Les fonctions dans l'enseignement secondaire

Épisode 1

université PARIS-SACLAY

Département de Mathématiques d'Orsay

Qu'est-ce qu'on fait là ?

- Donner une aperçu des occurrences des fonctions dans les programmes du secondaire ;
- Donner des idées pour les leçons ;
- Consolider les connaissances, notamment concernant les **démonstrations** ;
- Commencer à réfléchir aux exercices.

Quelques généralités

Pourquoi des fonctions ?

- Les fonctions sont omniprésentes :
  - Mathématiques : fonctions de la variable complexe, de plusieurs variables, applications entre ensembles
  - Physique : position, vitesse, énergie, températures
  - Biologie : concentration, population, corrélations
  - Économie : prix, évolution de marché, coûts marginaux
- Les fonctions sont donc importantes pour la poursuite d'études ;
- Les fonctions c'est difficile ! On commence donc au collège, et on consolide progressivement au lycée ;

Un peu de didactique

Trois axes d'étude :

1) Appréhender la notion de fonction (à travers des définitions et des exemples) ;

2) Acquérir un "répertoire" de fonctions importantes ;

3) Développer des outils pour étudier les fonctions et en extraire des informations (dérivation et intégration par exemple).

Plusieurs registres :

- Le registre numérique ;
- Le registre graphique ;
- Le registre schématique ;
- Le registre algébrique.

Plusieurs point de vue :

- Le point de vue ponctuel ;
- Le point de vue local ;
- Le point de vue global.

Mais au fait, c'est quoi une fonction ?

Question : Pour vous, qu'est-ce qu'une fonction au sens mathématique du terme ?

Mais au fait, c'est quoi une fonction ?

Question : Pour vous, qu'est-ce qu'une fonction au sens mathématique du terme ?

Définition

Une *fonction* f d'un ensemble A vers un ensemble B est une partie $f \subset A \times B$ telle que pour tout $a \in A$, il existe au plus un $b \in B$ tel que $(a, b) \in f$. On note généralement

$$f : A \longrightarrow B.$$

Mais au fait, c'est quoi une fonction ?

Question : Pour vous, qu'est-ce qu'une fonction au sens mathématique du terme ?

Définition

Une *fonction* f d'un ensemble A vers un ensemble B est une partie $f \subset A \times B$ telle que pour tout $a \in A$, il existe au plus un $b \in B$ tel que $(a, b) \in f$. On note généralement

$$f : A \longrightarrow B.$$

- On appelle A *l'ensemble de départ* de f,
- On appelle B *l'ensemble d'arrivée* de f,
- Étant donné $a \in A$, on note $f(a) \in B$ l'unique élément tel que $(a, f(a)) \in f$ et on l'appelle *l'image de* a *par* f.
- Étant donné $b \in B$, on appelle *antécédent* de b par f tout élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Collège

Les programmes : cycle 4 (5^e, 4^e, 3^e)

Thème B : « Organisation et gestion des données, fonctions. »

Contenus

- Vocabulaire : variable, fonction, antécédent, image ;
- Différents modes de représentation d'une fonction (expression symbolique, tableau de valeurs, représentation graphique, programme de calcul) ;
- Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$;
- Fonction linéaire, fonction affine.

Les programmes : cycle 4 (5^e, 4^e, 3^e)

Thème B : « Organisation et gestion des données, fonctions. »

Contenus

- Vocabulaire : variable, fonction, antécédent, image ;
- Différents modes de représentation d'une fonction (expression symbolique, tableau de valeurs, représentation graphique, programme de calcul) ;
- Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$;
- Fonction linéaire, fonction affine.

Compétences associées

- Passer d'un mode de représentation d'une fonction à l'autre ;
- Déterminer, à partir d'un mode de représentation, l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction ;
- Représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine ;
- Modéliser un phénomène continu par une fonction ;
- Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire ;
- Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

Exercice

On considère un programme de calcul f qui fonctionne de la façon suivante :

- Choisir un nombre ;
- Élever ce nombre au carré ;
- Retrancher 5 au résultat.

