

UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI



---

## COURBES ET SURFACES

---

AMAURY FRESLON



Département de Mathématiques d'Orsay

2018 – 2019



---

## AVANT-PROPOS

Ce document a été le support d'un cours intitulé *Courbes et surfaces* donné à l'Université Paris-Sud de 2015 à 2019. La présente version est le fruit de ces quatre années d'élaboration, et nous le rendons publiquement disponible dans l'espoir qu'elle pourra être utile à un enseignant ou à un étudiant. Dans cette perspective, nous avons également inclus les exercices traités dans les TD du cours et leurs corrigés, ainsi qu'un formulaire de rappels sur la trigonométrie circulaire et la trigonométrie hyperbolique qui était distribué à tous les étudiants. Toutes les figures planes ont été réalisées à l'aide de GEOGEBRA. Quant aux surfaces, elles sont issues de la bibliothèque 3D-XPLORE MATH.



---

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iii
CHAPITRE 1 COURBES PLANES	1
1.1 Arcs paramétrés	2
1.1.1 Définition	2
1.1.2 Changement de paramétrage	3
1.2 Branches infinies	5
1.2.1 Asymptotes	5
1.2.2 Branches paraboliques	7
1.3 Étude locale	7
1.3.1 Tangente	7
1.3.2 Points singuliers	10
1.4 Plan d'étude d'une courbe paramétrée	12
1.5 Courbure	12
1.5.1 Cercle osculateur	12
1.5.2 Propriétés de la courbure	14
1.6 Longueur d'une courbe	17
1.6.1 Approximation polygonale	17
1.6.2 Propriétés de la longueur	19
1.6.3 Paramétrage par longueur d'arc	20
1.6.4 Courbes régulières isométriques	21
1.7 Autres types de paramétrisations	23
1.7.1 Paramétrisation polaire	23
1.7.2 Graphes d'une fonction	23
CHAPITRE 2 CONIQUES	27
2.1 Définition par foyer et directrice	27
2.1.1 Définition	27
2.1.2 Classification	29
2.1.3 Coniques à centre	34
2.2 Courbes du second degré	37
2.2.1 Réduction de l'équation quadratique	37
2.2.2 Cas dégénérés	40
2.2.3 Cas non-dégénérés	40
2.2.4 Discriminant et trace	41
2.3 Sections coniques	42
2.3.1 Équation	43
2.3.2 Classification	45
2.3.3 Foyer et directrice	46

CHAPITRE 3 SURFACES	<b>47</b>
3.1 Nappes paramétrées	47
3.1.1 Rappels sur les fonctions de deux variables	47
3.1.2 Définition	49
3.1.3 Changement de paramétrage	50
3.2 Étude locale	50
3.2.1 Plan tangent	50
3.2.2 Vecteur normal	53
3.2.3 Nappes régulières	54
3.3 Courbes sur une surface	54
3.3.1 Vecteurs tangents	55
3.3.2 Courbure normale	56
3.4 Courbure	58
3.4.1 Courbure de Gauss	58
3.4.2 Position par rapport au plan tangent	61
3.4.3 Exemples	62
3.4.4 Courbure et déterminant	63
3.5 Aire d'une surface	65
3.5.1 Approximation par des parallélogrammes	65
3.5.2 Exemples	68
3.5.3 Lien avec la première forme fondamentale	69
3.6 Surfaces définies par une équation	70
3.6.1 Graphe d'une fonction	70
3.6.2 Paramétrage local	72
3.6.3 Exemple	74
3.7 Variétés différentielles	76
3.7.1 Cartes et atlas	76
3.7.2 Qu'est-ce qu'une surface ?	77
 CHAPITRE 4 EXERCICES	 <b>81</b>
4.1 Courbes planes	81
4.1.1 Études de courbes en coordonnées cartésiennes	81
4.1.2 Études de courbes en coordonnées polaires	82
4.1.3 Exercices complémentaires	82
4.2 Coniques	84
4.2.1 Définitions des coniques	84
4.2.2 Études géométriques de coniques	84
4.2.3 Exercices complémentaires	85
4.3 Surfaces	87
4.3.1 Plan tangent	87
4.3.2 Courbure	87
4.3.3 Exercices complémentaires	88
 CHAPITRE 5 CORRECTION DES EXERCICES	 <b>91</b>
5.1 Courbes planes	91
5.1.1 Études de courbes en coordonnées cartésiennes	91
5.1.2 Études de courbes en coordonnées polaires	96
5.1.3 Exercices complémentaires	99
5.2 Coniques	105
5.2.1 Définitions des coniques	105
5.2.2 Études géométriques de coniques	107
5.2.3 Exercices complémentaires	111
5.3 Surfaces	113
5.3.1 Plan tangent	113
5.3.2 Courbure	116

5.3.3 Exercices complémentaires . . . . .	120
APPENDICE : FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE	<b>123</b>



---

# CHAPITRE 1

---

## COURBES PLANES

Dans ce premier chapitre nous allons étudier les courbes planes, c'est-à-dire les courbes tracées dans un plan. La géométrie affine est donc le cadre naturel dans lequel nous allons travailler. C'est la raison pour laquelle nous rappelons quelques éléments concernant le plan affine. L'ensemble  $\mathbf{R}^2$  peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 appelé **plan vectoriel**, ses éléments étant alors des **vecteurs**. Cependant, on peut également le voir comme un espace affine appelé **plan affine**. Dans ce cas, les éléments de  $\mathbf{R}^2$  sont des **points**. À deux points  $A$  et  $B$  du plan affine est associé un vecteur du plan vectoriel noté  $\overrightarrow{AB}$ . Réciproquement, si  $A$  est un point du plan affine et si  $\vec{u}$  un vecteur du plan vectoriel, il existe un unique point  $B$  du plan affine tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ . On pourra alors écrire

$$B = A + \vec{u}.$$

Pour décrire un vecteur, il suffit d'une *base* de l'espace vectoriel, qui sera constituée de deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  non colinéaires. Pour repérer un point dans le plan affine, nous aurons besoin d'un *repère* constitué d'un point  $O$  et d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  de l'espace vectoriel. Un tel repère sera en général noté  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . Si  $A$  est un point du plan, ses coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $\mathcal{R}$  vérifient

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Dans le plan vectoriel, on dispose de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  pour mesurer les vecteurs. Dans le plan affine, on utilise la distance euclidienne pour mesurer la distance entre deux points selon la formule suivante :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Si un repère orthonormé est fixé, la distance entre le point de coordonnées  $(x_1, y_1)$  et le point de coordonnées  $(x_2, y_2)$  est donc

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation  $\mathbf{R}^2$  pour désigner indifféremment le plan vectoriel et le plan affine (qui sera simplement appelé plan). Si une base et un repère correspondant sont fixés, tout couple de réels peut désigner un vecteur ou un point. Afin d'éviter les confusions, nous noterons en général les vecteurs avec une flèche. De plus, les coordonnées d'un point seront écrites en ligne, par exemple

$$M = (x, y),$$

tandis que les coordonnées d'un vecteur seront écrites en colonnes, par exemple

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

## 1.1 ARCS PARAMÉTRÉS

### 1.1.1 DÉFINITION

Définir mathématiquement ce qu'est une courbe n'est pas évident. Il s'agit bien sûr d'une partie du plan, mais comment décrire le fait qu'elle un objet "à une dimension"? Comment caractériser son caractère lisse ou régulier? L'idée fondamentale de la géométrie différentielle qui va nous guider ici est d'aborder les courbes d'un point de vue analytique, en les voyant comme des images de fonctions de  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{R}^2$ . C'est pourquoi la notion fondamentale qui va nous intéresser est la suivante :

DÉFINITION 1.1.1. Un *arc paramétré* de classe  $\mathcal{C}^k$  est une application

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

de classe  $\mathcal{C}^k$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$  désigne le plan affine. L'image de  $\gamma$  est appelée *support* de  $\gamma$  (ou parfois *support géométrique* de  $\gamma$ ). On appelle *courbe* (ou *courbe paramétrée*) du plan de classe  $\mathcal{C}^k$  tout support d'un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^k$ . Étant donnée une courbe  $\mathcal{C}$  du plan, on appelle *paramétrage* de  $\mathcal{C}$  tout arc paramétré dont le support est  $\mathcal{C}$ .

*Remarque 1.1.2.* Cette définition peut s'interpréter "physiquement" de la façon suivante : on considère un point se déplaçant dans le plan au cours du temps. À l'instant  $t$ , sa position est  $\gamma(t)$  et le support de l'arc est la trajectoire complète du point.

*Remarque 1.1.3.* Pour des raisons de simplicité, nous supposons dans la Définition 1.1.1 que l'ensemble de définition de  $\gamma$  est un intervalle. Il pourrait être plus naturel d'autoriser des ensembles de définition plus généraux, par exemple pour étudier l'arc paramétré défini par

$$\gamma : t \mapsto \left( \frac{1}{1-t}, \frac{1}{1+t} \right).$$

Cependant, il suffira dans ce cas d'écrire l'ensemble de définition comme réunion disjointe d'intervalles et d'étudier l'arc paramétré sur chacun de ces intervalles.

**Exemple 1.1.4.** Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  et  $\vec{v}$  un vecteur. On définit un arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  par

$$\gamma(t) = (a, b) + t\vec{v}.$$

Il s'agit d'un arc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont le support est la droite dirigée par  $\vec{v}$  et passant par le point de coordonnées  $(a, b)$ . Notons que  $(a, b) = \gamma(0)$ , donc  $\gamma(t) = \gamma(0) + t\vec{v}$ . Plus généralement, pour tout  $t_0$  dans  $\mathbf{R}$  on a

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (a, b) + t_0\vec{v} + (t - t_0)\vec{v} \\ &= \gamma(t_0) + (t - t_0)\vec{v}. \end{aligned}$$

Fixons un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Alors, un arc paramétré est donné par deux fonctions  $x, y : I \rightarrow \mathbf{R}$  via la décomposition

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

De plus,  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  seront appelées *coordonnées cartésiennes* de  $\gamma$ . Nous utiliserons souvent cette description dans la suite, la plupart du temps en ne précisant pas le repère  $\mathcal{R}$ , qui sera alors le repère canonique de  $\mathbf{R}^2$ , à savoir

$$\mathcal{R}_{\text{can}} = \left( (0, 0), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right) = (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

**Exemple 1.1.5.** Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  et  $R > 0$ . On définit un arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  par

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (a + R \cos(t), b + R \sin(t)) \\ &= (a, b) + R \cos(t)\vec{i} + R \sin(t)\vec{j}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un arc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont le support est le cercle de centre  $(a, b)$  et de rayon  $R$ .

Dans l'exemple précédent, la fonction  $\gamma$  est  $2\pi$ -périodique. Elle repasse donc plusieurs fois par le même point du plan. Il s'agit là d'un phénomène important.

**DÉFINITION 1.1.6.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré. Un point  $M$  du support de  $\gamma$  est dit *multiple* s'il existe  $t, t' \in I$  tels que  $t \neq t'$  et  $\gamma(t) = M = \gamma(t')$ .

Dans l'exemple 1.1.5, tous les points sont multiples mais ceci n'est dû qu'à la périodicité du paramétrage. La restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $[0, 2\pi[$ , elle, est injective et l'arc paramétré  $\gamma|_{[0, 2\pi[}$  n'a donc pas de point multiple. Le cercle est un exemple de courbe simple au sens suivant :

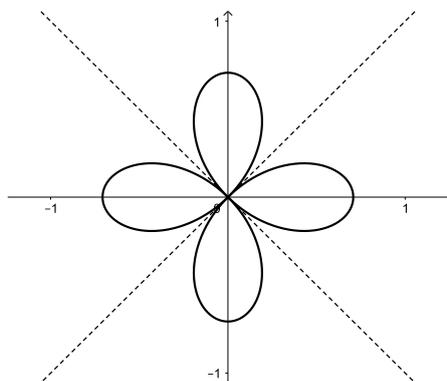
**DÉFINITION 1.1.7.** Un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est dit *simple* si  $\gamma$  est injectif. Une courbe  $\mathcal{C}$  est dite *simple* si elle admet un paramétrage simple.

Il existe des courbes qui ne sont pas simples, c'est-à-dire qui n'admettent pas de paramétrage injectif.

**Exemple 1.1.8.** Soit  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^\infty$  défini par

$$\gamma(t) = (\sin^2(t) \cos(t) - \sin(t) \cos(t)^2, \sin^2(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t)^2).$$

Alors,  $\gamma(\pi/2) = (0, 0) = \gamma(\pi)$ . Cependant, la courbe n'a pas la même "direction" (ce terme peut être rendu rigoureux grâce à la notion de *tangente* que nous introduirons à la Section 1.3.1) quand elle passe par l'origine à ces deux instants et il faut donc passer deux fois par l'origine pour décrire toute la courbe.



Un point multiple qu'on ne peut faire disparaître en changeant le paramétrage est parfois appelé une *auto-intersection* de la courbe. Il n'est pas évident de définir géométriquement l'auto-intersection. Une intuition topologique pourrait être la suivante : un point  $M \in \mathcal{C}$  est une auto-intersection si aucun voisinage de  $M$  dans  $\mathcal{C}$  (pour la topologie induite par  $\mathbf{R}^2$ ) n'est homéomorphe à un intervalle. Du point de vue du paramétrage, une auto-intersection est un point au voisinage duquel  $\gamma$  n'est pas un homéomorphisme local.

### 1.1.2 CHANGEMENT DE PARAMÉTRAGE

Il faut être attentif à ne pas confondre l'arc paramétré, qui est une fonction, et la courbe, qui est une partie du plan. Une courbe donnée admet une infinité de paramétrages et il est parfois utile de pouvoir choisir un paramétrage particulier. Pour cela, nous allons définir une notion de *changement de paramétrage*. Rappelons que si  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbf{R}$ , un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $J$  vers  $I$  est une application  $\varphi : J \rightarrow I$  telle que

- $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- $\varphi$  est bijective.
- $\varphi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**DÉFINITION 1.1.9.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré et soit  $J$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Un *changement de paramétrage* de classe  $\mathcal{C}^k$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme  $\varphi : J \rightarrow I$ . L'arc  $\psi = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbf{R}^2$  est appelé *arc reparamétré* par  $\varphi$ .

Un arc reparamétrisé peut parfois avoir une forme plus simple qui permet alors d'identifier son support.

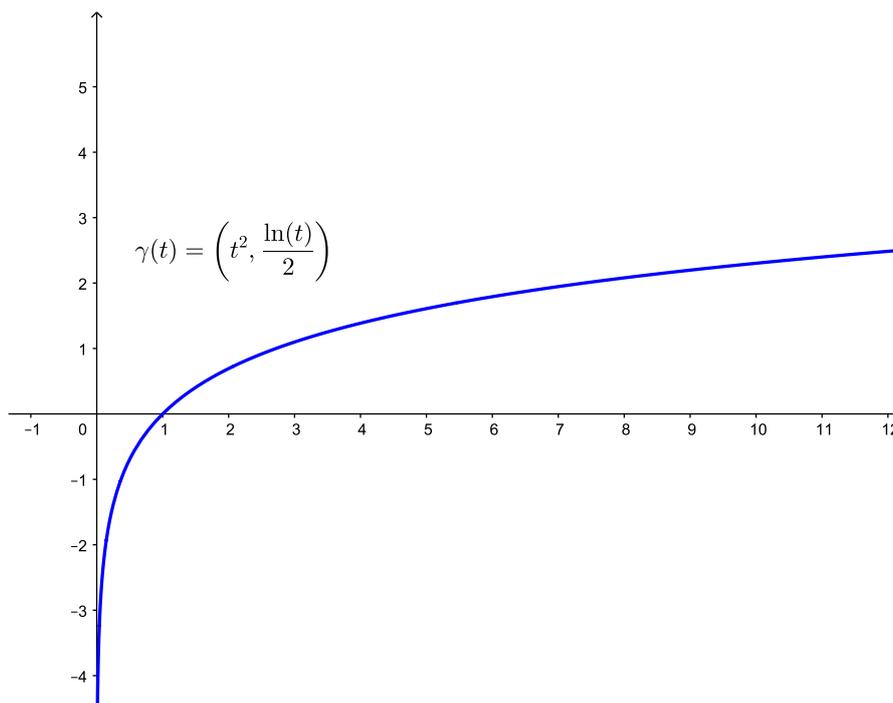
**Exemple 1.1.10.** Considérons l'arc paramétrisé  $\gamma : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini en coordonnées cartésiennes par

$$\gamma(t) = (t^2, 2 \log(t))$$

La fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbf{R}_+^*$  vers  $\mathbf{R}_+^*$  que nous noterons  $\varphi$ . L'arc reparamétrisé par  $\varphi$  est

$$\gamma \circ \varphi(t) = ((\sqrt{t})^2, 2 \log(\sqrt{t})) = (t, \log(t)).$$

On voit ainsi que le support de  $\gamma$  est le graphe de la fonction logarithme.



Dans la suite, nous allons étudier plusieurs propriétés des courbes du plan en utilisant leur paramétrage. Toutefois, pour qu'une propriété ait vraiment un sens géométrique, il ne faut pas qu'elle dépende du paramétrage. C'est pourquoi nous appellerons **géométriques** les propriétés d'un arc paramétrisé qui sont invariantes par changement de paramétrage. Pour conclure cette section, nous donnons un critère qui sera utilisé plus tard pour montrer qu'une fonction est un difféomorphisme.

**Proposition 1.1.11.** Soit  $\varphi : I \rightarrow J$  une application bijective de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que  $\varphi'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Alors,  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

*Proof.* Comme  $\varphi'$  ne s'annule pas sur  $I$ , on sait que  $\varphi^{-1}$  est dérivable et que sa dérivée au point  $s \in J$  est

$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(s)}. \tag{1.1}$$

Nous allons maintenant procéder par récurrence sur  $k$ . Si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $\varphi'$  est continue donc, d'après l'équation (1.1),  $(\varphi^{-1})'$  est continue, ce qui signifie que  $\varphi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Supposons le résultat vrai pour un entier  $k \geq 1$  et considérons  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . En particulier,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  donc par hypothèse de récurrence  $\varphi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Il suit d'après l'Équation (1.1) que  $(\varphi^{-1})'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et donc que  $\varphi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . ■

Signalons aussi que réciproquement, pour tout difféomorphisme  $\varphi : J \rightarrow I$  et tout  $s \in J$ ,  $\varphi'(s) \neq 0$ .

## 1.2 BRANCHES INFINIES

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré. Nous allons dans cette section commencer notre étude de  $\gamma$  par son comportement asymptotique. Nous nous intéressons donc à la façon dont le support de  $\gamma$  se comporte vers l'infini, c'est à dire quand  $t$  tend vers une des extrémités de  $I$ . Dans la suite, les extrémités d'un intervalle peuvent être  $\pm\infty$ .

DÉFINITION 1.2.1. Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré et soit  $t_0$  une extrémité de  $I$ . Le support de l'arc paramétré  $\gamma$  possède une *branche infinie* quand le paramètre tend vers  $t_0$  si

$$\|\gamma(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty.$$

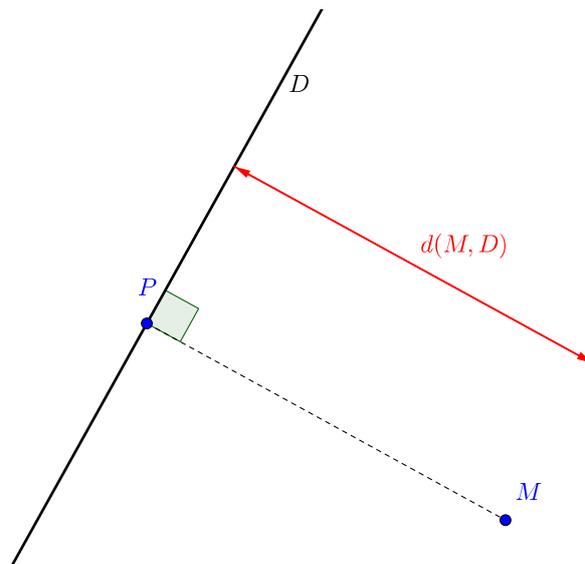
Il existe deux types de branches infinies, que nous allons maintenant étudier.

### 1.2.1 ASYMPTOTES

Une asymptote est une droite fixée dont la branche infinie se rapproche. Pour donner une définition rigoureuse de cet objet, rappelons la notion de distance à une droite dans  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $M$  un point du plan et soit  $D$  une droite. La *distance* de  $M$  à  $D$  est définie comme

$$d(M, D) = d(M, P),$$

où  $P$  est le *projeté orthogonal* de  $M$  sur  $D$ .



DÉFINITION 1.2.2. Soit  $D$  une droite. On dit que le support de  $\gamma$  admet  $D$  comme *asymptote* quand  $t$  tend vers  $t_0$  si

$$d(\gamma(t), D) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0.$$

Cette définition géométrique a l'inconvénient de n'être pas facile à vérifier en pratique. Nous allons donc donner une caractérisation équivalente en termes de coordonnées cartésiennes de  $\gamma$ .

**Proposition 1.2.3.** Soit  $D$  une droite d'équation  $ax + by = c$ . Le support de  $\gamma$  admet  $D$  comme asymptote quand  $t$  tend vers  $t_0$  si et seulement si

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} c.$$

*Proof.* Soit  $\vec{N}$  le vecteur de coordonnées  $(a, b)$ . Si  $M = (x_1, y_1)$  et  $M' = (x_2, y_2)$  sont des points de  $D$ , on a

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{MM'}, \vec{N} \right\rangle &= a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) \\ &= (ax_1 + by_1) - (ax_2 + by_2) \\ &= c - c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\vec{N}$  est un vecteur *normal* à  $D$ . Considérons maintenant le point  $\gamma(t)$  et  $P$  son projeté orthogonal sur  $D$ , dont les coordonnées seront notées  $(\alpha, \beta)$ . Par définition du projeté orthogonal, le vecteur  $\overrightarrow{\gamma(t)P}$  est colinéaire à  $\vec{N}$ , donc

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), P) &= \left\| \overrightarrow{\gamma(t)P} \right\| \\ &= \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{P\gamma(t)}, \vec{N} \right\rangle \right|}{\left\| \vec{N} \right\|} \\ &= \frac{|a(x(t) - \alpha) + b(y(t) - \beta)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Comme  $P$  appartient à  $D$ ,  $a\alpha + b\beta = c$ , d'où

$$d(\gamma(t), P) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |ax(t) + by(t) - c|.$$

Ainsi,  $d(\gamma(t), P)$  tend vers 0 si et seulement si  $|ax(t) + by(t) - c|$  tend vers 0. ■

Ce résultat permet de constater que les asymptotes sont des propriétés **géométriques** au sens où elles sont invariantes par changement de paramétrage. En effet, si  $\varphi : J \rightarrow I$  est un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^k$  et si  $s_0 = \varphi^{-1}(t_0)$ ,  $\psi = \gamma \circ \varphi$  a une branche infinie en  $s_0$  si et seulement si  $\gamma$  à une branche infinie en  $t_0$ . De plus, en posant  $\psi(s) = (x_\psi(s), y_\psi(s))$ , on a

$$\lim_{s \rightarrow s_0} ax_\psi(s) + by_\psi(s) = \lim_{t \rightarrow t_0} ax(t) + by(t).$$

La Proposition 1.2.3 peut se décliner en différents critères en fonction de l'équation de la droite :

- Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = c,$$

la courbe possède une *asymptote horizontale* quand le paramètre tend vers  $t_0$  d'équation  $y = c$ .

- Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = c,$$

la courbe possède une *asymptote verticale* quand le paramètre tend vers  $t_0$  d'équation  $x = c$ .

- Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = c,$$

la courbe possède une *asymptote oblique* quand le paramètre tend vers  $t_0$  d'équation  $y = ax + c$ .

## 1.2.2 BRANCHES PARABOLIQUES

Si une branche infinie n'est pas une asymptote, on dit que c'est une *branche parabolique*. Attention, la terminologie est trompeuse : nous n'affirmons pas que la courbe se rapproche d'un arc de parabole fixé, mais simplement qu'elle ne se comporte pas comme une droite. À nouveau, on peut distinguer plusieurs types de branches paraboliques.

- Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0,$$

la courbe possède une branche parabolique dans la direction  $\vec{i}$ .

- Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty,$$

la courbe possède une branche parabolique dans la direction  $\vec{j}$ .

- Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty,$$

la courbe possède une branche parabolique dans la direction  $y = ax$ .

## 1.3 ÉTUDE LOCALE

Dans cette section, nous allons entamer l'étude dite *locale* de la courbe. Cela signifie que nous allons nous intéresser au comportement de la courbe au voisinage d'un point fixé. Il y a essentiellement deux notions qui entrent en jeu : la tangente et la courbure. Nous allons nous concentrer pour l'instant sur la première, la seconde faisant l'objet de la section 1.5. Rappelons que si  $I$  est un intervalle, un point  $t \in I$  est dit *intérieur* s'il n'est pas une des extrémités de  $I$ .

## 1.3.1 TANGENTE

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $t_0 \in I$  un point intérieur. Intuitivement, la tangente à la courbe en un point est la droite (si elle existe) qui approche le mieux la courbe en ce point. Notre but est de déterminer à quelle condition une telle droite existe et comment la décrire. Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , la tangente est donnée par la fonction dérivée de  $f$ , ou plus précisément par son développement limité à l'ordre 1. Considérant l'arc paramétré  $\gamma$  en coordonnées cartésiennes, nous commençons donc par écrire les développements limités à l'ordre 1 des fonctions  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x(t) &= x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_x(t - t_0) \\ y(t) &= y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_y(t - t_0) \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ . Ces équations permettent d'obtenir un analogue du développement limité pour la fonction  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t_0), y(t_0)) + (t - t_0) \begin{pmatrix} x'(t_0) + \varepsilon_x(t - t_0) \\ y'(t_0) + \varepsilon_y(t - t_0) \end{pmatrix} \\ &= \gamma(t_0) + (t - t_0) \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} + (t - t_0) \begin{pmatrix} \varepsilon_x(t - t_0) \\ \varepsilon_y(t - t_0) \end{pmatrix} \\ &= \gamma(t_0) + (t - t_0) \vec{\gamma}'(t_0) + (t - t_0) \vec{\varepsilon}(t - t_0) \\ &= \psi(t) + (t - t_0) \vec{\varepsilon}(t - t_0) \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\psi(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\vec{\gamma}'(t_0)$ . Comme le suggère la notation, nous considérerons désormais  $\vec{\gamma}'(t_0)$  comme un vecteur, appelé *vecteur tangent* à la courbe au point  $\gamma(t_0)$ . Supposons que  $\vec{\gamma}'(t_0) \neq \vec{0}$ . Alors, d'après l'Exemple 1.1.4, le support de l'arc paramétré  $\psi$  est la droite dirigée par  $\vec{\gamma}'(t_0)$  et passant par  $\gamma(t_0)$ . Comme

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \psi(t)) &= \|(t - t_0)\vec{\varepsilon}(t - t_0)\| \\ &= \sqrt{(t - t_0)^2 \varepsilon_x(t - t_0)^2 + (t - t_0)^2 \varepsilon_y(t - t_0)^2} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0, \end{aligned}$$

on peut dire que cette droite approche le support de  $\gamma$  au voisinage de  $t_0$ .

Cette observation conduit à la définition de la tangente.

**DÉFINITION 1.3.1.** Un point de paramètre  $t_0 \in I$  intérieur à  $I$  est dit *régulier* si  $\vec{\gamma}'(t_0) \neq \vec{0}$ . Dans ce cas, la *tangente* à la courbe en ce point est la droite dirigée par  $\vec{\gamma}'(t_0)$  et passant par  $\gamma(t_0)$ . Un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est *régulier* si tout  $t \in I$  intérieur à  $I$  est régulier.

**Exemple 1.3.2.** Considérons l'arc paramétré  $\gamma : t \mapsto (a, b) + t\vec{v}$  de l'exemple 1.1.4. En notant  $v_x$  et  $v_y$  les coordonnées de  $v$ , on a de façon immédiate

$$\begin{cases} x'(t) = v_x \\ y'(t) = v_y \end{cases}$$

Donc,  $\vec{\gamma}'(t) = \vec{v}$  et le support de  $\gamma$  est sa propre tangente en tout point.

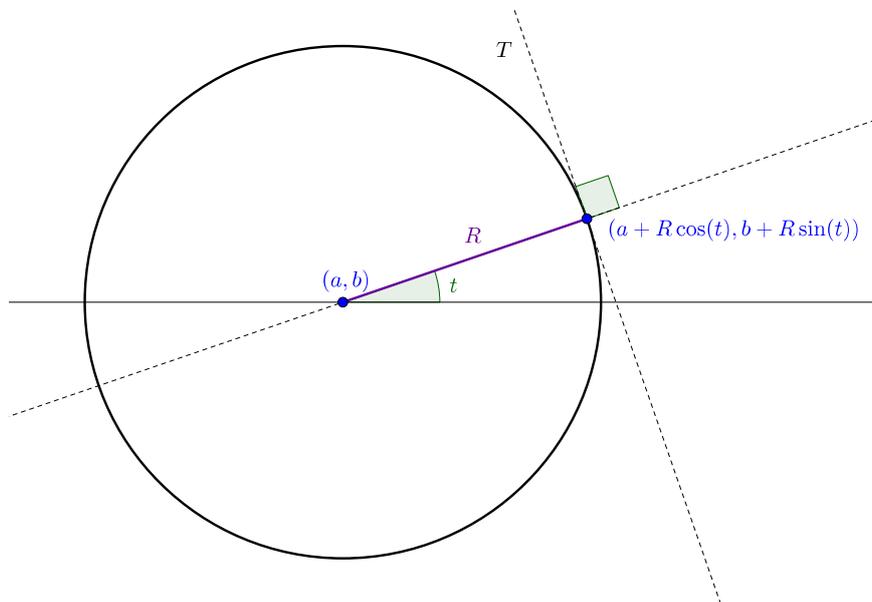
**Exemple 1.3.3.** Considérons l'arc paramétré  $\gamma : t \mapsto (a + R \cos(t), b + R \sin(t))$  de l'exemple 1.1.5. On a

$$\begin{cases} x'(t) = -R \sin(t) \\ y'(t) = R \cos(t) \end{cases}$$

Soit  $C$  le point de coordonnées  $(a, b)$ . Alors, le vecteur  $\overrightarrow{C\gamma(t)}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$ , donc

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{C\gamma(t)}, \vec{\gamma}'(t) \rangle &= -R^2 \cos(t) \sin(t) + R^2 \sin(t) \cos(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur tangent au point  $\gamma(t)$  est orthogonal à  $\overrightarrow{C\gamma(t)}$ , donc la tangente en ce point est bien la tangente usuelle au cercle.



**Exemple 1.3.4.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $\gamma_f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'arc paramétré défini par

$$\gamma_f(t) = (t, f(t)).$$

Le support de  $\gamma_f$  est le *graphe* de  $f$ . On a  $\vec{\gamma}'_f(t) = (1, f'(t))$  et la tangente au point  $\gamma_f(t_0)$  a pour paramétrage

$$\begin{aligned} t &\mapsto (t_0, f(t_0)) + (t - t_0)(1, f'(t_0)) \\ &= (t, f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)). \end{aligned}$$

On retrouve la notion usuelle de tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $t_0$ .

La tangente est a priori un objet de nature **géométrique** et ne devrait par conséquent pas dépendre du paramétrage. Comme expliqué au début de ce chapitre, nous allons donc montrer que si l'on effectue un changement de paramétrage, la tangente reste la même.

**Proposition 1.3.5.** *La tangente est invariante par changement de paramétrage.*

*Proof.* Soit  $\varphi$  un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^k$ , et soit  $\psi = \gamma \circ \varphi$  l'arc reparamétré par  $\varphi$ . Soit  $t_0 \in I$  tel que  $\gamma(t_0)$  est régulier et  $s_0 = \varphi^{-1}(t_0)$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{\psi}'(s_0) &= \varphi'(s_0) \vec{\gamma}' \circ \varphi(s_0) \\ &= \varphi'(s_0) \vec{\gamma}'(t_0). \end{aligned}$$

Un paramétrage de la tangente au point  $\psi(s_0) = \gamma(t_0)$  est donc

$$\begin{aligned} s &\mapsto \psi(s_0) + (s - s_0) \vec{\psi}'(s_0) \\ &= \gamma(t_0) + (\varphi(s) - \varphi(s_0)) \varphi'(s_0) \vec{\gamma}'(t_0). \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est un difféomorphisme,  $\varphi'(s_0) \neq 0$  donc le point  $\psi(s_0)$  est régulier. De plus, la tangente est une droite passant par  $\gamma(t_0)$  et dirigée par  $\vec{\gamma}'(t_0)$ , donc elle est confondue avec la tangente calculée à partir de  $\gamma$ . ■

Nous avons défini la tangente par un point et un vecteur directeur, mais une droite peut également être décrite par une équation cartésienne. Nous allons donc maintenant établir une équation de la tangente.

**Proposition 1.3.6.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $t_0 \in I$  un paramètre d'un point régulier. Alors, la tangente au support de  $\gamma$  au point  $\gamma(t_0)$  a pour équation*

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

*Proof.* Soit  $\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}$ . Alors

$$\langle \vec{u}, \vec{\gamma}'(t_0) \rangle = 0,$$

donc un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  appartient à la tangente à la courbe en  $\gamma(t_0)$  si et seulement si  $\langle \vec{u}, \overrightarrow{M\gamma(t_0)} \rangle = 0$ . Explicitons ce produit scalaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{u}, \overrightarrow{M\gamma(t_0)} \rangle \\ &= -y'(t_0)(x(t_0) - x) + x'(t_0)(y(t_0) - y) \\ &= y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

1.3.2 POINTS SINGULIERS

Quand  $\vec{\gamma}'(t_0)$  s'annule, on dit que le point  $\gamma(t_0)$  est *singulier*. Dans ce cas, le raisonnement précédent pour définir la tangente ne fonctionne plus. Cependant, l'équation de la tangente a été obtenue en utilisant le développement limité de  $\gamma$  à l'ordre 1. Pour étudier le comportement de la courbe au voisinage d'un point singulier, il suffit donc de pousser plus loin le développement limité. Dans la suite, on notera  $p$  le plus petit entier tel que  $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$ . Par analogie avec le cas des points réguliers, on peut poser la définition suivante.

**DÉFINITION 1.3.7.** Soit  $\gamma(t_0)$  un point singulier. La *tangente* au support de  $\gamma$  au point  $\gamma(t_0)$  est la droite passant par  $\gamma(t_0)$  et dirigée par  $\vec{\gamma}^{(p)}(t_0)$ .

Remarquons que dans ce cas un paramétrage de la tangente au point  $\gamma(t_0)$  est donné par

$$t \mapsto \gamma(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!} \vec{\gamma}^{(p)}(t_0)$$

qui est donc une *demi-droite* si  $p$  est pair. Dans ce cas, parler de tangente est incorrect puisqu'on a en fait un point dit de rebroussement<sup>1</sup>. Cette notion de tangente est insuffisante pour décrire la courbe au voisinage du point. Pour préciser le comportement, il nous faut une seconde direction. Notons  $q$  le plus petit entier tel que les vecteurs  $\vec{\gamma}^{(p)}(t_0)$  et  $\vec{\gamma}^{(q)}(t_0)$  ne sont pas colinéaires et notons  $X(t)$  et  $Y(t)$  les coordonnées de  $\gamma(t)$  dans le repère

$$\mathcal{R}_{t_0} = (\gamma(t_0), \vec{\gamma}^{(p)}(t_0), \vec{\gamma}^{(q)}(t_0)).$$

Nous souhaitons étudier les fonctions  $X$  et  $Y$  au voisinage de  $t_0$ .

**Proposition 1.3.8.** On a les développements limités suivants :

$$\begin{cases} X(t) &= \frac{(t - t_0)^p}{p!} + o((t - t_0)^p) \\ Y(t) &= \frac{(t - t_0)^q}{q!} + o((t - t_0)^q) \end{cases}$$

*Proof.* Par hypothèse, le développement limité de  $\gamma$  en  $t_0$  s'écrit

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!} \vec{\gamma}^{(p)}(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^q}{q!} \vec{\gamma}^{(q)}(t_0) + o((t - t_0)^q).$$

Par définition du repère, la seconde coordonnée donne

$$Y(t) = \frac{(t - t_0)^q}{q!} + o((t - t_0)^q).$$

Quant à la première coordonnée, le résultat suit du fait que

$$\frac{(t - t_0)^r}{r!} = o((t - t_0)^p),$$

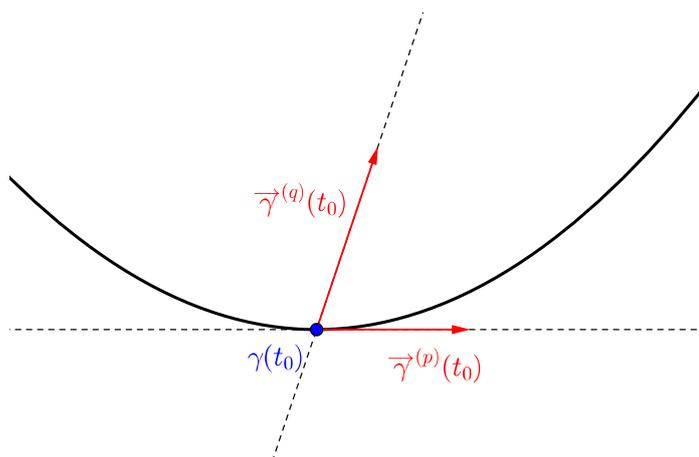
pour tout  $r > p$ . ■

Ce développement limité permet de décrire l'allure de la courbe en fonction des entiers  $p$  et  $q$ .

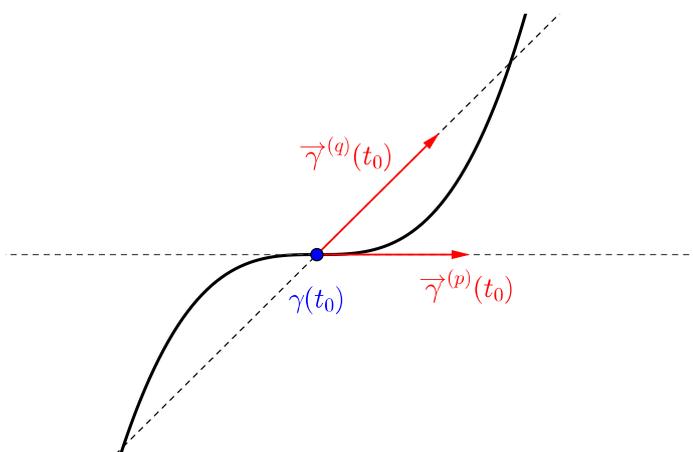
- Si  $p$  est impair et  $q$  pair, on a un *point ordinaire*.

---

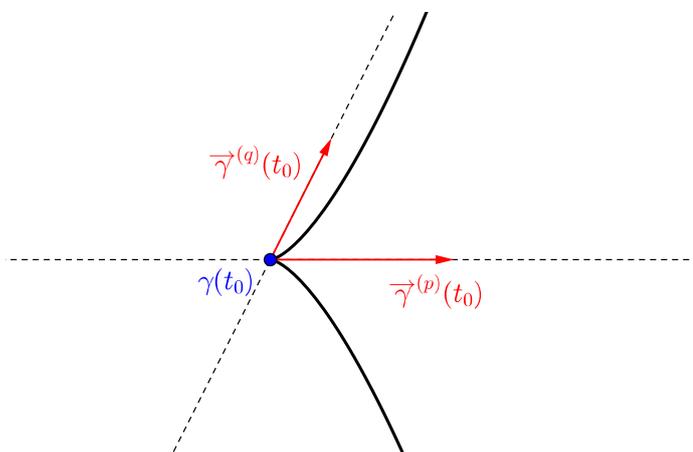
1. On parle parfois dans ce cas de *demi-tangente*.



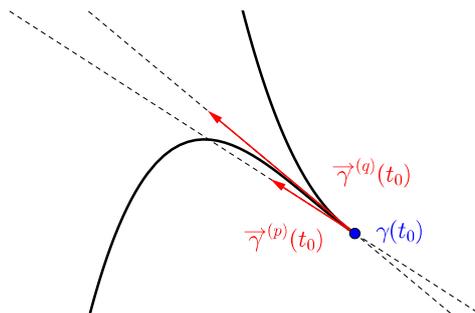
- Si  $p$  est impair et  $q$  impair, on a un *point d'inflexion*.



- Si  $p$  est pair et  $q$  impair, on a un *point de rebroussement de première espèce*.



- Si  $p$  est pair et  $q$  pair, on a un *point de rebroussement de seconde espèce*.



L'étude précédente a aussi un sens quand le point est régulier. Dans ce cas,  $p = 1$  et on ne peut donc pas avoir de point de rebroussement. La parité de  $q$  permet alors de connaître la position de la courbe par rapport à sa tangente. En effet, si  $q$  est pair alors la courbe reste toujours du même côté de sa tangente tandis que si  $q$  est impair, la courbe traverse sa tangente.

## 1.4 PLAN D'ÉTUDE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Nous avons maintenant les outils pour étudier des arcs paramétrés du plan. Une telle étude se fait par étapes suivant le plan suivant :

1. Réduction de l'intervalle d'étude.
2. Etude des branches infinies.
3. Tableau de variation des coordonnées cartésiennes.
4. Etude des points singuliers.
5. Représentation graphique (à main levée). Il peut être utile ici de calculer les coordonnées de certains points particuliers ainsi que les tangentes en ces points.

## 1.5 COURBURE

Au voisinage d'un point régulier, nous savons décrire la courbe en l'approchant par une droite. Cette droite nous donne des informations sur la vitesse et le sens de parcours. Toutefois, si la courbe n'est pas une droite elle tourne dans le plan au cours du temps, et la tangente ne nous donne aucune information sur ce mouvement de rotation. Pour tenter de comprendre ce phénomène, nous allons maintenant essayer d'approcher la courbe par un cercle.

### 1.5.1 CERCLE OSCULATEUR

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré et soit  $t_0 \in I$  tel que  $\gamma(t_0)$  soit un point régulier. On cherche un cercle qui approche la courbe le mieux possible au voisinage de  $\gamma(t_0)$ . Un tel cercle doit passer par le point  $\gamma(t_0)$  et devrait avoir pour tangente en  $\gamma(t_0)$  la tangente à la courbe. Pour exprimer ceci plus précisément, posons

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{\gamma}'(t_0)}{\|\vec{\gamma}'(t_0)\|}$$

qui est un vecteur de norme 1. Ce vecteur dirige la tangente à la courbe au point  $\gamma(t_0)$ , et nous voulons le compléter en un repère du plan adapté à l'étude de la courbe au voisinage de  $\gamma(t_0)$ .

DÉFINITION 1.5.1. La *normale* à la courbe au point  $\gamma(t_0)$  est le vecteur  $\vec{N}(t_0)$  image de  $\vec{T}(t_0)$  par la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$ .

Si le cercle que nous cherchons a pour tangente au point  $\gamma(t_0)$  la tangente à la courbe en ce même point, cela signifie que son centre est sur la droite perpendiculaire à la tangente et passant par  $\gamma(t_0)$ . Autrement dit, nous cherchons un cercle dont le centre est sur la droite dirigée par  $\vec{N}(t_0)$  et passant par  $\gamma(t_0)$ . Ceci suggère un repère du plan dans lequel les calculs seront plus simples.

DÉFINITION 1.5.2. Le *repère de Frenet* au point  $\gamma(t_0)$  est le repère  $(\gamma(t_0), \vec{T}(t_0), \vec{N}(t_0))$ .

