap \alpha) \notin A$ pour tout ordinal limite α , autrement dit si pour tout $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, on a $\bigcup B \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{x \in B} x \in A$. On dit que A est *cofinal* (ou *non borné*) dans $\mathbf{On}$ si $\alpha(\beta \in A)(\beta > \alpha)$.

Soient λ un ordinal limite et $A \subset \lambda$. On dit que A est *fermé* dans λ si $\bigcup(A \cap \alpha) \in A$ pour tout ordinal limite $\alpha < \lambda$. On dit que A est *cofinal* (ou *non borné*) dans λ , et on écrit A cof λ , si $(\forall \alpha < \lambda)(\exists \beta \in A)(\beta > \alpha)$, autrement dit s'il existe une injection croissante $f : A \to \lambda$ telle que $\lambda = \cup f(A)$.

Soit λ un ordinal limite. La cofinalité de λ , notée $cf(\lambda)$, est, par définition, le plus petit ordinal α cofinal à λ , *i.e.* le plus petit ordinal α tel qu'il existe une injection croissante $f : \alpha \to \lambda$ avec $\lambda = \cup f(\alpha)$.

On a toujours $cf(\lambda) \leq \lambda$. On dit que λ est *régulier* si $cf(\lambda) = \lambda$ et que λ est *singulier* si $cf(\lambda) < \lambda$.

On démontre que

- un ordinal régulier est un cardinal (un *cardinal* est, par définition, un ordinal initial, *i.e.* un ordinal $\mathfrak{u}$ tel qu'il n'existe pas d'injection d'un ordinal $\alpha < \mathfrak{u}$ dans $\mathfrak{u}$).
- $cf(\lambda)$ est toujours régulier.

Propriétés des fonctions normales et points fixes

▶ L'image d'une fonction normale est fermée et cofinale dans $\mathbf{On}$; et toute partie (intuituve) de $\mathbf{On}$ fermée et cofinale est l'image d'une unique fonction normale, appelée sa *fonction d'énumération.*

▶ La propriété fondamentale des fonctions normales concerne les points fixes (α est dit un *point fixe* pour f si $p(\alpha) = \alpha$) :

Si f est une fonction normale, alors les points fixes de f forment une partie (intuitive) fermée et cofinale de $\mathbf{On}$. Cela entraîne la propriété suivante :

▶ Pour toute fonction normale f , on peut former une fonction f' , dite *fonction dérivée,* qui énumère les points fixes de f ; et f' est aussi une fonction normale.

Exemples de fonctions normales

Les fonctions $\aleph$ (aleph) et $\beth$ (beth) sont des fonctions normales. Les points fixes de ces deux fonctions, *i.e.* les ordinaux α tels que $\aleph_\alpha = \alpha$ ou $\beth_\alpha = \alpha$ sont singuliers pour la plupart ; du moins, les "premiers" points fixes supérieurs à un ordinal quelconque ont pour cofinalité ω . Les points fixes réguliers de ces deux fonctions sont les inaccessibles. Il parait donc naturel de généraliser l'axiome des cardinaux inaccessibles en formulant un axiome de points fixes.

Schéma d'axiome des points fixes (F)

Toute fonction normale a un point fixe régulier .

▶ *Conséquences de l'axiome des points fixes*

▶ L'axiome de l'existence des inaccessibles (cf. p.197) est conséquence de cet axiome F car la fonction normale énumérant les nombres beths $> \alpha$ a un point fixe régulier (d'après F) qui est, par définition, un inaccessible $> \alpha$.

▶ De plus, on peut énumérer les inaccessibles par une fonction continue aux limites ; c'est une fonction normale dont les points fixes sont appelés *hyperinaccessibles.*

▶ On peut répéter indéfiniment ce procédé, car les hyperinaccessibles forment une partie cofinale de $\mathbf{On}$; il existe donc une (unique) fonction normale qui les énumère et ses points fixes sont appelés *hyperhyperinaccessibles,* etc.

Quels cardinaux reste-t-il lorsqu'on a épuisé ce procédé ? Les premiers cardinaux qui ne sont pas obtenus par l'axiome F sont les cardinaux Mahlo.

4.8. HYPOTHESE DE MESURABILITE DE TOUT ENSEMBLE DE REELS

Le problème de la mesurabilité des ensembles de réels : A quelle condition toute partie de $\mathbb{R}$ peut-elle être mesurable ?

Poursuivant les travaux de Baire et de Borel sur l'analyse réelle, H. Lebesgue posa dans sa thèse (1902) le problème de la mesure : *Existe-t-il une fonction* $\mathfrak{m}$ *définie sur l'ensemble de* toutes *les parties bornées de* $\mathbb{R}$ *et à valeur réelle (positive ou nulle) telle que* $\mathfrak{m}$ *soit*

(L_1) non identiquement nulle : il existe une partie A *de* $\mathbb{R}$ *pour laquelle* m(A) *est strictement positive ;*
(L_2) invariante par translation : les parties congruentes ont des mesures égales;
(L_3) dénombrablement additive : la mesure d'une famille infinie dénombrable de parties disjointes est la somme des mesures de ces parties ?
Une telle fonction m s'appelle *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^n$, comme on le sait. C'est en vue de résoudre positivement ce problème que Lebesgue introduisit les ensembles mesurables. Mais il pressentait déjà que les ensembles mesurables pouvaient ne pas contenir toute partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et que de ce fait le problème de la mesure pouvait avoir une solution négative.

C'est dans ce contexte que l'axiome du choix intervint comme un trouble-fête, dont il était difficile de se passer entièrement, et qu'il alimenta notablement la controverse à son sujet. Le sort du problème de la mesure semblait très étroitement lié à l'axiome du choix. D'une part, l'axiome du choix était indispensable, sous une certaine forme, pour traiter le problème de la mesure, précisément pour établir l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue. Mais d'autre part, G. Vitali découvrit en 1905 que, sous l'hypothèse de l'axiome du choix, le problème de la mesure de Lebesgue n'admettait pas de solution positive : il construisit, en effet, grâce à l'axiome du choix, une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est mesurable au sens de Lebesgue.

En 1914, Hausdorff posa en des termes nouveaux le problème de la mesure. Afin d'apporter une solution positive au problème de la mesure, il affaiblit la condition d'additivité dénombrable que Lebesgue avait imposée : *Existe-t-il une fonction* m, *définie sur l'ensemble de toutes les parties bornées de* $\mathbb{R}^n$ *et à valeur réelle (positive ou nulle) telle que*
(H_1) le cube unité à n *dimensions ait pour mesure* 1 *;*
(H_2) les parties congruentes aient même mesure ;
(H_3) la mesure m *soit finiment additive : la somme de deux parties disjointes et bornées est la somme de la mesure de ces parties ?*
Une telle fonction m s'appelle *mesure de Hausdorff* sur $\mathbb{R}^n$. Toutefois, Hausdorff démontra que le problème de la mesure de Hausdorff n'avait pas de solution positive pour $\mathbb{R}^n$, dès que $n \geq 3$. Ce résultat est connu sous le nom de *paradoxe de Hausdorff* ou *décomposition paradoxale de la sphère :*

> *On peut décomposer toute sphère* S *en quatre ensembles disjoints* $S = A \cup B \cup C \cup D$ *tels que*
> *(i) les ensembles* A, B, C *sont congruents deux à deux ;*
> *(ii) l'ensemble* $B \cup C$ *est congruent à chacun des ensembles* A, B, C *;*
> *(iii) l'ensemble* D *est dénombrable.*

Il restait encore deux cas ouverts concernant le problème de la mesure de Hausdorff, la droite et le plan, pour lequel il semble que nous puissions nous abandonner à notre intuition. De fait, Banach démontra en 1923, grâce à l'axiome du choix, l'existence d'une mesure de Hausdorff pour la droite et le plan. Puis il approfondit avec Tarski le problème soulevé par le paradoxe de Hausdorff dans le cas $n \geq 3$. C'est alors qu'ils trouvèrent un résultat encore plus surprenant et plus choquant pour l'intuition que le paradoxe de Hausdorff. Ce paradoxe est connu sous le nom de *paradoxe de Banach-Tarski* ou *dédoublement de la sphère* (voir volume 5) *:*

> *Si* $n \geq 3$, *on peut décomposer toute boule fermée* B *de* $\mathbb{R}^n$ *en deux parties disjointes* $B = X \cup Y$ *telles que* X *et* Y *soient équivalentes à* B *par décomposition finie.*

On dit que deux ensemble X et Y sont *équivalentes par décomposition finie*, et on note $X \simeq Y$, s'il existe une décomposition finie de X et de Y en un même nombre de parties disjointes $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ et $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ telles que pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$, X_i soit congruent à Y_i. Pour donner plus d'éclat au paradoxe de Banach-Tarski, on le présente souvent sous la forme suivante d'un tour de prestidigitation :

On peut découper toute boule de dimension $n \geq 3$ et de rayon r en un nombre fini de morceaux — choisis — et les recoller de façon à obtenir deux boules de même taille que la boule de départ, c'est-à-dire deux boules de rayon r.

Von Neumann chercha à expliquer pourquoi il y avait une mesure de Hausdorff sur la droite euclidienne et sur le plan euclidien, mais pas sur les espaces de dimension supérieure ou égale à 3. Pour y parvenir, il généralisa la mesure de Hausdorff en 1929 :

- Il remplaça $\mathbb{R}^n$ par un espace quelconque M ; c'était déjà reconnaître que la dimension n'était pas essentielle à l'explication du paradoxe de Banach-Tarski, mais qu'elle n'était que la partie visible et superficielle d'une structure qui produisait des parties non mesurables.

- Comme il n'y avait pas lieu de se limiter à l'invariance de la mesure par congruence euclidienne, il introduisit dans sa définition de la mesure une condition d'invariance relativement à un sous-groupe quelconque G de bijections de M sur lui-même.

On peut appeler *mesure de von Neumann* cette généralisation de la mesure de Hausdorff. C'est dans la théorie des groupes que von Neumann repéra les conditions qui assurent l'existence de parties non mesurables. Il vit, en effet, que l'existence d'une mesure de von Neumann dépend de la nature du groupe G associé à l'ensemble M sur l'ensemble des parties duquel on cherche à construire une mesure. Il donna des conditions suffisantes pour qu'une mesure (de von Neumann) existe sur $\mathbb{R}^n$; or ces conditions sont vérifiées dans les cas $n = 1, 2$ pour *certains* groupes, par exemple le groupe des déplacements euclidiens, mais elles ne le sont point pour aucun groupe de déplacements dès que $n \geq 3$. Notamment, si le groupe G associé à la mesure inclut un *sous-groupe libre avec deux générateurs*, il n'existe pas de mesure de von Neumann sur $\mathcal{P}(M)$, ce qui se produit précisément pour $\mathbb{R}^n$ dès que $n \geq 3$. Naturellement, il existe des groupes G sur $\mathbb{R}$ pour lesquels il n'existe pas de mesure de von Neumann sur $\mathbb{R}$.. C'est ainsi que les travaux sur le problème de la mesure amenait les mathématiciens à la conviction que pour démontrer l'existence d'un ensemble non mesurable, il semblait nécessaire de recourir à l'axiome du choix. Mais, grâce au mémoire de von Neumann *Sur la théorie générale de la mesure* (1929), on reconnaissait que, s'il en était ainsi, c'est que la présence de conditions de nature algébrique étaient indispensables pour permettre à l'axiome du choix d'assurer cette construction d'un ensemble non mesurable. Après que Gödel eut démontré la consistance de l'axiome du choix relativement à la théorie usuelle des ensembles, les préventions contre l'existence d'ensembles non mesurables n'avaient plus aucune raison d'être ; l'existence d'ensembles non mesurables est, en effet, compatible avec ZF.

Sans doute devait-on alors pressentir la difficulté, sinon l'impossiblité, de démontrer dans ZF l'existence d'un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue, avant qu'un résultat fameux de Solovay ne trancha la question, en 1964. Mais on pouvait déjà se demander de quelle hypothèse minimale de choix on pouvait se contenter pour obtenir une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable, si on en cherchait, et inversement, si on les fuyait, avec quelle hypothèse maximale de choix le problème de la mesurabilité de toutes les parties de $\mathbb{R}$ était compatible ; autrement dit, avec quelles hypothèses de choix on trouve nécessairement des parties de $\mathbb{R}$ non mesurables, et avec quelles autres hypothèses on peut n'avoir aucun risque de rencontrer des parties de $\mathbb{R}$ non mesurables. Ces questions qui préparaient la voie à la solution de Solovay s'imposèrent tout naturellement lorsqu'on se mit à étudier sysématiquement les diverses formes affaiblies de l'axiome du choix, leurs conséquences et les énoncés mathématiques compatibles avec elles. De fait, l'existence d'une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue résulte de versions relativement faibles de l'axiome du choix telles l'axiome du choix pour les paires — et même de l'axiome du choix continu pour les paires — ou le théorème de l'ultrafitre faible et même seulement l'hypothèse de l'existence d'un ultrafiltre non trivial sur ω.

Une question se posait dès lors : Peut-on raffiner encore les résultats qu'on vient de citer et, à la limite, peut-on construire dans ZF une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable, sans faire aucune hypothèse de choix qui soit indépendante de ZF ? Quelle que soit l'issue que l'on attend du problème de la mesure, il y a, bien entendu, une hypothèse minimale de choix qu'il faut poser d'emblée, celle précisément qui permet de prouver l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue. Le problème de la mesure fut résolu, dans une direction plus subtile qu'on ne l'avait prévu, par Solovay en 1964, grâce à la méthode du forçage, inventée l'année précédente par Cohen. Solovay construisit un modèle de ZF dans lequel toute partie de réels est mesurable au sens de Lebesgue. Il établissait ainsi que l'hypothèse de la mesurabilité de toutes les parties de $\mathbb{R}$ est compatible avec les axiomes de la théorie ZF, enrichie de l'axiome du choix dépendant ; autrement dit, il est impossible de prouver dans cette théorie des ensembles l'existence d'une partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas mesurable.

■ Axiome de mesurabilité de tout ensemble de réels ou axiome de Solovay (RLM)

Il était dès lors bien tentant, surtout pour les analystes, de transformer le problème de la mesure (de toutes les parties de $\mathbb{R}$) en un axiome — quoique ce ne fut vraisemblablement pas l'intention de Solovay — afin de s'épargner la tâche — inutile et peu glorieuse, certes, mais très fastidieuse et indispensable — de démontrer que les fonctions que l'on manipule sont mesurables.

(RLM) *Toute partie de* $\mathbb{R}$ *est mesurable au sens de Lebesgue.*

■ Propriétés et conséquences de l'axiome de Solovay

▶ L'axiome de Solovay contredit l'axiome du choix AC.

▶ Si la théorie ZF + AC + "il existe un cardinal inaccessible" est consistante, alors la théorie ZF + AC + "tout ensemble de réels qui est définissable à partir d'une suite d'ordinaux est mesurable au sens de Lebesgue" est également consistante.

▶ Si la théorie ZF + AC + "il existe un cardinal inaccessible" est consistante, alors la théorie ZF + CD + RLM est également consistante. En effet, la collection $\mathcal{M}$ de tous les ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux à partir d'une suite d'ordinaux, *i.e.* la collection définie par $u \in \mathcal{M} \Leftrightarrow (\forall z \in \mathrm{cl}(\{u\}))\ \exists s \in \mathbf{On}^{\omega}\ (z \in \mathrm{DO}(s))$, est une collection transitive qui satisfait à ZF + CD + RLM.

■ Est-ce avec l'axiome du choix ou avec l'axiome de Solovay que la vie de l'analyste dans la théorie ZF est plus fertile et moins dangereuse ?

La construction du modèle de Solovay dans lequel toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable au sens de Lebesgue reposait en fait sur une hypothèse très forte, quelque peu gênante, à savoir l'existence de cardinaux inaccessibles, donc sur une théorie des ensembles beaucoup plus puissante que la théorie habituelle, plus sujette à être contradictoire que cette dernière. Il était donc naturel que l'on cherchât à améliorer la démonstration de Solovay, de façon à en éliminer l'hypothèse d'existence des cardinaux inaccessibles. On comprit plus tard pourquoi les recherches étaient vaines *a priori* ; en effet, Shelah démontra en 1979 que l'hypothèse des cardinaux inaccessibles était nécessaire dans la construction du modèle de Solovay :

Si la théorie ZF + CD + RLM *est non contradictoire, la théorie* ZF + "il existe un cardinal inaccessible" *est également non contradictoire.*

Il importe de bien mesurer la portée du résultat de Shelah sur les enjeux de la pratique mathématique, lorsqu'on décide de la fonder sur une théorie ensembliste plutôt qu'une autre. L'enjeu est ici le suivant : quels sont en analyse les avantages et les inconvénients respectifs de l'axiome du choix et de l'axiome de Solovay ? Comparons tout d'abord les risques de contradiction que l'adjonction de l'axiome du choix et celle de l'axiome de Solovay font respectivement courir à la théorie ZF. On a vu (§4.2.6) que l'axiome du choix est indépendant de ZF. Cela veut dire — du point de vue, dit métamathématique, de la consistance relative des théories — qu'on peut postuler ou nier l'axiome du choix, *i.e.* l'ajouter ou ajouter sa négation à la théorie ZF, sans rendre la théorie enrichie contradictoire, pourvu que la théorie de départ ZF ne le soit pas. Il en va bien différemment de l'axiome de Solovay ; ce que Shelah a précisément démontré, c'est que — contrairement à ce qu'on espérait et à ce qu'on a cru quelque temps — l'existence des cardinaux inaccessibles n'est pas une hypothèse *ad hoc*, une hypothèse commode, certes, mais dont on pourrait se passer en raffinant la construction. A vrai dire, l'axiome de Solovay a le même statut, relativement à ZF, que l'hypothèse des cardinaux inaccessibles : sa vérité entraîne la consistance ZF. De ce fait, si l'axiome de Solovay est vrai, il est impossible de le démontrer dans ZF, en vertu du théorème d'incomplétude de Gödel, tandis que s'il est contradictoire, cela n'entraîne pas que la théorie ZF le soit. Il y a donc plus de risques d'obtenir une contradiction en fondant les mathématiques, ou un domaine des mathématiques, sur la théorie ZF + RLM que sur la théorie ZF + AC.

Comparons maintenant la fécondité respective de l'axiome du choix et de l'axiome de Solovay. On a recensé plus haut les conséquences les plus importantes de l'axiome du choix et l'on a remarqué que la plupart d'entre elles résultaient d'hypothèses de choix strictement plus faibles que l'axiome du choix usuel (voir p. 190-191) . Cela suggère que la négation des formes fortes des axiomes de choix peut être aussi féconde que AC pour la pratique quotidienne des mathématiques ; elle a en outre l'avantage de fournir les outils permettant d'affiner les démonstrations classiques qui reposaient sur AC. En revanche. il est encore permis de douter de la fécondité de l'axiome de Solovay, lorsqu'il est postulé indépendamment des formes faibles de l'axiome du choix. Il se peut toutefois que l'axiome de Solovay ait une autre fonction que celle de produire des théorèmes nouveaux. Il semble, en effet, qu'il ait le même statut que les axiomes d'extensionalité et de fondation. De fait, il ne produit pas véritablement de nouveaux ensembles, en l'occurrence de nouvelles parties de $\mathbb{R}$, mais il interdit plutôt une trop grande profusion de parties de $\mathbb{R}$. Il assure seulement que ceux-là aient une forme décente, en excluant l'existence de parties de $\mathbb{R}$ qui ne soient pas mesurables. Toutefois, à la différence des axiomes d'extensionalité et de fondation, l'axiome de Solovay n'impose pas, de façon globale, une nouvelle propriété à tous les ensembles de l'univers mais seulement une propriété locale : il ne caractérise que les parties d'un ensemble donné de cet univers.

4.9. HYPOTHESE DES CARDINAUX MESURABLES

Genèse de la notion de cardinal mesurable : du traitement géométrico-algébrique du problème de la mesure à son traitement ensembliste

Nous avons vu au paragraphe précédent que von Neumann avait ramené la question de l'existence d'une partie non mesurable d'un ensemble à la présence d'un sous-groupe libre à deux générateurs dans un groupe de bijections sur cet ensemble ; il mettait ainsi en lumière le point crucial où intervenait l'axiome du choix dans la construction d'un sous-ensemble non mesurable. De son côté, la même année (1929) , Banach orientait les recherches sur la théorie de la mesure dans une autre direction, à la fois plus simple et plus générale : c'est dans un cadre purement ensembliste qu'il envisagea le problème de la mesure :

> *Existe-t-il une application* m *à valeurs réelles (positives ou nulles) définie sur l'ensemble de toutes les parties de l'intervalle fermé* $[0;1]$ *vérifiant les conditions suivantes :*
> (B_1) *il existe une partie* A *telle que* $m(A) \neq 0$, *c'est-à-dire que* m *n'est pas identiquement nulle ;*
> (B_2) *pour tout* $x \in [0;1]$, $m(\{x\}) = 0$ *;*
> (B_3) *la mesure* m *est dénombrablement additive.*

Il ôtait de la notion de mesure, telle qu'elle avait été définie par Lebesgue, la condition trop contraignante d'invariance par translation au profit d'une condition (B_2) qui n'avait pour raison d'être que d'écarter une solution triviale. Il revenait par ailleurs à la condition d'additivité dénombrable que Hausdorff avait affaiblie. Mais Banach et Kuratowski démontrèrent en 1929 que, si l'on admet l'hypothèse du continu, le problème de la mesure ainsi défini a une solution négative : il n'existe pas de mesure telle que la fonction m qu'on vient de définir. Très rapidement Banach généralisa le problème précédent : on pouvait remplacer l'intervalle fermé $[0 ; 1]$ par n'importe quel ensemble de cardinalité $2^{\aleph_0}$. Dès lors, il reconnaissait que la solution du problème de la mesure définie ci-dessus ne dépendait pas du choix d'un ensemble de cardinalité donnée mais uniquement de sa cardinalité. C'est ainsi qu'il formula le *problème généralisé de la mesure :*

Existe-t-il un ensemble E *et une fonction* m, *définie sur l'ensemble de* toutes *les parties de* E, *à valeurs réelles (positives ou nulles), qui vérifie les propriétés* (B_1), (B_2), (B_3) *ci-dessus ?*

Ce problème se formulait tout naturellement en une question d'existence de cardinaux dits mesurables : on dit, en effet, qu'un cardinal k est *mesurable* s'il existe E de cardinalité k vérifiant le problème généralisé de la mesure.

