Les fonctions dans l'enseignement secondaire

Épisode 2

université PARIS-SACLAY
Département de Mathématiques d'Orsay

Première

Le programme : dérivation

Contenus

Point de vue local

- Taux de variation, sécante à la courbe représentative d'une fonction en un point donné ;
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, notation $f'(a)$;
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, pente, équation.

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée ;
- Fonctions dérivées des fonctions carré, cube, racine carrée et inverse ;
- Opérations sur les fonctions dérivables ;
- Dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Le programme : dérivation

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation et la pente d'une sécante ;
- Interpréter le nombre dérivée ;
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente, construire la tangente ;
- Déterminer l'équation de la tangente en un point ;
- Dans des cas simples, calculer le nombre dérivée à partir de la définition ou calculer la dérivée en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables.

Le programme : variations et courbes représentatives des fonctions.

Contenus

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable et le signe de sa fonction dérivée et caractérisation des fonctions constantes ;
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités attendues

- Étudier les variations d'une fonction, déterminer les extrema ;
- Résoudre un problème d'optimisation ;
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité, étudier la position relative de deux courbes ;
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extrema, allure de la courbe.

Le programme : fonction exponentielle

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle via l'équation différentielle $f' = f$;
- Propriétés de l'exponentielle : $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$, nombre e et notation e^x ;
- Pour tout réel a, la suite e^{an} est géométrique ;
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle ;
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$;
- Modéliser une situation par une croissance ou une décroissance exponentielle.

Dérivation

Définition

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si a et b sont deux points de I, alors la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est appelé une *sécante* à la courbe représentative de f.

Définition

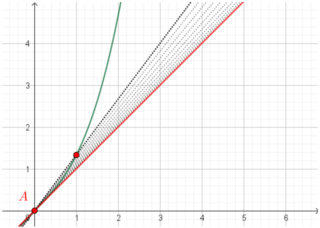
Soit I un intervalle ouvert, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit a un point de I. La pente de la sécante à la courbe représentative de f correspondant à a et $a+h$ est appelée *taux d'accroissement* et est égale à

$$T = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Par exemple, on prend

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$$

avec $a = 1$ et h de 0 à 1 par pas de $0,1$:



h	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
T	1,33	1,27	1,21	1,16	1,12	1,08	1,05	1,03	1,01	1

Dérivation

Définition

Soit I un intervalle ouvert. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable* en un point a de I s'il existe un nombre $f'(a)$ dont le taux d'accroissement s'approche de plus en plus quand h devient de plus en plus petit. Le nombre $f'(a)$ est appelé *nombre dérivée* de f en a.
La droite de pente $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ est appelée *tangente* à la courbe représentative de f en a.

Définition

Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Elle est dite *dérivable* si elle est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Sinon, on appelle *ensemble de dérivabilité* de f l'ensemble des points de son intervalle de définition auxquels elle est dérivable. La fonction

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

est appelée *fonction dérivée* de f.

Propriété

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I. Alors, la tangente à la courbe représentative de f en a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dérivation

Propriété

1. *La fonction carré est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est donnée par*
$$x \longmapsto 2x$$
2. *La fonction cube est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est donnée par*
$$x \longmapsto 3x^2$$
3. *La fonction racine carrée est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et sa dérivée est donnée par*
$$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
4. *La fonction inverse est dérivable sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$ *et sa dérivée est donnée par*
$$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$$

Dérivation

Propriété

1. *La fonction carré est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est donnée par*

$$x \longmapsto 2x$$

2. *La fonction cube est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est donnée par*

$$x \longmapsto 3x^2$$

3. *La fonction racine carrée est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et sa dérivée est donnée par*

$$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. *La fonction inverse est dérivable sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$ *et sa dérivée est donnée par*

$$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$$

Question : comment faire la preuve pour la fonction racine carrée ?

Dérivation

Propriété

Soient f et g des fonctions dérivables sur un même intervalle ouvert, alors

1. *$f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$.*
2. *$f \times g$ est dérivable et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.*
3. *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}.$$
4. *Si a et b sont des nombres réels fixés, alors la fonction $k : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable et*
$$k'(x) = af'(ax+b).$$

Exercice

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ définie par $f(x)=|x|$.