1. Vérifier qu'en choisissant le nombre 4, obtient à la fin le nombre 11.

2. On appelle *antécédent* par f le nombre de départ et *image* par f le nombre d'arrivée. Dire, en justifiant la réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

2.1. L'image de -2 par f est -1.
2.2 Un antécédent de 20 par f est -5.
2.3 Le nombre 20 n'a qu'un seul antécédent par f.
2.4 Le nombre -10 n'a pas d'antécédent par f.

3. Quelle est l'image d'un nombre x quelconque par la fonction f ?

Question : Qu'en pensez-vous ?

Une définition possible

Définition

Une fonction est un **processus** qui à un nombre fait correspondre un autre nombre. Si f est le nom d'une fonction, et x un nombre, alors le nombre auquel f fait correspondre x est noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est *l'image* de x et que x est *un antécédent* de $f(x)$.

Définition

Soit f une fonction. Sa *représentation graphique* est la courbe constituée de tous les points de coordonnées $(x, f(x))$.

Un problème ouvert

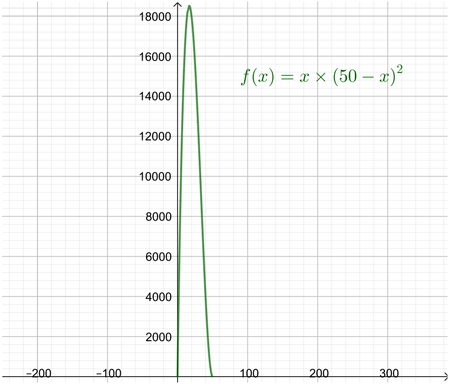
Exercice

On souhaite fabriquer des corbeilles en carton ouvertes à partir d'un carré de 50cm de côté en ôtant quatre carré de côté x à chaque coin du carton. Pour quelle valeur de x le volume de la corbeille sera-t-il maximal ?

Un problème ouvert

Exercice

On souhaite fabriquer des corbeilles en carton ouvertes à partir d'un carré de 50cm de côté en ôtant quatre carré de côté x à chaque coin du carton. Pour quelle valeur de x le volume de la corbeille sera-t-il maximal ?



Fonctions linéaires

Ce sont les premières fonctions de référence !

Définition

Une fonction f est *linéaire* si l'image d'un nombre s'obtient en le multipliant par un nombre fixé. Autrement dit, s'il existe un nombre a tel que pour tout x,

$$f(x) = a \times x.$$

Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction f.

Fonctions linéaires

Ce sont les premières fonctions de référence !

Définition

Une fonction f est *linéaire* si l'image d'un nombre s'obtient en le multipliant par un nombre fixé. Autrement dit, s'il existe un nombre a tel que pour tout x,

$$f(x) = a \times x.$$

Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction f.

Propriété

Si f désigne une fonction linéaire, alors tout tableau de valeurs de f est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est a.

Fonctions linéaires

Ce sont les premières fonctions de référence !

Définition

Une fonction f est *linéaire* si l'image d'un nombre s'obtient en le multipliant par un nombre fixé. Autrement dit, s'il existe un nombre a tel que pour tout x,

$$f(x) = a \times x.$$

Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction f.

Propriété

Si f désigne une fonction linéaire, alors tout tableau de valeurs de f est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité est a.

Théorème

Une fonction f est linéaire si et seulement si sa représentation graphique est une droite passant par l'origine qui n'est pas l'axe des ordonnées.

Question : Comment démontrer ce résultat ?

Fonctions linéaires

Exercice

Collées sur une vitrine, de grandes affiches annoncent une réduction de 10% sur toute une boutique.

1. Soit x le prix d'un produit, exprimer le prix $p(x)$ du même produit après le réduction.

2. À l'aide d'un outil informatique, tracer la représentation graphique de la fonction p.