Notons  $(X(t), Y(t))$  les coordonnées de  $\gamma(t)$  dans le repère de Frenet au point  $\gamma(t_0)$ . On peut décomposer les vecteurs vitesse et accélération de la courbe dans ce repère de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{\gamma}'(t_0) &= \delta \vec{T}(t_0) \\ \vec{\gamma}''(t_0) &= \alpha \vec{T}(t_0) + \beta \vec{N}(t_0) \end{cases}$$

Comme pour la tangente, les développements limités des coordonnées vont nous mener à l'objet que nous cherchons. On a

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + (t - t_0)X'(t_0) + (t - t_0)^2 X''(t_0) + o((t - t_0)^2) \\ &= \delta(t - t_0) + \alpha(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2) \\ &= \delta(t - t_0) + o(t - t_0). \\ Y(t) &= Y(t_0) + (t - t_0)Y'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} Y''(t_0) + o((t - t_0)^2) \\ &= \beta \frac{(t - t_0)^2}{2} + o((t - t_0)^2). \end{aligned}$$

Soit  $R$  le rayon du cercle que nous cherchons. Son centre doit donc avoir pour coordonnées dans le repère de Frenet  $(0, R)$  ce qui donne comme équation dans ce même repère

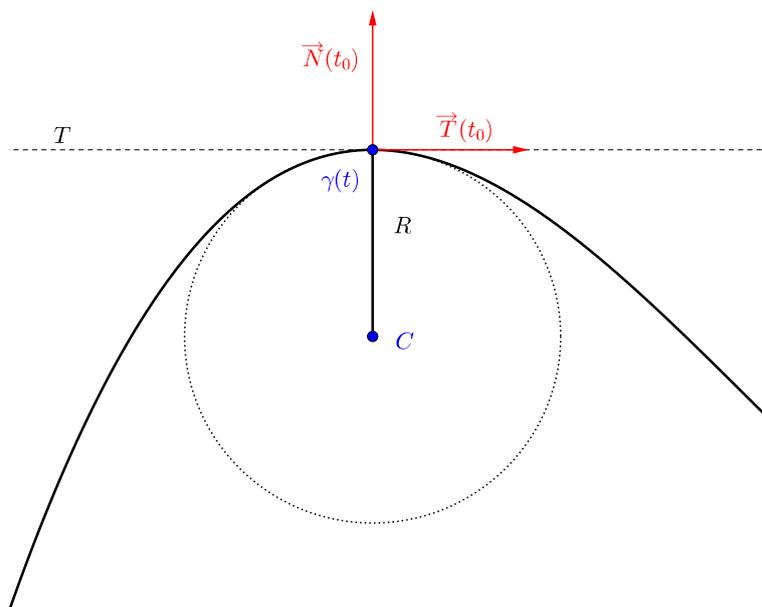
$$X^2 + (Y - R)^2 = R^2.$$

En remplaçant  $X$  et  $Y$  par leurs développements limités on obtient

$$\begin{aligned} X(t)^2 + (Y(t) - R)^2 &= R^2 + \delta^2(t - t_0)^2 - 2R\beta \frac{(t - t_0)^2}{2} + o((t - t_0)^2) \\ &= R^2 + (\delta^2 - \beta R)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2). \end{aligned}$$

Supposons que  $\beta \neq 0$ . Alors, le cercle qui approche le mieux la courbe est visiblement celui de rayon

$$R = \frac{\delta^2}{\beta}.$$



Comme dans le cas de la tangente, nous avons vu apparaître une condition de régularité nécessaire pour pouvoir approcher la courbe par un cercle. Remarquons que la condition  $\beta \neq 0$  est équivalente à la non-colinéarité des vecteurs  $\vec{\gamma}'(t_0)$  et  $\vec{\gamma}''(t_0)$ .

**DÉFINITION 1.5.3.** Un point  $\gamma(t_0)$  est dit *birégulier* si les vecteurs  $\vec{\gamma}'(t_0)$  et  $\vec{\gamma}''(t_0)$  ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, le cercle de centre  $(0, R)$  et de rayon  $|R|$  est appelé *cercle osculateur*<sup>2</sup> à la courbe au point  $\gamma(t_0)$ . Son centre est appelé *centre de courbure* au point  $\gamma(t_0)$  et son rayon est appelé *rayon de courbure* au point  $\gamma(t_0)$ .

## 1.5.2 PROPRIÉTÉS DE LA COURBURE

Le rayon de courbure est l'information que nous cherchions sur la façon dont la courbe tourne. Cependant, nous allons voir qu'il est parfois plus pratique d'étudier l'inverse du rayon de courbure. Pour cela, donnons-lui d'abord un nom.

**DÉFINITION 1.5.4.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^2$  et soit  $t_0 \in I$  le paramètre d'un point régulier. La *courbure*  $c_\gamma(t_0)$  au point  $\gamma(t_0)$  est égale à l'inverse de  $R$  si  $\gamma(t_0)$  est birégulier et à 0 sinon.

Il est possible de donner une formule explicite pour calculer la courbure en fonction du paramétrage. Rappelons qu'étant donné deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbf{R}^2$  de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ , leur *déterminant* est donné par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc.$$

Cette définition utilise les coordonnées des vecteurs dans la base canonique mais son utilité vient du fait que le déterminant peut être calculé dans n'importe quelle base. Rappelons qu'une base orthonormée  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est dite *directe* si  $\vec{v}_2$  est l'image de  $\vec{v}_1$  par la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$ .

**Lemme 1.5.5.** Soit  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  une base orthonormée directe de  $\mathbf{R}^2$  et soient

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \alpha_1 \vec{v}_1 + \beta_1 \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= \alpha_2 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 \end{aligned}$$

2. *Osculo*, -as, -are, -avi, -atum : embrasser.

des vecteurs . Alors,

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2.$$

*Proof.* Notons  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  les coordonnées respectives de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  dans la base canonique. On a alors

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\alpha_1x_1 + \beta_1x_2)(\alpha_2y_1 + \beta_2y_2) - (\alpha_1y_1 + \beta_1y_2)(\alpha_2x_1 + \beta_2x_2).$$

Nous allons étudier les différents termes séparément :

- Les termes multiples de  $x_1y_1$  donnent

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0.$$

- Les termes multiples de  $x_2y_2$  donnent

$$\beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1 = 0.$$

- Les termes multiples de  $x_1y_2$  donnent

$$\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2.$$

- Les termes multiples de  $x_2y_1$  donnent

$$\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) &= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)(x_1y_2 - y_1x_2) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2). \end{aligned}$$

Comme la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est orthonormée et directe, on a  $x_2 = -y_1$  et  $x_1 = y_2$ , d'où

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = x_1^2 + y_1^2 = 1,$$

ce qui conclut la preuve. ■

**Proposition 1.5.6.** Soit  $\gamma(t_0)$  un point régulier, alors

$$c_\gamma(t_0) = \frac{\det(\vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}''(t_0))}{\|\vec{\gamma}'(t_0)\|^3}.$$

*Proof.* Si le point  $\gamma(t_0)$  n'est pas birégulier, le déterminant est nul et  $c_\gamma(t_0) = 0$ . Nous supposons donc désormais que le point  $\gamma(t_0)$  est birégulier et nous nous placerons dans le repère de Frenet. Comme le repère de Frenet est orthonormé et direct, on peut calculer le déterminant avec les coordonnées précédentes d'après le Lemme 1.5.5. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\det(\vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}''(t_0))}{\|\vec{\gamma}'(t_0)\|^3} &= \frac{1}{|\delta|^3} \begin{vmatrix} \delta & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} \\ &= \frac{\beta\delta}{|\delta|^3} \\ &= \frac{\beta}{\delta^2} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Comme pour la tangente, la courbure est une propriété **géométrique** de la courbe et devrait donc être invariante par changement de paramétrage. Ceci n'est vrai qu'au signe près, ce que nous allons maintenant montrer. ■

**Proposition 1.5.7.** *Un changement de paramétrage multiplie la courbure par  $\pm 1$ .*

*Proof.* Soit  $\varphi$  un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme et soit  $\psi$  l'arc reparamétré par  $\varphi$ . Pour  $t_0 \in I$ , posons  $s_0 = \varphi(t_0)$ . Il nous faut d'abord calculer les dérivées de  $\psi$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{\psi}'(s_0) &= \varphi'(s_0) \vec{\gamma}' \circ \varphi(s_0) \\ \vec{\psi}''(s_0) &= \varphi''(s_0) \vec{\gamma}' \circ \varphi(s_0) + (\varphi'(s_0))^2 \vec{\gamma}'' \circ \varphi(s_0).\end{aligned}$$

En utilisant la bilinéarité du déterminant et le fait que le déterminant d'une famille liée est nul, on voit que

$$\begin{aligned}\det(\vec{\psi}'(s_0), \vec{\psi}''(s_0)) &= \varphi'(s_0) \varphi''(s_0) \det(\vec{\gamma}' \circ \varphi(s_0), \vec{\gamma}'' \circ \varphi(s_0)) \\ &+ \varphi'(s_0) (\varphi'(s_0))^2 \det(\vec{\gamma}' \circ \varphi(s_0), \vec{\gamma}'' \circ \varphi(s_0)) \\ &= (\varphi'(s_0))^3 \det(\vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}''(t_0)),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}c_\psi(t_0) &= \frac{\det(\vec{\psi}'(s_0), \vec{\psi}''(s_0))}{\|\vec{\psi}'(s_0)\|^3} \\ &= \frac{(\varphi'(s_0))^3 \det(\vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}''(t_0))}{|\varphi'(s_0)|^3 \|\vec{\gamma}'(t_0)\|^3} \\ &= \left( \frac{\varphi'(s_0)}{|\varphi'(s_0)|} \right)^3 c_\gamma(t_0).\end{aligned}$$

Un changement de paramétrage étant un difféomorphisme, il est strictement monotone, donc sa dérivée est de signe constant. Ainsi on a soit  $c_\psi(t_0) = c_\gamma(t_0)$  en tout point soit  $c_\psi(t_0) = -c_\gamma(t_0)$  en tout point. ■

Le signe de la courbure permet de savoir dans quel sens tourne la courbe. Pour voir cela, plaçons-nous dans le repère de Frenet. Le sens de rotation de la courbe dépend alors de la composante normale de l'accélération, qui est exactement donnée par la courbure.

**Proposition 1.5.8.** *Si le point  $\gamma(t_0)$  est régulier, alors*

$$\langle \vec{\gamma}''(t_0), \vec{N}(t_0) \rangle = c(t_0) \|\vec{\gamma}'(t_0)\|^2.$$

*Proof.* Dans le repère canonique  $\mathcal{R}$ , le vecteur  $\vec{T}(t_0)$  a pour coordonnées

$$\frac{1}{\|\vec{\gamma}'(t_0)\|} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix},$$

donc le vecteur  $\vec{N}(t_0)$  a pour coordonnées

$$\frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle \vec{\gamma}''(t_0), \vec{N}(t_0) \rangle &= \frac{1}{\|\vec{\gamma}'(t_0)\|} (-x''(t_0)y'(t_0) + y''(t_0)x'(t_0)) \\ &= \frac{\det(\vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}''(t_0))}{\|\vec{\gamma}'(t_0)\|} \\ &= c(t_0) \|\vec{\gamma}'(t_0)\|^2.\end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant interpréter le signe de la courbure.

- Si  $c(t_0) > 0$ , la courbe tourne en sens direct.
- Si  $c(t_0) < 0$ , la courbe tourne en sens indirect.

**Exemple 1.5.9.** Soit

$$\gamma : t \mapsto (a + R \cos(t), b + R \sin(t))$$

le cercle de l'exemple 1.1.5. Remarquons que  $\|\vec{\gamma}'(t)\| = R$  pour tout  $t$ . La courbure en un point  $\gamma(t_0)$  est donc donnée par

$$\begin{aligned} c(t_0) &= \frac{1}{R^3} \det \begin{pmatrix} -R \sin(t_0) & -R \cos(t_0) \\ R \cos(t_0) & -R \sin(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{R^2 \sin^2(t_0) + R^2 \cos^2(t_0)}{R^3} \\ &= \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Si on considère à la place le paramétrage

$$\psi : t \mapsto (a + R \sin(t), b + R \cos(t)),$$

qui correspond au changement de paramétrage  $\varphi : t \mapsto \pi/2 - t$  on obtient  $c_\psi(t_0) = -R$ . En effet, dans ce cas le cercle est parcouru en sens indirect.

Nous disposons donc maintenant de deux outils pour étudier une courbe : la tangente et la courbure. Comme nous le verrons avec le Théorème 1.6.13, dans le cas des arcs paramétrés réguliers ces données caractérisent complètement l'arc à isométrie près.

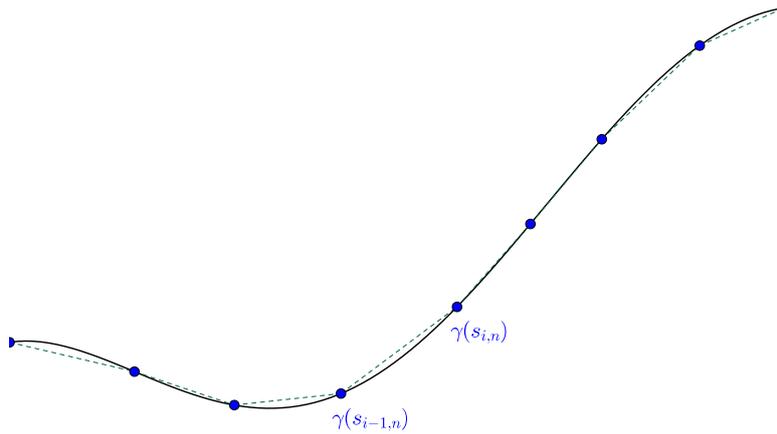
## 1.6 LONGUEUR D'UNE COURBE

Nous allons maintenant voir comment calculer la longueur d'une courbe paramétrée. Pour cela, fixons un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  et deux points  $t_0, t_1 \in I$  avec  $t_0 < t_1$ . On souhaite calculer la longueur de la portion de l'arc comprise entre  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma(t_1)$ .

### 1.6.1 APPROXIMATION POLYGONALE

Dans le plan, on sait calculer en fonction des coordonnées la longueur d'un segment : c'est la distance euclidienne entre ses deux extrémités. On peut donc essayer de définir une notion de longueur en approchant la courbe par des segments, ou plus précisément par une *ligne polygonale*. À mesure que les lignes polygonales seront plus fines, on peut espérer que la longueur de la ligne converge. La limite sera alors notre définition de la longueur de l'arc. Pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $0 \leq k \leq n$ , on pose donc

$$\begin{aligned} s_{k,n} &= t_0 + (t_1 - t_0) \frac{k}{n} \\ L_\gamma^n(t_0, t_1) &= \sum_{i=1}^n d(\gamma(s_{i,n}), \gamma(s_{i-1,n})). \end{aligned}$$



**THÉORÈME 1.6.1** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^2$  et soient  $t_0, t_1 \in I$ . Alors, la suite  $(L_\gamma^n(t_0, t_1))_{n \in \mathbf{N}}$  converge et sa limite est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_\gamma^n(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

*Proof.* Le développement limité de  $\gamma$  au point  $s_{i-1,n}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \gamma(s_{i,n}) &= \gamma(s_{i-1,n}) + (s_{i,n} - s_{i-1,n})\vec{\gamma}'(s_{i-1,n}) + \vec{R}_i(s_{i,n} - s_{i-1,n}) \\ &= \gamma(s_{i-1,n}) + \frac{t_1 - t_0}{n} \vec{\gamma}'(s_{i-1,n}) + \vec{R}_i\left(\frac{t_1 - t_0}{n}\right). \end{aligned}$$

Ce développement limité nous donne l'égalité suivante :

$$d(\gamma(s_{i,n}), \gamma(s_{i-1,n})) = \frac{t_1 - t_0}{n} \|\vec{\gamma}'(s_{i-1,n})\| + \left\| \vec{R}_i\left(\frac{t_1 - t_0}{n}\right) \right\|.$$

En sommant on obtient donc

$$L_\gamma^n(t_0, t_1) = \frac{t_1 - t_0}{n} \sum_{i=1}^n \|\vec{\gamma}'(s_{i-1,n})\| + \sum_{i=1}^n \left\| \vec{R}_i\left(\frac{t_1 - t_0}{n}\right) \right\|$$

Posons  $K = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\vec{\gamma}''(t)\|$ . L'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\left\| \vec{R}_i\left(\frac{t_1 - t_0}{n}\right) \right\| \leq \frac{K}{2} \left(\frac{t_1 - t_0}{n}\right)^2.$$

En sommant ces inégalités on obtient

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{R}_i\left(\frac{t_1 - t_0}{n}\right) \right\| \leq \frac{K(t_1 - t_0)^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part, on sait que

$$\frac{t_1 - t_0}{n} \sum_{i=1}^n \|\vec{\gamma}'(s_{i-1,n})\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

car il s'agit d'une somme de Riemann. On en déduit que  $L_\gamma^n(t_0, t_1)$  converge vers la même limite. ■

*Remarque 1.6.2.* On peut raffiner ce résultat de la façon suivante : pour tout  $n$ , on se donne des points  $t_0 = s_{0,n} < \dots < s_{n,n} = t_1$  de  $I$  tels que

$$\max_{1 \leq i \leq n} (s_{i,n} - s_{i-1,n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^n (s_{i,n} - s_{i-1,n}) d(\gamma(s_{i,n}), \gamma(s_{i-1,n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

### 1.6.2 PROPRIÉTÉS DE LA LONGUEUR

Nous pouvons donc maintenant définir la longueur d'un arc de courbe.

**DÉFINITION 1.6.3.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc et soient  $t_0, t_1 \in I$  tels que  $t_0 < t_1$ . La *longueur* de l'arc parcourue entre  $t_0$  et  $t_1$  est

$$l_\gamma(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

*Remarque 1.6.4.* Il est important de prendre  $t_0 < t_1$ , sans quoi l'intégrale définissant la longueur aura une valeur négative.

Le Théorème 1.6.1 suggère que la longueur d'un arc de courbe est une propriété **géométrique**, c'est-à-dire invariante par changement de paramétrage. C'est ce que nous allons montrer.

**Proposition 1.6.5.** *La longueur d'arc est invariante par changement de paramétrage.*

*Proof.* Soit  $\varphi$  un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^k$ , soit  $\psi$  l'arc reparamétrisé par  $\varphi$  et soient  $s_i = \varphi^{-1}(t_i)$  pour  $i = 0, 1$ . Comme  $\varphi$  est un difféomorphisme, il existe  $\epsilon \in \{-1, +1\}$  tel que pour tout  $s$ ,  $|\varphi'(s)| = \epsilon \varphi'(s)$ . Si  $\epsilon = -1$ ,  $\varphi$  est décroissante donc  $s_0 > s_1$  et il faut intégrer de  $s_1$  à  $s_0$  dans l'expression de la longueur. Sinon, il faut intégrer de  $s_0$  à  $s_1$ . Dans les deux cas,

$$\begin{aligned} l_{\gamma \circ \varphi}(s_0, s_1) &= \epsilon \times \int_{s_0}^{s_1} \|(\overrightarrow{\gamma \circ \varphi})'(s)\| ds \\ &= \epsilon^2 \times \int_{s_0}^{s_1} \|\vec{\gamma}' \circ \varphi(s)\| \varphi'(s) ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \|\vec{\gamma}' \circ \varphi(s)\| \varphi'(s) ds \end{aligned}$$

Le changement de variable  $t = \varphi(s)$  donne alors, en remarquant que  $dt = \varphi'(s) ds$ ,

$$\begin{aligned} l_{\gamma \circ \varphi}(s_0, s_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\ &= l_\gamma(t_0, t_1). \end{aligned}$$

■

Faisons une remarque importante. La quantité  $l_\gamma(t_0, t_1)$  est appelée *longueur d'arc* et non *longueur de courbe*. En effet, il s'agit de la longueur parcourue par le point  $\gamma(t)$  entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . En particulier, si  $\gamma(t)$  a un point multiple on peut parcourir plusieurs fois la courbe avant de s'arrêter. La longueur mesure alors la totalité du trajet parcouru et pas simplement la distance sur la courbe entre le point de départ et le point d'arrivée. Par exemple, en reprenant le paramétrage du cercle de l'exemple 1.1.5, on voit que

$$l_\gamma(0, 4\pi) = 4\pi R$$

qui est strictement supérieur à la longueur totale de la courbe. En effet, quand  $t$  varie de 0 à  $4\pi$  le point  $\gamma(t)$  parcourt deux fois le cercle entier.

Pour calculer la longueur d'un arc de courbe, il peut être pratique de décomposer l'arc en plusieurs morceaux. On peut alors obtenir la longueur de la façon suivante :

**Proposition 1.6.6.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  et soient  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \in I$ . Alors,*

$$l_\gamma(t_0, t_3) = l_\gamma(t_0, t_2) + l_\gamma(t_1, t_3) - l_\gamma(t_1, t_2).$$

*Proof.* Il suffit d'appliquer la relation de Chasles à l'intégrale définissant la longueur. ■

1.6.3 PARAMÉTRAGE PAR LONGUEUR D'ARC

La longueur est un outil important pour l'étude des arcs réguliers, car elle permet d'effectuer des changements de paramétrages ayant des propriétés remarquables. Pour expliquer ceci, considérons d'abord la notion suivante :

**DÉFINITION 1.6.7.** Un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est dit *normal* si  $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$  pour tout  $t \in I$ .

En particulier, un paramétrage normal est régulier. Mais étant donné un arc paramétré régulier, est-il toujours possible de le reparamétriser pour qu'il soit normal ? La réponse est oui et utilise la longueur de la courbe. Remarquons que pour calculer la longueur d'une courbe, il faut connaître une primitive de la fonction  $t \mapsto \|\vec{\gamma}'(t)\|$ , ce qui conduit naturellement à la définition de l'abscisse curviligne.

**DÉFINITION 1.6.8.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ . Une *abscisse curviligne* pour  $\gamma$  est une fonction  $s : I \rightarrow \mathbf{R}$  telle que pour tout  $t \in I$ ,

$$s'(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\|.$$

En particulier, si  $s$  est une abscisse curviligne pour  $\gamma$  alors la longueur d'arc parcouru entre  $t_0$  et  $t_1$  est donnée par

$$l_\gamma(t_0, t_1) = s(t_1) - s(t_0).$$

Il est facile de voir qu'un arc régulier admet toujours des abscisses curvilignes.

**Proposition 1.6.9.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors, il existe une abscisse curviligne pour  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

*Proof.* Le produit scalaire sur  $\mathbf{R}^2$  est une application bilinéaire, donc

$$f : t \mapsto \langle \vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}'(t) \rangle = \|\vec{\gamma}'(t)\|^2$$

est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Comme  $\gamma$  est régulier,  $f$  ne s'annule pas. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}_+^*$ , on en déduit que  $\sqrt{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Elle admet donc une primitive  $s$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , qui est par construction une abscisse curviligne pour  $\gamma$ . ■

Nous pouvons maintenant montrer que tout arc paramétré régulier admet un paramétrage normal.

**THÉORÈME 1.6.10** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe du plan possédant un paramétrage  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  régulier de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors,  $\mathcal{C}$  possède un paramétrage normal de classe  $\mathcal{C}^k$ .