Mesures sur un ensemble

Une *mesure (totale)* sur un ensemble X est, par définition, une application μ de $\mathcal{P}(X)$, ensemble des parties de X, dans l'intervalle $[0,1]$ des nombres réels, qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

- $\mu(X) = 1$;
- μ est σ-additive, *i.e.* si $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est une réunion de parties disjointes de X, alors
$$\mu(Y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(X_n)$$

On dit que la mesure μ est *diffuse* (ou *non triviale*) si on a $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X$. On dit que μ est *à deux valeurs* si $\mu(Y) = 0$ ou 1 pour tout $Y \subset X$.

Soient k un cardinal et μ une mesure sur k. On dit que μ est k-*additif* (ou k-*complet*) si pour toute famille $(X_\xi)_{\xi<\lambda}$ de parties de k disjointes deux à deux, indexée par $\lambda < k$, on a $\mu(\bigcup_{\xi<\lambda} X_\xi) = \sum_{\xi<\lambda} \mu(X_\xi)$. On dit qu'un cardinal k est *mesurable* si k vérifie les propriétés suivantes :

- $k > \omega$.
- Il existe sur k une mesure (totale) non triviale, à deux valeurs et k-additive.

Remarque. Si l'on omet la condition $k > \omega$, alors les cardinaux 2 et ω sont mesurables, et ce sont les seuls cardinaux mesurables dont on peut prouver l'existence dans ZF. Pour donner une idée de la grandeur des cardinaux mesurables, on peut dire que le premier cardinal mesurable est à ω ce que ω est à 2.

Axiome des cardinaux mesurables *Il existe un cardinal mesurable* (CM)

Propriétés des cardinaux mesurables et conséquences de l'axiome CM

- Si k est mesurable, alors k est inaccessible (Banach, 1930, et Ulam, 1930).
- Si ZFC est consistant, alors on ne peut pas prouver dans ZFC qu'il existe des cardinaux mesurables.
- S'il existe un cardinal mesurable, alors $V \neq L$, *i.e.* tout ensemble n'est pas constructible. Plus précisément, s'il existe un cardinal mesurable k, alors tout ordinal λ, tel que $\omega \leq \lambda < k$, a uniquement λ sous-ensembles constructibles *i.e.* $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\lambda) \cap L) = \lambda$. En particulier, s'il existe un cardinal mesurable, alors toute partie de ω n'est pas constructible (ω n'a qu'une quantité dénombrable de parties constructibles) et $\omega_1|_L$ est dénombrable (*i.e.* ω_1 est dénombrable dans L).

Il est alors naturel de se demander si l'axiome CM des cardinaux mesurables est compatible avec l'hypothèse généralisée du continu HGC . La réponse est positive ; plus précisément, l'hypothèse du continu ainsi que la négation de l'hypothèse du continu sont consistantes relativement à l'existence des cardinaux mesurables.

4.10. ENSEMBLES DETERMINES

■ Jeu infini à information parfaite associé à un ensemble

Soient X un ensemble et A une partie de X^{ω} (ensemble des applications de ω , ensemble des entiers, dans X). On associe à A un *jeu* , noté $G_X(A)$ ou plus simplement $G(A)$, caractérisé par les propriétés suivantes :

- Le jeu est infini : deux joueurs I et II choisissent successivement et indéfiniment des éléments de X .
- Le jeu n'est pas symétrique : le joueur I débute.
- Le jeu est à l'information parfaite : à chaque choix, chacun des joueurs connait les choix précédemment faits par lui-même et par son adversaire.

Une *partie* du jeu $G_X(A)$ est une suite de choix alternés des joueurs I et II qu'on peut disposer de la façon suivante

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_2 & & x_4 & & \cdots & \\ \mathrm{II} & & x_1 & & x_3 & & x_5 & & \cdots \end{array}$$

i.e. une application $\alpha = (x_0 ; x_1 ; \ldots ; x_{2n} ; x_{2n+1} ; \ldots)$ de ω dans X , autrement dit un élément de X^{ω} .

On dit que *le joueur* I *gagne* (la partie α) si $\alpha \in A$, que le *joueur* II *gagne* si $\alpha \notin A$.

Une *stratégie de* I est une application σ définie sur toutes les suites finies d'éléments de X de longueur paire et à valeur dans X . Une *stratégie de* II est une application τ définie sur toutes les suites non vides (car II ne débute jamais) d'éléments de X de longueur impaire et à valeur dans X .

Si σ et τ sont des stratégies de I et II respectivement, on définit la partie notée $\sigma * \tau = (x_0 ; x_1 ; x_2 ; \ldots)$ comme suit

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & x_0 = \sigma(\emptyset) & & x_2 = \sigma(x_0 ; x_1) \ \ldots \\ \mathrm{II} & & x_1 = \tau(x_0) & & x_3 = \tau(x_0 ; x_1 ; x_2) \ \ldots \end{array}$$

qui est la partie obtenue lorsque les joueurs I et II jouent respectivement selon les stratégies σ et τ .

Une stratégie σ de I est dite *stratégie gagnante pour A* (ou *pour le jeu* $G_X(A)$) si pour toute stratégie τ de II , $\sigma * \tau \in A$, *i.e.* si I gagne toujours lorsqu'il suit σ . On dit que τ est une *stratégie gagnante de* II *pour* A si $\forall\sigma\ (\sigma * \tau \notin A)$.

On dit que le jeu $G_X(A)$ est *déterminé* ou que l'ensemble A est *déterminé* si l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante (il est clair qu'un seul des deux joueurs au plus peut avoir une stratégie gagnante), *i.e.* si

$$\exists\sigma\forall\tau\ (\sigma * \tau \in A) \vee \exists\tau\forall\sigma\ (\sigma * \tau \notin A).$$

Cet énoncé est équivalent à l'énoncé suivant

$$\forall\tau\ \exists\sigma\,(\sigma * \tau \in A) \Rightarrow \exists\sigma\ \forall\tau\ (\sigma * \tau \in A).$$

Ce dernier énoncé exprime que l'existence de contre-stratégies locales implique l'existence d'une stratégie globale, *i.e.* gagnante. Cette propriété de type $\forall\exists \Rightarrow \exists\forall$ est très forte ; elle est liée généralement à des conditions de finitude, de compacité ou d'uniformité.

Il est naturel de se demander quels jeux (*i.e.* quels ensembles) sont déterminés.

■ Détermination des jeux boréliens (voir chapitre 3, §4)

▶ Les sous-ensembles ouverts (et fermés) de l'espace $\mathcal{C}$ (l'ensemble de Cantor) sont déterminés (Gale et Stewart, 1953).

▶ Les $\mathcal{G}_\delta$ (et les $\mathcal{F}_\sigma$) sont déterminés (P. Wolfe, 1954).

▶ Les $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ (et les $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$) sont déterminés (M. Davis, 1964).

▶ Les $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}$ (et les $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$) sont déterminés (J.B. Paris, 1972).

▶ *Tous* les ensembles boréliens de $\mathcal{C}$ sont déterminés (D. Martin, 1974).

▶ Remarques sur la détermination borélienne

La détermination d'une classe donnée de boréliens est étroitement liée à l'existence de certains grands ensembles, à savoir l'existence des alephs :

- Dans une théorie des ensembles où l'axiome des parties (ZF_5) est omis, on prouve la détermination des jeux $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ mais pas celle des $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}$.
- Si l'on admet l'existence du cardinal $\aleph_1$, *i.e.* d'un ensemble non dénombrable (pour cela, il faut disposer de l'axiome de l'ensemble des parties ZF_5), alors on peut prouver la détermination des $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}$ mais pas celle des $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$.
- Si l'on admet seulement l'existence des cardinaux $\aleph_1 ,\ldots, \aleph_n$, alors on peut prouver la détermination des boréliens de classe $n+2$ mais pas celle des boréliens de classe $n+3$.
- Si l'on admet l'existence des cardinaux $\aleph_n$ pour tout $n \in \omega$, on prouve seulement la détermination des boréliens de classe finie.
- Si l'on admet l'existence du cardinal $\aleph_\omega$ (pour cela, il faut disposer de l'axiome de remplacement ZF_8), on prouve la détermination des boréliens de classe infinie.

Ce phénomène se poursuit dans le transfini. La détermination borélienne est dans doute le premier exemple d'énoncé mathématique élémentaire (il ne fait intervenir, en effet, que des parties de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{C}$) et digne d'intérêt pour les mathématiciens courants, mais dont la démonstration exige l'existence de grands ensembles.

(AD ou AD_ω) Axiome de détermination

Tout jeu $G_\omega(A)$ *est déterminé.*

■ Propriétés des jeux et de l'axiome de détermination

▶ L'axiome du choix AC implique qu'il existe un ensemble non déterminé (Gale et Stewart, 1953).

▶ $AD_2 \Leftrightarrow AD_\omega$.

▶ S'il existe un cardinal mesurable (*cf.* §4.9), alors les ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$ (ensembles analytiques) et $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ (ensembles coanalytiques) sont déterminés (D. Martin, 1970).

▶ Si ZF + AD est consistant, alors ZF + AC + CM (existence d'un cardinal mesurable) est également consistant (Solovay 1967).

▶ Si ZF + AD + CD (= axiome du choix dépendant) est consistant, alors ZF + AC + ($\forall\alpha\,\exists$ M (M est un modèle intérieur transitif qui a α cardinaux mesurables) est également une théorie consistante (Solovay ; *cf.* §5.7).

▶ Dans la collection des ensembles constructibles L (*cf.* §4.4) les ensembles $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$ ne sont pas déterminés.

Conséquences de l'axiome de détermination

▶ AD $\Leftrightarrow$ AC($\aleph_0$; $2^{\aleph_0}$) (*i.e.* axiome du choix dénombrable pour toute suite de parties de $2^{\aleph_0}$).

▶ AD $\Rightarrow$ Il n'existe pas d'ultrafiltre non principal sur ω (voir chapitre 1, § 3, proposition 43).

▶ ZF + AD $\vdash$ Toute partie de l'espace 2^ω est Lebesgue-mesurable (Mycielski et Swierczkowski, 1964).

▶ ZF + AD $\vdash$ $2^{\aleph_0} \not\geq \aleph_1$.

▶ AD $\Rightarrow$ ω_1 est un cardinal mesurable

▶ AD $\Rightarrow$ Il n'existe pas d'arbre de Suslin (*cf.* §4.11).

Remarques sur l'axiome de détermination

Dans un modèle de la théorie ZF + AD, les cardinaux $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$ sont incomparables.
L'axiome de détermination contredit l'axiome du choix AC, donc contredit aussi l'axiome de constructibilité V=L (*cf.* §4.4).

Conjecture

L'axiome de détermination est-il inconsistant ? D. Martin en est persuadé car la force de AD dépasse tout ce que l'on peut concevoir. On a vu que la démonstration de la détermination borélienne utilise toute la force de ZF. En 1974-1975 Martin et Harrington ont démontré l'équivalence entre la détermination des jeux analytiques ($\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$) et coanalytiques ($\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$) et un axiome de grand cardinal (l'hypothèse d'existence de cardinaux mesurables). Mais on n'a aucune idée de la force de la détermination des ensembles $\underset{\sim}{\Delta}{}^1_2$, ni à plus forte raison de celle des ensembles situés au-delà dans la hiérarchie projective ; on ne connaît pas de grand cardinal qui soit équivalent à la $\underset{\sim}{\Delta}{}^1_2$ - détermination et on ne connaît d'ailleurs aucun autre énoncé qui entraîne la $\underset{\sim}{\Delta}{}^1_2$ -détermination. La force de AD va encore bien au-delà !

La détermination projective (DP)

Désignons par DP l'énoncé : "*Tout jeu projectif* $G_\omega(A)$ *est déterminé*" (A est un ensemble projectif dans ω^ω). Cet énoncé, plus faible que AD, mais dont la force dépasse néanmoins tout ce que l'on peut concevoir, a des conséquences très intéressante par l'analyse ; il étend à toute la hiérarchie projective des propriétés qui, sans lui, ne seraient vraies que pour les premières étapes de la hiérarchie.

▶ *Quelques conséquences de ZF + DP* (Mycielski et Steinhaus)

▶ Tous les ensembles projectifs ont la propriété de Baire.

▶ Tous les ensembles projectifs sont μ-mesurables pour toute mesure de Borel μ σ-finie.

▶ Tout ensemble projectif non dénombrable a un sous-ensemble parfait.

▶ DP a aussi des conséquences importantes concernant les propriétés d'échelle et d'uniformisation.

ZFD versus ZFC : *Deux attitudes à l'égard de la détermination des ensembles*

La première attitude, celle notamment de Martin et de Moschovakis, résumée à la page 206, consiste à prendre la détermination comme une propriété et à examiner pour quelles familles de parties de ω^ω elle est vérifiée. Si Γ est un ensemble (au sens intuitif) de parties de ω^ω, on dit alors que Γ *satisfait à la détermination*, ou que l'on a la Γ*-détermination*, si le jeu G(A) est déterminé pour tout $A \in \Gamma$; c'est ainsi que la détermination borélienne est vérifiée dans ZF. Dans cette perspective, on se réfère au système ZFC (=ZF + AC) auquel on rajoute éventuellement des axiomes plus forts, tel, par exemple, l'hypothèse de l'existence d'un cardinal mesurable et on recherche quels jeux sont déterminés dans ce système.

La seconde attitude, celle notamment de Mycielski et de Steinhaus, résumée aux pages 206 et 207, consiste à postuler l'axiome de détermination AD et à en étudier les conséquences dans ZF. Si AD contredit l'axiome général du choix (AC), certaines formes plus faibles de l'axiome du choix sont des conséquences de AD ; en particulier, l'axiome du choix dépendant (CD) est compatible avec AD ; cette forme de l'axiome du choix dénombrable plus forte que ce dernier suffit d'ailleurs à la démonstration de la majorité des résultats importants en analyse, car, si l'on ajoute des hypothèses convenables de séparabilité, on n'a pas besoin de la forme la plus générale des théorèmes de Hahn-Banach, de Tihonov, etc. Notons ZFD le système ainsi obtenu ZF + ACD + AD.

ZFD est-il un système plein d'avenir en mathématiques, un bon candidat pour fonder l'analyse, et un rival de choix pour détrôner le système ZFC ? On peut formuler à ce sujet quelques objections et réponses afin de peser le pour et le contre de la façon la plus impartiale.

Première objection

On peut alléguer en faveur de ZFC que l'axiome du choix est consistant relativement à ZF tandis que cela n'est pas possible pour l'axiome de détermination dont la consistance entraîne celle de ZF ; si AD est consistant on ne le saura jamais dans ZF, mais si AD est inconsistant on le saura certainement un jour dans ZF (si on a la patience d'attendre suffisamment !). De plus, l'incompatibilité de AC avec AD semble un argument probant de suspicion à l'égard de AD.

Réponse à la première objection.

Seule une démonstration d'inconsistance de ZF + AD constituerait une objection sérieuse à l'utilisation de l'axiome de détermination en analyse, encore que la contradiction puisse ne provenir que d'une partie du système ZF que l'on pourrait abandonner sans regret, pour la raison que l'on prend ACD au lieu de AC lorsqu'on adjoint AD au système ZF. On a d'ailleurs utilisé les vertus magiques de l'axiome du choix bien avant de savoir qu'il était consistant relativement à ZF. Qu'on ne puisse démontrer la consistance, relative à ZF, de l'axiome de détermination ou de l'hypothèse des cardinaux mesurables, cela ne peut donner aucun argument de suspicion à l'égard de ces derniers; mais cela montre seulement que ce sont des énoncés plus forts que ZF. Qu'on ne puisse démontrer dans ZF la consistance de ZF n'est pas considéré comme un argument de suspicion contre sa viabilité. C'est ainsi que l'on doit concevoir toute une hiérarchie de force concernant la consistance relative des énoncés les uns par rapport aux autres.

Seconde objection

On considère généralement qu'un axiome doit prendre place parmi les énoncés les plus généraux d'une théorie et qu'il ne doit être formulé qu'avec les termes non définis de la théorie. C'est ainsi que dans la formulation des axiomes usuels de la théorie des ensembles ne figure aucune constante d'ensemble ; ceux-là caractérisent la notion générale d'ensemble et ils n'exigent pas que l'on ait développé au préalable une partie de la théorie pour qu'il soient énoncés ou compris. A l'opposé de ce principe communément admis, l'axiome de détermination requiert pour sa formulation un développement substantiel dans la théorie classique des ensembles et il fait intervenir des constantes d'ensemble (un ensemble construit à partir de ω), caractérisant une catégorie particulière d'ensembles.

Par ailleurs, on peut penser que l'axiome du choix est plus naturel que l'axiome de détermination pour la raison que, historiquement, l'axiome du choix a été utilisé dans des démonstrations avant avant même d'être postulé explicitement comme axiome, ce qui semble rendre sa présence inévitable, ou tout au moins très souhaitable, dans un système axiomatique des ensembles. A l'opposé, l'axiome de détermination doit sa naissance à des considérations assez marginales et originairement étrangères à la théorie des ensembles : la théorie des jeux et les stratégies opposant deux joueurs.

Réponse à la seconde objection

Le plus grand argument en faveur de AC, plus que son utilisation implicite dans les premières démonstrations où il fit subrepticement son apparition ou une évidence *a priori* pour cet axiome qui résulterait de la conception naturelle de la notion d'ensemble, est que beaucoup de propriétés souhaitées ou indispensables en mathématiques ne sont pas démontrables sans lui. On peut à cet égard comparer les conséquences respectives de AC et de AD. L'axiome de détermination a des conséquences intéressantes pour l'analyse ; il entraîne notamment des propriétés de régularité des ensembles, tandis qu'avec V=L ou même avec AC on obtient des contre-exemples à ces propriétés de régularité.

Notons toutefois que dans le système ZFD les cardinaux ont un comportement étrange. Il est étonnant qu'un axiome portant sur les propriétés de certains ensembles (caractérisation des parties de ω^{ω}) puisse avoir des conséquences si importantes sur la notion générale d'ensemble. Il est curieux également que l'axiome de détermination n'ait pratiquement rien apporté à la théorie des jeux d'où il est sorti et qu'il ait fourni beaucoup de résultats en théorie des ensembles où il semblait étranger. Cela fait partie des surprises de l'histoire des mathématiques : l'esprit mathématique souffle où il veut, et si l'on sait d'où il vient on ne sait pas toujours où il va !

On a vu que toute la force de AC est inutile dans la plupart des branches mathématiques et que CD suffit pratiquement au mathématicien. Le système ZFD pourrait être ainsi un bon compromis entre AD et AC. Peut-être d'ailleurs n'avons-nous pas besoin non plus de toute la force de AD. On pourrait se contenter de l'axiome de détermination projective DP, ce que fait Martin. Plutôt qu'entre ZFC et ZFD le choix des systèmes axiomatiques des ensembles porterait alors entre ZFD et ZF + AC + DP.

4.11. LE PROBLEME DE SUSLIN

■ Origine du problème de Šuslin : Hypothèse de Suslin

L'origine du problème de Suslin est la recherche d'une caractérisation à un isomorphisme près de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir de sa structure d'ordre et de la topologie associée.

Caractérisation classique des nombres réels

Les nombres réels sont caractérisés à un isomorphisme près par les propriétés suivantes :

1) $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné dense sans premier ni dernier élément (on rappelle qu'un ensemble ordonné est dit *dense* si : $\forall x \forall y (x < y \Longrightarrow \exists z (x < z < y))$).

2) $\mathbb{R}$ est *complet* pour l'ordre (*i.e.* tout sous-ensemble majoré non vide admet une borne supérieure ou, de façon équivalente, tout sous-ensemble minoré non vide admet une borne inférieure).
(On appelait parfois *continu ordonné* tout ensemble possédant les propriétés, mais cette terminologie n'est pas compatible avec l'usage contemporain du mot "continu").

3) $\mathbb{R}$ est séparable, *i.e.* $\mathbb{R}$ contient un sous-ensemble dénombrable *dense* (i.e. dont la fermeture topologique est égale à $\mathbb{R}$ tout entier).

Hypothèse de Suslin (HS)

En 1920, Suslin se demanda si l'on pouvait encore caractériser les nombres réels à un isomorphisme près en remplaçant la propriété de séparabilité ci-dessus (propriété 3) par une condition plus faible appelée (depuis!) *propriété de Suslin* :

3') *Toute famille d'intervalles ouverts non vides de* $\mathbb{R}$ *deux à deux disjoints est au plus dénombrable.*

Il est clair que tout ensemble vérifiant les conditions 1), 2) et 3) ci-dessus vérifie aussi la condition 3') (ce qui revient à dire : tout "continu ordonné" qui est séparable possède la propriété de Suslin), car tout intervalle ouvert non vide de cet ensemble doit contenir un élément d'un sous-ensemble dénombrable dense.

L'hypothèse de Suslin HS revient à affirmer que la réciproque est vraie (HS) :

> *Tout ensemble qui possède les propriétés 1, 2 et la propriété de Suslin est séparable, i.e. isomorphe à* $\mathbb{R}$.