1. Rappeler la définition de la valeur absolue d'un nombre réel.
2. Soit $x>0$, et h un réel tel que $|h|<\frac{x}{2}$.
   2.1 Calculer
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$
   2.2 En déduire la valeur de $f'(x)$.
3. Calculer de même $f'(x)$ pour $x<0$.
4. Soit $\epsilon>0$, trouver deux réels h_1,h_2 tels que
   - $|h_1|<\epsilon$ et $|h_2|<\epsilon$,
   - $\dfrac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}=1$ et $\dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}=-1$.
5. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Propriété

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Si* f *a un extremum en un point* c *de* $]a,b[$, *alors*

$$f'(c) = 0.$$

Propriété

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Si* f *a un extremum en un point* c *de* $]a,b[$*, alors*

$$f'(c) = 0.$$

Question : Comment démontrer ce résultat ?

Propriété

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Si* f *a un extremum en un point* c *de* $]a,b[$, *alors*

$$f'(c) = 0.$$

Question : Comment démontrer ce résultat ?

Exercice

Déterminer les extrema des fonctions carré et cube sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit f *une fonction dérivable sur un intervalle* $]a,b[$*. Alors,*

- f *est croissante si et seulement si* $f'(x) \geqslant 0$ *pour tout* x *de* $]a,b[$ *;*
- f *est décroissante si et seulement si* $f'(x) \leqslant 0$ *pour tout* x *de* $]a,b[$*.*

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$. Alors,

- *f est croissante si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $]a,b[$;*
- *f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de $]a,b[$.*

Démonstration.

Si f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$. Alors,

- *f est croissante si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $]a,b[$;*
- *f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de $]a,b[$.*

Démonstration.

Si f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

C'est le Théorème des accroissements finis ! □

Propriété

Une fonction est constante si et seulement si elle est dérivable de dérivée nulle.

Exercice

Un industriel souhaite fabriquer des boîtes de 1L, c'est-à-dire 1dm^3 en forme de parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté x et dont la hauteur est h. Son but est d'économiser les matériaux de fabrication en produisant une boîte dont la surface est la plus petite possible. Toutes les longueurs sont comprises en dm.

1. Justifier que

$$h = \frac{1}{x^2}.$$

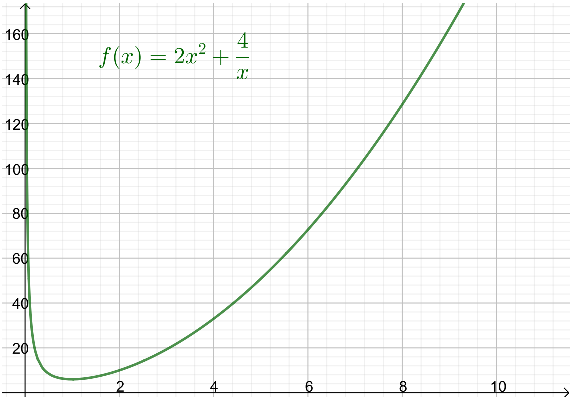
2. En déduire que l'aire totale de la boîte est

$$f(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}.$$

3. Étudier la fonction f et tracer son tableau de variations.

4. En déduire la plus petite aire possible de la boîte.

Variations et courbes représentatives des fonctions



Exercice

On considère trois réels a, b et c avec a non nul, ainsi que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. En fonction du signe de a, dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire la valeur de l'extremum de f.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer que si

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

   alors f ne s'annule jamais.
4. Montrer de même que si $\Delta = 0$, alors f ne s'annule qu'une seule fois et dire pour quelle valeur de x.
5. Que se passe-t-il si $\Delta > 0$?

Fonction exponentielle

On cherche f telle que $f' = f$.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right)$$

Fonction exponentielle

On cherche f telle que $f' = f$.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right)$$

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) = (1+h)f(a).$$

Fonction exponentielle

On cherche f telle que $f' = f$.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right)$$

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) = (1+h)f(a).$$

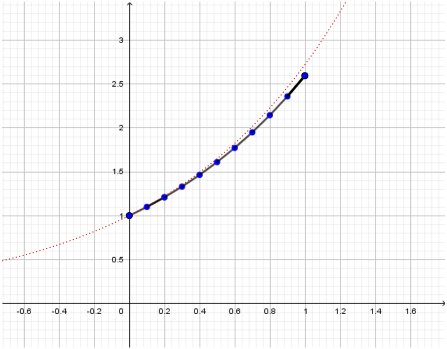
Pour $h = x/n$ et $a = 0$,

$$u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(x).$$

C'est la **méthode d'Euler**.