*Proof.* Soit  $s$  une abscisse curviligne de classe  $\mathcal{C}^k$  pour  $\gamma$ . Comme  $s'(t) > 0$  pour tout  $t$ ,  $s$  est strictement monotone donc bijective. De plus, comme  $s'$  ne s'annule pas c'est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme par la proposition 1.1.11. Nous pouvons donc considérer l'arc reparamétré  $\psi = \gamma \circ s^{-1}$ . Le calcul de la dérivée donne

$$\begin{aligned} \vec{\psi}'(t) &= (s^{-1})'(t) \times \vec{\gamma}' \circ s^{-1}(t) \\ &= \frac{1}{s' \circ s^{-1}(t)} \vec{\gamma}' \circ s^{-1}(t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\vec{\psi}'(t)\| &= \frac{\|\vec{\gamma}' \circ s^{-1}(t)\|}{s' \circ s^{-1}(t)} \\ &= \frac{\|\vec{\gamma}' \circ s^{-1}(t)\|}{\|\vec{\gamma}' \circ s^{-1}(t)\|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Avoir un paramétrage normal d'un arc peut être utile pour faire des calculs, car plusieurs formules se simplifient, en particulier concernant la courbure.

**Proposition 1.6.11.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré normal. Alors, en tout point birégulier  $\gamma(t_0)$ , on a*

$$\vec{\gamma}''(t_0) = c_\gamma(t_0)\vec{N}(t_0).$$

*Proof.* Comme  $\gamma$  est régulier, on a  $\langle \vec{\gamma}'(t_0), \vec{\gamma}'(t_0) \rangle = 1$ , ce qui donne en dérivant

$$2 \langle \vec{\gamma}''(t_0), \vec{\gamma}'(t_0) \rangle = 0.$$

Ainsi,  $\vec{\gamma}''(t_0)$  est colinéaire à  $\vec{N}(t_0)$  et on conclut par la proposition 1.5.8. ■

Une application simple de ce résultat est l'identification des courbes dont la courbure est nulle.

**Proposition 1.6.12.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré normal de courbure constante égale à 0. Alors, le support de  $\gamma$  est inclus dans une droite.*

*Proof.* La Proposition 1.6.11 donne  $\vec{\gamma}''(t) = 0$ , donc  $\vec{\gamma}'(t)$  est constante. En notant  $\vec{v}$  sa valeur, on a que pour tout  $t_0 \in I$ ,  $\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\vec{v}$ , dont le support est inclus dans la droite dirigée par  $\vec{v}$  et passant par  $\gamma(t_0)$ . ■

#### 1.6.4 COURBES RÉGULIÈRES ISOMÉTRIQUES

Si  $\mathcal{C}$  est une courbe du plan et si  $F$  est une isométrie, alors  $F(\mathcal{C})$  est une courbe du plan qui doit avoir les mêmes propriétés géométriques que  $\mathcal{C}$ . En effet, si  $\gamma$  est un paramétrage de  $\mathcal{C}$ , alors  $F \circ \gamma$  est un paramétrage de  $F(\mathcal{C})$  ayant en tout point la même courbure que  $\gamma$ . De plus, en tout point, les vecteurs tangents ont même norme. La réciproque de cette observation est vraie : la courbure et la norme des vecteurs tangents caractérisent complètement une courbe à isométrie près, à condition que tous ses points soient réguliers.

**THÉORÈME 1.6.13** Soient  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  des arcs paramétrés de classe  $\mathcal{C}^2$  réguliers tels que pour tout  $t \in I$ ,

- $\|\vec{\gamma}'_1(t)\| = \|\vec{\gamma}'_2(t)\|$ .
- Les courbures aux points  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  sont égales.

Alors, il existe une isométrie directe  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  telle que  $F \circ \gamma_1 = \gamma_2$ .

*Proof.* Les arcs paramétrés  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  étant réguliers, ils admettent un paramétrage normal par le Théorème 1.6.10. Ce paramétrage est donné par une abscisse curviligne, c'est-à-dire une primitive de la norme du vecteur tangent. Comme les vecteurs tangents aux deux arcs ont même norme, on peut prendre la même abscisse curviligne pour reparamétriser les deux courbes. Nous pouvons donc supposer que les arcs sont normaux et qu'en tout point les courbures sont égales. Fixons un point  $t_0 \in I$ , notons  $\alpha$  l'angle orienté  $(\vec{\gamma}'_1(t_0), \vec{\gamma}'_2(t_0))$  et soit  $\rho$  la rotation affine de centre  $\gamma_1(t_0)$  et d'angle  $\alpha$ . Nous allons montrer que l'isométrie que nous cherchons est

$$F : M \mapsto t_{O_{\gamma_2(t_0)}} \circ \rho(M).$$

Posons  $\psi = F \circ \gamma_1$  et remarquons tout d'abord que  $\psi(t_0) = \gamma_2(t_0)$ . De plus, pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} \det(\vec{\psi}'(t), \vec{\psi}''(t)) &= \det(\rho(\vec{\gamma}'_1(t)), \rho(\vec{\gamma}''_1(t))) \\ &= \det(\rho) \det(\vec{\gamma}'_1(t), \vec{\gamma}''_1(t)) \\ &= \det(\vec{\gamma}'_1(t), \vec{\gamma}''_1(t)), \end{aligned}$$

Ceci implique que la courbure  $c_\psi(t)$  au point  $\psi(t)$  vérifie

$$c_\psi(t) = \frac{\det(\vec{\gamma}'_1(t), \vec{\gamma}''_1(t))}{\|\rho \circ \vec{\gamma}'_1(t)\|^3} = c_{\gamma_1}(t).$$

Nous noterons  $c(t)$  ce nombre, qui par hypothèse est aussi égal à  $c_{\gamma_2}(t)$ . Pour montrer que  $\psi = \gamma_2$ , nous allons commencer par comparer leurs vecteurs tangents. Pour cela, nous noterons  $\vec{N}_2(t)$  (respectivement  $\vec{N}_\psi(t)$ ) le vecteur normal au support de  $\gamma_2$  (respectivement au support de  $\psi$ ) au point  $\gamma_2(t)$  (respectivement au point  $\psi(t)$ ). On a alors, pour  $t \in I$  et en utilisant la Proposition 1.6.11.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{\psi}'(t) - \vec{\gamma}'_2(t)\|^2 &= 2 \langle \vec{\psi}'(t) - \vec{\gamma}'_2(t), \vec{\psi}''(t) - \vec{\gamma}''_2(t) \rangle \\ &= 2 \langle \vec{\psi}'(t), \vec{\psi}''(t) \rangle - 2 \langle \vec{\psi}'(t), \vec{\gamma}''_2(t) \rangle \\ &\quad - 2 \langle \vec{\gamma}'_2(t), \vec{\psi}''(t) \rangle + 2 \langle \vec{\gamma}'_2(t), \vec{\gamma}''_2(t) \rangle \\ &= -2 \langle \vec{\psi}'(t), \vec{\gamma}''_2(t) \rangle - 2 \langle \vec{\gamma}'_2(t), \vec{\psi}''(t) \rangle \\ &= -2c(t) \left( \langle \vec{\psi}'(t), \vec{N}_2(t) \rangle + \langle \vec{\gamma}'_2(t), \vec{N}_\psi(t) \rangle \right). \end{aligned}$$

Soit  $r$  la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$ . On a par définition

$$\begin{cases} r(\vec{N}_2(t)) &= -\vec{\gamma}'_2(t) \\ r(\vec{\psi}'(t)) &= \vec{N}_\psi(t) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \vec{\psi}'(t), \vec{N}_2(t) \rangle &= \langle r(\vec{\psi}'(t)), r(\vec{N}_2(t)) \rangle \\ &= -\langle \vec{\gamma}'_2(t), \vec{N}_\psi(t) \rangle \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \|\vec{\psi}'(t) - \vec{\gamma}'_2(t)\|^2 = 0.$$

Nous venons de prouver que  $\|\vec{\psi}'(t) - \vec{\gamma}'_2(t)\|$  est constante, mais nous savons également qu'elle est nulle en  $t_0$  par définition de  $\psi$ , donc

$$\vec{\psi}'(t) = \vec{\gamma}'_2(t)$$

pour tout  $t \in I$ . En notant  $(x_2(t), y_2(t))$  (respectivement  $(x_\psi(t), y_\psi(t))$ ) les coordonnées cartésiennes de  $\gamma_2(t)$  (respectivement de  $\psi(t)$ ), on en déduit qu'il existe  $a, b \in \mathbf{R}$  tels que pour tout  $t \in I$ ,

$$\begin{cases} x_\psi(t) &= a + x_2(t) \\ y_\psi(t) &= b + y_2(t) \end{cases}$$

Par définition de  $\psi$ , on a  $\psi(t_0) = \gamma_2(t_0)$ , donc  $a = b = 0$  et  $\psi = \gamma_2$ . ■

Ce théorème permet par exemple d'identifier les arcs dont la courbure est constante.

**Corollaire 1.6.14.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré normal dont la courbure est constante égale à  $c \neq 0$ . Alors, le support de  $\gamma$  est inclus dans un cercle.*

*Proof.* Supposons  $c > 0$ . Soit  $\psi : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'arc paramétré défini par

$$\psi(t) = \left( \frac{\cos(t)}{|c|}, \frac{\sin(t)}{|c|} \right).$$

Alors,  $\gamma$  et  $\psi$  sont normaux et ont en tout point la même courbure, donc leurs supports sont isométriques. Comme le support de  $\psi$  est inclus dans un cercle, le support de  $\gamma$  est également inclus dans un cercle. Si maintenant  $c < 0$ , il suffit de considérer l'arc paramétré  $\psi : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\psi(t) = \left( \frac{\cos(t)}{|c|}, -\frac{\sin(t)}{|c|} \right).$$

## 1.7 AUTRES TYPES DE PARAMÉTRISATIONS

Jusqu'à maintenant, nous avons toujours écrit les paramétrages en coordonnées cartésiennes. Toutefois, il est parfois plus utile ou plus naturel de les écrire différemment.

### 1.7.1 PARAMÉTRISATION POLAIRE

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé du plan. Il existe une façon de repérer les points n'utilisant pas la description cartésienne usuelle, que nous allons maintenant présenter. On pose, pour  $\theta \in \mathbf{R}$ ,

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}.$$

Le point  $M$  de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  est défini par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho\vec{u}_\theta \\ &= \rho\cos(\theta)\vec{i} + \rho\sin(\theta)\vec{j}.\end{aligned}$$

Il est donc possible de définir un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^k$  par la donnée de deux fonctions  $\rho, \theta : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . Pour étudier un arc paramétré défini en coordonnées polaires, on peut toujours se ramener aux coordonnées cartésiennes de la façon suivante : si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est défini par  $\gamma(t) = \rho(t)\vec{u}_{\theta(t)}$ , alors

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

**Exemple 1.7.1.** Soit  $R > 0$  et soit  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'arc paramétré défini en coordonnées polaires par  $\rho(t) = R$  et  $\theta(t) = t$ . Le support de  $\gamma$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . On peut retrouver la paramétrisation cartésienne de l'exemple 1.1.5 (avec  $a = b = 0$ ) :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}$$

### 1.7.2 GRAPHES D'UNE FONCTION

Un cas particulier d'arc paramétré est donné par le graphe d'une fonction. Un tel graphe peut être défini soit en coordonnées cartésiennes, soit en coordonnées polaires.

#### Coordonnées cartésiennes

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Le *graphe* de  $f$  est le support de l'arc paramétré  $\gamma_f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\gamma_f(t) = (t, f(t)).$$

Le paramétrage  $\gamma_f$  est appelé un *paramétrage par l'abscisse* du graphe de  $f$ . On peut également définir un *paramétrage par l'ordonnée*  $\gamma^f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  par  $\gamma^f(t) = (f(t), t)$ . On peut passer de l'un à l'autre de ces paramétrages par une réflexion par rapport à la première bissectrice des axes. Une courbe du plan n'admet pas nécessairement de paramétrage par l'abscisse. De fait, un tel paramétrage a des propriétés particulières :

**Proposition 1.7.2.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Alors, l'arc paramétré  $\gamma_f$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\gamma_f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .
2.  $\gamma_f$  est régulier et la tangente au point de paramètre  $t_0$  a pour équation

$$y = f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

3. La courbure au point de paramètre  $t_0$  est égale à  $\frac{f''(t_0)}{(1 + f'(t_0)^2)^{3/2}}$ .

*Proof.* 1. Il s'agit simplement de la définition.

2. On a  $\vec{\gamma}'_f(t) = (1, f'(t)) \neq \vec{0}$  pour tout  $t$ , donc tous les points sont réguliers. L'équation de la tangente est une application de la Proposition 1.3.6.

3. On a  $\vec{\gamma}''_f(t_0) = (0, f''(t_0))$ , d'où  $\det(\vec{\gamma}'_f(t_0), \vec{\gamma}''_f(t_0)) = f''(t_0)$ . Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 1.5.6. ■

*Remarque 1.7.3.* En utilisant le *Théorème des fonctions implicites* on peut montrer qu'au voisinage d'un point régulier, une courbe peut toujours être paramétrée par l'abscisse ou par l'ordonnée.

### Coordonnées polaires

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Le *graphe polaire* de  $f$  est le support de l'arc paramétré  $\gamma_f^\circ : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\gamma_f^\circ(t) = f(t)\vec{u}_t.$$

Comme dans le cas cartésien, ce type de paramétrage possède des propriétés particulières.

**Proposition 1.7.4.** *Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Alors, l'arc paramétré  $\gamma_f^\circ$  possède les propriétés suivantes :*

1.  $\gamma_f^\circ$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

2.  $\gamma_f^\circ$  est régulier en tout point distinct de l'origine  $O$  du repère.

3. La courbure au point de paramètre  $t_0$  est égale à  $\frac{f^2(t_0) + 2f'^2(t_0) - f(t_0)f''(t_0)}{(f'^2(t_0) + f^2(t_0))^{3/2}}$ .

*Proof.* 1. Il s'agit simplement de la définition.

2. En passant en coordonnées cartésiennes, on calcule

$$\begin{cases} x'(t) &= f'(t) \cos(t) - f(t) \sin(t) \\ y'(t) &= f'(t) \sin(t) + f(t) \cos(t) \end{cases}$$

Posons, pour  $\theta \in \mathbf{R}$ ,

$$\vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j},$$

de sorte que  $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  soit une base orthonormée de  $\mathbf{R}^2$ . Alors,  $\vec{\gamma}'_f(t) = f'(t)\vec{u}_t + f(t)\vec{v}_t$ . En particulier,  $\vec{\gamma}'_f(t)$  s'annule si et seulement si  $f(t)$  et  $f'(t)$  s'annulent tous les deux, ce qui n'est possible qu'au point  $O$ .

3. En dérivant l'expression  $\vec{\gamma}'_f(t) = f'(t)\vec{u}_t + f(t)\vec{v}_t$  et en remarquant que  $\vec{v}'_t = -\vec{u}_t$ , on obtient

$$\vec{\gamma}''_f(t) = f''(t)\vec{u}_t + f'(t)\vec{v}_t + f'(t)\vec{v}_t - f(t)\vec{u}_t = (f''(t) - f(t))\vec{u}_t + 2f'(t)\vec{v}_t.$$

Le déterminant  $\det(\vec{\gamma}'_f(t), \vec{\gamma}''_f(t))$  est donc égal à

$$2f'(t)f'(t) - (f''(t) - f(t))f(t) = 2f'^2(t) + f^2(t) - f''(t)f(t).$$

On en déduit l'expression de la courbure grâce à la proposition 1.5.6. ■

En général, les paramétrages polaires sont de cette forme, ce qui permet d'étudier la courbe sans repasser par les coordonnées cartésiennes. En effet, les branches infinies s'obtiennent pour les valeurs  $t_0$  aux extrémités de  $I$  telles que

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} +\infty.$$

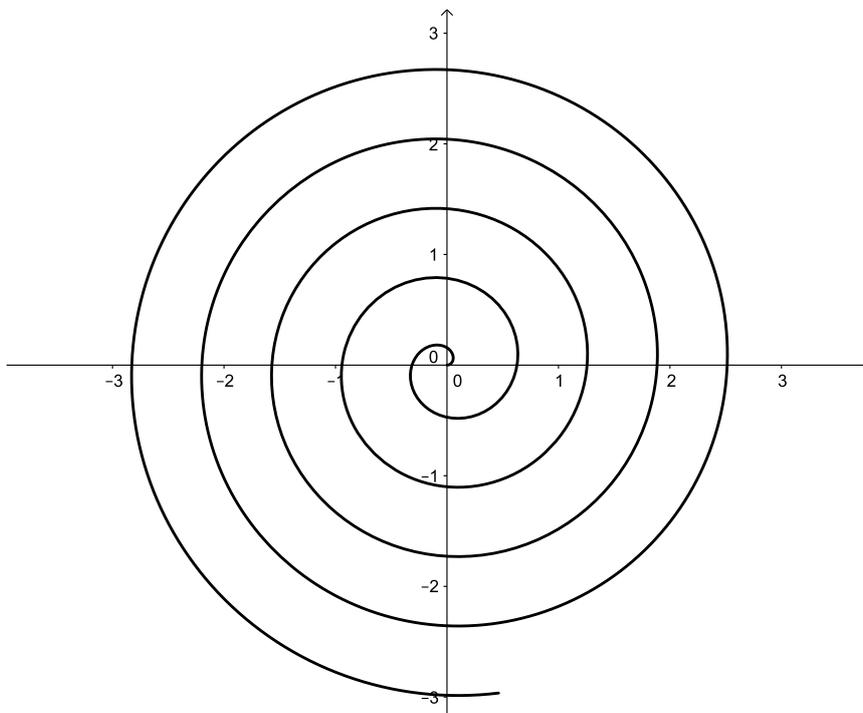
On parle aussi parfois de *branche spirale* quand  $f$  a une limite finie à l'infini. Il suffit ensuite de faire le tableau de variations de  $f$  et de tracer la courbe, en prenant garde au signe de  $f$ .

**Exemple 1.7.5.** Soit  $a \in \mathbf{R}_+^*$ . On appelle *spirale d'Archimède* de paramètre  $a$  l'ensemble des points du plan dont les coordonnées polaires vérifient l'équation

$$\rho = a\theta.$$

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par  $f(t) = at$ . La spirale d'Archimède de paramètre  $a$  est le support de l'arc  $\gamma_f^\circ$ . Comme  $f'(t) = a > 0$ , la courbe s'éloigne à vitesse constante de l'origine en tournant. Sa courbure au point de paramètre  $t$  est égale à

$$\frac{a^2 t^2 + 2a^2}{(a^2 + a^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2 + t^2}{a(1 + t^2)^{3/2}}.$$



Le paramétrage  $\gamma_f^\circ$  peut être appelé un *paramétrage par l'argument* de la courbe  $\mathcal{C}$ . On peut également définir un *paramétrage par le module*

$$\gamma_\circ^f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

par  $\gamma_\circ^f(t) = t\vec{u}_{f(t)}$ . Contrairement au cas cartésien, ce paramétrage ne se déduit pas du paramétrage par le module en appliquant une isométrie du plan. Il a donc des propriétés particulières différentes.

**Proposition 1.7.6.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Alors, l'arc paramétré  $\gamma_\circ^f$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\gamma_\circ^f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .
2.  $\gamma_\circ^f$  est régulier.

3. La courbure au point de paramètre  $t_0$  est égale à  $\frac{2f'(t_0) + t_0 f''(t_0) + t_0^2 f'(t_0)^3}{(1 + t_0^2 f'(t_0)^2)^{3/2}}$ .

*Proof.* 1. Il s'agit simplement de la définition.

2. En dérivant on obtient

$$\vec{\gamma}'_{\circ}(t) = \vec{u}_{f(t)} + t f'(t) \vec{v}_{f(t)}$$

qui ne s'annule jamais.

3. En dérivant une second fois on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}''_{\circ}(t) &= f'(t) \vec{v}_{f(t)} + (f'(t) + t f''(t)) \vec{v}_{f(t)} - t f'(t) \vec{u}_{f(t)} \\ &= -t f'(t) \vec{u}_{f(t)} + (2f'(t) + t f''(t)) \vec{v}_{f(t)} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la courbure grâce à la proposition 1.5.6. ■

---

---

# CHAPITRE 2

---

## CONIQUES

Dans ce chapitre, nous allons étudier une famille particulière de courbes planes appelées *coniques*. Leur nom vient de ce qu'on peut les obtenir en coupant un cône par un plan. Ces courbes apparaissent dans de nombreux contextes en mathématiques et en physique, mais rarement sous la forme d'une intersection. Nous allons donc commencer par étudier une définition plane des coniques. Cette dernière montre que les coniques sont associées à des équations d'une forme relativement simple dite du *second degré*. Nous nous intéresserons donc ensuite à toutes les courbes décrites par de telles équations, ce qui nous permettra dans un dernier temps de relier notre définition originelle des coniques aux intersections de cônes et de plans.

### 2.1 DÉFINITION PAR FOYER ET DIRECTRICE

Comme expliqué précédemment, nous allons débiter par l'étude de la définition dite par *foyer et directrice* des coniques. Si cette définition semble peu naturelle au premier abord, elle a l'avantage d'être une définition *plane*, au sens où elle ne nécessite pas de se placer dans un espace affine de dimension 3, ce qui est le cas si l'on veut décrire une courbe comme intersection d'un cône et d'un plan. L'inconvénient est qu'on ne peut pas obtenir toutes les sections coniques par ce procédé, comme nous le verrons à la Section 2.3. Les données nécessaires pour définir une conique dans ce cadre sont un point  $F$ , une droite  $\mathcal{D}$  ne passant pas par  $F$  et un nombre réel  $e > 0$  que nous supposons donc fixés une fois pour toute.

#### 2.1.1 DÉFINITION

DÉFINITION 2.1.1. La *conique*  $\mathcal{C}$  de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$MF = e \times d(M, \mathcal{D}).$$

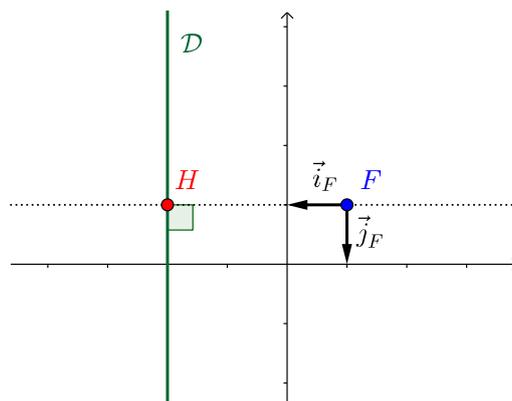
Pour étudier une conique à partir de la définition précédente, il est important de choisir un repère adapté. Le foyer  $F$  est un bon candidat pour l'origine du repère et la direction de la droite  $\mathcal{D}$  devrait donner l'un des axes. Plus précisément, notons  $H$  le projeté orthogonal de  $F$  sur  $\mathcal{D}$  et soit  $\vec{i}_F$  le vecteur défini par

$$\vec{i}_F = \frac{\overrightarrow{FH}}{FH}.$$

L'image  $\vec{j}_F$  de  $\vec{i}_F$  par la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$  dirige la droite  $\mathcal{D}$ . On a donc repère orthonormé

$$\mathcal{R}_F = (F, \vec{i}_F, \vec{j}_F),$$

appelé *repère focal*. Dans ce repère, la droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $x = d$  pour un certain  $d > 0$ .