Ceci revient à affirmer que $\mathbb{R}$ est caractérisé à un isomorphisme près par les propriétés 1), 2) et 3').

On appelle *continu-de-Suslin* tout ensemble satisfaisant aux propriétés 1), 2) et 3') et qui n'est pas séparable ; l'existence d'un tel ensemble équivaut à la négation de l'hypothèse de Suslin ($\neg$HS). Notons qu'un continu-de-Suslin n'est pas un continu au sens moderne du mot.

Arbres de Suslin

Pour traiter le problème de Suslin, les logiciens ont utilisé une formulation équivalente à l'hypothèse de Suslin en termes d'arbres.

Rappels sur les arbres

Un ensemble partiellement ordonné $(T,\leq)$ s'appelle un *arbre* si pour tout élément x de T l'ensemble $\hat{x} = \{y\in T;\ y<x\}$ des prédécesseurs stricts de x est bien ordonné par < . Le type d'ordre de $\hat{x}$, noté $h_T(x)$ ou plus simplement $h(x)$, *i.e.* l'unique ordinal isomorphe à $(\hat{x},<)$, s'appelle la *hauteur* de x dans l'arbre T; autrement dit, $h_T(x) = \sup\{h_T(y) \mid y<x\}$. Pour toute partie X de T on note $h(X) = \{\sup\ h_T(x) \mid x\in X\}$; $h(T)$ s'appelle la *hauteur* (ou la *longueur*) de l'arbre T.

Si α est un ordinal, le α-ième *niveau* de T est par définition l'ensemble $T_\alpha = \{x\in T \mid h_T(x)=\alpha\}$ des éléments de T de hauteur α.

On appelle *chaîne* de T toute partie non vide de T totalement ordonnée par < ; ainsi les prédécesseurs d'un élément quelconque x de T forment une chaîne $\hat{x}$. Une chaîne maximale de T (*i.e.* sans extension propre) s'appelle une *branche* de T. La *hauteur* d'une branche est, par définition, son type d'ordre pour la relation < . On appelle *antichaîne* de T toute partie de T qui est totalement non ordonnée, *i.e.* toute partie de T dont les éléments sont deux à deux incomparables; ainsi les niveaux T_α d'un arbre T sont des antichaînes ; mais, en général, il y en a bien d'autres.

On dit que T est un *arbre de type* ω_1 si T a pour hauteur ω_1 et si tous ses niveaux sont au plus dénombrables : $h(T) = \omega_1$ et card $(T_\alpha) < \omega_1$ pour tout ordinal α .

Sous l'hypothèse AC, on démontre qu'il existe un arbre de type ω_1, ne possédant pas de branches de hauteur ω_1 ; un tel arbre s'appelle un *arbre de Aronszajn.*

Un arbre T de type ω_1 s'appelle un *arbre de Suslin* si toute branche (= chaîne maximale) et toute antichaîne de T sont au plus dénombrables, *i.e.* si T n'a ni branche de hauteur ω_1 ni antichaîne de cardinalité ω_1. Tout arbre de Suslin est un arbre de Aronszajn.

On note AS l'énoncé : "*Il existe un arbre de Suslin*".

Enoncé équivalent à l'hypothèse de Suslin

L'hypothèse de Suslin HS est équivalente à la non-existence d'un arbre de Suslin (D. KUREPA, 1934-1935) : HS $\Longleftrightarrow\neg$AS.

La plupart des résultats obtenus sur l'hypothèse de Suslin le furent par l'intermédiaire des arbres de Suslin.

Indécidabilité de l'hypothèse de Suslin

S. Tennenbaum (1968) et T. Jech (1967) ont démontré indépendamment la consistance de la négation de l'hypothèse de Suslin relativement à ZFC en construisant une extension générique dans laquelle il existe un arbre de Suslin. R.M. Solovay et S. Tennenbaum (1971) ont démontré la consistance de l'hypothèse de Suslin relativement à ZFC. L'hypothèse de Suslin HS est donc indécidable dans ZFC.

R.B. Jensen (1968) a démontré que l'hypothèse de Suslin est incompatible avec l'axiome de constructibilité V=L : on peut construire un arbre de Suslin dans la collection L des ensembles constructibles, ce qui prouve par ailleurs la consistance de la négation de l'hypothèse de Suslin relativement à l'hypothèse du continu. Toutefois, et c'était le dernier problème ouvert sur l'hypothèse de Suslin, Jensen a démontré depuis lors que l'hypothèse de Suslin est consistante relativement à l'hypothèse du continu. Ainsi l'hypothèse de Suslin reste encore indécidable lorsqu'on admet l'hypothèse du continu.

L'indécidabilité de l'hypothèse de Suslin fournit une preuve de plus, avec celle de l'hypothèse du continu, que l'intuition que l'on pense avoir de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est qu'une illusion et que la représentation que l'on se fait habituellement de $\mathbb{R}$ ne permet pas de décider toutes les propriétés dont on peut affubler $\mathbb{R}$, de sorte que cette intuition relèverait plutôt d'un choix préalable des propriétés par lesquelles on a coutume de caractériser $\mathbb{R}$. C'est ainsi que la propriété de Suslin semble être une manière naturelle de caractériser $\mathbb{R}$ à un isomorphisme près, mais c'est justement cette caractérisation qui est indécidable. Le continu réel n'est sans doute pas une idée aussi simple que certains mathématiciens le croient (ou le font croire!). Ce que montrent ces résultats d'indécidabilité, c'est qu'il y a plusieurs façons indépendantes de définir $\mathbb{R}$ dans la théorie des ensembles. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un exemple d'ensemble dont se servent constamment les mathématiciens. Mais ceux-ci n'ont *a priori* aucune raison de s'accorder sur les propriétés qui le caractérisent. Et pourtant, lorsqu'ils parlent de $\mathbb{R}$, les mathématiciens ont le sentiment (ou l'illusion) d'avoir affaire à un être mathématique bien déterminé. Cette attitude est sans doute justifiée par la pratique mathématique qui, heureusement pour elle, va toujours de l'avant sans s'embarrasser des problèmes de fondements. Les résultats d'indécidabilité ci-dessus ne nous autorisent plus à croire que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un être mathématique habitant un monde paradisiaque (le paradis des mathématiques!), être dont la contemplation assidue suffirait à décider des propriétés qu'il doit posséder. Les problèmes posés par les fondements des mathématiques ne sont pas ceux que rencontrent généralement les mathématiciens dans leur pratique. Mais les fictions dont s'autorise la pratique mathématique n'en reste pas moins des fictions, et sans doute en est-il ainsi de la plupart des notions mathématiques.

Notons que le problème de Suslin est relié à la conjecture de Dowker selon laquelle tout espace normal est dénombrablement paracompact. (*cf.* chapitre 1, § 6.1.). M.E. Rudin avait montré que s'il existe un continu-de-Suslin alors il existe un espace normal qui n'est pas dénombrablement paracompact. Après que l'indépendance de l'hypothèse de Suslin relativement au système Z.F. eut été démontrée, elle a donné un contre-exemple de la conjecture de Dowker.

Quoi qu'il en soit, l'hypothèse de Suslin n'a pas un grand intérêt mathématique ; mais son importance historique est d'avoir suscité des méthodes de démonstration non triviales et de portée plus générale pour la prouver ou pour la réfuter, *i.e.* pour démontrer sa consistance ou la consistance de sa négation, et d'avoir mis à jour certains énoncés qui ont des conséquences importantes en mathématiques ; le principe combinatoire (voir page 212), l'axiome de Martin (voir page 213).

4.12. LE PRINCIPE COMBINATOIRE (Jensen)

La démonstration de l'existence d'un arbre de Suslin dans la collection L des ensembles constructibles fait intervenir un principe combinatoire qui a des propriétés intéressantes.

Ensembles stationnaires (ou Mahlo)

Soit λ un ordinal. Une partie A de λ est dite *stationnaire* dans λ (ou *Mahlo* en λ) si $A \cap C \neq \emptyset$ pour toute partie C de λ non bornée (= cofinale) et fermée (voir p. 198).

Exemples d'ensembles stationnaires

Soit λ un cardinal régulier non dénombrable ; alors

- Toute partie fermée non bornée de λ est stationnaire en λ .
- L'ensemble $A = \{\alpha \in \lambda \mid cf(\alpha) = \omega\}$ est une partie stationnaire de λ .
- Si E est stationnaire en λ , alors $E \cap C$ est stationnaire en λ pour toute partie fermée non bornée C de λ .

Le principe $\Diamond$ (lire "carreau")

($\Diamond$) : *Il existe une suite* $(S_\alpha)_{\alpha<\omega}$ *telle que*
(i) *pour tout* $\alpha < \omega_1$, S_α *soit une partie dénombrable de* $\mathbf{P}(\alpha)$;
(ii) *pour tout* $X \subset \omega_1$, *l'ensemble* $\{\alpha<\omega_1 \mid X\cap\alpha \in S_\alpha\}$ *soit stationnaire dans* ω_1.

Enoncés équivalents au principe $\Diamond$

- ($\Diamond'$) Il existe une suite $(S_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ telle que
  (i) pour tout $\alpha<\omega_1$, S_α soit une partie dénombrable de α^{α} ;
  (ii) pour tout $F \in \omega_1^{\omega_1}$, il existe un $\alpha<\omega_1$, $\alpha \neq 0$, avec $F|_\alpha \in S_\alpha$

- Il existe un ensemble $\Gamma \subset \bigcup_{\alpha<\omega_1} \omega_1^{\alpha}$ tel que
  (i) pour tout $\alpha<\omega_1$, $\Gamma \cap \omega_1^{\alpha}$ soit dénombrable;
  (ii) pour tout $F \in \omega_1^{\omega_1}$ il existe un $\alpha<\omega_1$, $\alpha \neq 0$, avec $F|_\alpha \in \Gamma$

- Il existe une suite $(S_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ telle que
  (i) pour tout $\alpha<\omega_1$, S_α soit une partie dénombrable de α ;
  (ii) pour tout $X \subset \omega_1$, l'ensemble $\{\alpha<\omega_1 \mid X\cap\alpha = S_\alpha\}$ soit stationnaire en ω_1.

- Il existe une suite $(h_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ d'applications telle que pour tout $f \in \omega_1^{\omega_1}$, l'ensemble $\{\alpha<\omega_1 \mid h|_\alpha = h_\alpha\}$ soit stationnaire.

Enoncés plus forts que le principe $\Diamond$

- ($\Diamond^*$) Il existe une suite $(S_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ telle que
  (i) pour tout $\alpha<\omega_1$, S_α soit une partie dénombrable de $\mathbf{P}(\alpha)$;
  (ii) pour tout $X \subset \omega_1$, l'ensemble $\{\alpha < \omega_1 \mid X\cap\alpha \in S_\alpha\}$ contienne un ensemble fermé non borné.

▶ ($\Diamond^+$) Il existe une suite $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ telle que

(i) pour tout $\alpha<\omega_1$, S_α soit une partie dénombrable de $\mathcal{P}(\alpha)$;

(ii) pour tout $X\subset\omega_1$ il existe une partie C fermée et non bornée de ω_1 telle que si $\alpha\in C$, alors $X\cap\alpha$ et $C\cap\alpha$ appartiennent à S_α.

On a les relations suivantes $\Diamond^+ \Longrightarrow \Diamond^* \Longrightarrow \Diamond$ mais les flèches ne peuvent être inversées.

■ Propriétés de $\Diamond$

▶ $\Diamond \Longrightarrow$ HC (hypothèse du continu, $2^\omega = \omega_1$).

▶ V=L $\Longrightarrow \Diamond$.

▶ $\Diamond \Longrightarrow$ AS (*i.e.* il existe un arbre de Suslin). On peut même démontrer que : $\Diamond \Longrightarrow$ il existe 2^{ω_1} arbres de Suslin non isomorphes.

▶ Tout modèle dénombrable de ZFC peut être étendu en un modèle de $\Diamond$, d'où la consistance relative du principe $\Diamond$ et de la négation de l'hypothèse de Suslin.

4.13. AXIOME DE MARTIN (AM)

■ Rappels des notions utilisées dans les versions de Martin

Condition de chaîne et d'antichaîne dénombrable, complétude pour un ultrafiltre, généricité pour une famille de parties, σ-idéal, $\aleph_1$-saturation.

Pour la version booléenne :

On dit qu'une algèbre de Boole $B = (B,\wedge,\vee,.^c,1,0)$ satisfait à la *condition de chaîne dénombrable* (noté ccd) si toute chaîne de B (*i.e.* toute partie de B bien ordonnée) est au plus dénombrable.

Soit F une famille de parties de B. Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur B est dit *F-complet* si toute partie X de B qui est dans F et qui a une borne inférieure dans B (*i.e.* tel que $\bigwedge_{x\in X} x$ existe) on a $\bigwedge_{x\in X} x\in F$.

Pour la version en termes d'ensembles ordonnés :

Soient $(P,\leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $F\subset\mathcal{P}(P)$. Un ensemble $G\subset P$ est dit *F-générique* si

(i) $y\geq x\in G \Longrightarrow y\in G$, *i.e.* G est une section finale de P.

(ii) $x,y\in G \Longrightarrow$ ($z\in G$) ($z\leq x$ et $z\leq y$), *i.e.* les éléments de G son deux à deux compatibles (*i.e.* ont une extension commune dans G)

(iii) Si $D\subset P$ est *dense dans* P, *i.e.* si tout élément de P a une extension dans D : $\forall x\in P\ \exists y\in D\ \ y\leq x$) et si $D\in F$, alors $D\cap G\neq\emptyset$ *i.e.* toute section initiale dense de P qui est dans F rencontre G.

On dit que l'ensemble ordonné P vérifie la *condition d'antichaîne dénombrable* (noté cad) si toute antichaîne de P (*i.e.* toute partie de P constituée d'éléments deux à deux incompatibles) est au plus dénombrable.

Pour la version topologique :

On dit qu'un compact K a la *condition d'antichaîne dénombrable* (cad) si toute famille d'ouverts non vides et deux à deux disjoints de K est au plus dénombrable.

Pour la version borélienne :

Considérons la tribu (σ-algèbre) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ des boréliens de $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble I de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est dit un *σ-idéal* de boréliens si I est stable par sous-ensemble (borélien) et par union dénombrable. I est dit *non trivial* si $\mathbb{R}\notin I$.

Un σ-idéal I de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est dit $\aleph_1$-saturé si toute famille de boréliens deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$, de cardinalité $\aleph_1$, contient un élément de I.

Axiome de Martin (version booléenne)

(AM1) *Si* B *est une algèbre de Boole vérifiant la condition de chaîne dénombrable (cad) et si* F *est une famille de parties de* B *telle que* card(F) $< 2^{\aleph_0}$, *alors il existe un ultrafiltre* $\mathfrak{U}$ *sur* B *qui est* F*-complet.*

Enoncés équivalents à l'axiome de Martin

Versions en termes d'ensembles ordonnés :

(AM2) *Si* (P, $\leq$) *est un ensemble partiellement ordonné vérifiant la condition d'antichaîne dénombrable (cad) et si* F *est une famille de parties denses de* P *telle que* card(F) $< 2^{\aleph_0}$, *alors il existe une partie* G *de* P *qui est* F*-générique.*

(AM2') *Si* (P, $\leq$) *est un ensemble partiellement ordonné vérifiant la condition d'antichaîne dénombrable (cad) et si* F *est une famille de parties denses de* P *telle que* card(P) $< 2^{\aleph_0}$ *et* card(F) $< 2^{\aleph_0}$, *alors il existe une partie* G *de* P *qui est* F*-générique.*

Version topologique

(AM3) *Pour un compact* K *satisfaisant à la condition d'antichaîne dénombrable (cad) et pour tout cardinal* $k < 2^{\aleph_0}$, *toute intersection d'au plus* k *ouverts denses de* K *est dense dans* K.

Version borélienne :

(AM4) *Pour tout cardinal* $k < 2^{\aleph_0}$ *et pour tout* σ*-idéal* I, *non trivial et* $\aleph_1$*-saturé, de la tribu borélienne* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, *et pour toute famille* $(A_\xi)_{\xi<k}$ *d'éléments de* I, *on a* $\mathbb{R} \neq \bigcup_{\xi<k} A_\xi$.

Origine et motivation de l'axiome de Martin

L'axiome de Martin est un axiome combinatoire apparemment "peu naturel". Aussi convient-il, avant d'étudier ses conséquences dans la théorie des ensembles, *i.e.* avant de voir à quoi il sert, d'examiner comment il est apparu et s'est imposé comme axiome. Le caractère "naturel" d'un axiome est d'ailleurs assez arbitraire et subjectif ; il dépend fortement d'un état donné du développement des mathématiques, et du degré de maturation qu'ont acquis, dans la communauté des mathématiciens, les méthodes et les concepts auxquels celui-ci se rattache. C'est ainsi que les énoncés courants de l'axiome du choix nous paraissent maintenant naturels, parce que nous pouvons en donner des applications immédiates en mathématiques. Le caractère naturel des axiomes ou des notions primitives (pourquoi, par exemple, choisir telle axiomatique en topologie générale de préférence à telle autre) est donc une question de consensus acquis à un moment donné du développement des mathématiques, pour une durée indéterminée, et il est très révélateur des directions que prennent la recherche et l'enseignement des mathématiques à un moment donné de son histoire. En mathématiques, le naturel est historique et non pas éternel.

L'axiome de Martin est apparu, à propos de travaux sur l'hypothèse de Suslin, dans la construction par Solovay et Tennenbaum (1971), utilisant la technique du forçage, d'un modèle de ZFC+HC+HS. Il est donc "naturel" que le forçage soit la motivation principale de l'axiome de Martin et que les formulations courantes de l'axiome de Martin fassent intervenir les concepts utilisés dans le forçage (voir §5.8).

Voici comment Solovay et Tennenbaum procédèrent pour construire un modèle de la théorie des ensembles satisfaisant à l'hypothèse de Suslin. On a vu que l'hypothèse de Suslin est équivalente à la non-existence d'un arbre de Suslin. On part donc d'un modèle M de ZFC + HS, *i.e.* d'un modèle dans lequel il existe a priori des arbres de Suslin, pour aboutir par extension à un modèle N qui a les mêmes cardinaux que M dans lequel HS est vérifié. La méthode du forçage permet un tel passage : le modèle N. Ainsi le modèle N n'aura plus d'arbres de Suslin : tout arbre de Suslin dans M devra donc perdre sa "suslinité" (*sic*, Devlin et Johnsbråten, 1974) dans le passage de M à N. Puisqu'on exige que les modèles M et N aient les mêmes cardinaux, un arbre de hauteur ω_1 dans M sera encore un arbre de hauteur ω_1 dans N. De la sorte, un arbre de Suslin dans M ne peut perdre sa suslinité que si on lui adjoint dans N une antichaîne non-dénombrable ou, *a fortiori* car on ne considère que des arbres *séparatifs*, *i.e.* des arbres qui se divisent en au moins deux branches à chaque noeud ou élément une branche de hauteur ω_1.

Voyons tout d'abord comment on peut détruire la suslinité d'un seul arbre de Suslin. Soit M un modèle de ZFC (ce modèle est transitif et dénombrable pour des raisons techniques permettant d'appliquer la méthode du forçage et soit T un arbre de Suslin dans M. On étend M en un modèle N en rajoutant une branche cofinale G (*i.e.* ici une branche de hauteur ω_1); ainsi dans le nouveau modèle N où l'on a rajouté à T une branche cofinale G, T n'est plus un arbre de Suslin. L'extension générique N, obtenue par la méthode du forçage se note $N = M[G]$. Ce procédé par lequel on supprime la suslinité d'un arbre de Suslin s'appelle couramment "tuer un arbre de Suslin" ; l'emploi de cette terminologie est justifiée par le fait que dans toute extension générique ultérieure un arbre tué reste mort (*i.e.* il perd une fois pour toute sa Suslinité).

Une fois que l'on sait tuer un arbre de Souslin, on voit aisément comment l'on peut tuer n'importe quel arbre de Souslin se trouvant dans M : on les tue un par un, en itérant le procédé. Il importe dans l'itération de ce procédé, de ne pas détruire les cardinaux, lorsqu'on passe d'un modèle à son extension générique ; on s'en assure par la méthode du forçage lorsque l'on suppose que l'arbre auquel on ajoute une branche cofinale G vérifie la condition d'antichaîne dénombrable. Il suffit donc de se donner une énumération de tous les arbres de Suslin dans M et de les tuer successivement en suivant l'énumération dans l'itération du procédé ci-dessus. Une propriété essentielle est vérifiée : le procédé passe à la limite. Malheureusement, si à chaque étape de l'itération de ce procédé on a tué un arbre de Suslin, on a pu introduire subrepticement de nouveaux arbres de Suslin à certaines étapes. Il faut les détruire à leur tour, en itérant le procédé ci-dessus ω_2 fois à partir d'une bonne énumération des arbres de Suslin utilisant l'isomorphisme $\omega_2 \simeq \omega_2 \times \omega_2$.

Or, Martin a remarqué que dans l'itération de ce procédé destiné à construire un modèle de ZF qui satisfait à HS, *i.e.* dans lequel il n'existe plus d'arbres de Suslin, on peut faire beaucoup mieux que de tuer des arbres de Suslin. On peut ajouter par la méthode du forçage une classe plus générale d'objets que celles des branches cofinales ; on n'a même pas besoin de considérer des arbres mais seulement une classe d'objets partiels définie ci-dessous. En effet, se donner un modèle M qui ne satisfait pas à HS équivaut à se donner un ensemble partiellement ordonné P *séparatif* (*i.e.* tel que tout élément x de P ait deux extensions incompatibles $y \leq x$ et $z \leq x$), de cardinalité ω_1 et qui satisfait aux propriétés suivantes :

a) dans M, P a la condition d'antichaîne dénombrable ;

b) si G est M-générique pour P, alors $\mathcal{P}(\omega)$ dans l'extension générique $M[G]$ est le même objet (=ensemble) que $\mathcal{P}(\omega)$ dans M ;

c) si, pour un certain ensemble $X \in M$ de cardinalité ω_1, G est X-générique pour P, alors $G \notin M$.