3. Une jupe coûtait 50€ avant la réduction. Combien coûte-t-elle après ?

4. Un pantalon coûte 27€ avec la réduction. Combien coûtait-il avant ?

Fonctions affines

Définition

Une fonction f est *affine* si l'image d'un nombre s'obtient en le multipliant par un nombre fixé, puis en ajoutant un second nombre fixé. Autrement dit, s'il existe deux nombres a et b tel que pour tout x,

$$f(x) = a \times x + b.$$

Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction f et le nombre b est appelé *l'ordonnée à l'origine* de la fonction f.

Théorème

Une fonction f est affine si et seulement si la représentation graphique de f est une droite qui n'est pas verticale.

Exercice

Dans un magasin, une cartouche d'encre coûte 15€. La même cartouche coûte 10€ sur internet, mais avec des frais de livraison fixes de 40€ quelque soit le nombre de cartouches achetées.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de cartouches achetées	2	5	11	40
Prix à payer en magasin en euros		75		
Prix à payer sur internet		90		

2. On note x le nombre de cartouches achetées.

2.1 On note $P_m(x)$ le prix de x cartouches achetées en magasin. Exprimer $P_m(x)$ en fonction de x.

2.2 On note $P_i(x)$ le prix de x cartouches achetées en magasin. Exprimer $P_i(x)$ en fonction de x.

3. Dans un repère orthogonal dont on choisira soigneusement les unités, tracer les droites (d) et (d') représentatives respectivement des fonctions $x \mapsto 15 \times x$ et $x \mapsto 10 \times x + 40$.

Exercice

6. En utilisant le graphique précédent,

6.1 Déterminer le mode d'achat le plus avantageux pour un lot de 6 cartouches. On laissera apparents les traits de construction.

6.2 Déterminer le mode d'achat permettant d'obtenir le plus de cartouches pour 80€. On laissera apparents les traits de construction.

7. À partir de combien de cartouches le prix sur internet est-il inférieur au prix en magasin ? Justifier la réponse.

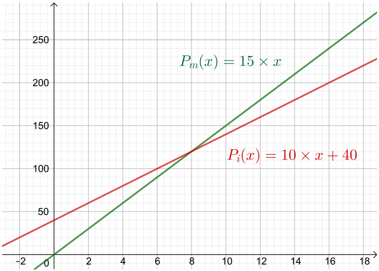
Exercice

6. En utilisant le graphique précédent,

6.1 Déterminer le mode d'achat le plus avantageux pour un lot de 6 cartouches. On laissera apparents les traits de construction.

6.2 Déterminer le mode d'achat permettant d'obtenir le plus de cartouches pour 80€. On laissera apparents les traits de construction.

7. À partir de combien de cartouches le prix sur internet est-il inférieur au prix en magasin ? Justifier la réponse.



Seconde

Le programme

1) Se constituer un répertoire de fonctions de références : fonctions carré, cube, racine carré et inverse.

Contenus

- Définition ;
- Courbe représentative ;

Capacités attendues

- Tableau de variation ;
- Savoir comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement ;
- Savoir résoudre algébriquement ou graphiquement l'équation $f(x) = k$ et l'inéquation $f(x) < k$.

2) Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions.

Contenus

- Fonction définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles ;
- Courbe représentative ;
- Notion de fonction paire et impaire ;

Capacités attendues

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées ;
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques ou d'autres disciplines ;
- Résoudre une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation du type $f(x) < k$ en choisissant la méthode adaptée : graphique, algébrique ou logicielle.
- Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique l'équation $f(x) = g(x)$ ou l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Le programme

3) Étudier les variations et les extrema des fonctions.

Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et tableau de variations ;
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle ;
- Variations des fonctions affines et interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement ;
- Variations des fonctions de référence.

Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations ;
- Déterminer graphiquement les extrema d'une fonction sur un intervalle ;
- Exploiter un outil numérique pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule ;
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Fonctions de référence

Fonctions carré, cube, racine carrée et inverse :

- Ensemble de définition ;
- Image, antécédents ;
- Représentation graphique ;
- Exemples et exercices

Fonctions carré, cube, racine carrée et inverse :

- Ensemble de définition ;
- Image, antécédents ;
- Représentation graphique ;
- Exemples et exercices

Exercice

On considère les trois fonctions $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x,\ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = x^3.$$

1. Déterminer graphiquement la position relative des courbes représentatives de ces fonctions.
2. Démontrer le résultat précédent en utilisant les expressions des fonctions.

Question : Comment résoudre la seconde question ?

Représentation graphique

Définition

La *courbe représentative* d'une fonction f est la courbe d'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. Cette courbe est souvent notée $\mathscr{C}_f$.

Définition

Une fonction f est *paire* si pour tout x dans son ensemble de définition, $-x$ est aussi dans son ensemble de définition et $f(-x) = f(x)$.
Une fonction f est *impaire* si pour tout x dans son ensemble de définition, $-x$ est aussi dans son ensemble de définition et $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

Considérons une fonction f. Alors,

- *f est paire si et seulement si la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;*
- *f est impaire si et seulement si la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine.*

Exercice

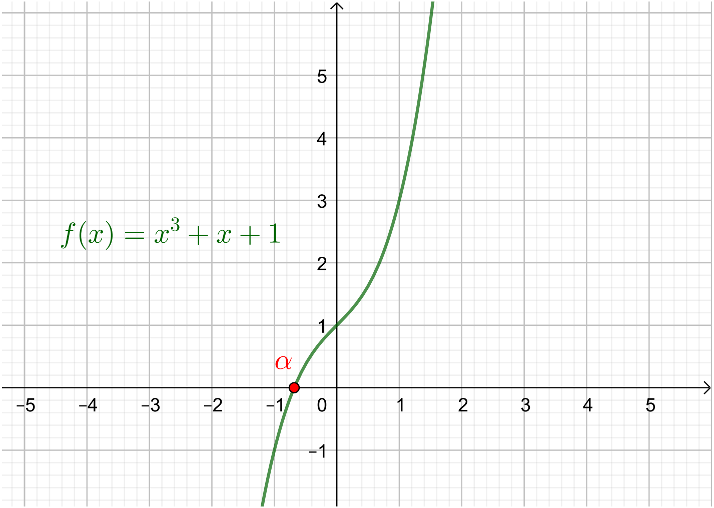
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

1. À l'aide de la courbe représentative de f,expliquer pourquoi f ne s'annule qu'une seule fois en un point noté α. Déterminer graphiquement un entier n tel que $n < \alpha < n+1$.
2. En utilisant un programme, obtenir une valeur approchée à $0,01$ près de α.

Question : comment résoudre la seconde question ?

Représentation graphique



Représentation graphique

Méthode par dichotomie :

```
def f(x):
  return x**3+x+1
A=-1
B=0
E=0.01
while B-A>=E :
  C=(A+B)/2.
  if f(A)*f(C)<=0 :
    B=C
  else :A=C
alpha=round(A,2)
print(alpha)
```

Variations et extrema

Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite

- *Croissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$;
- *Décroissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$;
- *Monotone* sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Variations et extrema

Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite

- *Croissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$;
- *Décroissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$;
- *Monotone* sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Exercice

Pour chaque fonction de référence, déterminer les intervalles où elle est monotone.

Variations et extrema

Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite

- *Croissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$;
- *Décroissante* sur I si quels que soient deux réels x et y dans I tels que $x < y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$;
- *Monotone* sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Exercice

Pour chaque fonction de référence, déterminer les intervalles où elle est monotone.

Question : Comment montrer que la fonction racine carrée est croissante ?