Il est facile de donner une équation cartésienne et une équation polaire de la conique  $\mathcal{C}$  dans son repère focal.

**THÉORÈME 2.1.2** Soit  $F$  un point du plan,  $\mathcal{D}$  une droite ne passant pas par  $F$  et  $e > 0$ . Les parties suivantes du plan sont identiques :

1. La conique  $\mathcal{C}$  de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e$ .
2. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes dans le repère focal vérifient

$$x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2.$$

3. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées polaires dans le repère focal vérifient

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}.$$

4. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées polaires dans le repère focal vérifient

$$\rho = -\frac{ed}{1 - e \cos(\theta)}.$$

*Proof.*  $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$  Il suffit de remarquer que dans le repère focal,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= MF^2 \\ (x - d)^2 &= d(M, \mathcal{D})^2. \end{aligned}$$

$\boxed{3 \Leftrightarrow 4}$  Il suffit de remarquer que

$$\frac{ed}{1 + e \cos(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta)}.$$

Comme de plus  $\vec{u}_{\theta+\pi} = -\vec{u}_\theta$

$$\frac{ed}{1 + e \cos(\theta + \pi)} \vec{u}_{\theta+\pi} = -\frac{ed}{1 - e \cos(\theta)} \vec{u}_\theta,$$

un point est donc solution de 3 si et seulement s'il est solution de 4.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$  Sachant que  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ , on a

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ &= e^2(x - d)^2 \\ &= e^2(\rho \cos(\theta) - d)^2. \end{aligned}$$

Il y a donc deux possibilités. Soit  $\rho = e(\rho \cos(\theta) - d)$ , auquel cas on obtient

$$\rho = -\frac{ed}{1 - e \cos(\theta)}$$

soit  $\rho = -e(\rho \cos(\theta) - d)$ , auquel cas on obtient

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}.$$

Nous avons vu plus haut que ces deux équations polaires étaient équivalentes, nous avons donc prouvé l'implication.

**3  $\Rightarrow$  2**

Sachant que  $x = \rho \cos(\theta)$ , on calcule

$$\begin{aligned} e^2(x-d)^2 &= (e\rho \cos(\theta) - ed)^2 \\ &= \left( e \frac{ed \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - ed \right)^2 \\ &= (ed)^2 \left( \frac{e \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - 1 \right)^2 \\ &= \frac{(ed)^2}{(1 + e \cos(\theta))^2} \\ &= \rho^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

■

*Remarque 2.1.3.* L'équation cartésienne montre que la transformation  $y \mapsto -y$  laisse invariante la conique. Celle-ci est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses, appelé *axe focal*.

La conique est complètement déterminée par les valeurs de  $e$  et  $d$ . Cependant, c'est souvent  $e$  et le produit  $ed$  qui interviennent dans les calculs, d'où la définition suivante :

**DÉFINITION 2.1.4.** On appelle *paramètre* d'une conique la quantité  $p = ed$ .

## 2.1.2 CLASSIFICATION

Nous allons maintenant utiliser le théorème 2.1.2 pour classifier les coniques à partir de leur équation cartésienne. Comme on le voit immédiatement, le seul paramètre déterminant est l'excentricité. Il y a trois cas possibles, suivant la valeur de  $e$  par rapport à 1. Rappelons que par hypothèse,  $d > 0$ .

### Parabole

Supposons tout d'abord que  $e = 1$ . Ce cas est particulier puisqu'alors il n'y aura plus de terme en  $x^2$  dans l'équation. En effet, on obtient

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x - d)^2 \\ &= x^2 - 2dx + d^2 \end{aligned}$$

d'où

$$y^2 = -2d \left( x - \frac{d}{2} \right).$$

Soit  $S$  le point de coordonnées

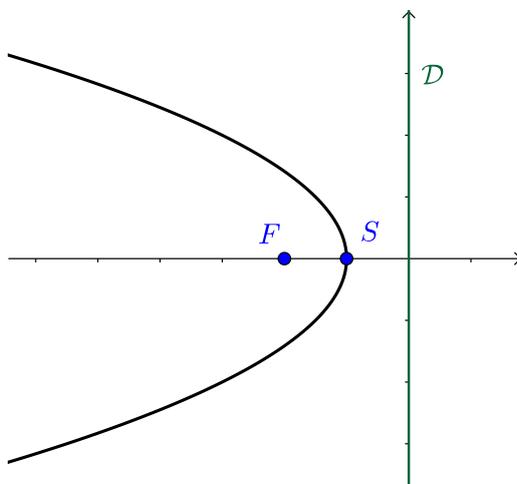
$$S : \left( \frac{d}{2}, 0 \right).$$

Dans le repère  $(S, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$ , l'équation devient

$$y^2 = -2dx = -2px. \tag{2.1}$$

DÉFINITION 2.1.5. Une conique d'excentricité 1 est appelée *parabole*. Le point  $S$  est appelé *sommet* de la parabole.

Voici une représentation graphique d'une parabole :



L'équation (2.1) fournit un paramétrage de la parabole par l'ordonnée : la parabole est le support de l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini dans le repère  $(S, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$  par

$$\gamma(t) = \left( -\frac{t^2}{2p}, t \right).$$

Comme

$$x(t)^2 + y(t)^2 \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} +\infty,$$

la parabole a deux branches infinies. De plus,

$$\frac{x(t)}{y(t)} = -\frac{t}{2p} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \mp\infty$$

donc la parabole a deux branches paraboliques dans la direction  $\vec{i}_F$ .

### Hyperbole

Supposons maintenant que  $e > 1$ . Comme  $1 - e^2 \neq 0$ , on peut développer puis regrouper les termes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^2(x - d)^2 \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2e^2xd + e^2d^2 \\ (1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 &= e^2d^2 \\ (1 - e^2) \left( x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= e^2d^2 + \frac{d^2e^4}{1 - e^2} \\ &= \frac{e^2d^2}{1 - e^2}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, notons  $K$  le terme de droite dans la dernière équation et changeons l'origine du repère au point  $C$  de coordonnées

$$C : \left( -\frac{de^2}{1 - e^2}, 0 \right).$$

On obtient alors l'équation

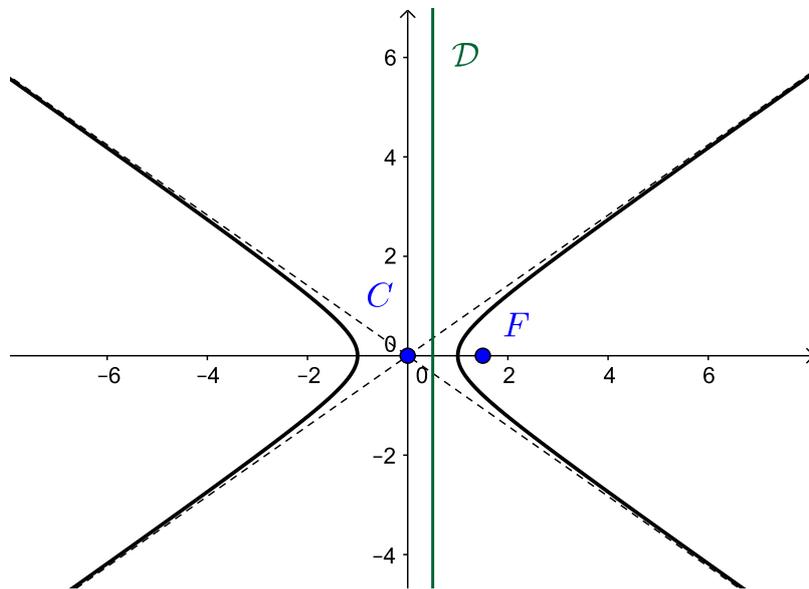
$$\frac{1 - e^2}{K} x^2 + \frac{1}{K} y^2 = 1.$$

Comme  $1 - e^2 < 0$  et  $K < 0$ , on peut poser  $b = \sqrt{-K}$  et  $a = \sqrt{\frac{K}{(1 - e^2)}}$  pour obtenir l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

DÉFINITION 2.1.6. Une conique d'excentricité  $e > 1$  est appelée *hyperbole*. Le point  $C$  est appelé *centre* de l'hyperbole.

L'Équation (2.2) est invariante par la transformation  $x \mapsto -x$ , donc l'hyperbole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Comme elle est également symétrique par rapport à l'axe des abscisses, elle est préservée par la composée des deux réflexions, c'est-à-dire par la symétrie de centre  $C$ . Voici une représentation graphique d'une hyperbole :



L'excentricité peut se retrouver à partir de l'équation (2.2). En effet, on a par définition de  $a$  et  $b$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1},$$

d'où

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

On peut également retrouver le paramètre de l'hyperbole. En effet, on a d'une part  $K = -b^2$  et d'autre part

$$\begin{aligned} K &= \frac{p^2}{1 - e^2} \\ &= -\frac{a^2 p^2}{b^2} \end{aligned}$$

d'où

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Pour obtenir un paramétrage de l'hyperbole, remarquons tout d'abord que la fonction  $\sinh : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  étant bijective, pour tout point de coordonnées  $(x, y)$  appartenant à l'hyperbole il existe  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $y = b \sinh(t)$ . On a alors

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t),$$

d'où  $x = \pm a \cosh(t)$ . Ainsi, l'hyperbole est la réunion des supports des arcs paramétrés  $\gamma_{\pm} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définis dans le repère  $(C, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$  par

$$\gamma_{\pm} = (\pm a \cosh(t), b \sinh(t)).$$

En particulier,

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 \cosh^2(t) + b^2 \sinh^2(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} +\infty$$

et chacune des deux courbes formant l'hyperbole possède deux branches infinies. De plus,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \pm \frac{b}{a} \tanh(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \pm \frac{b}{a}$$

ce qui, joint au fait que

$$\sinh(t) - \frac{b}{a} \cosh(t) = -2be^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } \sinh(t) + \frac{b}{a} \cosh(t) = 2be^t \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$$

montre que l'hyperbole complète possède deux asymptotes d'équations  $ay \pm bx = 0$ .

### Ellipse

Il nous reste à traiter le cas  $e < 1$ . Le même calcul que pour l'hyperbole donne

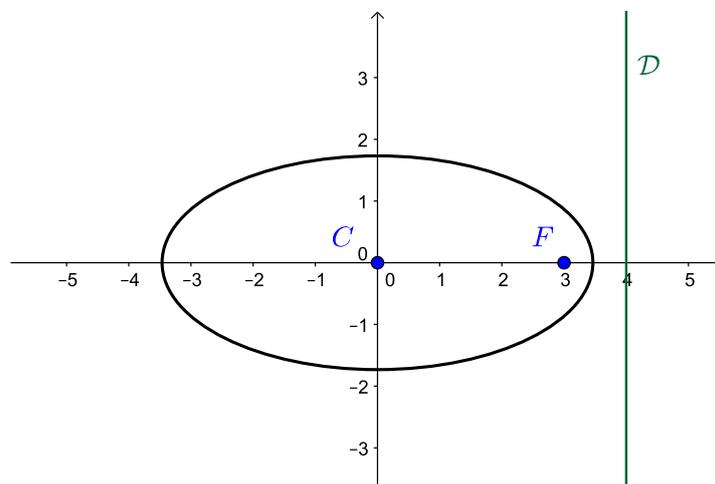
$$\frac{1 - e^2}{K} x^2 + \frac{1}{K} y^2 = 1.$$

Cette fois-ci,  $K > 0$  et  $1 - e^2 > 0$  donc on pose  $b = \sqrt{K}$  et  $a = \sqrt{\frac{K}{1 - e^2}}$  pour obtenir l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

**DÉFINITION 2.1.7.** Une conique d'excentricité  $e < 1$  est appelée *ellipse*. Le point  $C$  est appelé *centre* de l'ellipse. Les nombres  $a$  et  $b$  sont appelés respectivement le *demi-grand axe* et le *demi-petit axe* de l'ellipse.

Comme pour l'hyperbole, l'ellipse est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, par rapport à l'axe des ordonnées et par rapport à son centre  $C$ . Voici une représentation graphique d'une ellipse :



De nouveau, on peut retrouver l'excentricité à partir de  $a$  et  $b$ . Cette fois-ci, on a

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

d'où

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

et le paramètre est donné comme précédemment par

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Pour paramétrer l'ellipse, remarquons tout d'abord que pour tout point de coordonnées  $(x, y)$  de l'ellipse,

$$\left| \frac{x}{a} \right| \leq 1$$

donc il existe  $s \in \mathbf{R}$  tel que  $x = a \cos(s)$ . Alors,

$$y^2 = b^2(1 - \cos^2(s)) = b^2 \sin^2(s).$$

On en déduit que  $y = \pm b \sin(s) = b \sin(\pm s)$ . Comme  $\cos(\pm s) = \cos(s)$ , on peut donc trouver  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $x = a \cos(t)$  et  $y = b \sin(t)$ . L'ellipse est donc le support de l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini dans le repère  $(C, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$  par

$$\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)).$$

En particulier,  $x(t)^2 + y(t)^2 \leq a^2 + b^2$ , donc l'ellipse n'a pas de branche infinie.

*Remarque 2.1.8.* Par hypothèse,  $a \neq b$  dans l'équation (2.3) puisque  $e \neq 0$ . Par conséquent, le cercle n'est pas une conique définie par foyer et directrice.

### Tangente

Dans le cas de la parabole, une équation de la tangente se calcule facilement en utilisant le paramétrage par l'ordonnée. On a

$$\vec{\gamma}'(t) = \left( -\frac{t}{p}, 1 \right)$$

donc une équation de la tangente au point  $\gamma(t)$  est

$$\left( x - \left( -\frac{t^2}{2p} \right) \right) - \left( -\frac{t}{p} \right) (y - t) = 0,$$

soit

$$px + ty = \frac{t^2}{2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole et de l'ellipse c'est moins évident. Il existe cependant une méthode pour trouver simplement cette équation. Considérons un paramétrage  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  d'une hyperbole ou d'une ellipse et notons  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . On a alors

$$\frac{x(t)^2}{a^2} \pm \frac{y(t)^2}{b^2} = 1.$$

En dérivant, on obtient

$$2 \frac{x'(t)x(t)}{a^2} \pm 2 \frac{y'(t)y(t)}{b^2} = 0.$$

Autrement dit, le vecteur de coordonnées

$$\left( \frac{x(t)}{a^2}, \pm \frac{y(t)}{b^2} \right)$$

est orthogonal à  $\vec{\gamma}'(t)$ , donc il dirige la normale à la conique au point  $\gamma(t)$ . L'équation de la tangente au point  $\gamma(t)$  est donc

$$\frac{x(t)}{a^2}(x - x(t)) \pm \frac{y(t)}{b^2}(y - y(t)) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x(t)x}{a^2} \pm \frac{y(t)y}{b^2} = 1.$$

### 2.1.3 CONIQUES À CENTRE

La classification précédente a fait apparaître une distinction entre la parabole et les autres coniques. En effet, pour l'hyperbole et l'ellipse nous avons choisi un repère dont l'origine est le centre de symétrie de la conique, un point qui n'existe pas pour la parabole. C'est pourquoi l'hyperbole et l'ellipse sont appelées *coniques à centre*. Cette symétrie centrale permet d'obtenir d'autres descriptions de la conique, ce que nous allons maintenant faire. Nous noterons  $F'$  le symétrique de  $F$  par rapport à  $C$  et  $\mathcal{D}'$  le symétrique de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $C$ .

**Proposition 2.1.9.** *Soit  $\mathcal{C}$  une conique de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e \neq 1$ . Alors, la conique  $\mathcal{C}'$  de foyer  $F'$ , de directrice  $\mathcal{D}'$  et d'excentricité  $e$  est égale à  $\mathcal{C}$ .*

*Proof.* Soit  $M$  un point du plan, soit  $H$  son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$  et soit  $H'$  son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}'$ . En notant  $\sigma$  la réflexion d'axe  $C\vec{j}_F$ , on a  $\sigma(H) = H'$ . Donc,

$$\frac{MF'}{MH'} = \frac{\sigma(M)\sigma(F')}{\sigma(M)\sigma(H')} = \frac{\sigma(M)F}{\sigma(M)H}.$$

Il s'ensuit qu'un point  $M$  appartient à  $\mathcal{C}'$  si et seulement si  $\sigma(M)$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Comme  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ , on a égalité des deux coniques. ■

L'intérêt d'introduire le second foyer est qu'il permet de donner une caractérisation des coniques à centres n'utilisant pas la directrice. On parle alors de *caractérisation bifocale*. Pour simplifier les calculs, nous poserons

$$c = ae = \frac{e^2 d}{1 - e^2}.$$

Traitons d'abord le cas de l'ellipse. La preuve de la caractérisation repose sur un calcul élémentaire.

**Lemme 2.1.10.** *Soit  $\mathcal{C}$  une ellipse d'excentricité  $e$ , alors*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

*Proof.* Nous avons vu plus haut que  $b/a = \sqrt{1 - e^2}$ , d'où

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 - e^2 + e^2 = 1.$$

Il suffit de multiplier par  $a^2$  pour conclure. ■

**Proposition 2.1.11.** *Soit  $\mathcal{C}$  une ellipse de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e$ . Alors, l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MF + MF' = 2a$  est égal à  $\mathcal{C}$ .*

*Proof.* Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  et soient  $H$  et  $H'$  les projetés orthogonaux de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  respectivement. De l'équation (2.3) dans le repère  $(C, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$  on tire

$$|x| \leq a = \frac{ed}{1 - e^2}$$

donc

$$d(x, F) \leq \frac{ed}{1-e^2} - \frac{e^2d}{1-e^2} = d \frac{e}{1+e} < d.$$

Autrement dit, le point  $M$  est toujours situé entre les deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} MF + MF' &= eMH + eMH' \\ &= e(MH + MH') \\ &= ed(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \\ &= 2ed(C, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Pour calculer la distance de  $C$  à  $\mathcal{D}$ , remarquons d'abord que  $d(C, F) = c$  par définition. Donc,

$$\begin{aligned} d(C, \mathcal{D}) &= d(C, F) + d(F, \mathcal{D}) = c + d \\ &= c + \frac{p}{e} = c + \frac{b^2 a}{a c} = c + \frac{b^2}{c} \\ &= \frac{c^2 + b^2}{c} = \frac{a^2}{c}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} MF + MF' &= 2e \frac{a^2}{c} \\ &= 2 \frac{c a^2}{a c} \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Réciproquement, considérons un point  $M$  du plan tel que  $MF + MF' = 2a$ . Les foyers ont pour coordonnées  $c$  et  $-c$  dans le repère  $(C, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$ , donc

$$\begin{aligned} (MF - MF')(MF + MF') &= MF^2 - MF'^2 \\ &= (x - c)^2 + y^2 - ((x + c)^2 + y^2) \\ &= -4cx. \end{aligned}$$

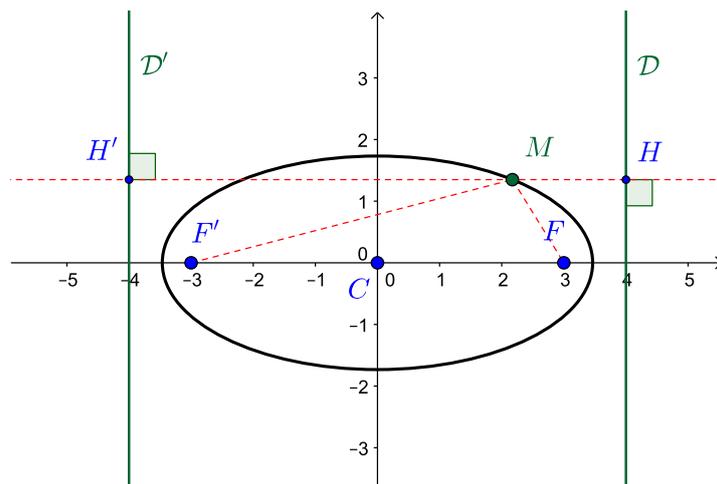
Comme  $MF + MF' = 2a$  par hypothèse, on en déduit que  $MF - MF' = -2ex$ . Mais alors,

$$MF = \frac{(MF + MF') + (MF - MF')}{2} = a - ex$$

et

$$\begin{aligned} (a - ex)^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\ a^2 - 2aex + e^2x^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ a^2 - c^2 &= (1 - e^2)x^2 + y^2 \\ b^2 &= (1 - e^2)x^2 + y^2 \\ \frac{1 - e^2}{b^2}x^2 + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

donc  $M$  appartient bien à  $\mathcal{C}$ . ■



Traisons maintenant le cas de l'hyperbole. La relation entre  $a$ ,  $b$  et  $c$  est différente dans ce cas.