Si, donc, on veut obtenir un modèle M de HS, on doit imposer à M la propriété suivante : si P est un ensemble partiellement ordonné de cardinalité ω_1 qui satisfait à la condition d'antichaîne dénombrable, tel que le cardinal $\mathcal{P}(\omega)$ reste inchangé, et si X est un ensemble de cardinalité ω_1, alors il existe (dans M) un ensemble G qui est X-générique pour P.

Or, dans cette construction d'un modèle de ZF+HS que l'on vient d'esquisser on n'a aucunement utilisé le fait que le forçage avec un arbre de Suslin ajoute de nouveaux sous-ensembles de ω. Cela conduit naturellement à formuler la proposition suivante :

(M) *Si* P *est un ensemble partiellement ordonné de cardinalité* ω_1 *qui satisfait à la condition d'antichaîne dénombrable et si* X *est un ensemble de cardinalité* ω_1, *alors il existe un ensemble* G *qui est* X-*générique pour* P.

Il est clair, d'après la discussion précédente que M entraîne HS. De fait, en itérant le procédé de forçage esquissé plus haut (avec des ensembles partiellement ordonnés satisfaisant à la propriété indiquée ci-dessus, et non plus avec des arbres de Souslin), on obtient un modèle de ZF dans lequel M est vrai, donc un modèle de HS. Seulement, si, dans l'itération ci-dessus, on n'ajoute pas nécessairement de nouveaux réels (=parties de ω) aux étapes d'itération indexées par des ordinaux successeurs, on doit certainement ajouter de nouveaux réels aux étapes limites (*i.e.* aux étapes indexées par des ordinaux limites). Ainsi ne peut-on éviter que l'on ait $2^{\omega_0} = \omega_2$ dans le modèle final. C'est pour cette raison qu'on est amené à construire un modèle de ZF qui nie l'hypothèse du continu ; dans ce modèle, ω_1 sera strictement plus petit que le continu 2^{ω_0}. Cela nous conduit à remplacer la proposition M par la proposition suivante :

(M') *Si* P *est un ensemble partiellement ordonné de cardinalité* $< 2^{\omega_0}$ *qui satisfait à la condition d'antichaîne dénombrable et si* X *est un ensemble de cardinalité* $< 2^{\omega_0}$, *alors il existe un ensemble* G *qui est* X-*générique pour* P.

L'hypothèse du continu entraîne M' : c'est la construction usuelle des ensembles X-génériques pour X dénombrable. En effet, lorsque F est dénombrable, le théorème de Rasiowa-Sikorski assure l'existence d'ultrafiltres F-complets et de parties F-génériques.

Théorème de Rasiowa - Sikorski :

Si B *est une algèbre de Boole et* F *une famille dénombrable de parties de* B, *alors il existe un ultrafiltre* $\mathfrak{U}$ *sur* B *qui est* F- *complet.*

Corollaire (traduction du théorème précédent dans le langage des ensembles ordonnés) :

Si $(P,\leq)$ *est un ensemble partiellement ordonné et* F *une famille dénombrable de parties de* P, *alors il existe une partie* G *de* P *qui est* F-*générique.*

Finalement, l'axiome de Martin assure l'existence d'ultrafiltres F-complets et de parties F-génériques sans l'hypothèse que F soit dénombrable.

Il existe deux façons usuelles d'exposer le forçage : la première, celle de Solovay et de D. Scott, utilise le langage des algèbres de Boole ; l'autre, celle de Cohen, utilise le langage des ensembles partiellement ordonnés. Il est donc naturel qu'on ait deux versions du théorème de Martin utilisant chacun de ces langages. Il existe aussi une approche topologique du forçage développée par C. Ryll-Nardzewsky, G. Takeuti et A. Mostowski, ainsi qu'une version topologique de l'axiome de Martin (voir p. 214).

L'axiome de Martin et l'hypothèse du continu

L'axiome de Martin AM est une conséquence de l'hypothèse du continu, suffisante pour résoudre des problèmes décidés par l'hypothèse du continu. Mais, si l'hypothèse du continu HC est vérifiée, l'axiome de Martin n'apporte rien de plus que ce que donne le théorème de Rasiowa-Sikorski.

L'axiome de Martin n'a donc vraiment d'intérêt que dans le cas où $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, et dans le cas où la famille F (voir les énoncés AM1, AM2 et AM2') n'est pas dénombrable. Or l'axiome de Martin est consistant avec la négation de l'hypothèse du continu, *i.e.* avec l'assertion $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ (R.M. Solovay et S. Tennenbaum 1971, D.A. Martin et R.M. Solovay 1970) ; plus précisément : si $\mathcal{M}$ est un modèle de $ZFC + 2^{\aleph_1} = \aleph_2$, alors il existe une extension générique $\mathcal{M}[G]$ qui satisfait à AM et $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Conséquences de l'axiome de Martin AM

Conséquences sur l'hypothèse de Suslin :

▶ $AM + 2^{\aleph_0} > \aleph_1 \Rightarrow HS$.

Conséquences sur les cardinaux :

▶ $AM \Rightarrow$ pour tout cardinal $k < 2^{\aleph_0}$, $2^k = 2^{\aleph_0}$.

▶ $AM \Rightarrow$ axiome S de Solovay :

Soient A *et* B *deux sous-ensembles de* $\mathcal{P}(\omega)$ *de cardinalité au plus* $k < 2^{\aleph_0}$, *vérifiant la condition suivante : Pour toute suite finie* $a_1, \ldots, a_n$ *d'éléments de* A, *et pour tout* $b \in B$, $b \setminus \bigcup_{i=1} a_i$ *est infini. Alors il existe* $x \subset \omega$ *tel que pour tout* $a \in A$, $x \cap a$ *soit fini, et que, pour tout* b B, $x \cap b$ *soit infini.*

Cet axiome S, strictement plus faible que l'axiome de Martin, mais de forme plus simple, suffit pour beaucoup d'applications ; il suffit, en particulier, pour toutes les constructions d'ultrafiltres particuliers sur ω.

▶ $AM \Rightarrow 2^{\aleph_0}$ est un cardinal régulier.

▶ $AM \Rightarrow$ le cardinal $2^{\aleph_0}$ n'est pas mesurable.

Conséquences sur la régularité des ensembles :

Sous l'hypothèse AM :

▶ Toute réunion de $k < 2^{\aleph_0}$ ensembles de réels de mesure de Lebesgue nulle est un ensemble de mesure nulle, i.e. l'idéal des ensembles de mesure nulle est $2^{\aleph_0}$-additif.

▶ Toute réunion de $k < 2^{\aleph_0}$ ensembles de réels Lebesgue-mesurables est Lebesgue-mesurable, *i.e.* la tribu des ensembles Lebesgue-mesurables est k-complète pour tout $k < 2^{\aleph_0}$, ou encore la mesure de Lebesgue est $2^{\aleph_0}$-additive.

▶ La réunion de $k < 2^{\aleph_0}$ ensembles maigres est un ensemble maigre.

5. MODÈLES REMARQUABLES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Nous avons vu qu'il y a bien des façons de rajouter des axiomes au système ZF ; on obtient ainsi différents systèmes axiomatiques des ensembles et, de ce fait, autant de caractérisations distinctes de la notion d'ensemble.

On s'intéresse rarement à tous les modèles possibles de la théorie des ensembles. Il est tentant de chercher à caractériser les modèles de la théorie des ensembles qui satisfont à tous les axiomes de ZF et uniquement à ces axiomes ; à la limite, on aimerait pouvoir parler *du* modèle (canonique) de la théorie des ensembles. Ce souhait est irréalisable ; la théorie ZF , comme toute théorie du premier ordre admettant des modèles infinis (par exemple, l'arithmétique de Peano ; voir les modèles non standards de l'arithmétique et de l'analyse, volume 2) n'est pas *catégorique*, *i.e.* elle admet des modèles qui ne sont pas isomorphes.

5.1. AXIOMES DE RESTRICTION (Fraenkel et Von Neumann)

On peut toutefois ajouter à la théorie ZF un principe de fermeture, *i.e.* un axiome exprimant qu'il n'y a pas d'autres ensembles que ceux qui peuvent être obtenus par les axiomes de ZF. Cet axiome est analogue à l'axiome de complétude en géométrie axiomatique (Hilbert, 1899) et au schéma d'induction dans la théorie axiomatique des nombres (Peano). On exprime intuitivement ce principe de fermeture en disant que le modèle de la théorie ZF que l'on recherche est l'intersection de tous les modèles de la théorie des ensembles qui satisfont aux axiomes de ZF. Ce modèle est alors caractérisé comme étant le plus petit modèle de ZF.

Mais il s'agit d'exprimer ce principe de fermeture dans le langage L de la théorie des ensembles. Dire qu'il n'y a pas d'autres ensembles que ceux qui sont obtenus par les axiomes de ZF revient à postuler le schéma suivant : Si P est une propriété (*i.e.* une collection) telle que tout ensemble obtenu par les axiomes de ZF ait cette propriété, alors tout ensemble a cette propriété. Cela se formule aisément dans la logique du second, (*i.e.* en quantifiant sur les lettres de fonction et de prédicat) comme pour le schéma d'induction en arithmétique. Mais la difficulté est d'exprimer dans le langage du premier ordre la proposition "tout ensemble obtenu par les axiomes ZF a la propriété P" car la théorie ZF contient un nombre infini d'axiomes (les schémas d'axiomes des parties définissables et de remplacement ne sont pas équivalents à un nombre fini de leurs instances). Or le langage du premier ordre ne permet pas d'écrire des formules de longueur infinie. Il faut donc procéder indirectement, trouver un détour pour exprimer les procédés de construction des axiomes de ZF .

Premier axiome de restriction :

Soit P *une propriété (i.e. une collection) vérifiant les six conditions suivantes :*
(1) *si* x *et* y *ont la propriété* P, $\{x\,;\,y\}$ *l'a aussi ;*
(2) *si* x *a la propriété* P, $\cup x$ *l'a aussi ;*
(3) *si* x *a la propriété* P, $\mathcal{P}(x)$ *l'a aussi ;*
(4) *si* x *a la propriété* P *et si* $\phi(y)$ *est une formule à une variable libre, le sous-ensemble* $\{y;\ y \in x \wedge \phi(y)\}$ *de* x *a aussi la propriété* P;
(5) *il existe un ensemble infini qui possède la propriété* P;
(6) *si* x *a la propriété* P *et si* $\phi(y\,;\,z)$ *est une relation fonctionnelle en* y *telle que pour tout* $y \in x$ $\phi(y\,;\,z)$ *implique que* z *ait la propriété* P, *l'ensemble* $\{z;\ \exists y(y \in x \wedge \phi(y\,;\,z))\}$ *a aussi la propriété* P.

Alors tout ensemble a la propriété P .

Les conditions (4) et (6) ne sont pas des énoncés du langage L ; mais on peut remplacer ces schémas d'énoncés par les énoncés suivants :

(4') *si* x *a la propriété* P *et si* $y \subset x$, y *a aussi la propriété* P ;
(6') *si* x *a la propriété* P *et si* f *est une application dont le domaine est inclus dans* x , *l'image par* f *des éléments de* x *qui ont la propriété* P *a aussi la propriété* P .

On démontre que le premier axiome de restriction est équivalent à l'axiome de fondation + "il n'existe pas de nombres inaccessibles" .

Puisque ZF contient l'axiome de fondation, tout ce qu'on peut prouver, en plus, grâce au premier axiome de restriction, est qu'il n'existe pas de nombres inaccessibles. Cet axiome de restriction n'a donc pas la force de l'axiome de complétude en géométrie ou de l'axiome d'induction en arithmétique. Il en résulte qu'on ne peut rien conclure de cet axiome de restriction concernant l'hypothèse du continu.

Il faut donc renforcer l'axiome de restriction. Ce qui fait la faiblesse relative du premier axiome de restriction, c'est la force excessive des hypothèses (4) et (6). Les hypothèses (1) à (6) du premier axiome de restriction disent que la collection P est un modèle de ZF , et la conclusion assure que cette collection contient tous les ensembles. Mais les hypothèses (4) et (6) sont trop fortes ; pour que la collection P soit un modèle de ZF , il n'est pas nécessaire qu'elle contienne, avec chaque ensemble x , tous les ensembles déterminés par une formule arbitraire $\phi(x)$ comme l'exige (4) ; il suffit que P contienne uniquement les sous-ensembles de x déterminés par les formules définies par référence seulement aux éléments de la collection P . Il faut trouver aussi une hypothèse plus faible correspondant à (6). Les mêmes remarques s'appliquent à (4') et à (6').

<u>Second axiome de restriction</u> :

(1) *Tous les ensembles sont constructibles.*
(2) *Il n'existe pas d'ensemble transitif qui soit un modèle de* ZF .

Le second axiome de restriction implique le premier.
Ces deux axiomes de restriction sont équivalents à la conjonction de deux principes :
- Un principe de limitation de la taille des ensembles qui affirme qu'il n'existe pas d'ensembles de rang trop élevé : les cardinaux inaccessibles pour le premier axiome, les modèles transitifs pour le second.
- Un principe de régularité des ensembles, principe de caractère local, qui affirme qu'il n'existe pas d'ensembles trop compliqués même s'ils ne sont pas de rang élevé : les ensembles non bien fondés pour le premier axiome, les ensembles non constructibles pour le second.

Les résultats obtenus par l'adjonction des axiomes de restriction sont assez décevants. On a déjà formulé séparément les axiomes qui expriment un principe de régularité des ensembles : l'axiome de fondation (ZF_9) qu'il est naturel d'adjoindre au système ZF , et l'axiome de constructibilité V = L (§ 4.4) , qui est plus problématique, même s'il est consistant relativement à ZF , car cet axiome exprime une hypothèse très forte qui oblige à faire des choix dans la théorie des ensembles ; il contredit, en effet, certains énoncés qui exercent un attrait sur certains mathématiciens : par exemple, l'axiome de mesurabilité de tout ensemble de réels (RLM ; §4.9) et l'axiome de détermination (AD ; §4.10). Pour ce qui est de la taille des ensembles, outre le côté assez arbitraire qu'il y a à la limiter — la caractérisation de ZF liée au principe de réflexion invitant à concevoir un modèle de la théorie des ensembles comme une totalité inachevable dont on ne peut avoir une idée que localement (§5.2) — on se restreint, si l'on suit ce principe, à un certain type de modèles, et on se prive ainsi de modèles qui permettraient peut-être d'obtenir des résultats de consistance relative. On peut néanmoins s'intéresser à quelques modèles importants de ZF ; les modèles de ZF les plus naturels sont les modèles standards (§5.3) et parmi ceux-ci les plus intéressants sont les modèles transitifs (§5.4) .

5.2. APPROXIMATION LOCALE DES MODELES DE ZF : LE PRINCIPE DE REFLEXION DE ZF

Les modèles de ZF reflètent globalement la vérité de la théorie ZF ; Le principe de réflexion exprime une propriété importante de ZF : on peut avoir une approximation locale d'un univers de ZF ; autrement dit, localement, *i.e.* pour chaque formule, un modèle (global) de ZF se comporte comme une partie de son univers.

Soient X une collection et $\phi(x_1 ; \dots ; x_n)$ une formule dont tous les paramètres sont dans X. D'après la définition de la satisfaction et celle de formule relativisée (*cf.*4.4.1), on voit que, si $a_1,\dots,a_n$ sont des objets de la collection X, on a $(\mathcal{U}, \in) \models \phi(a_1;\dots;a_n)$ si et seulement si $(X, \in\lfloor_X) \models \phi(a_1;\dots;a_n)$. On dit que la collection X *convient à l'énoncé* ϕ ou que X *reflète la vérité pour* ϕ, ou plus simplement encore que X *reflète* ϕ si on a $\forall x_1 \dots \forall x_n ((X(x_1) \wedge \dots \wedge X(x_n) \Rightarrow (\phi(x_1;\dots;x_n) \iff \phi\lfloor_X(x_1;\dots;x_n))$, *i.e.* si la vérité ou la fausseté d'une formule dont les paramètres sont dans X est la même dans X et dans l'univers.

Si ϕ est sans quantificateur, $\phi\lfloor_X$ est ϕ lui-même, *i.e.* n'importe quelle collection convient à un énoncé sans quantificateur. En revanche, si ϕ a déjà des quantificateurs relativisés, $\phi\lfloor_X$ les restreint aussi à X ; par exemple, $\forall y(y \in z \Rightarrow \phi)$ devient $\forall y(y \in z \Rightarrow \phi\lfloor_X)$. On voit ainsi que $(\phi\lfloor_X)\lfloor_Y$ est équivalent à $\phi\lfloor_{(X \cap Y)}$.

Principe de réflexion R_o (*Montague, Lévy*)

> *Si* $\phi(x_1;\dots;x_n)$ *est une formule sans paramètre alors on a* :
>
> $$\forall\alpha(\exists\beta>\alpha)\ \forall x_1 \dots \forall x_n\{(x_1 \in V_\beta \wedge \dots \wedge x_n \in V_\beta) \Rightarrow (\phi(x_1;\dots;x_n) \iff \phi\lfloor_{V_\beta}(x_1;\dots;x_n))\}$$

Soit :

> *Etant donnée une formule* $\phi(x_1;\dots;x_n)$ *sans paramètres, pour chaque ordinal* α, *il existe un ordinal* $\beta>\alpha$ *tel que* V_β *convienne à* ϕ.

Le principe de réflexion R_o exprime que l'univers de la théorie des ensembles se réfléchit à un niveau plus bas ou local, *i.e.* qu'une formule vraie dans l'univers global V est déjà vraie dans un V_α, *i.e.* encore que pour une formule donnée un ensemble V_α se comporte comme l'univers entier V ou que V_α reflète V (*cf.* les monades de Leibniz). Mais V se réfléchit à des niveaux locaux aussi haut que l'on veut, ce qui revient à postuler que l'univers de la théorie des ensembles est immense et sans fin.

Propriétés du principe de réflexion R_o

▶ ZF satisfait au principe de réflexion R_o.

▶ Le principe de réflexion R_o est équivalent à la conjonction de l'axiome de l'infini (ZF_7) et de l'axiome de remplacement (ZF_8).

Enoncés équivalents au principe de réflexion R_o

> (R'_o) *Pour toute suite finie de formules* $\phi_1,\dots,\phi_m$ *ayant leurs variables libres parmi* $x_1,\dots,x_n$, *on a* $\forall\alpha\ \exists\beta>\alpha\ \forall x_1 \dots \forall x_n(x_1 \in V_\beta \wedge \dots \wedge x_n \in V_\beta \Rightarrow ((\phi_1 \iff \phi_1\lfloor_{V_\beta}) \wedge \dots \wedge (\phi_m \iff \phi_m\lfloor_{V_\beta}))$

> (R''_o) *Pour toute formule* ϕ *ayant ses variables libres parmi* $x_1,\dots,x_n$, *on a* $\exists\beta \geq \omega\ \forall x_1 \dots \forall x_n((x_1 \in V_\beta \wedge \dots \wedge x_n \in V_\beta) \Rightarrow (\phi \iff \phi\lfloor_{V_\beta}))$

Propriétés liées au principe de réflexion

▶ La théorie ZF n'est pas une extension finie de la théorie Z (de Zermelo ; *cf.* § 3).

▶ ZF n'est pas finiment axiomatisable.

▶ ZF est *réflexif*, *i.e.* la consistance de chaque sous-théorie finie (ensemble fini de formules) de ZF peut être prouvée dans ZF.

▶ Levy et Bernays ont élargi et généralisé le principe de réflexion R_o en un énoncé équivalent à l'hypothèse des points fixes (voir §4.7).

(R_1) *Pour toute formule* ϕ *ayant ses variables libres parmi* $x_1,\ldots,x_n$ *, on a*
$\forall\alpha\ \exists\beta>\alpha(\mathrm{Inac}(\beta)\ \wedge\ \forall x_1\ldots\ \forall x_n(x_1\in V_\beta\wedge\ldots\wedge x_n\in V_\beta\Rightarrow(\phi\Longleftrightarrow\phi_{|V_\beta})))$.

On peut continuer indéfiniment le procédé et obtenir de la sorte des énoncés R_2 , R_3 , ... en faisant parcourir à β les grands cardinaux (Mahlo, hypermahlo, etc.).

On obtient alors des énoncés équivalents à des énoncés de points fixes sur de grands cardinaux.

5.3. AXIOMES DE CONSISTANCE DE ZF ET MODELES STANDARDS DE ZF

On sait, par le second théorème d'incomplétude de Gödel, qu'on ne peut pas démontrer dans ZF que la théorie ZF est non contradictoire ou, ce qui revient au même par le théorème de complétude de Gödel (pour les théories logiques du premier ordre) qu'on ne peut pas démontrer dans ZF qu'il existe un modèle de ZF. C'est pourquoi on suppose toujours que la théorie des ensembles qu'on étudie est consistante, ou qu'il existe un modèle de la théorie des ensembles que l'on étudie. Plus précisément, on part d'une théorie des ensembles que l'on suppose consistante et on construit d'autres théories des ensembles relativement consistantes à celle dont on est parti. On utilise donc, dans le métalangage de la théorie des ensembles, le principe suivant: "*La théorie* ZF *est non contradictoire* (*i.e. consistante*)". Cette phrase du métalangage peut être formulée dans le langage de la théorie des ensembles par le détour de l'arithmétisation de la façon suivante : on associe à chaque formule du langage L un objet de l'univers de la théorie des ensembles, *i.e.* un ensemble (autrement dit, on code les formules du langage L par des ensembles ou par ces ensembles particuliers que sont les entiers). Cela permet de représenter dans la théorie des ensembles la relation du métalangage : $(M,\epsilon)\models\phi$ (" M est un modèle de ϕ" , *i.e.* " M satisfait à ϕ") et de formuler explicitement comme axiome de la théorie des ensembles ce qu'on formule implicitement.