Variations et extrema

Propriété

Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I*. Alors,* f *est croissante si et seulement si tous ses taux d'accroissements sont positifs et elle est décroissante si et seulement si tous ses taux d'accroissement sont négatifs.*

Variations et extrema

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors, f est croissante si et seulement si tous ses taux d'accroissements sont positifs et elle est décroissante si et seulement si tous ses taux d'accroissement sont négatifs.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine, définie par $f(x) = a \times x + b$. Alors,

1. *f est croissante si et seulement si $a \geqslant 0$;*

2. *f est décroissante si et seulement si $a \leqslant 0$;*

3. *f est constante si et seulement si $a = 0$.*

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f admet un maximum en un nombre a de I si pour tout nombre x de I, $f(x) \leqslant f(a)$;

On dit que f admet un minimum en un nombre a de I si pour tout nombre x de I, $f(x) \geqslant f(a)$;

On dit que f admet un extremum en un nombre a de I si elle admet soit un maximum, soit un minimum en a.

Variations et extrema

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un maximum en un nombre a de I si pour tout nombre x de I, $f(x) \leqslant f(a)$;
- On dit que f admet un minimum en un nombre a de I si pour tout nombre x de I, $f(x) \geqslant f(a)$;
- On dit que f admet un extremum en un nombre a de I si elle admet soit un maximum, soit un minimum en a.

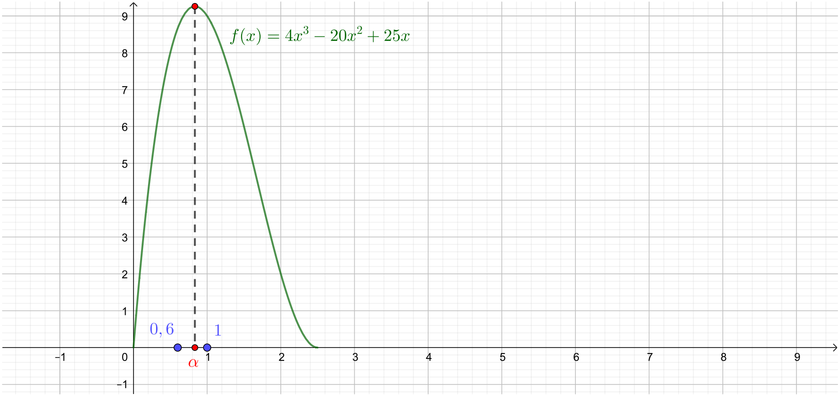
Exercice

On considère la fonction $f : [0, \frac{5}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x.$$

Déterminer une valeur approchée de l'abscisse α de son maximum avec une précision de $0,01$. En déduire une approximation du maximum.

Variations et extrema



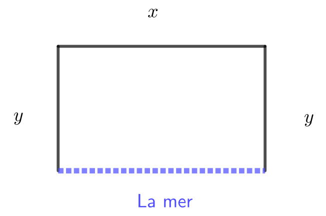
Variations et extrema

Méthode par balayage :

```
def f(x):
  return 4*x**3 - 20*x**2 + 25*x
def max:
alpha=0.6
x=0.6
  while x<1:
    x=x+0.01
    if f(x)>f(alpha):
      alpha=x
return alpha
```

Exercice (La piscine de Saint-Malo)

Au bord d'une plage de Saint-Malo a été construite sur une bordure en pierres afin de délimiter une piscine de mer de forme rectangulaire. La bordure en pierre n'a été construite que sur trois cotés car il existait déjà une délimitation naturelle : la plage. On sait que la superficie de cette piscine est de 3200 m^2. On cherche les valeur x et y des cotés pour lesquelles la longueur de la bordure sera minimale.



Exercice

1. Exprimer la superficie S de la piscine en fonction de x et y.
2. Exprimer la longueur P de la bordure en pierre en fonction de x et y, puis en fonction de x seul.
3. Représenter graphiquement P et formuler une conjecture concernant ses extrema.
4. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x + \frac{6400}{x} - 160.$$
Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$f(x) = \frac{(x-80)^2}{x}.$$
5. En déduire un preuve de la conjecture précédente.

Variations et extrema