**Lemme 2.1.12.** *Soit  $\mathcal{C}$  une hyperbole d'excentricité  $e$ , alors*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

*Proof.* Nous avons vu plus haut que  $b/a = \sqrt{e^2 - 1}$ , d'où

$$\frac{b^2}{a^2} + 1 = e^2 - 1 + 1 = e^2 = \frac{c^2}{a^2}.$$

Il suffit de multiplier par  $a^2$  pour conclure. ■

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $\mathcal{C}$  une hyperbole de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e$ . Alors, l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $|MF - MF'| = 2a$  est égal à  $\mathcal{C}$ .*

*Proof.* La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.1.11. Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $(C, \vec{i}_F, \vec{j}_F)$  et soient  $H$  et  $H'$  ses projetés orthogonaux sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  respectivement. On remarque tout d'abord que d'après l'équation (2.2),

$$|x| \geq a > d(C, \mathcal{D}).$$

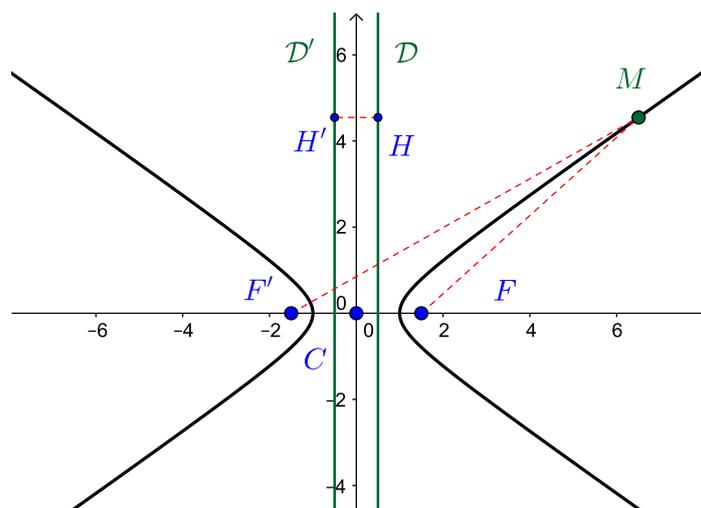
On en déduit que les points de l'hyperbole ne sont jamais situés entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Il s'ensuit que

$$|MF - MF'| = eHH'$$

et un calcul similaire à celui de la Proposition 2.1.11 montre que cette quantité est égale à  $2a$ . Réciproquement, considérons un point  $M$  du plan tel que  $|MF - MF'| = 2a$  et supposons que  $MF \geq MF'$ . Comme précédemment, en calculant  $MF^2 - MF'^2$  de deux façons on obtient  $MF = a - ex$ , qu'on peut utiliser pour trouver une équation satisfaite par les coordonnées de  $M$  :

$$\begin{aligned} (a - ex)^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\ a^2 - c^2 &= (1 - e^2)x^2 + y^2 \\ -b^2 &= (1 - e^2)x^2 + y^2 \\ -\frac{1 - e^2}{b^2}x^2 - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat. Si  $MF' \geq MF$ , un calcul similaire en remplaçant  $F$  par  $F'$  donne le même résultat. ■



## 2.2 COURBES DU SECOND DEGRÉ

Nous avons vu au Théorème 2.1.2 qu'une conique peut toujours être décrite dans son repère focal par une équation cartésienne. De plus, cette équation a une forme relativement simple : elle ne fait intervenir que les deux coordonnées et leurs carrés. C'est ce qui nous a permis de classifier les coniques en montrant qu'il n'y avait que trois types d'équations ayant cette forme. Il est donc naturel de se demander si, en considérant une équation plus générale ne faisant intervenir que les coordonnées et leurs carrés, on peut également obtenir une classification des courbes associées. Pour répondre à cette question, commençons par donner un nom aux courbes qui nous intéressent.

DÉFINITION 2.2.1. Une *équation du second degré* est une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \quad (2.4)$$

où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont des nombres réels et  $a, b$  et  $c$  ne sont pas tous les trois nuls. Une *courbe du second degré* est l'ensemble des points du plans dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  vérifient une équation du second degré.

Les coniques sont des courbes du second degré. Nous allons montrer que réciproquement, presque toute courbe du second degré est une conique. Ceci nous permettra de faire le lien entre la définition des coniques par foyer et directrice et les courbes obtenues comme section d'un cône par un plan.

### 2.2.1 RÉDUCTION DE L'ÉQUATION QUADRATIQUE

Comment étudier une équation du second degré ? Dans le cas où il n'y a qu'une seule variable, la stratégie est connue : étant donné une équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec  $a \neq 0$ , elle peut être mise sous la forme canonique

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Les solutions sont alors complètement déterminées par le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Notre objectif est de procéder de même dans le cas de deux variables. Nous cherchons donc à simplifier l'équation (2.4) jusqu'à la ramener à une forme canonique. Cependant, nous avons déjà vu avec les coniques qu'il y aura plusieurs formes canoniques possibles. Le raisonnement sera donc plus complexe qu'avec une seule variable.

### Première étape

La première étape de cette simplification est de faire disparaître le terme en  $xy$  qui empêche de factoriser l'équation indépendamment en  $x$  et en  $y$ . Pour cela, nous allons changer le repère en faisant tourner la base.

**Proposition 2.2.2.** *Considérons dans le repère orthonormé canonique  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  une équation du second degré*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Alors, il existe un repère orthonormé dans lequel cette équation s'écrit

$$a'x^2 + b'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$$

avec  $a'$  et  $b'$  non tous les deux nuls.

*Proof.* Pour  $\theta \in \mathbf{R}$ , posons

$$\begin{cases} \vec{i}' &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{j}' &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

et notons  $(x', y')$  les coordonnées dans le repère  $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ . Le changement de coordonnées s'écrit

$$\begin{cases} x &= \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y &= \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{cases}$$

Dans ce nouveau repère, on a

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy &= a(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')^2 + b(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y')^2 \\ &+ c(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y') \\ &= (a\cos^2(\theta) + b\sin^2(\theta) + c\sin(\theta)\cos(\theta))x'^2 \\ &+ (a\sin^2(\theta) + b\cos^2(\theta) - c\cos(\theta)\sin(\theta))y'^2 \\ &+ (-2a\cos(\theta)\sin(\theta) + 2b\sin(\theta)\cos(\theta) + c(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)))x'y' \\ &= a'x'^2 + b'y'^2 + c'x'y' \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une valeur de  $\theta$  pour laquelle  $c' = 0$ . Commençons par simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} c' &= -2a\cos(\theta)\sin(\theta) + 2b\sin(\theta)\cos(\theta) + c(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\ &= -a\sin(2\theta) + b\sin(2\theta) + c\cos(2\theta) \\ &= (b - a)\sin(2\theta) + c\cos(2\theta). \end{aligned}$$

Si  $c = 0$  il n'y a pas besoin de changer de repère, nous supposons donc  $c \neq 0$ . Si  $a = b$ , on a  $c' = c\cos(2\theta)$  et on peut prendre  $\theta = \pi/4$ . Sinon, on peut supposer  $\cos(2\theta) \neq 0$ , ce qui donne

$$\frac{c}{a - b} = \tan(2\theta).$$

Il suffit donc de poser

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{c}{a - b}\right).$$

Étudions maintenant les coefficients  $a'$  et  $b'$  de la nouvelle équation. On a

$$\begin{cases} a' &= a\cos^2(\theta) + b\sin^2(\theta) + c\sin(\theta)\cos(\theta) \\ b' &= a\sin^2(\theta) + b\cos^2(\theta) - c\cos(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a' + b' &= a + b \\ a' - b' &= (a - b)\cos(2\theta) + c\sin(2\theta) \end{cases}$$

Supposons que  $a' = 0 = b'$ . On a alors  $a = -b$ . Il faut ensuite distinguer deux cas

- Si  $a = b$ , alors ils sont tous les deux nuls et  $\theta = \pi/4$ . La deuxième équation donne alors

$$0 = c \sin(2\theta) = c,$$

ce qui contredit l'hypothèse  $c \neq 0$ .

- Si  $a \neq b$ , alors  $\cos(2\theta) \neq 0$  et la seconde équation donne

$$\frac{b-a}{c} = \tan(2\theta) = \frac{c}{a-b}.$$

On en déduit  $c^2 = (a-b)(b-a) < 0$ , qui n'est possible que si  $a = b = c = 0$ .

■

## Deuxième étape

Nous savons donc qu'une courbe du second degré est, dans un repère approprié décrite par l'équation

$$ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0.$$

L'idée est maintenant de faire disparaître les termes de degré 1 en les regroupant avec les termes de degré 2, exactement comme dans le cas des équations en une seule variable. Il y a trois cas à distinguer

1. Supposons pour l'instant  $a, b \neq 0$ , alors

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + dx + ey + f &= a \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4} + b \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 - \frac{e^2}{4} + f \\ &= a \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + b \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 - K \end{aligned}$$

Translatons l'origine du repère en un nouveau point  $O'$  de coordonnées  $(-d/2, -e/2)$ . Les nouvelles coordonnées s'écrivent

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{d}{2} \\ Y &= y + \frac{e}{2} \end{aligned}$$

et on obtient

$$aX^2 + bY^2 = K. \tag{2.5}$$

2. Nous allons maintenant supposer que  $a = 0$ . Par hypothèse, on a alors  $b \neq 0$  donc l'équation devient

$$b \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 + dx - K = 0$$

et on peut translater l'origine du repère en un nouveau point  $O'$  de coordonnées  $(0, -e/2)$  pour obtenir

$$dX + bY^2 = K. \tag{2.6}$$

3. Il reste le cas  $a \neq 0$  et  $b = 0$ , mais quitte à échanger  $x$  et  $y$  on peut alors se ramener au cas précédent.

### 2.2.2 CAS DÉGÉNÉRÉS

Nous pouvons maintenant voir à quelle condition une courbe du second degré est une conique. La distinction vient de la valeur de  $K$ . Nous allons d'abord traiter plusieurs cas assez simples. Supposons pour commencer que  $K = 0$ . Alors, l'équation (2.5) admet les solutions suivantes :

- Si  $a$  et  $b$  sont de mêmes signes, l'ensemble des solutions est le point  $(0, 0)$ .
- Si  $a$  et  $b$  sont de signes différents, l'ensemble des solutions est la réunion des droites d'équations

$$Y = \sqrt{\frac{|a|}{|b|}}X \text{ et } Y = -\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}X.$$

Supposons maintenant  $K > 0$  et  $a, b < 0$ . Alors, l'ensemble des solutions de l'équation (2.5) est vide. De même si  $K < 0$  et  $a, b > 0$ . Enfin, supposons que  $d = 0$  dans l'équation (2.6). Alors, l'ensemble des solutions est

- Un point si  $b$  et  $K$  sont de même signe.
- L'ensemble vide si  $b$  et  $K$  sont de signe différent.

Tous ces cas particuliers ne sont pas vraiment des courbes, c'est la raison pour laquelle on les appelle courbes du second degré *dégénérées*.

### 2.2.3 CAS NON-DÉGÉNÉRÉS

Nous allons maintenant montrer qu'une courbe du second degré qui n'est pas dégénérée est soit une conique soit un cercle.

#### Parabole

Commençons par l'Équation (2.6) avec  $d \neq 0$ . Comme  $b \neq 0$ , on peut diviser et ramener l'équation sous la forme

$$\begin{aligned} Y^2 &= -\frac{d}{b}X + \frac{K}{b} \\ &= -\frac{d}{b}\left(X - \frac{K}{d}\right). \end{aligned}$$

Soit  $O''$  le point de coordonnées  $(K/d, 0)$ . On a, en notant  $(X', Y')$  les coordonnées dans le repère  $(O'', \vec{i}', \vec{j}')$ ,

$$Y'^2 = -2pX',$$

où  $p = d/2b$ . On reconnaît l'Équation (2.1) d'une *parabole*.

#### Hyperbole

Considérons maintenant l'Équation (2.5) avec  $K \neq 0$  et supposons que  $a$  et  $b$  ne sont pas de même signe. Après division par  $K$ , l'équation (2.5) devient

$$\frac{a}{K}X^2 + \frac{b}{K}Y^2 = 1.$$

Comme  $a/K$  et  $b/K$  sont de signe différent on peut, quitte à échanger les rôles de  $X$  et  $Y$ , supposer que  $a/K > 0$  et  $b/K < 0$ . On a alors

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1,$$

où  $A = \sqrt{\frac{K}{a}}$  et  $B = \sqrt{-\frac{K}{b}}$ . On reconnaît l'Équation (2.2) d'une *hyperbole*.

## Ellipse

Il nous reste à traiter le cas où  $K$ ,  $a$  et  $b$  sont de même signe. En divisant, on obtient

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1,$$

où  $A = \sqrt{\frac{K}{a}}$  et  $B = \sqrt{\frac{K}{b}}$ . On reconnaît l'Équation (2.3) d'une *ellipse* si  $a \neq b$  et l'équation d'un cercle si  $a = b$ .

### 2.2.4 DISCRIMINANT ET TRACE

L'inconvénient des résultats précédents est qu'il faut beaucoup de calculs pour obtenir la nature d'une courbe du second degré. Nous allons maintenant voir que, pourvu que l'on sache qu'une certaine courbe est non-dégénérée, il est possible de déterminer sa nature très simplement. La stratégie est la suivante : nous allons définir deux quantités associées à une équation du second degré qui sont *invariantes* par le processus de réduction et qui déterminent la conique associée. Il suffira donc de calculer ces deux invariants pour identifier n'importe quelle courbe du second degré.

**DÉFINITION 2.2.3.** Considérons dans le repère orthonormé canonique  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  une équation du second degré

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Son *discriminant* est le nombre  $\Delta = ab - \left(\frac{c}{2}\right)^2$  et sa *trace* est le nombre  $T = a + b$ .

**Proposition 2.2.4.** *La réduction de l'équation quadratique ne modifie ni le discriminant ni la trace*

*Proof.* Considérons la première étape de la réduction, qui transforme  $a$ ,  $b$  et  $c$  en  $a'$ ,  $b'$  et 0. Rappelons les expressions obtenues dans la preuve de la Proposition 2.2.2 :

$$\begin{aligned} a' &= a \cos^2(\theta) + b \sin^2(\theta) + c \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} (a(1 + \cos(2\theta)) + b(1 - \cos(2\theta)) + c \sin(2\theta)) \\ b' &= a \sin^2(\theta) + b \cos^2(\theta) - c \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} (a(1 - \cos(2\theta)) + b(1 + \cos(2\theta)) - c \sin(2\theta)). \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, nous allons décomposer le discriminant  $\Delta' = 4a'b'$  en trois termes :

$$\begin{aligned} A &= a^2(1 - \cos^2(2\theta)) + b^2(1 - \cos^2(2\theta)) - c^2 \sin^2(2\theta) \\ &= (a^2 + b^2) \sin^2(2\theta) - c^2 \sin^2(2\theta) \\ B &= ab(1 - \cos(2\theta))^2 + ab(1 + \cos(2\theta))^2 \\ &= 2ab + 2ab \cos^2(2\theta) \\ &= 4ab - 2ab \sin^2(2\theta) \\ C &= -ac(1 + \cos(2\theta)) \sin(2\theta) + ac(1 - \cos(2\theta)) \sin(2\theta) \\ &\quad - bc(1 - \cos(2\theta)) \sin(2\theta) + bc(1 + \cos(2\theta)) \sin(2\theta) \\ &= -2ac \cos(2\theta) \sin(2\theta) + 2bc \cos(2\theta) \sin(2\theta) \\ &= 2(b - a)c \cos(2\theta) \sin(2\theta) \end{aligned}$$

On sait de plus que l'angle  $\theta$  vérifie  $(a - b) \sin(2\theta) = c \cos(2\theta)$ , d'où

$$C = -2c^2 \cos^2(2\theta).$$

En combinant on obtient

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{A + B + C}{4} \\ &= \frac{(a^2 + b^2) \sin^2(2\theta) - c^2 \sin^2(2\theta) + 4ab - 2ab \sin^2(2\theta) - 2c^2 \cos^2(2\theta)}{4} \\ &= \frac{(a - b)^2 \sin^2(2\theta) - c^2 \cos^2(2\theta) + 4ab - c^2}{4} \\ &= \Delta + \frac{c^2 \cos^2(2\theta) - c^2 \cos^2(2\theta)}{4} \\ &= \Delta. \end{aligned}$$

Le discriminant n'est donc pas changé par la première étape. Pour la trace, on a déjà observé dans la preuve de la Proposition 2.2.2 que  $a' + b' = a + b$ , donc elle n'est pas modifiée non plus. Quant à la deuxième étape, qui consiste à changer l'origine du repère, elle ne modifie pas la partie quadratique de l'équation donc ne change ni le discriminant ni la trace. ■

**THÉORÈME 2.2.5** Soit  $\mathcal{C}$  une courbe du second degré *non-dégénérée* et soit  $\Delta$  le discriminant d'une équation du second degré quelconque de  $\mathcal{C}$ . Alors,

- Si  $\Delta = 0$ ,  $\mathcal{C}$  est une parabole.
- Si  $\Delta < 0$ ,  $\mathcal{C}$  est une hyperbole.
- Si  $\Delta > 0$ ,  $\mathcal{C}$  est une ellipse ou un cercle.

*Proof.* Calculons d'abord le discriminant des équations des coniques. Dans le cas de la parabole, on a  $\Delta = 0$ , dans le cas de l'hyperbole, on a

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0$$

et dans le cas de l'ellipse et du cercle on a

$$\Delta = \frac{1}{a^2 b^2} > 0.$$

On sait que l'équation d'une courbe du second degré non-dégénérée se réduit à l'une des trois précédentes et le résultat est donc une conséquence immédiate de la Proposition 2.2.4. ■

Dans le cas de la parabole, la trace est égale à 1 et ne nous donne donc pas d'information supplémentaire. Dans les deux autres cas, la trace est égale à  $\pm a^{-2} \pm b^{-2}$ . Comme le discriminant est égal à  $a^{-2} b^{-2}$ , on peut retrouver  $a^2$  et  $b^2$  à partir du discriminant et de la trace : ce sont les racines du *polynôme caractéristique*

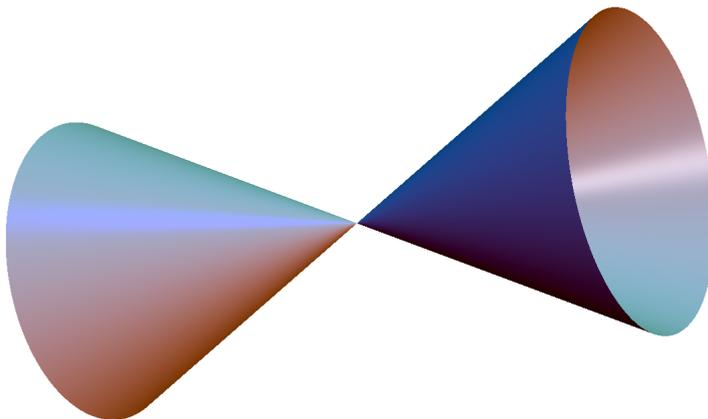
$$X^2 - TX + \Delta.$$

La donnée de  $a^2$  et  $b^2$  permet alors de retrouver  $e$  et  $p$ .

## 2.3 SECTIONS CONIQUES

Dans cette dernière section, nous allons étudier les courbes obtenues comme intersection d'un cône et d'un plan. Nous allons montrer qu'il s'agit de courbes du second degré et en déduire à quelle condition ces courbes sont des coniques, ainsi que leur nature le cas échéant. Nous travaillerons dans l'espace affine de dimension 3 qui se définit de façon exactement analogue au plan affine (voir le début du Chapitre 3 pour plus de détails). Fixons un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace affine et considérons une droite  $\Delta$  qui n'est pas incluse dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Elle forme donc avec ce plan un angle que nous noterons  $\alpha$  et que, quitte à changer  $\vec{k}$  en  $-\vec{k}$ , on peut supposer dans l'intervalle  $]0, \pi/2[$ .

DÉFINITION 2.3.1. Le cône de révolution d'axe  $O\vec{k}$  et de génératrice  $\Delta$  est l'ensemble des images de  $\Delta$  par des rotations d'axe  $O\vec{k}$ .



On peut bien sûr définir un cône de révolution d'axe quelconque, mais il suffit alors de changer de repère pour que l'axe devienne  $O\vec{k}$ . Nous faisons ce choix pour simplifier les calculs.

*Remarque 2.3.2.* Cette définition a toujours un sens si  $\Delta$  est incluse dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (c'est-à-dire  $\alpha = 0$ ), mais le cône de révolution est alors le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  qui est un cas dégénéré. De même si  $\Delta$  est confondue avec  $O\vec{k}$  (c'est-à-dire  $\alpha = \pi/2$ ) le cône se réduit alors à l'axe  $O\vec{k}$ .

DÉFINITION 2.3.3. Une *section conique* est une courbe de la forme  $C \cap P$ , où  $C$  est un cône de révolution d'axe  $O\vec{k}$  et  $P$  est un plan affine.

### 2.3.1 ÉQUATION

L'objectif de cette section est d'obtenir une équation décrivant une section conique quelconque. Pour ce faire, il nous faut d'abord être capable de décrire le cône de révolution par une équation cartésienne.

**Proposition 2.3.4.** Une équation cartésienne du cône de révolution d'axe  $O\vec{k}$  et de génératrice  $\Delta$  est donnée dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)z^2. \quad (2.7)$$

*Proof.* Soit  $z_0 \in \mathbf{R}$  et soit  $P_{z_0}$  le plan affine d'équation  $z = z_0$ . L'intersection  $\Delta \cap P$  est réduite à un point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . Les images de ce point par toutes les rotations d'axe  $O\vec{k}$  forment un cercle de centre  $M_1$  de coordonnées  $(0, 0, z_0)$  et de rayon

$$R^2 = (M_0M_1)^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Comme  $M_0$  appartient à la droite  $\Delta$ , on sait que l'angle en  $O$  du triangle  $OM_0M_1$  est égal à  $\alpha$ . Ce triangle est par construction rectangle en  $M_1$ , donc

$$\begin{aligned} M_0M_1 &= OM_1 \tan(\alpha) \\ &= z_0 \tan(\alpha). \end{aligned}$$

Ainsi, une équation de  $P_{z_0} \cap C$  est

$$x^2 + y^2 = \tan(\alpha)^2 z_0^2.$$

Pour obtenir une équation du cône, il suffit de remarquer que si  $(x, y, z)$  est un point du cône, alors il appartient à l'intersection du cône et de  $P_z$ , donc  $x^2 + y^2 = \tan(\alpha)^2 z^2$ . ■

Soit  $P$  un plan affine. Il existe trois réels  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\mu$  tels que  $P$  ait pour équation

$$\cos(\theta) \cos(\varphi)x + \cos(\theta) \sin(\varphi)y + \sin(\theta)z = \mu.$$

Soit  $\rho$  la rotation d'axe  $O\vec{k}$  et d'angle  $-\varphi$ . Comme le cône de révolution  $C$  est invariant par toutes les rotations d'axe  $O\vec{k}$ , on a

$$C \cap \rho(P) = \rho(C) \cap \rho(P) = \rho(C \cap P).$$

De plus,  $\rho(P)$  admet une équation plus simple, à savoir

$$\cos(\theta)x + \sin(\theta)z = \mu. \quad (2.8)$$

Nous noterons  $P(\theta, \mu)$  le plan affine défini par l'équation (2.8) et, quitte à changer  $\vec{k}$  en  $-\vec{k}$ , nous supposons que  $\theta$  peut être choisi dans l'intervalle  $[0, \pi/2]$ . Toute section conique est donc l'image de  $C \cap P(\theta, \mu)$  pour un certain couple  $(\theta, \mu)$  par une rotation d'axe  $O\vec{k}$ . Il suffit par conséquent d'étudier ces sections particulières pour obtenir toutes les sections coniques. Pour obtenir une équation de  $C \cap P(\theta, \mu)$ , nous allons distinguer trois cas :

1. Si  $\cos(\theta) = 0$ , alors l'équation (2.8) devient  $\pm z = \mu$ . En remplaçant dans l'équation (2.7), on obtient

$$x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)\mu^2.$$

2. Si  $\sin(\theta) = 0$ , alors l'équation (2.8) devient  $\pm x = \mu$ . En remplaçant dans l'équation (2.7), on obtient

$$\mu^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)z^2.$$

3. Si  $\sin(\theta), \cos(\theta) \neq 0$ , alors l'équation (2.8) devient

$$z = \frac{\mu}{\sin(\theta)} - \frac{x}{\tan(\theta)}.$$

En remplaçant dans l'équation (2.7), on obtient

$$x^2 + y^2 = \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} \left( x - \frac{\mu}{\cos(\theta)} \right)^2.$$

Remarquons que les équations que nous avons écrites font intervenir les coordonnées de points de l'espace. Ce ne sont donc pas des équations de courbes (ce sont des équations de *cylindres*). Pour obtenir une courbe, il faut un système de deux équations, la deuxième étant l'équation (2.8) de  $P(\theta, \mu)$ . Une autre façon de procéder est de fixer un repère de  $P(\theta, \mu)$  et de réécrire l'équation dans ce repère. Dans les deux premiers cas, cela se fait aisément.