Axiome M : *Il existe un ensemble* M *et une relation binaire* $\epsilon_M\subset M\times M$ *tels que* (M,ϵ_M) *soit un modèle de ZF*

Bien que la théorie ZF soit constituée d'un nombre infini d'axiomes, l'axiome M se formule comme un seul énoncé dans le langage L de ZF ; cela vient du fait que les règles de formation des axiomes de ZF peuvent s'exprimer dans un seul énoncé.

L'axiome M n'apporte pratiquement rien d'intéressant ni rien de nouveau à la théorie ZF :

- *Axiome inintéressant :* Grâce à l'axiome M on démontre la consistance de ZF , mais cette démonstration se fait dans une théorie plus forte que ZF , à savoir ZF + M , dont on suppose la consistance, comme on le fait pour la théorie ZF lorsqu'on la prend pour point de départ. La justification de cet axiome repose donc sur une théorie plus forte que ZF , *i.e.* sur une théorie *a priori* moins évidente et plus problématique que ZF . En fait, par le théorème de complétude, l'axiome M équivaut à la consistance de ZF .

- *Axiome inutile :* Avec l'axiome M on ne démontre pas davantage d'énoncés mathématiques, à la différence de la plupart des axiomes qu'on a pu ajouter à ZF dans le paragraphe 4 ; de plus, on ne peut assimiler l'axiome M à un axiome de limitation des ensembles comme l'axiome d'extensionalité (ZF_1) , l'axiome de fondation (ZF_9) , l'axiome de constructibilité (§4.4) ou l'axiome des ensembles définissables en termes d'ordinaux (§4.5)..

On peut comparer la situation de l'axiome M à celle de l'axiome de l'ensemble vide (ZF_3), une fois que l'on a retiré à ZF l'axiome de l'infini (ZF_7), *i.e.* tout axiome affirmant l'existence d'ensembles. En effet, s'il n'existe pas d'ensembles, l'axiome de l'ensemble vide ne sert à rien, pas plus d'ailleurs que la théorie des ensembles. Mais s'il existe au moins un ensemble, l'axiome de l'ensemble vide est superflu car on peut alors démontrer l'existence d'un ensemble (unique) n'ayant aucun élément (*cf.* §3.3.). De même, on peut dire que l'axiome M est inutile si la théorie ZF n'est pas consistante.

On peut également formuler l'axiome suivant :

Axiome SM : *Il existe un ensemble* M *tel que, si* $\in\restriction_M$ *est la relation* $\{(x\,;y) \mid x \in M \wedge y \in M \wedge x \in y\}$, *alors* $(M; \in\restriction_M)$ *soit un modèle de* ZF .

Si l'on croit à l'existence des ensembles, *i.e.* si l'on suppose que ZF est non contradictoire, ce que l'on fait toujours pratiquement, les axiomes M et SM sont intuitivement vrais. Mais les axiomes M et SM ne sont pas prouvables dans ZF puisqu'ils impliquent la consistance de ZF . En outre, l'axiome SM est plus fort que l'axiome M .

Les axiomes M et SM sont l'une des façons d'enrichir un système d'axiomes : ajouter à ce système d'axiomes l'énoncé disant que le système est consistant ; on peut répéter ce procédé indéfiniment en rajoutant des axiomes de consistance au nouveau système obtenu de la sorte. Mais, avons-nous dit, l'adjonction de ces axiomes, à la différence, par exemple, de l'hypothèse des cardinaux inaccessibles (§ 4.6.), ne permet pas d'obtenir directement d'autres théorèmes mathématiques intéressants.

Le modèle M dont l'existence est assurée par l'axiome SM est appelé un modèle standard de la théorie des ensembles. On appelle *$\in$-modèle* ou *modèle standard de la théorie des ensembles* un modèle $(M, \in) = (M, \in\restriction_M)$, où $\in$ est la vraie relation d'appartenance, celle de l'univers $\mathcal{U}$ dont on part (lorsqu'on suppose la consistance de ZF) restreinte à l'ensemble M , *i.e.* si $\in\restriction_M = \{(y\,;x) \mid y \in M \wedge x \in M \wedge y \in x\}$.

L'axiome SM est surtout utilisé pour construire, grâce au théorème de Löwenheim-Skolem (*cf.* §5.5), un modèle dénombrable de la théorie des ensembles dans les exposés usuels de la théorie du forçage, théorie théorie utilisée par Cohen pour démontrer la consistance de la négation de l'axiome du choix et la consistance de la négation de l'hypothèse du continu (*cf* §5.8). Aussi utilise-t-on généralement l'axiome SM sous la forme équivalente suivante :

Axiome SM' : *Il existe un modèle transitif standard dénombrable de la théorie des ensembles* .

Mais les axiomes SM ou SM' ne sont utilisés que pour la commodité de l'exposé du forçage. Ils ne sont pas, à strictement parler, indispensables ; on peut, en effet, exposer la méthode du forçage de façon purement syntaxique, sans aucune référence à la notion de modèle, notamment sans faire jouer aucun rôle particulier à la cardinalité dénombrable du modèle de départ. Un tel exposé est toutefois plus artificiel et beaucoup moins intuitif (voir pp. 233-234).

5.4. STRUCTURES TRANSITIVES, STRUCTURES $\in$-TRANSITIVES ET MODELES TRANSITIFS DE ZF

On dit que (X, E) est une *structure transitive* si X est une collection *transitive* ou un ensemble *transitif pour la relation* E , *i.e.* si on a $(X(x) \wedge X(y) \wedge X(z) \wedge yEz \wedge zEx) \Rightarrow yEx$ lorsque X est une classe, ou $(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge yEz \wedge zEx) \Rightarrow yEx$ lorsque X est un ensemble.

Lorsque E est la relation $\in$, *i.e.* la vraie relation d'appartenance, $(X, \in)$ est appelée une *$\in$-structure transitive* ou un *modèle standard transitif* si X est *transitif pour* $\in$ (on dit aussi *$\in$-transitif*, et on note Trans(X)), si l'on a $(X(x) \wedge y \in z \wedge z \in x) \Rightarrow y \in x$, ou $x \in X \wedge y \in x \Rightarrow y \in X$.

▶ Propriétés des structures transitives :

▶ Si X est $\in$-transitif, les éléments de X (ou les x tels que $X(x)$) le sont aussi.

▶ Toute $\in$-structure transitive $(X, \in)$ satisfait à l'axiome d'extensionalité (ZF_1) et à l'axiome de fondation (ZF_9).

Lemme d'isomorphisme de Mostowski et Sherpherdson, appelé aussi lemme de contraction :

Si (X, E) *est un modèle de l'axiome d'extensionalité tel que* E *soit bien fondé,* i.e. *tel que* $\forall x((x \in X \wedge x \neq \emptyset) \Longrightarrow \exists y \in x\, \forall z \in x\, \neg(zEy))$, *alors il existe un unique ensemble transitif* M *et un unique isomorphisme* $\phi : (X, E) \to (M, \in)$. *En particulier, si* $Y \subset X$ *est* E*-transitif et* $E{\restriction}_Y = \in{\restriction}_Y$ *, alors* $\phi{\restriction}_Y = \mathrm{id}\ Y$, i.e. *pour tout modèle* $(X, \in)$ *de l'axiome d'extensionalité, il existe un unique isomorphisme* ϕ *et un unique ensemble transitif* M *tel que* $\phi : (X, \in) \to (M, \in)$.

On appelle $(M, \in)$ la *contraction transitive* ou la *transitivisation* de (X, E). Le lemme de contraction permet de se ramener à des structures transitives sur lesquelles on sait plus de choses.

Remarques :

▶ On peut exprimer par une formule du langage L , de complexité Δ_1^{ZF} dans la hiérarchie de Levy, la relation $(x, \in) \models ZF$ ou $x \models ZF$ ("$(x, \in)$ est un modèle de ZF"). Cela permet de représenter dans ZF cette forme affaiblie du second théorème d'incomplétude de Gödel : *Si* $ZF \vdash \exists x(\mathrm{Trans}(x) \wedge x \models ZF)$, *alors* ZF *est inconsistant* .

▶ L'énoncé "ZF est consistant" peut aussi s'exprimer par une formule du langage L notée con(ZF) ; "ZF est inconsistant" est l'énoncé con(ZF).

5.5. APPLICATION DU THEOREME DE LOEWENHEIM-SKOLEM A LA THEORIE DES ENSEMBLES : MODELES DENOMBRABLES DE ZF ET RELATIVISME DE LA NOTION D'ENSEMBLE

Théorème de Löwenheim-Skolem — *Toute théorie du premier ordre qui admet un modèle infini possède un modèle dénombrable.*

On a vu que ZF est une théorie du premier ordre pour le langage L . Il est donc naturel de lui appliquer le théorème de Löwenheim-Skolem (c'est d'ailleurs ce que fit Skolem en 1922). On obtient ainsi le résultat suivant : s'il existe un modèle de ZF , alors il existe un modèle dénombrable de ZF , i.e. un modèle M dont l'univers est dénombrable. Ce qui semble naturel lorsque le théorème de Löwenheim-Skolem est appliqué à toute autre théorie mathématique (il existe un modèle dénombrable de la théorie des groupes, de la théorie des corps, de la théorie des corps ordonnés, ...) paraît paradoxal lorsqu'il s'applique à la théorie des ensembles ; du moins, cela est-il paradoxal pour une philosophie réaliste des mathématiques et pour toute conception naïve de la théorie des ensembles. En effet, on peut démontrer dans ZF qu'il existe un ensemble non dénombrable, par exemple $\mathcal{P}(\omega)$. Or tout ensemble de l'univers M peut être considéré comme une partie intuitive de l'univers M . Le paradoxe de Skolem consiste en ceci :

- Il existe un univers dénombrable M qui est un modèle de ZF .
- Il existe une partie intuitive de M qui n'est pas dénombrable.

Skolem n'a jamais considéré que cette situation était paradoxale ; mais il en a tiré les leçons, à savoir :

- *La limitation du traitement axiomatique des ensembles :*

La théorie des ensembles ne peut fonder à strictement parler toute la pratique mathématique. La théorie formelle (qu'on suppose non contradictoire) repose sur la théorie intuitive (qui a toutes les chances d'être contradictoire). Les axiomes de la théorie des ensembles se réfèrent à une totalité (l'univers) qui n'est pas un ensemble (*i.e.* l'univers $\mathcal{U}$ n'est pas dans la relation $\in$ à $\mathcal{U}$).

- *La distinction inévitable des niveaux de langage* (langage et métalangage) :

Lorsque l'on dit que l'on a un modèle dénombrable M de la théorie des ensembles, on veut dire dénombrable au sens intuitif (*i.e.* M est un ensemble dénombrable d'un univers $\mathcal{U}$) et non pas au sens du modèle M. La bijection entre ω et M ne saurait appartenir au modèle M sous peine de contradiction ; mais la bijection entre M et le ω de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$.

- *Le relativisme (ou la relativité) de la notion d'ensemble :*

Selon le point de vue axiomatique, la notion d'ensemble n'est pas une entité en soi. Les ensembles sont simplement les objets d'un domaine de référence pour la relation d'appartenance $\in$, relation dont les propriétés sont décrites par les axiomes de ZF. Les notions d'ensemble, de fonction, de cardinal, et toutes les notions mathématiques représentées dans la théorie des ensembles sont ainsi relativisées à un domaine d'interprétation. Si l'on considère plusieurs réalisations (*i.e.* interprétations) de la théorie ZF ayant des univers non isomorphes, alors les concepts usuels des mathématiques auront des référents différents dans chacune de ces interprétations.

Les modèles dénombrables de la théorie des ensembles présentent un grand intérêt mathématiques ; on verra notamment que l'on expose généralement la méthode du forçage en partant d'un modèle dénombrable de ZF (*cf.* §5.8).

5.6. LE MODELE MINIMAL DE ZF

Si l'on suppose que ZF a un modèle standard (qu'on peut toujours supposer transitif par le lemme de contraction), *i.e.* si l'on suppose que l'axiome SM est vérifié, alors il existe un ordinal α tel que L_α soit un modèle de ZF . Le plus petit de ces ordinaux est dénombrable. Soit ξ_o , ξ_1 ,... la suite de tous les ordinaux ξ pour lesquels on a $L_\xi \models$ ZF . Il est naturel de supposer que ξ_α est défini pour tout ordinal α ; cette supposition est une conséquence (affaiblie) de l'hypothèse des cardinaux inaccessibles.

L_{ξ_o} est appelé le *modèle minimal* de ZF ; il est caractérisé par la propriété suivante : si X est un modèle transitif de ZF, alors $L_{\xi_o} \subset$ X.

Shepherdson (1951) est parti de l'existence du modèle minimal de ZF pour démontrer que la méthode utilisée par Gödel pour prouver la consistance relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu, méthode qui est un cas particulier de celle des modèles intérieurs (*cf.* §5.7), ne peut servir à prouver la consistance relative de la négation de l'axiome du choix et de la négation de l'hypothèse du continu.

5.7. LES MODELES INTERIEURS DE ZF : PORTEE ET LIMITES

On dit qu'une collection M est un *modèle intérieur* de ZF si

(i) M est transitive.

(ii) $\mathbf{On} \subset$ M, *i.e.* tout les ordinaux sont dans M.

(iii) Pour chaque axiome ϕ de ZF, $\phi|_M$ est vrai (dans le monde réel V).

Un exemple important de modèle intérieur de ZF, de bon modèle intérieur, est la collection L des ensembles constructibles.

Ce qui fait l'intérêt et l'importance des modèles intérieurs de ZF, c'est qu'ils fournissent une méthode générale de démonstration de consistance relative. Il s'agit de voir la portée et la limite de cette méthode.

▶ *Propriété caractéristique des modèles intérieurs*

Soit M un modèle intérieur de ZF et ϕ une formule quelconque du langage L telle que $ZF \vdash \phi|_M$, alors $ZF \vdash con(ZF) \Rightarrow con(ZF+\phi)$.

Dans le cas particulier où M est la collection L des ensembles constructibles, on montre que l'on a $ZF \vdash AC|_L$ et $ZF \vdash HGC|_L$ (*cf.* § 4.4), ce qui prouve par la propriété précédente la consistance relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu.

▶ *Limite de la méthode des modèles intérieurs*

Soit M une collection quelconque ; alors on ne peut pas prouver que M est un modèle intérieur de $ZF + V \neq L$. Autrement dit, si l'on a $ZF \vdash \phi|_M$ pour chaque axiome ϕ de ZF, on ne peut pas avoir $ZF \vdash (V \neq L)|_M$. En effet :

- si M est une collection transitive, *i.e.* si $M(x) \wedge y \in x \Rightarrow M(y)$, et si $ZF \vdash \phi|_M$ pour chaque axiome ϕ de ZF, alors $M|_{L_{\xi_0}}$ définit un sous-ensemble transitif de L_{ξ_0} qui est un modèle de ZF ; mais, puisque L_{ξ_0} est minimal, on a $M|_{L_{\xi_0}} = L_{\xi_0}$. Par conséquent $L_{\xi_0} \models \forall x\, M(x) \wedge V=L$, *i.e.* $V=L$ est consistant avec $\forall x\, M(x)$. On ne peut donc pas avoir $ZF \vdash (V \neq L)|_M$, si ZF est consistant, et *a fortiori* on ne peut s'attendre à ce que l'on ait $ZF \vdash HGC|_M$ ni $ZF \vdash \neg AC|_M$.

Si M n'est pas une collection transitive, mais si l'axiome d'extensionalité relativisé à M est vrai, *i.e.* si $ZF_1|_M$ est vrai dans l'univers réel, on contracte M sur une collection transitive M' isomorphe à M, grâce au lemme de contraction, et l'on est ramené au cas précédent.

On n'a donc aucune chance de trouver, par la méthode des modèles intérieurs, des modèles de ZF qui satisfont à la négation de l'axiome du choix et à la négation de l'hypothèse du continu.

5.8. LES MODELES GENERIQUES DE ZF : METHODE DU FORCAGE

Origine et motivation de la méthode du forçage

Pour obtenir un modèle de ZF satisfaisant à la négation de l'hypothèse du continu, à la négation de l'axiome du choix ou à la négation de l'axiome de constructibilité des ensembles (*i.e.* à l'énoncé $V \neq L$), il fallait trouver une méthode différente de construction de modèles de ZF (à partir de modèles donnés) ; au lieu de partir d'un modèle de ZF pour construire un sous-modèle de ZF qui est un modèle intérieur, l'idée de P. J. Cohen fût de construire un modèle "extérieur", *i.e.* une extension d'un modèle de ZF qui ait les mêmes ordinaux que le modèle de départ et de telle façon que l'on puisse exprimer dans ce modèle de départ (ce modèle est aussi appelé : le vieux modèle de ZF) les propriétés essentielles (autant que cela est possible) du nouveau modèle. Autrement dit, l'idée de Cohen fut de grossir le modèle de départ au lieu de le rétrécir (voir figure).

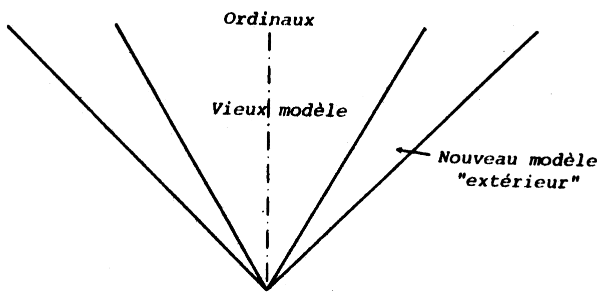


Figure 3

Quelle est l'origine et la motivation de la méthode du forcage de Cohen ? Considérons, à cette fin, le problème de la consistance relative de la négation de l'hypothèse du continu. Nier l'hypothèse du continu, affirmer par exemple que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, revient à poser l'existence d'une injection F de $\aleph_2$ dans $2^{\aleph_0}$, et se donner une telle injection équivaut à se donner une certaine application p de $\aleph_2 \times \aleph_0$ dans $2 = \{0;1\}$, en posant $p(\xi;n) = F(\xi)(n)$.

Un modèle de la négation de l'hypothèse du continu est un modèle dans lequel il existe un ensemble qui est précisément cette application p de $\aleph_2 \times \aleph_0$ dans 2. On part d'un modèle M de ZF dans lequel cette injection n'existe pas (*i.e.* n'est pas un ensemble), ce qui revient à dire : on part d'un modèle qui vérifie l'hypothèse du continu (cette supposition est justifiée : ZF+V=L satisfait, en effet, à l'hypothèse du continu). Pour des raisons techniques qui seront justifiées plus loin, on choisit pour modèle M un ensemble de U (modèle intuitif de ZF, au niveau du métalangage) dénombrable (dans U , *i.e.* au sens intuitif) et transitif (*i.e.* les ensembles dans U (*i.e.* intuitifs) qui sont éléments d'un ensemble dans M sont aussi des ensembles dans M).

L'idée la plus simple serait de rajouter directement cette application p au modèle M et de prendre la clôture transitive de $M \cup \{ p \}$, *i.e.* les éléments de $M \cup \{ p \}$, les élements de leurs éléments, les éléments des éléments de leurs éléments, etc..; mais on ne peut ajouter une telle application à titre d'axiome, car il s'agit de prouver la consistance relative de la négation de l'hypothèse du continu, et on sait par ailleurs qu'il n'est pas possible de construire *ex nihilo* un modèle de ZF !

D'ailleurs, il ne suffit pas de rajouter simplement un objet qui manque en tant qu'ensemble, *i.e.* qui n'appartient pas à M , pour obtenir un modèle de ZF qui étend M . Lorsqu'on adjoint à un modèle M de ZF un objet X qui "n'appartient" pas à M — mais X "appartient" (c'est un abus de langage, car la relation d'appartenance se dit entre les éléments d'un modèle, *i.e.* entre des ensembles, et non pas entre un objet du modèle et le modèle lui-même), tout comme M , au modèle intuitif U — , il se peut très bien que l'on n'obtienne pas un modèle de ZF ; il faut prendre garde, en effet, que la structure (X,ϵ) de l'objet que l'on ajoute ne détruise pas les propriétés du modèle M (dont les plus importantes sont justement de satisfaire à tous les axiomes de ZF) ; il faut exiger notamment que la clôture transitive de X satisfasse à l'axiome des parties ZF_5 et à toutes les instances du schéma de remplacement ZF_8.

L'exemple suivant montrera que si X est un objet de U qui n'appartient pas à M , la clôture transitive de $M \cup \{X\}$ n'est pas en général (*i.e.* sans restriction, comme nous allons en donner une plus loin; cette restriction garantira que la clôture transitive est un modèle) un modèle de ZF. Prenons en effet, pour objet X de U qui ne soit pas dans M , une partie de ω qui ait le même type d'ordre que $\mathfrak{On}_{\restriction M}$ (la classe des ordinaux de M ; cela est possible car M est dénombrable dans U). Alors $\mathfrak{On}_{\restriction M\cup[X]} = \mathfrak{On}_{\restriction M}$, *i.e.* les ordinaux de M sont, par construction, les mêmes que ceux de la plus petite classe transitive, notée $M[X]$, qui contient $M \cup \{X\}$, et tous les éléments de $M[X]$ ont un type d'ordre $< \mathfrak{On}_{\restriction M}$; mais on a aussi, comme on le verra plus loin, $X \in M[X]$ et, par hypothèse, l'ensemble X de $M[X]$ a pour type d'ordre $\mathfrak{On}_{\restriction M}$ qui n'est pas un ensemble dans M ni dans $M[X]$; ainsi, le théorème suivant de ZF : "tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal" n'est pas vérifié dans $M[X]$, ce qui montre que tous les axiomes de ZF ne le sont pas non plus dans $M[X]$.