Fonction exponentielle

Pour $x = 1$ et $n = 10$:



x	1	5	10	20	100
$u_n(x)$	2	$2,49$	$2,59$	$2,65$	$2,7$

Fonction exponentielle

Théorème

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 1$ *et pour tout réel* x*,*

$$f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée $\exp$.

Fonction exponentielle

Théorème

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 1$ *et pour tout réel* x*,*

$$f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée $\exp$.

Question : Comment prouver l'unicité ?

Fonction exponentielle

Théorème

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 1$ *et pour tout réel* x*,*

$$f'(x) = f(x).$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée exp.

Question : Comment prouver l'unicité ?

Propriété

Soient x *et* y *deux nombres réels, alors*

1. $\exp(x) > 0$ *;*

2. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *;*

3. $\exp(x)\exp(-x) = 1$ *;*

Fonction exponentielle

Exercice

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme. Le taux de vasopressine dans le sang est considéré comme normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie. On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{t}{4}} + 2,$$

où $f(t)$ désigne le taux de vasopressine dans le sang (en μg/mL) au bout d'un temps t (en minutes) après le début d'une hémorragie.

1.1 Quel est le taux à $t = 0$?

1.2 Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

1.3 Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a

$$f(t) = 12 \times \frac{1}{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{\frac{t}{4}}} + 2.$$

Exercice

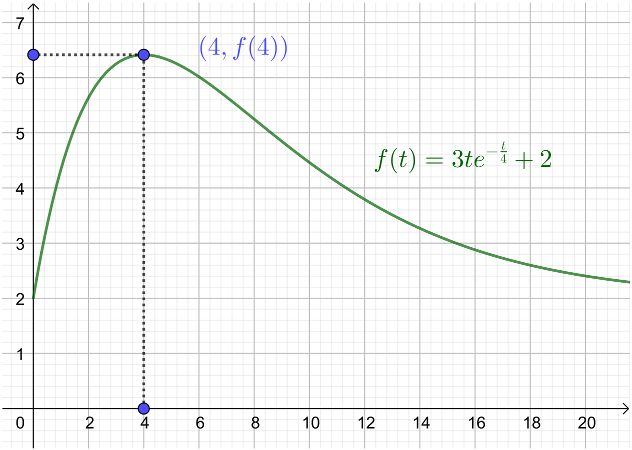
2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et montrer que

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{t}{4}}.$$

3.1 Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations (en incluant la limite en $+\infty$.

3.2 À quel instant le taux de vasopressine dans le sang est-il maximal ? Donner alors une approximation de ce taux à 10^{-2} près.

Fonction exponentielle



Terminale

Le programme : limites de fonctions

Contenus

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$ ou en un point, asymptote parallèle à un axe de coordonnées ;
- Limites des fonctions de référence ;
- Limites et comparaison ;
- Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une fonction en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations, encadrements ou la factorisation du terme prépondérant ;
- Faire un lien entre asymptote parallèle à un axe et limite.

Le programme : compléments sur la dérivation

Contenus

- Composée de deux fonctions, dérivée ;
- Dérivée seconde d'une fonction ;
- Fonction convexe sur un intervalle : position relative de la courbe et des sécantes, équivalence avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f' et la positivité de f'' ;
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée ;
- Calculer la dérivée, étudier les limites et dresser le tableau de variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence ;
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction ;
- Esquisser l'allure de la courbe représentative de f à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'' ;
- Lire sur une représentation graphique de f, f' ou f'' les intervalles où f est convexe, concave ou ses points d'inflexion.