1. Soit  $\Omega$  le point de coordonnées  $(0, 0, \pm\mu)$ , alors l'équation dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  (qui est un repère de  $P(\theta, \mu)$ ) est

$$x^2 + y^2 = \tan(\alpha)^2\mu^2.$$

Si  $\mu \neq 0$ , il s'agit d'une équation du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\tan(\alpha)\mu$ . Si  $\mu = 0$ , il s'agit d'une équation du point  $\Omega$ .

2. Soit  $\Omega$  le point de coordonnées  $(\pm\mu, 0, 0)$ , alors l'équation dans le repère  $(\Omega, \vec{j}, \vec{k})$  (qui est un repère de  $P(\theta, \mu)$ ) est

$$\mu^2 + y^2 = \tan^2(\alpha)z^2.$$

Il s'agit d'une équation d'une hyperbole d'excentricité  $e = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}}$  et de paramètre  $\frac{1}{\mu^2 \tan^2(\alpha)}$ .

Quant au troisième cas, il n'y a pas de choix évident d'origine ni même d'axe (le plan  $P(\theta, \mu)$  ne contient aucune droite parallèle à  $\vec{i}$  ou  $\vec{k}$  dans ce cas) qui permette d'obtenir une équation dans le plan. Pour obtenir une équation plane de la section, fixons comme origine le point d'intersection  $\Omega$  de  $O\vec{k}$  et  $P(\theta, \mu)$ , qui a pour coordonnées

$$\Omega : \left( 0, 0, \frac{\mu}{\sin(\theta)} \right).$$

On peut prendre l'axe  $\Omega\vec{j}$  mais il nous faut un second axe pour notre repère. Soit  $\Delta$  la droite d'intersection de  $P(\theta, \mu)$  et  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et soit  $H$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $\Delta$ . On pose

$$\vec{i}' = \frac{\overrightarrow{\Omega H}}{\Omega H}.$$

Nous avons donc maintenant un repère  $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$  dans lequel les coordonnées  $(X, Y)$  d'un point sont reliées à ses coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = & X \cos(\theta) \\ y = & Y \\ z = & \frac{\mu}{\sin(\theta)} - \frac{\cos(\theta)X}{\tan(\theta)} \end{cases}$$

L'équation de la section conique dans le repère  $\mathcal{R}'$  est donc

$$\cos^2(\theta)X^2 + Y^2 = \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} \left( \cos(\theta)X - \frac{\mu}{\cos(\theta)} \right)^2. \quad (2.9)$$

### 2.3.2 CLASSIFICATION

D'après ce qui précède, toute section conique est soit une courbe dégénérée soit une conique ou un cercle, sa nature ne dépendant que des valeurs de  $\theta$  et  $\mu$ . Il suffit pour la déterminer d'utiliser le discriminant et la trace comme vu à la Section 2.2.4. Il faut cependant tout d'abord exclure les cas dégénérés. L'équation (2.9) peut s'écrire

$$\cos^2(\theta) \left( 1 - \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} \right) X^2 + Y^2 + 2\mu \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} X = \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} \mu^2.$$

Le section conique est donc dégénérée si et seulement si  $\mu = 0$ , c'est-à-dire si le plan  $P(\theta, \mu)$  passe par l'origine  $O$  du repère, autrement dit par le sommet du cône. Dans ce cas, on a trois possibilités :

- Si  $\theta = \alpha$ , on a  $Y^2 = 0$  et la courbe est une droite (une génératrice du cône).
- Si  $\theta < \alpha$ , la courbe est réduite au point  $O$ .
- Si  $\theta > \alpha$ , la courbe est la réunion de deux droites.

Si  $\mu \neq 0$ , la section conique est une courbe du second degré non dégénérée et nous pouvons appliquer la méthode du discriminant. Ce dernier vaut

$$\Delta = \cos^2(\theta) \left( 1 - \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} \right) \times 1.$$

On a donc la classification suivante :

- Si  $\theta = \alpha$ , alors la section conique est une parabole. Dans ce cas le plan est parallèle à une génératrice du cône.
- Si  $0 < \theta < \alpha$ , alors la section conique est une hyperbole. Dans ce cas, le plan coupe les deux nappes du cône.
- Si  $\alpha < \theta < \pi/2$ , alors la section conique est une ellipse. Dans ce cas, le plan ne coupe qu'une seule des deux nappes du cône.
- Si  $\theta = \pi/2$ , alors la section conique est un cercle. Dans ce cas, le plan est orthogonal à l'axe  $O\vec{k}$ .

Si  $\theta \neq \alpha$ , la trace de l'équation (2.9) est

$$T = \cos^2(\theta) \left( 1 - \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\theta)} \right) + 1 = \Delta + 1.$$

Le polynôme caractéristique est donc

$$\begin{aligned} X^2 - TX + \Delta &= X^2 - (\Delta + 1)X + \Delta \\ &= (X - \Delta)(X - 1). \end{aligned}$$

On en déduit les valeurs de l'excentricité et du paramètre. Cela nécessite d'identifier parmi les deux racines du polynôme caractéristique laquelle est la plus grande (que nous avons notée  $a$ ). Cela dépend de la position de  $\Delta$  par rapport à  $\pm 1$ .

- Si  $0 < \Delta < 1$ , on a  $e = \sqrt{1 - \Delta}$  et  $p = \sqrt{\Delta}$ .
- Si  $1 < \Delta$ , on a  $e = \sqrt{1 - \frac{1}{\Delta}}$  et  $p = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ .
- Si  $-1 < \Delta < 0$ , on a  $e = \sqrt{1 + \Delta}$  et  $p = \sqrt{-\Delta}$ .
- Si  $\Delta < -1$ , on a  $e = \sqrt{1 + \frac{1}{\Delta}}$  et  $p = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ .

### 2.3.3 FOYER ET DIRECTRICE

Nous avons donc élucidé la nature des sections coniques en passant par les courbes du second degré. Ce résultat n'est pas totalement satisfaisant puisque quand la section est une conique, il ne donne pas de description géométrique du foyer et de la directrice. Une telle description géométrique existe, mais nous la donnons sans démonstration.

**THÉORÈME 2.3.5** (Dandelin) Soit  $C$  un cône de révolution d'axe  $O\vec{k}$  et soit  $P$  un plan affine ne contenant pas l'origine et qui n'est pas parallèle à une directrice de  $C$ . Alors, il existe deux sphères  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  tangentes à la fois à  $P$  en un point et à  $C$  en un cercle. De plus, en notant

- $F_1$  et  $F_2$  les points de tangence de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  avec  $P$
- $P_1$  et  $P_2$  les plans contenant les cercles de tangence de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  avec  $C$

la section conique est une conique de foyer  $F_1$  et de directrice  $P_1 \cap P$  et également une conique de foyer  $F_2$  et de directrice  $P_2 \cap P$ .

---

---

# CHAPITRE 3

---

## SURFACES

### 3.1 NAPPES PARAMÉTRÉES

Dans ce chapitre, nous allons étudier les *surfaces*. Comme pour les courbes, notre approche sera analytique et nous suivrons le même plan général. En particulier, nous nous placerons dans  $\mathbf{R}^3$  vu comme *espace affine* de dimension 3, dont les éléments sont des *points*. Comme dans le cas du plan affine, deux points définissent un *vecteur* et un point et un vecteur définissent un autre point de l'espace affine. Pour obtenir un repère, il faut une origine  $O$  ainsi qu'une base de l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^3$ , qui sera donc composée de trois vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ . Un tel repère sera noté  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Un point peut alors être décrit par ses coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}$  comme dans le cas du plan. On définit de même la distance entre deux points à l'aide de la norme des vecteurs de l'espace. Si  $A$  et  $B$  sont deux points de coordonnées respectives  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ , leur distance sera donc

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

L'étude des surfaces présente toutefois une différence fondamentale avec celle des courbes. En effet, une surface est intuitivement un objet à deux dimensions et sera donc décrite par une fonction de deux variables. L'étude de telles fonctions nécessite des outils d'analyse plus poussés que ceux que nous avons utilisés jusqu'à maintenant, notamment le calcul différentiel, que nous commençons par rappeler.

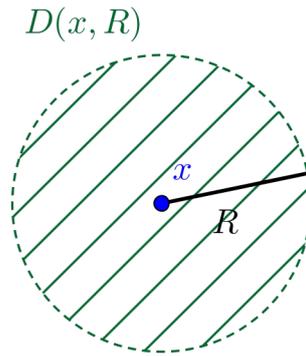
#### 3.1.1 RAPPELS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

L'étude de la différentiabilité, c'est-à-dire la généralisation de la dérivabilité pour les fonctions de plusieurs variables, utilise le vocabulaire de la topologie. Comme notre but est ici d'appliquer ces notions aux surfaces, nous rappellerons simplement les définitions nécessaires concernant la topologie de  $\mathbf{R}^2$ . Les intervalles ouverts de  $\mathbf{R}$  utilisés pour les courbes seront ici remplacés par les ouverts de  $\mathbf{R}^2$ .

**DÉFINITION 3.1.1.** Soit  $x \in \mathbf{R}^2$  et soit  $R > 0$ . Le *disque ouvert*  $D(x, R)$  de centre  $x$  et de rayon  $R$  est l'ensemble

$$D(x, R) = \{y \in \mathbf{R}^2, d(x, y) < R\}.$$

Graphiquement, cette définition correspond à la notion intuitive d'un disque "sans son bord" :



On appelle *ouvert* de  $\mathbf{R}^2$  une partie  $U$  telle que pour tout  $x \in U$ , il existe  $R > 0$  vérifiant  $D(x, R) \subset U$ .

Cette définition permet de donner un sens à la continuité pour les fonctions de deux variables.

DÉFINITION 3.1.2. Soit  $V$  une partie de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $x \in V$ . Une application  $f : V \rightarrow \mathbf{R}$  est dite *continue* en  $x$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que

$$f(D(x, \eta)) \subset [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon].$$

Elle est dite continue sur  $V$  si elle est continue en  $x$  pour tout  $x \in V$ .

*Remarque 3.1.3.* La définition apparemment compliquée de la continuité dit simplement la chose suivante :  $f$  est continue en  $x$  si  $f(y)$  tend vers  $f(x)$  quand  $y$  tend vers  $x$ . Le problème est de donner un sens rigoureux à l'expression "tend vers". Intuitivement, cela signifie que la distance euclidienne  $d(y, x)$  tend vers 0. Donc,  $f$  est continue si pour tout  $\epsilon$  fixé,  $f(y)$  est égal à  $f(x)$  à  $\epsilon$  près dès que  $y$  est à distance suffisamment petite de  $x$ . C'est un bon exercice d'écrire cette phrase avec des quantificateurs et de la comparer à la définition pour vérifier qu'elles coïncident.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  une application. Pour obtenir une "dérivée" pour  $f$ , on peut se ramener à des fonctions d'une variable. En effet, pour  $(s_0, t_0) \in U$  on peut définir deux fonctions d'une variable

$$f_{t_0} : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ s & \mapsto & f(s, t_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{s_0} : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & f(s_0, t) \end{cases} .$$

Si ces fonctions sont dérivables en  $s_0$  et  $t_0$  respectivement, on note leurs dérivées

$$f'_{t_0}(s_0) = \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0)$$

$$f'_{s_0}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0).$$

Si ces dérivées existent pour tout  $(s_0, t_0) \in U$ , on obtient deux nouvelles fonctions de deux variables de  $U$  dans  $\mathbf{R}$  appelées *dérivées partielles* de  $f$ . Attention, l'existence des dérivées partielles n'est pas une bonne notion de dérivabilité pour les fonctions de deux variables (il faut utiliser la notion plus forte de *différentielle*). Toutefois, nous n'utiliserons que des fonctions avec une certaine régularité, qui peut se définir à l'aide des dérivées partielles par récurrence.

DÉFINITION 3.1.4. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ . Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  si ses dérivées partielles existent et sont continues sur  $U$ . Soit  $k \geq 2$ , une fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^2$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  si ses dérivées partielles existent et sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Si  $\mathcal{R}$  est un repère de l'espace affine  $\mathbf{R}^3$ , pour toute fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  il existe des fonctions  $f_1, f_2, f_3 : U \rightarrow \mathbf{R}$  telles que pour tout  $x \in U$ ,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)).$$

On dit alors que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $f_i$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $1 \leq i \leq 3$ .

Comme pour les courbes, notre étude des surfaces utilisera les développements limités. Dans le cas des fonctions de deux variables, le développement limité à l'ordre 1 prend la forme suivante :

**Proposition 3.1.5.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $(s_0, t_0) \in U$  et soit  $R > 0$  tel que  $D((s_0, t_0), R) \subset U$ . Alors, pour tout  $(s, t) \in D((s_0, t_0), R)$ ,*

$$f(s, t) = f(s_0, t_0) + (s - s_0) \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) + o(d((s, t), (s_0, t_0))).$$

Il existe bien sûr des développements limités aux ordres plus élevés si la régularité de la fonction est suffisante, mais ils sont plus complexes à écrire. Le développement limité à l'ordre 2 sera donné plus loin quand il sera nécessaire.

### 3.1.2 DÉFINITION

Nous pouvons maintenant définir l'objet analytique qui nous permettra d'étudier les surfaces :

**DÉFINITION 3.1.6.** Une *nappe paramétrée* de classe  $\mathcal{C}^k$  est une application

$$\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$$

de classe  $\mathcal{C}^k$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ . L'image de  $\varphi$  est appelée *support* de  $\varphi$  (ou parfois *support géométrique* de  $\varphi$ ). On appelle *surface paramétrée* de l'espace de classe  $\mathcal{C}^k$  tout support d'une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Exemple 3.1.7.** Soient  $a, b, c \in \mathbf{R}$  et soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace non colinéaires. On définit une nappe paramétrée  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\varphi(s, t) = (a, b, c) + s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Il s'agit d'une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont le support est le plan dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et passant par le point  $(a, b, c)$ . Notons que pour tout  $(s_0, t_0) \in \mathbf{R}^2$ , on a

$$\varphi(s, t) = \varphi(s_0, t_0) + (s - s_0)\vec{u} + (t - t_0)\vec{v}.$$

Fixons un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Alors, une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  est donnée par trois fonctions,  $x, y, z : U \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  via la décomposition

$$\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

On dira alors que  $\varphi$  est une *paramétrisation cartésienne*. Nous utiliserons systématiquement cette description dans la suite, la plupart du temps en ne précisant pas le repère  $\mathcal{R}$ , qui sera alors le repère canonique  $\mathcal{R}_{can}$  de  $\mathbf{R}^3$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{R}_{can} = \left( (0, 0, 0), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cela nous permet de nous ramener à l'étude de trois fonctions de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$ .

*Remarque 3.1.8.* Il existe deux autres types de paramétrisation couramment utilisées : la paramétrisation cylindrique et la paramétrisation sphérique. Elles peuvent s'avérer plus adaptées que la paramétrisation cartésienne dans certains cas, mais par soucis de simplicité nous ne nous en servons pas.

**Exemple 3.1.9.** Soient  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , soit  $R > 0$  et soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie par

$$\varphi(s, t) = (a + R \cos(s) \cos(t), b + R \sin(s) \cos(t), c + R \sin(t)).$$

Il s'agit d'une nappe de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont le support est la sphère de centre  $(a, b, c)$  et de rayon  $R$ .

Comme dans le cas des courbes, on voit apparaître dans l'exemple 3.1.9 des *points multiples*, qui se définissent naturellement.

DÉFINITION 3.1.10. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée. Un point  $M$  du support de  $\varphi$  est dit *multiple* s'il existe  $x, x' \in U$  tels que  $x \neq x'$  et  $\varphi(x) = M = \varphi(x')$ . Une nappe paramétrée  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  est dite *simple* si  $\varphi$  est injective. Une surface  $\mathcal{S}$  est dite *simple* si elle admet un paramétrage simple.

Toutefois, la notion de point multiple étant complexe dans le cas des surfaces, nous ne l'aborderons pas dans ce cours.

### 3.1.3 CHANGEMENT DE PARAMÉTRAGE

Comme pour les courbes, une surface donnée admet de nombreux paramétrages et les changements de paramétrage se font au moyen de  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes de deux variables, dont nous rappelons la définition.

DÉFINITION 3.1.11. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^2$ , soit  $F : V \rightarrow U$  une application. On dit que  $F$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si

- $F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- $F$  est bijective.
- $F^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

DÉFINITION 3.1.12. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée et soit  $V$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ . Un *changement de paramétrage* de classe  $\mathcal{C}^k$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme  $F : V \rightarrow U$ . La nappe

$$\psi = \varphi \circ F : V \rightarrow \mathbf{R}^3$$

est appelée *nappe reparamétrée* par  $F$ .

Nous aurons besoin plus tard du résultat suivant sur les difféomorphismes :

**Proposition 3.1.13.** Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $F : V \rightarrow U$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$ . Notons  $F(a, b) = (F_1(a, b), F_2(a, b))$ . Alors, pour tout  $(a_0, b_0) \in U$ , la matrice

$$J_{(a_0, b_0)}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a}(a_0, b_0) & \frac{\partial F_1}{\partial b}(a_0, b_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial a}(a_0, b_0) & \frac{\partial F_2}{\partial b}(a_0, b_0) \end{pmatrix}$$

est inversible. Cette matrice est appelée *matrice jacobienne de  $F$  au point  $(a_0, b_0)$* .

## 3.2 ÉTUDE LOCALE

Pour une surface, il n'y a pas de façon simple d'étudier le comportement à l'infini, contrairement au cas des branches infinies pour les courbes. Nous allons donc directement nous intéresser au comportement local de la surface.

### 3.2.1 PLAN TANGENT

Fixons un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$  et une nappe paramétrée  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Pour étudier la surface au voisinage d'un point  $\varphi(s_0, t_0)$ , nous allons essayer de l'approcher par un plan. Pour ce faire, il suffit d'utiliser les développements limités des fonctions coordonnées  $x, y$  et  $z$  donnés par la proposition 3.1.5 pour obtenir un développement limité de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi(s, t) &= (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0), z(s_0, t_0)) + (s - s_0) \left( \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0) \right) \\ &+ (t - t_0) \left( \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0) \right) + d((s, t), (s_0, t_0)) \vec{\varepsilon}(d((s, t), (s_0, t_0))) \\ &= \varphi(s_0, t_0) + (s - s_0) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \\ &+ d((s, t), (s_0, t_0)) \vec{\varepsilon}(d((s, t), (s_0, t_0))) \\ &= \psi(s, t) + d((s, t), (s_0, t_0)) \vec{\varepsilon}(d((s, t), (s_0, t_0))), \end{aligned}$$

où les vecteurs  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0)$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$  sont définis dans le repère choisi par

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) &= \left( \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0) \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) &= \left( \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0) \right).\end{aligned}$$

Supposons que ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Alors, le support de la nappe paramétré  $t \mapsto \psi(t)$  est, d'après l'exemple 3.1.7, le plan dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$$

et passant par  $\varphi(s_0, t_0)$ . Comme

$$d(\varphi(s, t), \psi(s, t)) \underset{(s,t) \rightarrow (s_0, t_0)}{\longrightarrow} 0,$$

on peut dire que le plan approche le support de  $\varphi$ . Cette observation mène à la définition du plan tangent.

**DÉFINITION 3.2.1.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $\mathcal{S}$  son support. Un point de paramètre  $(s_0, t_0)$  est dit *régulier* si la famille de vecteurs

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right)$$

est libre. Dans ce cas le *plan tangent* à la surface au point  $\varphi(s_0, t_0)$  est le plan dirigé par ces deux vecteurs et passant par  $\varphi(s_0, t_0)$ . Il est noté  $T_{\varphi(s_0, t_0)}\mathcal{S}$ .

Comme pour les courbes, les dérivées partielles de  $\varphi$  seront vues comme des vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^3$ . Toutefois, les notations deviendraient lourdes si nous ajoutions systématiquement des flèches pour désigner ces vecteurs. Nous garderons donc les notations de la définition précédente dans toute la suite.

**Exemple 3.2.2.** Considérons la nappe paramétrée  $\varphi : (s, t) \mapsto (a, b, c) + s\vec{u} + t\vec{v}$  de l'Exemple 3.1.7. En notant  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  et  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = u_x \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = u_y \\ \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) = u_z \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = v_x \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = v_y \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = v_z \end{array} \right.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) &= \vec{u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) &= \vec{v}.\end{aligned}$$

Ainsi, le support de  $\varphi$  est son propre plan tangent en tout point.