Il n'existe pas de critère général, *i.e.* de condition nécessaire et suffisante, qui permette de décider pour quels X de U la collection $M[X]$ est un modèle de ZF. Il existe toutefois, comme nous allons le voir plus loin, une condition suffisante. On appelle *générique* les ensembles X (ensembles au sens de U) tels que la clôture transitive de $M\cup\{X\}$, qui est également la plus petite collection transitive contenant $M \cup \{X\}$, soit un modèle de ZF ; un tel modèle se note $M[X]$ et s'appelle une *extension générique* de M . La méthode de Cohen est une méthode permettant de construire des modèles génériques.

Par ailleurs, s'il existe un modèle qui satisfait la négation de l'hypothèse du continu, *i.e.* dans lequel il existe une injection f de $\aleph_2$ dans $2^{\aleph_0}$, les approximations finies de l'application p qui lui correspond canoniquement, définie par $p(\xi;n) = f(\xi)(n)$, doivent déjà exister dans le modèle de départ M , car on peut construire explicitement une telle approximation finie. En approximant de façon finie, mais aussi loin qu'on veut, on peut caractériser dans M la structure que doit vérifier l'application p, car le modèle de départ est choisi dénombrable. La méthode de Cohen permet de construire le modèle $M[X]$ à partir du modèle M, en adjoignant à M un ensemble (intuitif) X qui forme un filtre sur un ensemble ordonné constitué des approximations finies de p. L'ultrafiltre correspondant définira complètement l'application p.

La théorie du forçage de Cohen – Conditions de forçage et M-généricité

Les considérations précédentes justifient les définitions suivantes et la terminologie employée, empruntée à la théorie des ensembles ordonnés.

Un ensemble ordonné $(C,\leq)$ est appelé un *ensemble de conditions de forçage*, et les éléments de C, notés $p, q, r, \ldots$ sont appelés *conditions de forçage* ou plus simplement *conditions* si $(C,\leq)$ est un ensemble ordonné *séparatif*, *i.e.* s'il vérifie la propriété suivante : Quels que soient $p,q \in C$, si $p\leq q$, il existe $r\in C$, $r\leq p$, tel que q et r n'aient pas de minorant commun dans C (on dit alors que q et r sont *incompatibles*).

Si les éléments p et q sont tels que $p\leq q$, on dit que la condition p est *plus forte* que la condition q, ou encore que p est une *extension*, ou un *raffinement* de q. Deux conditions p et q sont dites *compatibles* si elles ont un minorant commun (*i.e.* un raffinement commun) dans C, *i.e.* si la propriété suivante est vérifiée $\exists r\in C\ (r\leq p \wedge r\leq q)$.

Une partie D de C est dite *dense* si pour toute condition p, il existe une condition $r\in D$ plus forte que p ; on dit aussi que D est une partie *cofinale* de C (tout élément de C est raffiné, étendu, par un élément de D) lorsqu'on prend la relation d'ordre $\stackrel{\rightarrow}{\geq}$ définie par : $p \stackrel{\rightarrow}{\geq} q \Longleftrightarrow q\leq p$.

Considérons un ensemble M d'un modèle U de ZF (le modèle intuitif, dans le métalangage) qui est lui-même un modèle standard et transitif de ZF (*cf.* § 5.3 et 5.4). Soit C un ensemble de M qui est un ensemble de conditions de forçage. Désignons par $\mathcal{P}(C)\lfloor_M$ l'ensemble des parties de C qui sont dans M. On a clairement $\mathcal{P}(C)\lfloor_M \subset \mathcal{P}(C)$ car $\mathcal{P}(C)\lfloor_M = \mathcal{P}(C)\cap M$.

Une partie G de C qui est un objet de U, mais pas forcément de M, est dite *M-générique sur* C si elle satisfait aux propriétés suivantes :

(G_1) si $p\in G$, $q\in C$ et $q\geq p$, alors $q\in G$, *i.e.* G est une *section finale* de C.

(G_2) Si $p,q\in G$, les conditions p et q sont compatibles, *i.e.* les éléments de G sont deux à deux compatibles.

(G_3) Si $D\in \mathcal{P}(C)\lfloor_M$ et si D est dense dans C, alors $G\cap D\neq\emptyset$, *i.e.* toute partie dense de C qui est dans M rencontre G.

▶ Remarques

Les conditions (G_1) et (G_2) de M-généricité font de G un filtre sur C (G est supposé non vide, bien entendu !).

Si G est M-générique sur C et est dans le modèle M, *i.e.* si $G\in \mathcal{P}(C)\lfloor_M$ on montre qu'il existe un élément minimal p de C tel que $G=\{q\in G \mid q\geq p\}$; on dit alors que G est *trivial*. Mais si C n'a pas d'élément minimal – ce qui est le cas lorsqu'on suppose que chaque condition a deux extensions incompatibles ; pour assurer cette condition, on suppose généralement que l'ensemble ordonné C vérifie la condition d'antichaîne dénombrable ; *cf.* §4.13 –, une partie G de C qui est M-générique ne peut pas être dans le modèle M. On obtient pourtant de la sorte, une condition suffisante pour qu'en ajoutant à M l'objet G comme nouvel ensemble, on obtienne un nouveau modèle de ZF qui soit strictement plus grand que M (car le nouveau modèle contient G qui n'est pas un ensemble pour M). C'est en effet ce qu'assure, un peu plus loin, le théorème d'existence des extensions M-génériques.

Existence de modèles génériques et propriétés de ces modèles

Construction du modèle générique $M[G]$

Soient M un modèle dénombrable de ZFC, C un ensemble (dans M) de conditions de forçage et G un "ensemble" (dans le modèle intuitif U) M-générique sur C. On définit sur M une nouvelle relation d'appartenance ϵ_G de la façon suivante : $y \epsilon_G x$ ssi $(\exists p \in G)\ ((y ; p) \in x)$. Comme $(M; \epsilon_G)$ est une structure bien fondée (on le vérifie !), on peut définir par induction sur rg(x) (*cf.* §2.9), $\phi_G(x) = \{\phi_G(y) \mid y \epsilon_G x\}$, et l'on pose : $M[G] = \{\phi_G(x) \mid x \in M\}$. On dit que $M[G]$ est la *contraction transitive*, ou le *contracté transitif* de $(M ; \epsilon_G)$, et que ϕ_G est la *fonction contractante* associée à $(M ; \epsilon_G)$ (*cf.* §5.4). Chaque élément x de M est considéré comme une constante qui désigne l'élément $\phi_G(x)$, noté aussi $\bar{x}$, de $M[G]$; on dit que x est un *nom* pour $\bar{x}$. On définit dans M, par induction sur rg(x), $\hat{x} = \{(\hat{y} ; p) \mid x \in y \text{ et } p \in C\}$; on montre que $\hat{x} \in M$ et que $\phi_G(\hat{x}) = x$. On pose aussi : $\Gamma = \{(\hat{p} ; p) \mid p \in C\}$, et l'on montre que $\Gamma \in M$ et que $\phi_G(\Gamma) = G$.

Propriétés du modèle générique $M[G]$

▶ Théorème d'existence des extensions M-génériques (propriété fondamentale des *ensembles* M-génériques : Si G est une partie M-générique de C, il existe un plus petit modèle transitif de ZF qui contient $M \cup \{G\}$; ce modèle est le modèle $M[G]$ construit ci-dessus. On dit que $M[G]$ est une *extension générique* de M.

▶ $M \subset M[G]$. Autrement dit, le modèle $M[G]$ est une extension de M, car $x \to \hat{x}$ est une relation fonctionnelle dans M qui est injective : $\hat{x} \in M$ et $\phi_G(\hat{x}) = x$.

▶ $G \in M[G]$: L'objet G est un ensemble au sens du modèle $M[G]$, car $\Gamma \in M$ et $\phi_G(\Gamma) = G$.

▶ Si M satisfait à l'axiome du choix, $M[G]$ y satisfait aussi.

▶ $\mathrm{On}|_M = \mathrm{On}|_{M[G]}$: Les modèles M et $M[G]$ ont les mêmes ordinaux.

▶ Lemme d'existence de parties M-génériques d'un ensemble de conditions de forçage : Si l'on a une condition suffisante pour obtenir des extensions génériques, à savoir l'existence de parties M-génériques de C, on a aussi une condition suffisante pour l'existence de parties M-génériques de C, par le lemme suivant, qui justifie, en outre, pourquoi l'on part d'un modèle M dénombrable.

Lemme — *Si l'ensemble* D *des parties denses de* C *qui sont dans* M *est dénombrable — en particulier si* $\mathcal{P}(C)|_M$ *est dénombrable, et a fortiori si* M *est lui-même dénombrable —, alors pour toute condition* p *il existe une partie* G *de* C *qui est M-générique et telle que* $p \in G$

En effet, soit $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ la suite des parties denses de C qui sont dans M ; on définit par récurrence une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C de la façon suivante :

$$\begin{cases} p_0 = p \\ p_{n+1} \text{ est un élément de } D_{n+1} \text{ qui minore } p_n \text{ (il en existe, car } D_{n+1} \text{ est dense)} \end{cases}$$

On pose ensuite $G = \{q \in C \mid \text{il existe un entier } n \geq 0 \text{ tel que } q \geq p_n\}$, et l'on montre que G satisfait aux trois conditions (G_1), (G_2) et (G_3) de M-généricité.

Langage approprié à l'étude des modèles génériques : les relations (forte et faible) de forçage

L'intérêt de la méthode du forçage est qu'elle permet d'étudier les propriétés intéressantes du modèle $M[G]$. On peut ainsi vérifier les axiomes de ZF, la négation de l'axiome de constructibilité, la négation de l'hypothèse du continu, la négation de l'axiome du choix, en se ramenant au vieux modèle M, lorsqu'on a choisi un langage approprié pour exprimer ces propriétés : le langage du forçage. Ce langage contient, outre les symboles du langage ZF, les ensembles x de M (si l'on admet que x puisse être pris comme un symbole qui sera interprété par lui-même ; on peut remédier à cet abus d'écriture en se donnant, dans le langage du forçage, une constante $\underline{x}$ pour chaque ensemble x de M). Ce langage contient également une lettre de constante Γ qui sera interprétée par G dans le modèle $M[G]$

On définit, par récurrence sur la complexité des formules, une relation, dite *relation forte de forçage*, et notée $\Vdash^{F}$, entre l'ensemble des conditions de forçage et l'ensemble des formules exprimées dans le langage du forçage. Lorsque cette relation a lieu entre une condition p et une formule ϕ, on dit que p *force fortement* ϕ , et l'on écrit $p \Vdash^{F} \phi$. La relation $\mathrm{non}(p \Vdash^{F} \phi)$ se note usuellement $p \nVdash^{F} \phi$. Pour définir cette relation, on prend $\in$ et $\neq$ pour prédicats atomiques (= primitifs) et $\neg$, $\vee$, $\Rightarrow$, comme symboles logiques primitifs, et l'on utilise les abréviations suivantes :

$$(\phi \Rightarrow \psi) \overset{\mathrm{def}}{=} \neg\phi \vee \psi$$

$$(\phi \wedge \psi) \overset{\mathrm{def}}{=} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$(x \notin y) \overset{\mathrm{def}}{=} \neg(x \in y)$$

$$(x \neq y) \overset{\mathrm{def}}{=} \neg(x = y)$$

$$\forall x\ \phi(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \neg\ \exists x \neg\phi(x)$$

On définit la relation $p \Vdash^{F} \phi$ par récurrence sur ϕ de la façon suivante :

$p \Vdash^{F} x \in y$ ssi $\exists z\ (q \geq p)\ ((z\,;q) \in y$ et $p \Vdash^{F} x = z)$

$p \Vdash^{F} x \neq y$ ssi $\exists z\ (\exists q \geq p)\ ((z\,;q) \in x$ et $p \Vdash^{F} z \notin y)$ ou $\exists z\ (\exists q \geq p)\ ((z;q) \in y$ et $p \Vdash^{F} z \notin x)$

$p \Vdash^{F} \neg\phi$ ssi $(\forall q \leq p)\ \neg\ (q \Vdash^{F} \phi)$

$p \Vdash^{F} \phi \vee \psi$ ssi $p \Vdash^{F} \phi$ ou $p \Vdash^{F} \psi$

$p \Vdash^{F} \exists x\ \phi(x)$ ssi $\exists x\ (p \Vdash^{F} \phi(x))$

Loin d'obéir à toutes les règles de la relation $\models$ de satisfaction de la logique classique, la relation $\Vdash^{F}$ se comporte plutôt comme la relation de satisfaction de la logique intuitionniste ; c'est ainsi que la condition p peut forcer $\neg\neg\phi$ sans forcer ϕ. Par ailleurs, la relation $\Vdash^{F}$ se comporte bien vis à vis de la disjonction et de la quantification existentielle en ce qu'elle réalise un homomorphisme entre d'une part le *ou* et le *il existe* du langage formel, et d'autre part le *ou* et le *il existe* du métalangage. C'est l'unique raison pour laquelle on a pris les symboles $\vee$ et $\exists$ comme symboles primitifs dans la définition de la relation $\Vdash^{F}$. Remarquons que l'on utilise souvent les mêmes symboles logiques dans le langage et dans le métalangage, mais il n'y a aucune confusion à craindre du fait de cet abus d'écriture ; on voit facilement que dans l'expression " $p \Vdash^{F} \exists x\ \phi(x)$ ", le quantificateur existentiel $\exists$ est un symbole du langage, tandis que dans l'expression " $\exists x\ (p \Vdash^{F} \phi(x))$ ", le même symbole $\exists$ doit être pris comme un quantificateur existentiel du métalangage. En revanche, la relation $\Vdash^{F}$ n'a pas cette propriété d'homomorphisme vis à vis de la conjonction et de la quantification universelle ; on a seulement :

$$p \Vdash^{F} \phi \wedge \psi \quad \text{ssi} \quad (\exists q_1 \leq p)\ (\exists q_2 \leq p)\ (q_1 \Vdash^{F} \phi \ \text{ et } \ q_2 \Vdash^{F} \psi)$$

$$p \Vdash^{F} \forall x\ \phi(x) \quad \text{ssi} \quad (\forall x \in M)\ (\forall q \leq p)\ (\exists r \leq q)\ (r \Vdash^{F} \phi(x))$$

C'est la raison pour laquelle on définit une autre relation de forçage, appelée *relation faible de forçage.*

La relation (faible) de forçage est définie à partir de la relation forte de forçage ; elle se note $\Vdash$ et l'expression "$p \Vdash \phi$" se lit *la condition* p *force (faiblement) la formule* ϕ. Cette relation est définie de la façon suivante :

$$p \Vdash \phi \quad \text{ssi} \quad p \overset{F}{\Vdash} \neg\neg\phi$$

La relation faible $\Vdash$ est donc une relation duale de la relation forte $\overset{F}{\Vdash}$ de forçage. Cette relation obéit aux lois suivantes :

$$p \Vdash (\phi \wedge \psi) \quad \text{ssi} \quad (p \Vdash \phi \text{ et } p \Vdash \psi)$$

$$p \Vdash \forall x \ \phi(x) \quad \text{ssi} \quad \forall x \in M \ (p \Vdash \phi(x))$$

$$p \Vdash \neg\phi \quad \text{ssi} \quad (\forall q \leq p) \ \text{non}(q \Vdash \phi)$$

Cette relation faible de forçage réalise un homomorphisme vis à vis du *et* et du *pour tout* dans le langage et le métalangage ; de ce fait elle est compatible avec la notion de conséquence logique.

■ Rapports entre les relations $\overset{F}{\Vdash}$ et $\Vdash$

Si $p \overset{F}{\Vdash} \phi$, alors $p \Vdash \phi$, d'où les noms respectifs de relation forte et de relation faible de forçage.

$p \overset{F}{\Vdash} \neg\phi$ ssi $p \Vdash \neg\phi$

$p \Vdash \phi$ ssi $(\forall q \leq p)$ $(\exists r \leq q)$ $(r \overset{F}{\Vdash} \phi)$

■ Propriétés communes des relations $\overset{F}{\Vdash}$ et $\Vdash$

Les deux relations de forçage $\overset{F}{\Vdash}$ et $\Vdash$ vérifient en commun les propriétés fondamentales suivantes (on écrit seulement les propriétés pour la relation $\Vdash$) :

▶ *Définissabilité* : Si $\phi(x_1 ; \ldots ; x_n)$ est une formule contenant $x_1, \ldots, x_n$ pour seules variables libres, alors $\{(p ; a_1 ; \ldots ; a_n) \mid p \Vdash (a_1 ; \ldots ; a_n)\}$ est une collection dans M, exprimable par une formule du langage de ZF. Autrement dit, cette collection est de la forme $\{a \in M \mid \phi(a)_{|M}\}$, où $\phi(x)$ est une formule du langage de ZF à paramètres dans M; en particulier, si ϕ est une formule close, alors $\{p \in C \mid p \Vdash \phi\}$ est une partie de C qui est dans le modèle M.

▶ *Extension simple* : Si $p \Vdash \phi$ et $q \leq p$, alors $q \Vdash \phi$.

▶ *Consistance* : Il n'existe pas de condition p telle que l'on ait à la fois $p \Vdash \phi$ et $p \Vdash \neg\phi$.

▶ *Extension complète* : Toute condition p est raffinée par une condition q qui décide ϕ:

$$\forall p \ (\exists q \leq p) \ (q \Vdash \phi \ \text{ ou } \ q \Vdash \neg\phi)$$

▶ *Vérité* : Si G est M-générique sur C, alors $M[G] \models \phi \iff (\exists p \in G) \ (p \Vdash \phi)$.

▶ Propriété caractéristique de la relation $\Vdash$: La relation de forçage faible $\Vdash$ est compatible avec la notion de satisfaction : $p \Vdash \phi(\Gamma)$ ssi $\mathcal{M}[G] \models \phi(\Gamma)$ pour toute partie G $\mathcal{M}$-générique sur C telle que $p \in G$. En particulier, la relation $\Vdash$ est compatible avec la notion de conséquence logique : si ZF $\models \phi \Rightarrow \psi$ (si $\phi \Rightarrow \psi$ est conséquence logique des axiomes de ZF) et si $p \vdash \phi$, alors $p \vdash \psi$. Ainsi, pour montrer que $\mathcal{M}[G]$ est un modèle de ZF, il suffit de montrer que chaque axiome est forcé (faiblement) par une condition $p \in G$, et pour cela, il suffit de montrer que l'axiome des parties et chaque instance du schéma de remplacement est forcé par une condition $p \in G$, car on montre que si $\mathcal{M}[G]$ est un modèle transitif standard de l'axiome des parties et du schéma de remplacement, alors $\mathcal{M}[G]$ est un modèle transitif standard de ZF.

Applications de la méthode du forçage à des démonstrations de consistance relative

Chaque fois qu'on démontre un résultat de consistance relative utilisant la méthode du forçage, il faut se donner un ensemble adéquat de conditions de forçage à partir duquel on construit une extension générique satisfaisant aux propriétés désirées.

Consistance de la négation de l'axiome de constructibilité relativement à ZFC

Théorème — *Si* ZFC (=ZF+AC) *est consistant, alors* ZFC + $V \neq L$ *est aussi consistant.*

Methode de démonstration : On prend pour ensemble $(C,\leq)$ de conditions de forçage l'ensemble de toutes les suites finies de 0 et de 1 muni de l'ordre partiel $\supset$: $p \leq q$ ssi $p \supset q$. Soit G un "ensemble" $\mathcal{M}$-générique sur C (on a vu qu'il en existe, lorsque $\mathcal{M}$ est dénombrable). Pour chaque entier n, l'ensemble $\{p \in C \mid p(n) = 1\}$ est dense, de sorte que pour tout entier n, il existe $p \in G$ telle que $n \in \mathrm{dom}(p)$. De plus, si p et q sont compatibles, on a soit $p \subset q$, soit $q \subset p$. Ces propriétés nous permettent de définir, par recollement, une fonction $\bigcup_{p \in G} p$ de ω dans $\{0;1\}$, c'est-à-dire une partie de ω, autrement dit, un nombre réel. Mais comme G n'est pas un ensemble dans $\mathcal{M}$, la partie de ω que l'on vient de construire dans le nouveau modèle $\mathcal{M}[G]$ n'est pas dans le vieux modèle $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ est un modèle des ensembles constructibles, on a aussi un modèle $\mathcal{M}[G]$ dans lequel la partie de ω déterminée par G n'est pas constructible.

Consistance relative de la négation de l'hypothèse du continu relativement à ZFC

Théorème — *Si* ZFC *est consistant, alors* ZFC + $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ *est aussi consistant.*

Méthode de démonstration : On prend pour ensemble $(C,\leq)$ de conditions de forçage, l'ensemble de toutes les fontions p définies sur un ensemble fini de $\aleph_0 \times \aleph_2$ et à valeurs dans l'ensemble $\{0;1\}$; c'est l'ensemble des suites finies de parties finies de ω, muni de l'ordre suivant de prolongement des fonctions partielles : $p \leq q$ ssi $p \supseteq q$. Soit G un "*ensemble*" $\mathcal{M}$-générique sur C. Pour chaque entier $n \in \aleph_0$, l'ensemble $\{p \in C \mid (n;\alpha) \in \mathrm{dom}(p)\}$ est dense. Cela permet de définir, par recollement, une fonction $\bigcup_{p \in G} p$ de $\aleph_0 \times \aleph_2$ dans $\{0;1\}$; cela revient à définir $\aleph_2$ parties de ω, c'est-à-dire $\aleph_2$ nombres réels. On montre que cette fonction est injective en la seconde variable, et que, par suite, les $\aleph_2$ nombres réels définis sont tous distincts. Comme $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}[G]$ ont les mêmes cardinaux, la cardinalité de $2^{\aleph_0}$ est au moins $\aleph_2$ (au sens de $\mathcal{M}[G]$).