Le programme : continuité des fonctions d'une variable réelle

Contenus

- Fonction continue en un point, sur un intervalle, toute fonction dérivable est continue ;
- Image d'une suite convergente par une fonction continue ;
- Théorème des valeurs intermédiaires, cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- Étudier les solutions d'une équation $f(x) = k$, existence, unicité, encadrement ;
- Pour une fonction f continue d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le programme : fonctions de référence

Contenus

- Fonction logarithme construite comme réciproque de la fonction exponentielle ;
- Propriétés algébriques du logarithme ;
- Limites en 0 et en $+\infty$, variations et courbe représentative ;
- Croissance comparée avec $x \mapsto x^n$.
- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Compétences attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation ou une inéquation ;
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.
- Résoudre une équation de la forme $\cos(x) = a$ ou une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi, \pi]$;
- Dans le cadre de la résolution d'un problème, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques.

Le programme : primitives et équations différentielles

Contenus

- Équation différentielle $y = f$, notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle, différence de deux primitives d'une même fonction ;
- Primitives des fonctions de référence ;
- Équation différentielle $y' = ay$, équation différentielle $y' = ay + b$.

Compétences associées

- Calculer une primitive en utilisant des fonctions de référence et des fonctions de la forme $v \times u' \circ v$;
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$), déterminer une solution particulière constante et en déduire toutes les solutions.

Le programme : calcul intégral

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment comme aire sous la courbe et notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;
- Lien avec les primitives de F ;
- Toute fonction continue sur un segment admet des primitives ;
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue quelconque par les primitives ;
- Linéarité, positivité, relation de Chasles ;
- Valeur moyenne d'une fonction ;
- Intégration par parties.

Le programme : calcul intégral

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne ;
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ou d'une intégration par parties ;
- Majorer ou minorer une intégrale à partir d'une majoration ou d'une minoration de fonction ;
- Calculer l'aire délimitée par deux courbes ;
- Étudier une suite d'intégrales ;
- Interpréter une intégrale dans des contextes issus d'autres disciplines.

Définition (Limite infinie à l'infini)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si f peut prendre des valeurs arbitrairement grandes quand x est grand. Plus précisément, si pour tout $M > 0$, il existe $b \geqslant a$ tel que $f(x) \geqslant M$ pour tout $x \geqslant b$. On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice

Démontrer les assertions suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Question : comment résoudre la question **4.** ?

Limites des fonctions

Définition (Limite finie à l'infini)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$. On dit que f tend vers un réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche arbitrairement près de ℓ quand x devient grand. Plus précisément, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b \geqslant a$ tel que $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$ quand $x \geqslant b$. On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Limites des fonctions

Définition (Limite finie à l'infini)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,+\infty[$. On dit que f tend vers un réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche arbitrairement près de ℓ quand x devient grand. Plus précisément, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b \geqslant a$ tel que $f(x) \in]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[$ quand $x \geqslant b$. On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Exercice

Montrer que

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

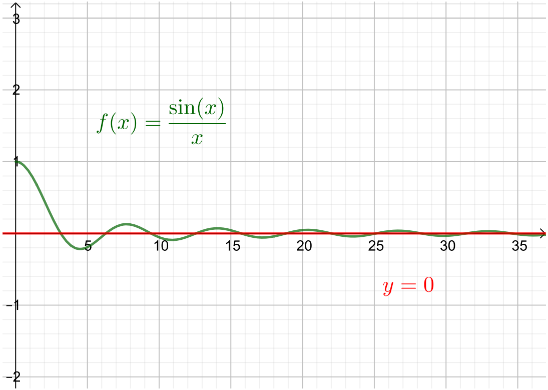
Définition

On dit que la courbe représentative de f admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ si f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$.

Limites des fonctions

Définition

On dit que la courbe représentative de f admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ si f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$.



Définition (Limite infinie en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures si $f(x)$ est arbitrairement grand quand x s'approche de a. Plus précisément, si pour tout $M > 0$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(x) > M$ pour tout $x \in]a,c[$. On note alors

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

Définition

On dit que la courbe représentative de f admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$ si f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures ou inférieures.

Limites des fonctions

Propriété

Limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Forme indéterminée : on **peut** trouver le résultat, mais ce n'est pas automatique !

Propriété

Limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Forme indéterminée : on **peut** trouver le résultat, mais ce n'est pas automatique !