6. CONCLUSION

LE MATHEMATICIEN ET LE LOGICIEN DEVANT LA THEORIE DES ENSEMBLES : DEUX POINTS DE VUE DIVERGENTS

Une multiplicité d'axiomatiques et de modèles ensemblistes au lieu d'une axiomatique unique et d'un modèle standard

Il existe de fait, entre les mathématiciens et les logiciens ensemblistes, une divergence d'opinion et d'intérêt sur les buts de la théorie des ensembles qui n'est pas sans rappeler l'attitude des physiciens vis-à-vis des mathématiciens quant à l'usage des mathématiques. Le mathématicien non logicien considère rarement la théorie des ensembles comme une véritable théorie mathématique ; il attend généralement de cette théorie qu'elle lui fournisse un cadre approprié, *i.e.* à la fois un outil et un langage, pour décrire les branches des mathématiques auxquelles lui s'intéresse. Il souhaite avoir, une fois pour toute, une bonne axiomatique ensembliste à sa disposition. A ce titre, le mathématicien a besoin de la théorie des ensembles un peu de la même façon que le physicien a besoin des mathématiques. L'un comme l'autre n'ont que faire des raffinements et des généralisations abusives que leur offrent respectivement le logicien ensembliste et le mathématicien. Ainsi le physicien a-t-il parfois tendance à se contenter d'espaces de dimension 4. Souvent il ne veut pas entendre parler d'espaces de dimension plus grande. Il s'étonnera même que le mathématicien ne soit pas à son service et qu'au lieu de lui fournir des outils appropriés (par exemple, l'étude systématique des variétés riemanniennes de dimension 4) il lui fournisse des espaces généraux dont la plupart ne lui sont d'aucune utilité immédiate. La divergence vient de ce que le mathématicien ne se considère pas au service du physicien et ne s'intéresse aux questions soulevées par celui-ci que pour autant qu'elles alimentent sa recherche propre, sans beaucoup s'inquiéter des retombées en physique des développements des théories mathématiques engendrées par les problèmes physiques. De la même façon, le mathématicien s'étonne souvent de ce que le logicien ensembliste ne lui fournisse pas une bonne théorie des ensembles établie *ne varietur*, mais qu'il l'embarrasse d'une multiplicité d'axiomatiques et de modèles ensemblistes, en lui laissant la liberté de choisir l'axiomatique ou le modèle qui lui convienne le mieux pour fonder les domaines des mathématiques auxquels il s'intéresse.

Des raisons, superficielles, tenant à la spécificité des travaux du mathématicien et du logicien expliquent leur antagonisme concernant les objectifs de la théorie des ensembles. Le logicien qui s'occupe de la théorie des ensembles ne cherche plus à fonder sur celle-ci les concepts mathématiques, comme le voudraient encore certains mathématiciens non ensemblistes. Ce travail a été fait lors de la création de la théorie des ensembles et de son axiomatisation : depuis le début des années trente qui ont vu la consécration de ZF, il n'y a plus grand-chose d'original à dire sur la question des fondements. Le logicien ensembliste étudie la théorie des ensembles comme une théorie mathématique parmi d'autres, de la même façon qu'un algébriste étudie la théorie des groupes. Il considère les diverses axiomatisations de la théorie des ensembles ou, plutôt, partant de la théorie fondamentale ZF, il examine les conséquences des diverses hypothèses que l'on peut ajouter à ZF et il étudie les propriétés des théories ensemblistes ainsi enrichies, de même que l'algébriste, par l'introduction de nouveaux axiomes, enrichit la théorie des groupes et étudie les groupes topologiques, les groupes de Lie, *etc.* Il est une autre direction dans laquelle il oriente sa recherche : il étudie les différents modèles d'une même axiomatique des ensembles, tout comme l'algébriste recense les différents groupes d'un ordre donné et étudie leurs caractéristiques. Mais la plupart des modèles ensemblistes étudiés par le logicien n'intéressent pas le mathématicien dans l'immédiat, comme la plupart des groupes envisagés par l'algébriste ne trouvent pas d'applications immédiates en physique.

La raison profonde de la divergence d'attitude du mathématicien et du logicien vis-à-vis de la théorie des ensembles vient de ce que l'un et l'autre ne se sentent pas touchés de façon égale par la découverte des propriétés mathématiques qui ont affecté, depuis le premier tiers de ce siècle, le statut des théories axiomatiques. Deux résultats métamathématiques décisifs ont bouleversé la conception naïve que les mathématiciens et les logiciens avaient, auparavant, des théories mathématiques, et ils ont rendu cette position intenable en droit : l'existence de modèles non standards pour les théories axiomatiques exprimées dans la logique des prédicats du premier ordre et l'incomplétude des systèmes axiomatiques. Or le logicien ne peut plus ne pas tenir compte de ces résultats fondamentaux dans la mesure où ils sont le point de départ des travaux qu'il entreprend depuis les années trente, tandis que le mathématicien, même s'il n'ignore pas ces résultats, peut parfois encore se permettre de les laisser de côté car ils n'affectent pas toujours directement son étude des théories mathématiques.

Toute théorie mathématique du premier ordre admet, en plus de son interprétation naturelle, celle de la pratique mathématique usuelle, d'autres modèles non isomorphes, appelés généralement *modèles non standards*. Cette propriété métamathématique a été mise en évidence, dès le début des années vingt, par Skolem qui en a tiré aussitôt la leçon philosophique inéluctable, à savoir le relativisme des notions ensemblistes, dont nous avons parlé lorsque nous avons appliqué le théorème de Löwenheim-Skolem à la théorie des ensembles (voir § 5.5). Le relativisme se répercute sur toutes ls notions mathématiques — du fait que les mathématiques sont fondées sur la théorie des ensembles — en particulier sur l'arithmétique et sur l'analyse. Si l'on admet, en effet, que tout l'édifice mathématique puisse être fondé sur la théorie des ensembles, on doit inévitablement soutenir, sous peine d'avoir une position inconséquente, ou d'avoir deux têtes n'ayant pas les mêmes idées, que toute notion mathématique n'a de sens (il faudrait dire "de référence" au sens "frégéen" de *Bedeutung*) que relativement à un modèle particulier de la théorie des ensembles, et que si l'on est amené, pour quelque raison, à changer de modèle ensembliste, les notions mathématiques courantes n'auront plus exactement les mêmes propriétés, autrement dit ne seront plus les mêmes bien que l'on continue, pour la commodité, à les appeler de la même manière : les mêmes mots mathématiques ne désignent pas les mêmes objets dans des modèles distincts. Donnons un exemple où intervient, dans la pratique mathématique la plus commune, le relativisme des notions mathématiques, sans qu'on y prenne généralement garde. Tout mathématicien sait qu'il y a plusieurs façons de construire l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres irrationnels, notamment les coupures de Dedekind et les suites de Cauchy. Il sait que toutes ces constructions donnent le même ensemble, à un isomorphisme près. Mais il fait rarement attention à ce que cela signifie, et il ne prend pas garde de concilier deux résultats, qui paraissent incompatibles pour une conception naïve des mathématiques : d'une part, l'unicité de $\mathbb{R}$ à un isomorphisme près, d'autre part, l'existence de modèles non standards pour l'analyse, autrement dit le fait que d'autres ensembles, non isomorphes aux précédents, peuvent prétendre désigner $\mathbb{R}$. L'unicité de $\mathbb{R}$ et l'existence de modèles non standards de $\mathbb{R}$ ne sont simultanément soutenables que si l'on pense l'ensemble $\mathbb{R}$ relativement à un modèle de la théorie des ensembles. Lorsqu'on part d'un modèle M de ZF dans lequel il existe un objet $\mathbb{Q}_M$ qui représente l'ensemble des nombres rationnels, les différentes méthodes pour construire, dans ce modèle, l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels (au sens de M) ou l'ensemble des coupures de Dedekind, donneront, après passage au quotient, deux ensembles (au sens de M) $\mathbb{R}_M^C$ et $\mathbb{R}_M^D$ tels qu'il y ait, entre $\mathbb{R}_M^C$ et $\mathbb{R}_M^D$, un isomorphisme dans M ; autrement dit, l'isomorphisme qui assure l'unicité de $\mathbb{R}$ dans M est précisément un ensemble au sens de M. Mais si l'on part d'un modèle M' de ZF différent de M, par exemple si le modèle M de ZF n'est pas dénombrable dans le modèle intuitif U tandis que le modèle M' de ZF est dénombrable (dans U), les objets $\mathbb{Q}_M$, $\mathbb{R}_M^C$ et $\mathbb{R}_M^D$ seront différents respectivement des objets $\mathbb{Q}_{M'}$, $\mathbb{R}_{M'}^C$, et $\mathbb{R}_{M'}^D$. C'est ainsi que $\mathbb{R}_M^C$ et $\mathbb{R}_{M'}^C$, qui sont respectivement des objets de M et M', mais aussi des objets communs au modèle intuitif U, ne sont pas isomorphes au sens le plus large où l'on puisse parler simultanément des deux, *i.e.* au sens de U.

Mais, rétorquera peut-être le mathématicien, face à cette situation métamathématique qui pousse l'attitude naïve vis-à-vis des mathématiques à l'inconséquence : Pourquoi changer de modèle ? Ne peut-on fonder les mathématiques dans un modèle ensembliste canonique, le modèle intuitif U ? A-t-on même besoin à la limite, de rapporter la théorie des ensembles et les mathématiques qu'on y fait à un quelconque modèle, même intuitif ? Ne peut-on pas, en effet, se contenter d'une axiomatique ensembliste standard à laquelle on ajouterait les axiomatiques spécifiques à chaque théorie mathématique ? Car faire des démonstrations à partir d'une théorie axiomatique n'exige pas qu'on fasse référence à un quelconque modèle. Malheureusement cette attitude n'est pas conforme à la pratique mathématique (ce que l'on pense ainsi n'est pas conforme à ce que l'on fait) , et elle sombre inévitablement dans les difficultés d'un formalisme outrancier, notamment l'hémiplégie mathématique. Ne faire aucune référence à un modèle c'est s'interdire de parler de propositions mathématiquement vraies et se borner à parler de propositions dérivables d'un système donné d'axiomes. Mais la démonstration n'est pas un but en soi, même en mathématique ; elle n'est qu'un moyen pour parvenir à ce qu'on croit être la vérité. Sinon, cela n'aurait aucun sens de formuler des conjectures, et on ne peut d'ailleurs pas le faire sans avoir une idée de la vérité. Or les mathématiques ne se sont continuellement maintenues en vie que parce qu'on y pose sans cesse des problèmes nouveaux. C'est pourquoi tout mathématicien fait référence à un modèle, ne serait-ce qu'implicitement. Bien plus, à l'instigation du logicien qui lui fournit des résultats de consistance relative, il lui arrive de changer subrepticement de modèle ensembliste. En effet, lorsqu'il fait de l'analyse en admettant l'axiome de Solovay, il part en fait du modèle de Solovay, qui est précisément un modèle dénombrable (au sens de $\mathcal{U}$), donc un modèle non standard où le langage ne désigne pas les mêmes êtres mathématiques que dans le modèle intuitif $\mathcal{U}$.

Le relativisme des notions mathématiques met donc fin à un vieux rêve auquel le logicien n'accorde plus depuis longtemps aucune foi, tandis que le mathématicien se comporte souvent comme s'il y croyait encore, comme à une illusion tenace ; c'est le rêve selon lequel les objets mathématiques pourraient être définis à un isomorphisme près, de façon catégorique, et selon lequel il pourrait n'y avoir qu'un seul modèle pour une théorie mathématique axiomatisée, le bon modèle, qui ne serait autre que le modèle intuitif exprimé dans le langage rigoureux de la théorie des ensembles. Il faut se rendre à l'évidence, avoir une attitude cohérente, accorder la pratique mathématique et la philosophie sous-jacente à cette pratique, aux résultats métamathématiques. Toute théorie mathématique du premier ordre admet une multiplicité de modèles non isomorphes. Cette situation qui a pu paraître fâcheuse et frustrante lors de sa découverte, présente maintenant de grands avantages : parmi tous les modèles possibles d'une théorie, on peut choisir, pour les besoins de la cause, tel ou tel modèle qui vérifie non seulement tous les axiomes de la théorie mais aussi d'autres propriétés désirables. C'est justement ce qui rend possible l'analyse non standard ; or aucun mathématicien ne se lamentera qu'on puisse fonder rigoureusement le traitement des infiniment petits, découverts par Newton et par Leibniz, utilisés par eux pour la plus grande fécondité de leurs travaux, mais sans qu'ils eussent clarifié le statut de ces êtres mathématiques qui, de ce fait, avaient été éliminés de l'analyse au XIXème siècle (voir volume 2).

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel (1931) ont mis fin à un autre rêve qui a hanté les mathématiciens et les logiciens jusqu'à l'époque de leur opposition, à savoir l'idée selon laquelle, pour étudier une théorie mathématique, on pourrait toujours trouver un bon système d'axiomes, soit une axiomatique complète dans laquelle toutes les propositions intuitivement vraies de la théorie seraient formellement démontrables. Si ce rêve était réalisable — et beaucoup de mathématiciens se comportent comme s'ils y croyaient encore, au risque de désillusions amères — cela présenterait deux avantages notables pour la pratique mathématique. D'une part, il justifierait un formalisme outrancier : on pourrait ainsi légitimement réduire l'activité mathématique à une pure manipulation de suites (= les démonstrations formelles) de suites (= les formules du langage) de symboles (= l'alphabet du langage formel). D'autre part, toute question sur la théorie aurait *a priori* une réponse (positive ou négative) et, corrélativement, toute recherche mathématique serait payante pour le chercheur lui-même. Ce n'est, hélas, pas toujours le cas. Le *premier théorème d'incomplétude* de Gödel revient à dire que pour tout système axiomatique d'une théorie mathématique (suffisamment riche pour fonder une bonne partie de l'arithmétique), il existe une proposition intuitivement vraie (par rapport à un modèle de référence) qui n'est pas formellement démontrable dans ce système. Le *second théorème d'incomplétude* de Gödel donne un exemple de formule indécidable, celle précisément qui exprime la consistance du système.

Le mathématicien peut-il légitimement ne plus se sentir concerné par les phénomènes d'incomplétude ? Lui suffit-il de rétorquer qu'ils ne le touchent pas directement dans son activité de mathématicien, et que l'énoncé indécidable mis en évidence par Gödel exprime une propriété tout à fait dénuée de contenu mathématique profond ? Aucunement. Tout d'abord, le résultat de Gödel explique *a priori* pourquoi un certain nombre de recherches mathématiques se sont révélées vaines : par exemple, la démonstration de l'hypothèse du continu dans les théories usuelles des ensembles (plus ou moins équivalentes à ZF), la démonstration ou la réfutation de l'axiome du choix dans les mêmes théories, pour ne citer que les recherches ensemblistes. Ensuite, le double résultat d'incomplétude de Gödel montre que tout système axiomatique admet au moins un énoncé indécidable. Mais il en résulte immédiatement qu'une axiomatique du premier ordre comprend une infinité dénombrable de propositions indécidables. Sinon, en les ajoutant à l'axiomatique initiale, on obtiendrait une théorie axiomatique complète. Or le premier théorème d'incomplétude de Gödel dit aussi qu'une théorie *complète* (*i.e.* dans laquelle tout énoncé exprimable dans le langage de la théorie est soit vrai soit faux) — à supposer qu'elle soit non contradictoire, ce qui est la moindre des exigences — n'est *pas axiomatisable* ; autrement dit, il n'existe pas de système axiomatique dans lequel tous les énoncés vrais de la théorie soient démontrables. Dès lors, même si tous les énoncés indécidables ne sont pas mathématiquement intéressants, il y a fort à parier qu'il s'en trouve un nombre non négligeable (et, peut-être même une infinité) qui soient mathématiquement très importants. C'est ainsi que nous avons exhibé plusieurs énoncés mathématiques importants qui ne sont pas décidés dans la théorie ZF, notamment les axiomes de choix et l'hypothèse du continu. Gödel avait démontré ses théorèmes d'incomplétude pour une axiomatique de l'arithmétique. L'énoncé indécidable trouvé pour les besoins de la cause n'intéressait pas, bien entendu, les arithméticiens car il n'exprimait rien d'intrinséquement profond sur les entiers. Mais Paris et Harrington ont trouvé en 1977 une proposition arithmétique, formulable en théorie des graphes et liée au théorème combinatoire de Ramsey, qui exprime une propriété vraie et importante sur les entiers, et ils ont démontré qu'elle n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano, mais seulement dans ZF. C'était le premier exemple d'énoncé arithmétique, vrai dans ZF, *i.e.* vrai mathématiquement, profond arithmétiquement, mais non démontrable dans la théorie axiomatique usuelle des entiers. On peut s'attendre à en trouver bien d'autres.

Sans faire perdre toute foi en la possibilité d'atteindre la vérité mathématique, les phénomènes d'incomplétude doivent amener le mathématicien qui en tire les leçons à une attitude de réserve et de prudence concernant la possibilité d'apporter de façon naïve une solution à tout problème mathématique. C'est ainsi que, depuis plus de trois siècles, les mathématiciens les plus brillants — ainsi que beaucoup de profanes, mais cela relève plus de l'histoire des attitudes pathologiques que de l'histoire proprement dite des mathématiques ! — cherchent, ne serait-ce qu'indirectement, le "grand théorème de Fermat". Mais peu de mathématiciens prennent conscience de ce qu'il se pourrait que la conjecture de Fermat soit indécidable dans l'arithmétique de Peano, et peut-être même dans ZF. En revanche, le logicien sait, de façon générale et *a priori*, que si la conjecture de Fermat est vraie dans le modèle standard de l'arithmétique, *i.e.* pour les entiers tels que nous les concevons, alors elle est démontrable dans l'axiomatique de Peano ; sinon, si l'équation de Fermat admet des solutions non triviales, on peut calculer à la main (au besoin, à l'aide d'un ordinateur) la plus petite solution. Mais comment savoir si elle est vraie, sinon en en donnant une démonstration ? C'est pourquoi l'on continue la recherche, au risque de s'apercevoir un jour qu'elle était vaine. On a cependant des résultats partiels non négligeables qui ouvriront peut-être un jour la voie à la solution du problème de Fermat. G. Faltings a démontré en 1983 la conjecture de Mordell, qui entraîne que, pour chaque entier n, l'équation de Fermat (ou de Pythagore généralisée) $x^n = y^n + z^n$ n'a au plus qu'un nombre fini de solutions ; mais il n'a pas donné de borne effective : sa démonstration procède par l'absurde. Par ailleurs, d'autres résultats ont montré qu'il existe un nombre infini d'entiers n pour lesquels l'équation de Fermat n'a pas de solution (non triviale). Si l'on arrive un jour à trouver une fonction récursive f — *i.e.* une fonction calculable sur les entiers — telle que, pour tout n , f(n) majore toutes les solutions de l'équation $x^n = y^n + z^n$, alors on aura démontré que l'ensemble des solutions de l'équation générale de Fermat est récursif et, dès lors, on aura démontré que la conjecture de Fermat est décidable dans l'arithmétique de Peano, et même dans une axiomatique plus faible. Il resterait encore à démontrer lequel des deux cas de figures a lieu, *i.e.* si elle est démontrable ou réfutable. Mais on aurait alors l'avantage inestimable de savoir à l'avance que la question n'est pas sans réponse.

Les phénomènes d'incomplétude s'appliquent bien évidemment à la théorie des ensembles. Aucune axiomatique des ensembles n'est complète, mais il peut être avantageux d'enrichir une axiomatique donnée, afin de résoudre des problèmes indécidables dans la théorie initiale. C'est la raison pour laquelle nous avons présenté plusieurs axiomatiques des ensembles. L'axiomatique de référence est le système ZF, qui est pour ainsi dire tombé dans le domaine public. Mais on a présenté de multiples façons d'enrichir ZF en des théories ensemblistes qui sont souvent incompatibles entre elles. Dès lors, se pose un double problème. Parmi toutes les théories enrichissant ZF, y en a-t-il une qui soit préférable aux autres ? Seul l'avenir le dira, et la meilleure façon d'être en mesure de répondre à cette question est de rechercher systématiquement, dès maintenant, les conséquences de chacune des théories ensemblistes. Le second problème est étroitement lié au premier : arrivera-t-il que l'on soit obligé de fonder diverses branches mathématiques sur différentes axiomatiques ensemblistes, incompatibles entre elles, enrichissant ZF ? Seul l'avenir le dira. Mais si cela venait à se produire, il faudrait repenser l'unité des mathématiques en des termes nouveaux et il serait plus prudent de la rechercher dès à présent : non pas sous la forme de l'unicité d'un modèle ensembliste ni sous la forme de l'unicité d'une axiomatique des ensembles, car cette conception de l'unité des mathématiques n'est déjà plus soutenable aujourd'hui ; mais, peut-être, sous la forme d'une prise de conscience plus aiguë d'une unité de méthode, la méthode démonstrative, dans la diversité des choix des hypothèses. C'est ainsi qu'on peut admettre ou refuser l'axiome du choix, admettre (avec plus de risque) ou refuser l'axiome de détermination, selon les modèles ensemblistes que l'on désire privilégier. Mais tout mathématicien admet que l'axiome du choix entraîne l'existence d'ensembles non mesurables pour la mesure de Lebesgue, et que l'axiome de détermination entraîne que toute partie de l'espace C est mesurable. On peut ne pas s'accorder sur la vérité des hypothèses. De par sa nature, une hypothèse fait l'objet d'un assentiment appuyé non pas sur une démonstration mais sur une convention ou sur un sentiment de la vérité. Mais on s'accordera toujours sur la vérité des implications, *i.e.* sur les conséquences des hypothèses, qui font précisément l'objet de démonstrations. Cela revient à dire qu'il y aura toujours, dans la théorie des ensembles, un noyau d'axiomes commun à toutes les mathématiqeus, à savoir le noyau dans lequel on démontrera des implications du type précédent.

[29] J. E. BAUMGARTNER, D.A. MARTIN & S. SHELAH ed. : *Axiomatic set Theory*. Contemporary Math. Vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence (1984).

Actes d'un colloque tenu pendant l'été 1983 à Boulder, Colorado, cet ouvrage présente un échantillon des dernières recherches, inévitablement très techniques, sur la théorie axiomatique des ensembles.

[28] G.H. MOORE : *Zermelo's axiom of choice : its origins, developments, and influence*. Studies in the history of Math. and Physical Sc., Vol.8, Springer pub. (1982).

"Still more on the axiom of choice" : histoire de l'axiome du choix depuis son origine préhistorique au XIX° siècle jusqu'aux travaux d'indépendance de Cohen.

[27] K. KUNEN : *Set theory, an introduction to independance proofs*. Studies in logic and the foundations of mathematics, vol.102, North-Holland pub., Amsterdam (1980).

Ouvrage consacré aux démonstrations d'indépendance.

[26] A. LEVY : *Basic set theory*. Perspectives in mathematical logic, Springer pub. (1979).

La première partie de cet ouvrage développe la théorie axiomatique des ensembles suivant l'ordre habituel de présentation des concepts; la seconde partie traite quelques applications de la théorie fondamentale des ensembles : les ensembles de Baire et de Borel, les espaces polonais, l'axiome de Martin, la combinatoire infinie et les grands cardinaux. Cet ouvrage est précieux pour ses motivations et ses remarques. Il ne se contente pas de démontrer des théorèmes comme les ouvrages de Krivine (1965 et 1972) et de Jech (1978), mais il explique ce qui va être démontré, ou ce qui vient de l'être. Le mathématicien qui ne se considère pas seulement comme un "tube démonstratif" appréciera cette présentation, même si elle peut paraître sophistiquée et si elle ne fournit pas le maximum possible de théorèmes au mètre carré de papier; les démonstrations seront vite oubliées, tandis qu'on gardera encore longtemps les idées directrices.

[25] T.J. JECH : *Set theory*. Pure and applied math. Academic Press pub., New York (1978).

Applications de la méthode du forçage au problème de Suslin, à l'axiome de Martin, à la théorie des grands cardinaux et à la théorie descriptive des ensembles; aperçu sur les cardinaux mesurables et compacts, sur le modèle de Solovay et sur l'axiome de détermination.

[24] J.L. BELL : *Boolean-valued models and independance proofs in set theory*. Oxford Logic Guides, Oxford Univ. Press (1977).

Exposé des principaux résultats d'indépendance en théorie des ensembles; les démonstrations d'indépendance utilisent systématiquement la méthode des modèles booléens.

L'ouvrage suivant contient un échantillon, considéré comme représentatif de l'état des recherches et des travaux vers les années 1975, des développements modernes dans les cinq branches de la logique : théorie des modèles, théorie des ensembles, théorie de la récursivité, théorie de la démonstration et mathématiques constructives. Il est destiné aux mathématiciens ou aux logiciens qui ne sont pas spécialistes des sujets traités, mais qui recherchent un exposé motivé et accessible sur les grandes voies de recherche en logique.

[23] J. BARWISE ed. : *Handbook of mathematical logic*. Studies in logic and the foundations of math., vol.90, North-Holland pub., Amsterdam (1977).

Les cinq articles suivants sont tirés de ce livre :

[22] K.J. DEVLIN : *Constructibility*. Dans [23], J. Barwise ed. (1977), pp. 453-489.

Introduction à la méthode du forçage de Cohen, suivant la présentation de Shoenfield (1971).

[21] T.J. TECH : *About the axiom of choice*. Dans [23], J. Barwise ed. (1977), pp. 345-370.

Selon les points de vue, une version préliminaire ou un résumé du livre de Jech cité plus haut [25] .

[20] J.P. BURGESS : *Forcing* . Dans [23] , J.Barwise ed. (1977), pp. 403-452.

Introduction à la méthode du forçage de Cohen, suivant la présentation de Shoenfield (1971).

[19] M.E. RUDIN : *Martin's axiom*. Dans [23] , J.Barwise ed. (1977), pp. 491-501.

[18] J.R. SHOENFIELD : *Axioms of set theory*. Dans [23] , J.Barwise ed. (1977), pp. 321-344.

Résumé sur la théorie axiomatique des ensembles.

[17] K.J. DEVLIN : *The axiom of constructibility; a guide for the mathematician*. Lecture Notes in Math. vol.617, Springer pub. (1977).

Présentation destinée aux mathématiciens non logiciens de l'axiome de constructibilité et de ses applications mathématiques.

[16] Y.I. MANIN : *A course in mathematical logic*. Graduate texts in Math., vol. 53, Springer pub. (1977).

Bonne introduction motivée à la logique mathématique : langages formels et leurs interprétations avec application à la théorie axiomatique des ensembles ; présentation de la méthode du forçage et du modèle des ensembles constructibles ; calculabilité, ensembles diophantiens et théorème d'incomplétude de Gödel.

[15] K.KURATOWSKI and A. MOSTOWSKI : *Set theory with an introduction to descriptive set theory*. Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 86, North-Holland pub., Amsterdam (1968, 1976 (2ème édition complètement revue)).

Présentation traditionnelle de la théorie des ensembles, n'utilisant pas la méthode des ensembles constructibles, ni la méthode du forçage, mais appliquant les sujets traités à la topologie générale; une partie substantielle est consacrée à la théorie descriptive des ensembles.

[14] J.R. SHOENFIELD : *Martin's axiom*. Amer. Math. Monthly, 84 (1975), pp.610-617.

Aperçu sur l'axiome de Martin.

[13] K.J. DEVLIN and JOHNSBATEN : *The Suslin problem*. Lecture Notes in Math., vol.405, Springler pub.1974.

Exposé des résultats d'indépendance concernant le problème de Suslin, dont beaucoup sont dus à Jensen.

[12] F.R. DRAKE : *Set theory, an introduction to large cardinals*. Studies in logic and the foundations of math., vol. 76, North-Holland pub., Amsterdam (1974)

Introduction très claire à quelques familles de grands cardinaux.

[11] P.R. HALMOS : *Naive set theory*. Van Nostrand pub. Princeton (1960). Réédition : Undergraduate Texts in Math., Springer pub. (1974)

Initiation à la théorie axiomatique des ensembles; ouvrage élémentaire contenant le minimum vital pour tout mathématicien.

[10] K.J. DEVLIN : *Aspects of constructibility*. Lecture Notes in math., vol.354, Springer pub. (1973)

Exposé des principaux résultats ensemblistes obtenus grâce à la méthode des ensembles constructibles, inventée par Gödel pour démontrer la consistance relative de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu, puis revivifiée et exploitée avec beaucoup de génie par Jensen pour résoudre des problèmes difficiles.

[9] A.A. FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL and A. LEVY : *Foundations of set theory*. Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland pub, Amsterdam (1958, puis 1973 pour la 2° édition revue).

Un classique sur les fondements ensemblistes des mathématiques.

[8] T.J. JECH : *The axiom of choice*. Studies in logic and the foundations of mathematics, vol.75, North-Holland pub., Amsterdam (1973).

Cet ouvrage étudie l'indépendance et la force relative des différentes versions affaiblies de l'axiome du choix, les conséquences de l'axiome du choix, ainsi que le comportement de certaines théories mathématiques en l'absence de l'axiome du choix.

[7] J.L. KRIVINE : *Théorie axiomatique des ensembles*. Presses universitaires de France, Paris (1969, puis 1972 pour la 2° édition augmentée).

Remarquable par sa densité, couvrant l'espace d'un volume de la collection "Que sais-je",cet ouvrage étudie quelques méthodes de démonstrations d'indépendance antérieures à la méthode du forçage.

[6] D.S. SCOTT ed.: *Axiomatic set theory*, vol.1. Proc. of Symposia in pure math., vol.13, Amer.Math. Soc., Providence (1971).

Actes d'un colloque qui présentait les travaux de pointe en théorie des ensembles en 1971.

[5] J.R. SHOENFIELD : *Unramified forcing*. Dans [6] , D.S. Scott ed. (1971), pp. 357-381.

Présentation de la méthode du forçage dans le langage des ordres partiels.

[4] T.J. JECH : *Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing*. Lecture notes in math., vol.217, Springer pub. (1971).

Exposé de la méthode du forçage, étude du modèle de Solovay dans lequel tout ensemble borné de nombres réels est mesurable pour la mesure de Lebesgue.

[3] P.J. COHEN : *Set theory and the continuum hypothesis*. Benjamin pub. (1966).

Cet exposé clair et stimulant de la méthode du forçage par celui qui l'a inventé donne les motivations et les idées sous-jacentes à cette méthode, et garde de ce fait un grand intérêt malgré les présentations simplifiées données ultérieurement, notamment par Shoenfield (1971).

[2] J.R. SHOENFIELD : *Mathematical logic*. Addison-Wesley Pub. (1967).

Reste encore le meilleur ouvrage d'introduction aux branches classiques de la logique mathématique: logique des prédicats, théorie des modèles, récursivité, théorie des ensembles et théorie de la démonstration.

[1] H. RUBIN and J. RUBIN : *Equivalents of the axiom of choice*. Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland pub., Amsterdam (1963).

Une centaine d'énoncés équivalents à l'axiome du choix, groupés en familles.

Enfin, sur la genèse de l'axiomatique ZF, les problèmes philosophiques suscités lors de sa constitution et les raisons qui l'ont fait prévaloir sur les théories axiomatiques ensemblistes rivales, on pourra consulter :

[0] G. LELIEVRE : *L'axiomatisation de la théorie des ensembles et le traitement de la notion de propriété définie*. Thèse de troisième cycle ; Université Paris-Sorbonne (1980).

<u>Avertissement</u> : Cette table liste des résultats que l'on peut introduire dans diverses leçons. Sauf exception, ces résultats ne peuvent, à eux seuls, constituer toute la leçon (rappelons qu'il s'agit de Compléments d'analyse, et que les propriétés de base ne sont pas rappelées).

<u>Abréviations utilisées</u> : Ch : Chapitre ; L : lemme ; T : théorème ; P : proposition ; C : corollaire ; E : exemple ; CE : contre-exemple ; Pi : piège ; R : remarque ; D : définition ; Ex : exercice ; Pr : propriété.

1. *Différents procédés pour définir des topologies ; Exemple.*
   Ch 1 : T14, T16.

2. *Exemples de dénombrement d'ensembles infinis.*
   Ch 1 : T32, C33, P34, E59, E63 ; Ex15-16.
   Ch 2 : § 3.2 : Pr E2, § 5.3.
   Ch 3 : C15, C26, C28, P36.

3. *Exemples d'utilisation de la diagonale en théorie des ensembles et en analyse.*
   Ch 1 : D2 sqq, Pi17, E19,
   Ch 3 : C39.

4. *Exemples d'utilisation de l'axiome du choix.*
   Ch 1 : P34, P39, P43, Ex16.
   Ch 2 : § 5.3.3, § 5.4.1.
   Ch 3 : T19.

5. *Exemples d'utilisation de l'hypothèse du continu.*
   Ch 1 : Ex16.

6. *Propriétés topologiques héréditaires. Exemples et contre-exemples.*
   Ch 1 : C10, C12, Pi17 Ex9-10.
   Ch 2 : § 5.4 : Pr U2.

7. *Propriétés sur-topologiques. Exemples et contre-exemples.*
   Ch 1 : Ex17.
   Ch 3 : T2, T6, T14, T16, T17.

8. *Propriétés topologiques globales ; propriétés topologiques locales. Comparaison.*
   Ch 1 : Pi23 sqq.
   Ch 3 : T2, T6.

9. *Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.*

Ch 2 : § 1, § 2, § 3, § 4, Ex4.

Ch 3 : T2.

10. *Exemples de caractérisations topologiques d'espaces particuliers.*

Ch 2 : § 1, § 2, § 3, § 4, Ex5.

Ch 3 : T2.

11. *Représentation de classes d'espaces topologiques.*

Ch 1 : § 1.3, § 4.

Ch 2 : P9.

Ch 3 : T6, T14, T16, T17.

12. *Problèmes de plongements. Exemples.*

Ch 1 : L7, T8, T9, T53, T54, Ex.20.

Ch 2 : P9.

Ch 3 : T23.

13. *Les différentes notions de séparation.*

Ch 1 : §1, Ex.1-2.

Ch 2 : § 3.6.

14. *Exemples d'utilisation de la séparation.*

Ch 1 : L7, T8, T9, § 1.4, Ex.2.

Ch 3 : P30.

15. *Les recouvrements et les notions qui en dérivent. Applications et exemples.*

Ch 1 : § 6.1, T81, T82, Ex.11.

Ch 2 : T6, L7, T8, P9.

Ch 3 : L5, T6.

16. *Exemples d'espaces connexes*

Ch 1 : CE5, P83.

Ch 2 : § 1, § 2, CE11, Ex.5-9, Ex.12.

Ch 3 : T2, T6.

17. *Exemples d'espaces non connexes. Applications à l'analyse.*

Ch 1 : CE88.

Ch 2 : § 3, § 4, Ex.6-8, Ex.10-11.

Ch 3 : § 2, § 3.

18. *Connexité. Applications.*

Ch 1 : P83, L84, P85, C86, T87.

Ch 2 : § 1, § 2, § 3.6.

Ch 3 : § 1.

19. *Comparaison des différentes notions de connexité.*
Ch 3 : § 1.

20. *Exemples d'espaces compacts.*
Ch 1 : CE48, § 7.
Ch 2 : § 1, § 2, § 3, § 5.4.3.
Ch 3 : § 1.

21. *Applications à l'analyse de la notion de compacité.*
Ch 1 : P40, CE48, § 7, Ex.7-9, Ex.22.
Ch 2 : § 1, § 2, § 3.
Ch 3 : § 1, T14.

22. *Comparaison espaces compacts-espaces complets.*
Ch 1 : P75, T77.
Ch 2 : L7.

23. *Exemples d'espaces complets.*
Ch 1 : T51, § 5.
Ch 2 : L5.

24. *Utilisation en analyse d'espaces complets. Exemples.*
Ch 1 : T51, T53, § 5.
Ch 2 : L7.

25. *Exemples d'applications du théorème de Baire.*
Ch 1 : T51, § 5.2, CE69.

26. *Propriétés typiques des fonctions.*
Ch 1 : E67.

27. *Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.*
Ch 1 : CE6, CE29, P42, § 3.2, Ex.7-8.
Ch 2 : § 4.

28. *Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.*
Ch 1 : § 2, Ex. 14-17.

29. *Exemples d'utilisation des suites.*
Ch 1 : P30, § 3.2, L76, T77, T78, T80, T81, T82, T83.

30. *Espaces séparables ou non. Exemples.*
Ch 1 : § 2.2, § 3.2, Ex.4, Ex.14.
Ch 2 : § 4.

31. *Problèmes de prolongement de fonctions. Exemples.*
 Ch 1 : § 2.3, T68; Applications : T77, T78, T80, T81, T83.
 Ch 2 : T1.

32. *La convergence des suites. Applications.*
 Ch 1 : § 3.2, Ex.19.

33. *Espaces topologiques métrisables.*
 Ch 1 : § 6.2.

34. *Exemples d'utilisation du principe des distances géodésiques.*
 Ch 1 : T16, T71, L72, T73.

35. *Topologie de la droite numérique* $\mathbb{R}$ *, et sous-ensembles remarquables de* $\mathbb{R}$.
 Ch 1 : CE52, Ex.19.
 Ch 2 : § 3.

36. *Graphes de fonctions.*
 Ch 1 : E19, Pi20, E21, E22, Ex.12.
 Ch 3 : § 1, L32.

37. *Exemples d'équations fonctionnelles.*
 Ch 1 : E22.

38. *Exemples d'utilisation des probabilités en analyse.*
 Ch 3 : § 1.3.

W

Y

Z

A

C

G

M

N

Q

R

S

U

V

Z

LES CAHIERS DE FONTENAY

n. 1	PHILOSOPHIE (Déc. 1975) Etude d'épistémologie - Képler - Galilée - Leibniz Newton - Bachelard	17,65 F
n. 2	PHYSIQUE - CHIMIE (Mars 1976) (épuisé) Compte-rendu des journées de Septembre 75 de Fontenay aux Roses consacrées à la cinétique	17,65 F
n. 3	PHILOSOPHIE (Juin 1976) Le Discours Philosophique des Lycéens	17,65 F
n. 4	GÉOGRAPHIE (Sept. 1976) La conception de la géographie humaine chez Vidal de la Blache et les géographes et l'espace	17,65 F
n. 5	PHILOSOPHIE (Déc. 1976) Articles consacrés à la vie de Condorcet	17,65 F
n. 6	LANGUES (Mars 1977) Méthode d'apprentissage de la langue et des langues	17,65 F
n. 7	GÉOGRAPHIE (Juin 1977) Les Exploitations Agricoles	17,65 F
n. 8	PHYSIQUE (Sept. 1977) Les Relativités	17,65 F
n. 9/10	INTERDISCIPLINAIRE (Mars 1978) Des Mythes	29,40 F
n. 11/12	INTERDISCIPLINAIRE (Sept. 1978) La Sorcellerie	29,40 F
n. 13/14/15	INTERDISCIPLINAIRE (Juin 1979) Fragments	47,05 F
n. 16	PHYSIQUE (Sept. 1979) Mélanges Didactiques	17,65 F
n. 17	INTERDISCIPLINAIRE (Déc. 1979) Aristophane : «Les Femmes et la Cité»	23,50 F
n. 18	PHYSIQUE (Mars 1980) De Carnot à Prigogine	23,50 F

n. 19 à 22	HISTOIRE DE LA PHILOSOPHIE (Mars 1981) Néoplatonisme, Mélanges offerts à Jean Trouillard	76,45 F
n. 23	INTERDISCIPLINAIRE (Juin 1981) Ecrit/Oral	23,50 F
n. 24/25	INTERDISCIPLINAIRE (Déc. 1981) Représentations du Peuple	29,40 F
n. 26/27	LITTÉRATURE LATINO-AMÉRICAINE (Juin 1982) Actes du Colloque sur l'œuvre de Puig et Vargas Llosa - Avril 1982	58,80 F
n. 28/29	LITTÉRATURE NORD-AMÉRICAINE (Déc. 1982) Fictions américaines : nouvelles voix, nouveaux regards	58,80 F
n. 30/31	INTERDISCIPLINAIRE (Juin 1983) Villes/Pouvoirs	58,80 F
n. 32	INTERDISCIPLINAIRE (Sept. 1983) La correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat La géométrie du hasard ou le début du calcul des probabilités.	29,40 F
n. 33	SCIENCES HUMAINES (Déc. 1983) Alchimie mystique et traditions populaires	29,40 F
n. 34	INTERDISCIPLINAIRE (Mars 84) L'Oralité	29,40 F
n. 35	GEOGRAPHIE (Juin 1984) La Géographie Rurale en France 1980/1984	29,40 F
n 36/37/38	PHILOSOPHIE (Mars 1985) Spinoza entre Lumières et Romantisme	100 F

A paraître

n. 39/40	INTERDISCIPLINAIRE (Sept. 1985) Anthropologie et Humanisme

LES CAHIERS DE FONTENAY

«sont en vente à ...»

P A R I S	
Librairie ATTICA	34, rue des Ecoles (5e)
LIB'5 Librairie Générale et Universitaire	5, rue Malebranche (5e)
Librairie VRIN	Place de la Sorbonne (5e)
Librairie AUTREMENT DIT	73, Bd Saint-Michel (5e)
BOUTIQUE DES CAHIERS	8, rue de la Sorbonne (5e)
P.U.F.	49, Bd Saint-Michel (5e)
Librairie LE DIVAN	37, rue Bonaparte (6e)
Librairie LA PROCURE	3, rue de Mézières (6e)
F N A C	136, rue de Rennes (6e)
Librairie Editions Hispano-Américaines	26, rue Monsieur le Prince (6e)
Librairie NOUVEAU QUARTIER LATIN	78, Bd Saint-Michel (6e)
Librairie Guy BOUSSAC	46, rue de Babylone (7e)
Librairie LA HUNE	170, Bd Saint-Germain (8e)
Librairie A.G. NIZET	3 bis, Place de la Sorbonne (5e)
Librairie DU REGARD	41, rue du Cherche Midi (6e)
D I J O N	
Librairie FLAMMARION-FACULTES	27, rue de Mirande (21000)
L I L L E	
Librairie L'AGE D'HOMME	27, rue de la Monnaie (59000)
Librairie GIARD	2, rue Royal (59000)
M O N T P E L L I E R	
Librairie SAURAMPS	Le Triangle, Rue Jeu de Ballon (34000)
REIMS	
Librairie LA BELLE IMAGE	46, rue Chanzy (51100)
S T R A S B O U R G	
Librairie LES IDEES ET LES ARTS	Nicole Katz-Place Brant (67000)

Ouvrage «Hors Collection» des Cahiers de Fontenay

C.P.P.A.P. n° 57861 - I.S.S.N. 0395-8418 - Dépôt Légal : 2/85

Imp. E.N.S. Fontenay aux Roses