Exercice

On considère deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner les limites en $+\infty$ de f et g.
2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\frac{f}{g} ; \frac{g}{f} ; \frac{f}{f}$$

Limites de fonctions

Théorème (Croissance comparée avec la fonction exponentielle)

La fonction exponentielle croît plus vite en $+\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

De même, la fonction exponentielle décroît plus vite en $-\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

Théorème (Croissance comparée avec la fonction exponentielle)

La fonction exponentielle croît plus vite en $+\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

De même, la fonction exponentielle décroît plus vite en $-\infty$ que toute puissance. Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

Question : Comment démontrer ce résultat ?

Théorème (Théorèmes de comparaison)

Soit f, g et h des fonctions définies sur un même intervalle I, et soit a un point de I.

1. *Si* $\lim_{x\to a} g = +\infty$ *et* $g \leqslant f$, *alors* $\lim_{x\to a} f = +\infty$;
2. *Si* $\lim_{x\to a} h = -\infty$ *et* $f \leqslant h$, *alors* $\lim_{x\to a} f = -\infty$;
3. *Si* $\lim_{x\to a} g = \ell = \lim_{x\to a} h$ *et* $g \leqslant f \leqslant h$, *alors* $\lim_{x\to a} f = \ell$.

La dernière propriété ci-dessus est souvent appelée Théorème des gendarmes.

Exercice

Pour un réel x, on note $\mathbb{E}(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique nombre entier tel que

$$\mathbb{E}(x) \leqslant x < \mathbb{E}(x) + 1.$$

1. Montrer que pour tout réel x,

$$x - 1 < \mathbb{E}(x) \leqslant x.$$

2. En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(x)}{x} = 1.$$

3. Calculer

$$\lim_{x \to 0^+} x\mathbb{E}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $g : J \to \mathbb{R}$ une autre fonction. Si pour tout x de I, $f(x)$ est dans J, alors on définit une fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Elle est appelée *composée* de g et f.

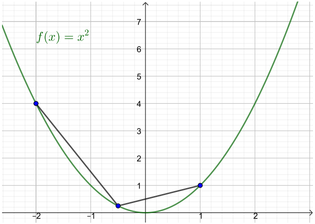
Propriété

Soient f et g deux fonctions dérivables telles que leur composée est bien définie. Alors, $g \circ f$ est dérivable et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x).$$

Définition

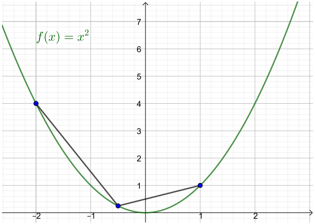
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *convexe* si la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses sécantes.



Compléments sur la dérivation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *convexe* si la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses sécantes.



Propriété

Une fonction est convexe si et seulement si pour tous a, b dans I et tout $0 < \lambda < 1$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Compléments sur la dérivation

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle et dérivable. Alors,

1. *f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante ;*
2. *f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes ;*
3. *Si f' est dérivable, alors f est convexe si et seulement si la dérivée $(f')'$ de f' est positive.*

Compléments sur la dérivation

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle et dérivable. Alors,

1. *f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante ;*
2. *f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes ;*
3. *Si f' est dérivable, alors f est convexe si et seulement si la dérivée $(f')'$ de f' est positive.*

Démonstration.

Nécessite le Théorème des accroissements finis. $\square$

Exercice

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$.

1.1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

1.2. En déduire que pour tous réels a et b strictement positifs,

$$1+\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}.$$

2. On se fixe des nombres réels $x_1, \cdots, x_n$.

2.1. Justifier que

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \frac{e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}}{n}.$$

2.2. En déduire l'*inégalité arithmético-géométrique* : pour tous nombres réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

Fonctions continues

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *continue en un point* a de I si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si f est continue en tout point de I, alors elle est dite *continue sur* I.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un même intervalle I. Alors,

1. *$f + g$ est continue ;*
2. *$f \times g$ est continue ;*
3. *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est continue ;*
4. *Si f et g sont composables, alors $g \circ f$ est continue.*

Fonctions continues

Propriété

Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Fonctions continues

Propriété

Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Question : Démonstration ?

Propriété

Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Question : Démonstration ?

Propriété

Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un point a de I. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a).$$

Exercice

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Pour un réel a, on définit une suite en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $[0, +\infty[$, qu'on notera α.

3. Montrer que si $a \in [0, \alpha]$, alors $u_n \in [0, \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On pose $g(x) = f(x) - x$. Justifier que g est continue et déterminer ses variations.

5. Pour $a = 1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

6. Que se passe-t-il si $a = 2$?

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si l'on est dans l'une des situations suivantes :*

- $f(a) \leqslant 0$ *et* $f(b) \geqslant 0$ *;*
- $f(a) \geqslant 0$ *et* $f(b) \leqslant 0$ *;*

alors il existe $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = 0$.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'on est dans l'une des situations suivantes :

- $f(a) \leqslant 0$ *et* $f(b) \geqslant 0$ *;*
- $f(a) \geqslant 0$ *et* $f(b) \leqslant 0$ *;*

alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Question : Quelle est la démonstration ?

Exercice

On considère la fonction g définie sur $[-10;+\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 500.$$

On donne son tableau de variations :

x	-10		-1		5		$+\infty$
$g(x)$	-950	$\nearrow$	508	$\searrow$	400	$\nearrow$	$+\infty$

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $[-10;+\infty[$.
2. Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) avec une amplitude de $0,01$.

Fonction logarithme

Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors, il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$ et une fonction $g : J \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ existent toutes deux et pour tout x de I et tout y de J,

$$f \circ g(y) = y \text{ et } g \circ f(x) = x.$$

Propriété

Pour tout réel strictement positif y, il existe un unique réel x tel que

$$y = e^x.$$

Définition

La fonction qui a $y > 0$ associe l'unique x tel que $y = e^x$ est appelée *fonction logarithme* et notée

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}.$$

Fonction logarithme

Propriété

Pour tous réels strictement positifs a et b, on a

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;

2. $\ln(1) = 0$;

3. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;

4. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;

5. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Fonction logarithme

Théorème

La fonction logarithme est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Question : Comment trouver ce résultat ?

Propriété

Pour tout entier naturel n, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0.$$

Exercice

Le son se manifeste par des variations de pression de l'air, mesurée en Pascals. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression p supérieure ou égale à $p_0 = 20 \times 10^{-6}$ Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau est égal, en décibels, à

$$f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times p).$$

1. Calculer $f(p_0)$.

2. Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals ? de 0,2 Pascals ? de 0,02 Pascals ?

3. À partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

4. Démontrer que le niveau sonore augmente de 20 quand la pression est multipliée par 10.

Fonction logarithme

Propriété (Croissances comparées)

Pour tout entier naturel n, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0 \textit{ et } \lim_{x\to0^+}x^n\ln(x)=0.$$

Fonction logarithme

Propriété (Croissances comparées)

Pour tout entier naturel n, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0 \textit{ et } \lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x)=0.$$

Question : Comment retrouver ces résultats à partir de ceux pour la fonction exponentielle ?

Fonctions sinus et cosinus

Définition

Soit x un réel et soit M le point du cercle trigonométrique associé à x. On définit le cosinus de x comme étant l'abscisse du point M et le sinus de x comme étant l'ordonnée du point M. On note ces nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Propriété

1. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, c'est-à-dire que pour tout réel x,*

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \textit{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

2. *La fonction cosinus est paire.*

3. *La fonction sinus est impaire.*

Fonctions sinus et cosinus

Théorème

Les fonctions cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\cos' = -\sin \ \textit{et} \ \sin' = \cos .$$

Fonctions sinus et cosinus

Théorème

Les fonctions cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\cos' = -\sin \ \textit{et} \ \sin' = \cos .$$

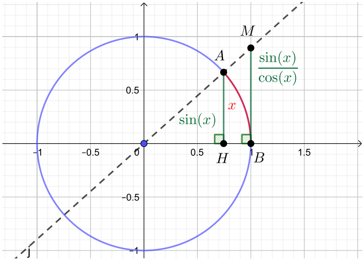
Question : Comment prouver que $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$?

Théorème

Les fonctions cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*. De plus,*

$$\cos' = -\sin \ \textit{et} \ \sin' = \cos.$$

Question : Comment prouver que $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$?



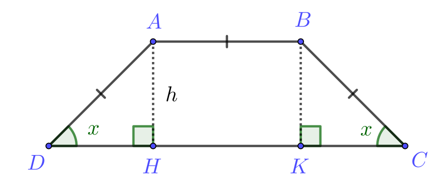
Exercice

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $k\frac{\pi}{2}$ avec k un entier impair et soit M le point correspondant du cercle trigonométrique. On note T le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle trigonométrique au point $(1,0)$ (voir figure ci-dessous). L'ordonnée du point T est noté $\tan(x)$ et appelée *tangente de* x.

1. Montrer que
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$
2. La fonction tan est-elle paire ? Est-elle impaire ?
3. Étudier les variations de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Déterminer la limite de $\tan(x)$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$.
5. En déduire la limite de $\tan(x)$ quand x tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et dresser le tableau de variations de la fonction tan.
6. Étudier la convexité de la fonction tangente puis tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-dessous, où $AD = AB = BC = 1$.
On note x la mesure commune, en radians, des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$.



1. Exprimer la hauteur h du trapèze en fonction de x.

2. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze est donnée, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par

$$\mathscr{A}(x) = \sin(x)(1 + \cos(x)).$$

Exercice

3. Montrer que
$$\mathscr{A}'(x) = 2\cos(x)^2 + \cos(x) - 1.$$

4. Factoriser le trinôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire le signe de $\mathscr{A}'(x)$.

5. Dresser le tableau de variations de $\mathscr{A}$ et en déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze est maximale.

Définition

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction, notée en général y, et qui fait intervenir les dérivées de y.

Définition

On appelle *primitive* de f toute solution de l'équation différentielle $y' = f$. Autrement dit, toute fonction dont la dérivée est égale à f.

Primitives et équations différentielles

Définition

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction, notée en général y, et qui fait intervenir les dérivées de y.

Définition

On appelle *primitive* de f toute solution de l'équation différentielle $y' = f$. Autrement dit, toute fonction dont la dérivée est égale à f.

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f admet une primitive. De plus, si F et G sont deux primitives de f, alors elles diffèrent d'une constante.

Propriété

Soit a un réel non-nul. Alors, les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont les fonctions

$$x \longmapsto Ce^{ax},$$

où C est un nombre réel.

Théorème

Soit a un réel non-nul. Alors, les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a},$$

où C est un nombre réel.

Primitives et équations différentielles

Théorème

Soit a un réel non-nul. Alors, les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a},$$

où C est un nombre réel.

Question : Comment démontrer ce théorème à partir de la propriété précédente ?

Exercice

Lorsqu'un organisme meurt, le Carbone 14 se désintègre progressivement en Carbone 12 non-radioactif. Lors de cette désintégration, l'échantillon perd, par unité de temps, une proportion constante d'atomes. Autrement dit, si on note $N(t)$ le nombre d'atomes de Carbone 14 dans un organisme à l'instant t après sa mort, alors à l'instant $t+h$ la proportion vérifie

$$\frac{N(t+h)}{N(t)} = 1 - \lambda . h$$

1. Montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.

2. En notant N_0 le nombre d'atomes au moment de la mort de l'organisme, exprimer $N(t)$ en fonction de t.

3. Le Carbone 14 a un temps de demi-vie de 5730 ans. En déduire la valeur de λ en année^{-1}.

4. Quelle proportion de Carbone 14 reste-t-il au bout de 70000 ans ?

Calcul intégral

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On appelle *intégrale de f entre a et b* et on note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Calcul intégral

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On appelle *intégrale de f entre a et b* et on note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f.

Calcul intégral

Propriété

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue et positive et soit* F *une primitive de* f. *Alors,*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Calcul intégral

Propriété

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et positive et soit F une primitive de f. Alors,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Définition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et soit F une primitive de f. On pose

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = [F]_a^b.$$

Propriété

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions continues. Alors,*

1. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,;$

2. *Pour tout réel* λ, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,;$

3. *Si* $f(x) \geqslant g(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$*, alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

4. *Si* $c \in [a,b]$*, alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Calcul intégral

Propriété (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $]a,b[$. Alors,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u \times v]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La *valeur moyenne* de f est la quantité

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La *valeur moyenne* de f est la quantité

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème (Inégalité de la moyenne)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in [a,b]$,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Alors,

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout réel x positif, $-x^2 \leqslant -2x+1$.
2. En déduire que $u_n \leqslant \frac{e}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.