Le plan tangent est un objet **géométrique** associé à la surface. Il doit donc être invariant par changement de paramétrage. Pour le démontrer, nous aurons besoin de calculer des dérivées partielles de fonctions composées grâce à la formule suivante :

**Proposition 3.2.3.** Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^2$ , soient  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g : V \rightarrow U$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $g(a, b) = (g_1(a, b), g_2(a, b))$  pour tout  $(a, b) \in V$ . Alors,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f \circ g}{\partial a} &= \frac{\partial g_1}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial s} \circ g + \frac{\partial g_2}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial t} \circ g \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial b} &= \frac{\partial g_1}{\partial b} \frac{\partial f}{\partial s} \circ g + \frac{\partial g_2}{\partial b} \frac{\partial f}{\partial t} \circ g\end{aligned}$$

**Proposition 3.2.4.** *Le plan tangent est invariant par changement de paramétrage.*

*Proof.* Soit  $F : V \rightarrow U$  un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^k$  et soit

$$\psi = \varphi \circ F : V \rightarrow U$$

la nappe reparamétrée par  $F$ . Soit  $(s_0, t_0) \in U$  le paramètre d'un point régulier et  $(a_0, b_0) = F^{-1}(s_0, t_0)$ . Pour simplifier les calculs, nous écrirons

$$\begin{aligned}\varphi(s, t) &= (X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ F(a, b) &= (F_1(a, b), F_2(a, b)) \\ \psi(a, b) &= (A(a, b), B(a, b), C(a, b))\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial a}(a_0, b_0) &= \frac{\partial F_1}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial X}{\partial s} \circ F(a_0, b_0) + \frac{\partial F_2}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial X}{\partial t} \circ F(a_0, b_0) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial X}{\partial s}(s_0, t_0) + \frac{\partial F_2}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial X}{\partial t}(s_0, t_0)\end{aligned}$$

et de même pour  $B$  et  $C$ . En regroupant, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}(a_0, b_0) = \frac{\partial F_1}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) + \frac{\partial F_2}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0).$$

En dérivant par rapport à  $b$ , on obtient la formule similaire

$$\frac{\partial \psi}{\partial b}(a_0, b_0) = \frac{\partial F_1}{\partial b}(a_0, b_0) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) + \frac{\partial F_2}{\partial b}(a_0, b_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0).$$

Ceci montre que le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\frac{\partial \psi}{\partial a}(a_0, b_0)$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial b}(a_0, b_0)$  est inclus dans celui engendré par les vecteurs  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0)$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$ . Considérons la matrice jacobienne de  $F$  au point  $(a_0, b_0)$  :

$$J_{(a_0, b_0)}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a}(a_0, b_0) & \frac{\partial F_1}{\partial b}(a_0, b_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial a}(a_0, b_0) & \frac{\partial F_2}{\partial b}(a_0, b_0) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la famille  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}(a_0, b_0), \frac{\partial \psi}{\partial b}(a_0, b_0)\right)$  dans la base  $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a_0, b_0), \frac{\partial \varphi}{\partial b}(a_0, b_0)\right)$  est donné par

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial a}(a_0, b_0), \frac{\partial \psi}{\partial b}(a_0, b_0) \right) &= \frac{\partial F_1}{\partial a}(a_0, b_0) \frac{\partial F_2}{\partial b}(a_0, b_0) - \frac{\partial F_1}{\partial b}(a_0, b_0) \frac{\partial F_2}{\partial a}(a_0, b_0) \\ &= \det(J_{(a_0, b_0)}(F)).\end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est non nul par la Proposition 3.1.13 donc la famille de vecteurs

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial a}(a_0, b_0), \frac{\partial \psi}{\partial b}(a_0, b_0) \right)$$

est libre, ce qui signifie que  $\psi$  est régulier au point  $(a_0, b_0)$  et que les plans tangents coïncident. ■

Le plan tangent possède également, comme tout plan de l'espace, des équations cartésiennes, qu'il est possible de décrire à l'aide des dérivées partielles de  $f$ . Posons  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  et soit  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ . Le point  $M$  appartient au plan tangent si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{M_0 M}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0)$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$ . Une façon d'exprimer cela est de dire que le déterminant de ces trois vecteurs est nul. En posant  $\varphi(s, t) = (X(s, t), Y(s, t), Z(s, t))$ , nous obtenons l'équation suivante du plan tangent :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial X}{\partial t}(s_0, t_0) & x - X(s_0, t_0) \\ \frac{\partial Y}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial Y}{\partial t}(s_0, t_0) & y - Y(s_0, t_0) \\ \frac{\partial Z}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial Z}{\partial t}(s_0, t_0) & z - Z(s_0, t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

## 3.2.2 VECTEUR NORMAL

Une façon alternative de décrire un plan dans l'espace est de donner un vecteur qui lui est orthogonal. Pour cela, il suffit de connaître deux vecteurs du plan qui ne sont pas colinéaires. En effet, étant donnés deux vecteurs  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  et  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  de l'espace, leur *produit vectoriel*  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

est orthogonal à la fois à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ , comme on le vérifie en calculant le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle &= u_x(u_y v_z - u_z v_y) + u_y(u_z v_x - u_x v_z) + u_z(u_x v_y - u_y v_x) \\ &= (u_y u_z - u_z u_y)v_x + (u_x u_z - u_z u_x)v_y + (u_x u_y - u_y u_x)v_z \\ &= 0 \end{aligned}$$

et de même pour  $\langle \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle$ . Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est donc orthogonal au plan qu'ils engendrent. Remarquons également que si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ . Ceci nous conduit à la définition suivante :

**DÉFINITION 3.2.5.** Soit  $(s_0, t_0)$  le paramètre d'un point régulier. Le *vecteur normal* à la surface au point  $\varphi(s_0, t_0)$  est le vecteur

$$\vec{N}(s_0, t_0) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\|} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0).$$

Le vecteur normal donne une autre façon d'obtenir l'équation du plan tangent. En effet, un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  appartient au plan tangent en  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  si et seulement si

$$\left\langle \overrightarrow{M_0 M}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\rangle = 0$$

**Exemple 3.2.6.** Considérons la nappe paramétrée

$$\varphi : (s, t) \mapsto (a + R \cos(s) \cos(t), b + R \sin(s) \cos(t), c + R \sin(t))$$

de l'Exemple 3.1.9. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = -R \sin(s) \cos(t) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = R \cos(s) \cos(t) \\ \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = -R \cos(s) \sin(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = -R \sin(s) \sin(t) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = R \cos(t) \end{cases}$$

Le calcul du produit vectoriel donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) &= \begin{pmatrix} R^2 \cos(s) \cos^2(t) \\ R^2 \sin(s) \cos^2(t) \\ R^2 \sin^2(s) \cos(t) \sin(t) + R^2 \cos^2(s) \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= R \cos(t) \begin{pmatrix} R \cos(s) \cos(t) \\ R \sin(s) \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= R \cos(t) \overrightarrow{C\varphi(s, t)}. \end{aligned}$$

où  $C$  est le point de coordonnées  $(a, b, c)$ . Si  $\cos(t) \neq 0$ , le point  $(s, t)$  est régulier quel que soit  $s$  et le vecteur normal est colinéaire au rayon de la sphère. Autrement dit, le plan tangent est le plan tangent usuel à la sphère au point correspondant. Si  $\cos(t) = 0$ , c'est-à-dire aux pôles nord et sud, le produit vectoriel est nul, ce qui signifie que les deux dérivées partielles sont colinéaires. Autrement dit, la nappe paramétrée  $\varphi$  n'est pas régulière en ces points.

### 3.2.3 NAPPES RÉGULIÈRES

L'Exemple 3.2.6 peut paraître surprenant, puisqu'on connaît le plan tangent à la sphère aux pôles nord et sud : ils ont pour équation  $z = c \pm R$ . Le problème ne vient bien sûr pas de la sphère, mais de la nappe paramétrée qui n'est pas régulière au sens suivant :

**DÉFINITION 3.2.7.** Une nappe paramétrée  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  est dite *régulière* si elle est régulière en tout point.

Il semble donc naturel de chercher un meilleur paramétrage qui soit régulier en tout point. Cependant, cela est impossible à cause du résultat suivant, qui découle du *Théorème d'inversion locale*. Rappelons que deux parties  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$  sont dites *homéomorphes* s'il existe une bijection  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues.

**Proposition 3.2.8.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée simple régulière. Alors,  $\varphi(U)$  est homéomorphe à  $U$ .

Pour conclure que la sphère n'admet pas de paramétrage régulier, il faut encore montrer qu'elle n'est pas homéomorphe à un ouvert du plan. Ce résultat vient du fait que la sphère est un espace topologique *compact*, ce qui n'est le cas d'aucun ouvert du plan.

La Proposition 3.2.8 suggère que notre notion de nappe paramétrée n'est pas la plus adaptée à l'étude des surfaces. En effet, peu de surfaces sont homéomorphes à un ouvert du plan. Toutefois, dans le cas de la sphère, on peut considérer le paramétrage  $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  donné par

$$\psi(s, t) = (a + R \cos(s) \cos(t), b + R \sin(t), c + R \sin(s) \cos(t)).$$

On peut montrer que les pôles nord et sud sont réguliers pour ce paramétrage et qu'en tout autre point régulier, le plan tangent est le même que pour le paramétrage  $\varphi$  de l'Exemple 3.2.6. Ainsi, en considérant en même temps les deux paramétrages  $\varphi$  et  $\psi$ , on peut décrire la sphère comme une surface régulière. Cette idée nous mènera à la définition des *variétés* à la Section 3.7. Pour le moment, retenons simplement qu'il nous suffit de trouver, pour un point donné, un paramétrage qui soit régulier en ce point pour pouvoir étudier ses propriétés locales.

## 3.3 COURBES SUR UNE SURFACE

Nous allons maintenant nous intéresser aux courbes tracées sur une surface. La façon naturelle de définir un tel objet est de considérer un arc paramétré  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  et une nappe paramétrée  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  tel que le support de  $\gamma$  est contenu dans  $U$ . Alors,  $\varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un arc paramétré dans l'espace contenu dans le support de  $\varphi$ , autrement dit c'est une courbe tracée sur le support de  $\varphi$ . Toutefois, l'étude de ce genre de courbe nécessiterait d'étendre les résultats que nous avons étudiés pour les courbes planes aux courbes dans l'espace. Plutôt que de procéder dans cette généralité, nous allons étudier certaines courbes sur les surfaces qui sont en fait contenues dans l'intersection de la surface avec un plan.

**DÉFINITION 3.3.1.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée de support  $\mathcal{S}$ , soit  $(s_0, t_0) \in U$  le paramètre d'un point régulier et soit  $P$  un plan affine de  $\mathbf{R}^3$  passant par  $\varphi(s_0, t_0)$  et dont la direction contient le vecteur normal  $\vec{N}(s_0, t_0)$ . On appelle *section normale* de  $\mathcal{S}$  au point  $(s_0, t_0) \in U$  toute courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow U$  telle que

- Il existe  $r_0 \in I$  tel que  $\gamma(r_0) = (s_0, t_0)$ ,
- $\varphi \circ \gamma \subset P \cap \mathcal{S}$ .

*Remarque 3.3.2.* Nous n'affirmons pas qu'étant donnée une nappe paramétrée et un plan contenant la normale, il existe toujours une section normale. Cela dit, cette affirmation est vraie pourvu que la surface soit suffisamment régulière. La preuve fait appel au *Théorème des fonctions implicites*.

## 3.3.1 VECTEURS TANGENTS

Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une section normale. On peut considérer l'arc paramétré  $\psi = \varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ , dont le support est une courbe tracée sur le support de  $\varphi$ . Soit  $r_0 \in I$  tel que  $\gamma(r_0) = (s_0, t_0)$ . Nous pouvons alors essayer de calculer le vecteur tangent à  $\psi$  au point  $r_0$ . Pour ce faire, posons

$$\begin{aligned}\gamma(r) &= (x(r), y(r)) \\ \varphi(s, t) &= (X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ \psi(r) &= (A(r), B(r), C(r))\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}A'(r) &= \frac{d}{dr}X(x(r), y(r)) = x'(r)\frac{\partial X}{\partial s}(x(r), y(r)) + y'(r)\frac{\partial X}{\partial t}(x(r), y(r)) \\ B'(r) &= \frac{d}{dr}Y(x(r), y(r)) = x'(r)\frac{\partial Y}{\partial s}(x(r), y(r)) + y'(r)\frac{\partial Y}{\partial t}(x(r), y(r)) \\ C'(r) &= \frac{d}{dr}Z(x(r), y(r)) = x'(r)\frac{\partial Z}{\partial s}(x(r), y(r)) + y'(r)\frac{\partial Z}{\partial t}(x(r), y(r))\end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur de coordonnées  $(A'(r), B'(r), C'(r))$  est égal à

$$x'(r)\frac{\partial \varphi}{\partial s} \circ \gamma(r) + y'(r)\frac{\partial \varphi}{\partial t} \circ \gamma(r) \in T_{\gamma(r)}\mathcal{S}.$$

On peut alléger l'expression précédente en introduisant la notion de différentielle.

**DÉFINITION 3.3.3.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . La *différentielle* de  $f$  au point  $(s, t)$  est l'application linéaire  $D_{(s,t)}f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$D_{(s,t)}f(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) + k\frac{\partial f}{\partial t}(s, t).$$

*Remarque 3.3.4.* Avec cette notion, on peut redéfinir le plan tangent au point  $\varphi(s_0, t_0)$  comme l'image de la différentielle au point  $(s_0, t_0)$ .

On a alors

$$\vec{\psi}'(r_0) = D_{(s_0, t_0)}\varphi(\vec{\gamma}'(r_0)).$$

Ceci permet de donner une nouvelle description du plan tangent en termes de vecteurs tangents aux sections normales.

**Proposition 3.3.5.** *Le plan tangent au point  $\varphi(s_0, t_0)$  est l'ensemble des vecteurs tangents des sections normales à  $\mathcal{S}$  en  $(s_0, t_0)$ .*

*Proof.* Ce qui précède montre que les vecteurs tangents des sections normales à  $\mathcal{S}$  en  $(s_0, t_0)$  appartiennent toujours au plan tangent. Réciproquement, soit  $\vec{u} \in T_{\varphi(s_0, t_0)}\mathcal{S}$ . Considérons le plan affine  $P$  dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{N}$  et passant par  $\varphi(s_0, t_0)$ . Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  est une section normale, son vecteur tangent appartient à  $P \cap (T_{\varphi(s_0, t_0)}\mathcal{S})$  qui est la droite engendrée par  $\vec{u}$ . Donc  $\vec{\psi}'(r_0) = \lambda\vec{u}$  pour un certain  $\lambda \neq 0$  et  $\lambda^{-1}\vec{\psi}'(r_0) = \vec{u}$ . Il suffit alors de considérer la section normale  $\gamma_\lambda : \lambda I \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par

$$\gamma_\lambda(t) = \gamma(\lambda^{-1}t).$$

En effet,  $\overrightarrow{(\varphi \circ \gamma_\lambda)'(\lambda r_0)} = \lambda^{-1}\overrightarrow{(\varphi \circ \gamma)'(r_0)} = \vec{u}$ . ■

3.3.2 COURBURE NORMALE

Nous venons de montrer que le plan tangent peut-être décrit par les vecteurs tangents des sections normales à la surface. Nous allons de même essayer de définir une notion de courbure pour les surfaces en utilisant les sections normales. Fixons une fois pour toute un plan affine  $P$  de  $\mathbf{R}^3$  passant par un point  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  et dont la direction contient le vecteur normal  $\vec{N}(s_0, t_0)$  et considérons une section normale  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  associée. Le vecteur tangent à  $\gamma$  en  $M_0$  est, d'après ce qui précède,

$$\vec{T}(M_0) = \frac{1}{\|D_{(s_0, t_0)}f(\vec{\gamma}'(r_0))\|} D_{(s_0, t_0)}f(\vec{\gamma}'(r_0)) \in (T_{M_0}\mathcal{S}) \cap P.$$

En particulier,  $\vec{T}(M_0)$  est orthogonal à  $\vec{N}(M_0)$ , donc  $\vec{N}(M_0)$  est, au signe près, le vecteur normal au support de  $\gamma$  au point  $M_0$ . Dans la suite, nous supposons que  $\vec{N}(M_0)$  est égal au vecteur normal. On sait par la Proposition 1.5.8 que la courbure de  $\psi = \varphi \circ \gamma$  au point de paramètre  $r_0$  est donnée par

$$c_\psi(r_0) = \frac{\langle \vec{N}(M_0), \vec{\psi}''(r_0) \rangle}{\|\vec{\psi}'(r_0)\|^2}.$$

Pour relier cette courbure à la surface, il faut exprimer cette quantité en fonction de  $\varphi$ . Notons qu'une condition nécessaire pour que ce calcul ait un sens est que  $\psi$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$ , ce qui nécessite que  $\varphi$  elle-même soit de classe  $\mathcal{C}^2$ . Nous utiliserons les mêmes notations que pour l'étude du vecteur tangent en écrivant

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= (x(r), y(r)) \\ \varphi(s, t) &= (X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ \psi(r) &= (A(r), B(r), C(r)) \end{aligned}$$

Commençons par calculer  $A''(r)$  en dérivant l'expression obtenue précédemment pour  $A'(r)$  :

$$\begin{aligned} A''(r) &= x''(r) \frac{\partial X}{\partial s}(x(r), y(r)) + y''(r) \frac{\partial X}{\partial t}(x(r), y(r)) + x'(r)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial s^2}(x(r), y(r)) \\ &+ y'(r)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x(r), y(r)) + x'(r)y'(r) \left( \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s}(x(r), y(r)) + \frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t}(x(r), y(r)) \right). \end{aligned}$$

Il nous faut des notations pour simplifier cette expression et poursuivre notre étude. Rappelons le résultat suivant de calcul différentiel :

**THÉORÈME 3.3.6** (Schwarz) Soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors, pour tout  $(s, t) \in U$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(s, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s, t).$$

Il s'ensuit que l'application  $D_{(s, t)}^2 f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$D_{(s, t)}^2 f(h, k) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, t) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(s, t) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$$

est une forme quadratique (voir Définition 3.4.1) appelée *différentielle seconde* de  $f$ . Nous pouvons donc simplifier notre calcul précédent et écrire

$$A''(r) = x''(r) \frac{\partial X}{\partial s}(x(r), y(r)) + y''(r) \frac{\partial X}{\partial t}(x(r), y(r)) + D_{(x(r), y(r))}^2 X(x(r), y(r)).$$

Un calcul similaire donne

$$\begin{aligned} B''(r) &= x''(r) \frac{\partial Y}{\partial s}(x(r), y(r)) + y''(r) \frac{\partial Y}{\partial t}(x(r), y(r)) + D_{(x(r), y(r))}^2 Y(x(r), y(r)) \\ C''(r) &= x''(r) \frac{\partial Z}{\partial s}(x(r), y(r)) + y''(r) \frac{\partial Z}{\partial t}(x(r), y(r)) + D_{(x(r), y(r))}^2 Z(x(r), y(r)) \end{aligned}$$

Notons  $D_{(s_0, t_0)}^2 \varphi(h, k)$  le vecteur de  $\mathbf{R}^3$  de coordonnées

$$\left( D_{(s_0, t_0)}^2 X(h, k), D_{(s_0, t_0)}^2 Y(h, k), D_{(s_0, t_0)}^2 Z(h, k) \right).$$

On a alors

$$\vec{\psi}''(r_0) = D_{(s_0, t_0)} \varphi(\vec{\gamma}''(r_0)) + D_{(s_0, t_0)}^2 \varphi(\vec{\gamma}'(r_0)).$$

Comme  $\vec{N}(M_0)$  est orthogonal à  $T_{M_0} \mathcal{S}$  qui est l'image de  $D_{(s_0, t_0)} \varphi$  par la Remarque 3.3.4, on a

$$\left\langle \vec{\psi}''(r_0), \vec{N}(M_0) \right\rangle = \left\langle D_{(s_0, t_0)}^2 \varphi(\vec{\gamma}'(r_0)), \vec{N}(M_0) \right\rangle.$$

Il est donc naturel de poser les définitions suivantes :

**DÉFINITION 3.3.7.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^2$ , soit  $\mathcal{S}$  son support et soit  $(s_0, t_0) \in U$ . On appelle *première forme fondamentale* de  $\mathcal{S}$  au point  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  la forme quadratique

$$\Phi_1 : (h, k) \mapsto \|D_{(s_0, t_0)} \varphi(h, k)\|^2.$$

On appelle *deuxième forme fondamentale* de  $\mathcal{S}$  au point  $M_0$  la forme quadratique

$$\Phi_2 : (h, k) \mapsto \left\langle D_{(s_0, t_0)}^2 \varphi(h, k), \vec{N}(M_0) \right\rangle.$$

*Remarque 3.3.8.* En géométrie différentielle, les formes fondamentales sont souvent notées  $I_{M_0}$  et  $II_{M_0}$ .

Nous pouvons maintenant exprimer la courbure d'une section normale.

**Proposition 3.3.9.** *La courbure de  $\psi$  au point de paramètre  $r_0$  est*

$$c_\psi(r_0) = \frac{\Phi_2(\vec{\gamma}'(r_0))}{\Phi_1(\vec{\gamma}'(r_0))}.$$

*Proof.* Ceci découle du calcul précédent et du fait que  $\vec{\psi}'(r_0) = D_{(s_0, t_0)} \varphi(\vec{\gamma}'(r_0))$ . ■

Cette courbure dépend a priori du paramétrage  $\gamma$ . Toutefois, il semble géométriquement qu'elle ne dépende que du plan  $P$ , puisque son intersection avec  $\mathcal{S}$  détermine le support de la section normale. Soit  $\vec{v} \in (T_{M_0} \mathcal{S}) \cap P$  un vecteur non nul. Comme  $(T_{M_0} \mathcal{S}) \cap P$  est une droite,  $\vec{\psi}'(r_0) = \lambda \vec{v}$  pour un certain  $\lambda \in \mathbf{R}$  non nul. Comme  $(s_0, t_0)$  est un point régulier,  $D_{(s_0, t_0)} \varphi$  est injective et son image est égale au plan tangent. Il existe donc un unique  $\vec{u} \in \mathbf{R}^2$  tel que  $D_{(s_0, t_0)} \varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ . On a alors  $\vec{\gamma}'(r_0) = \lambda \vec{u}$  et

$$c_\psi(r_0) = \frac{\Phi_2(\lambda \vec{u})}{\Phi_1(\lambda \vec{u})} = \frac{\lambda^2 \Phi_2(\vec{u})}{\lambda^2 \Phi_1(\vec{u})} = \frac{\Phi_2(\vec{u})}{\Phi_1(\vec{u})}.$$

Si on choisit un autre vecteur  $\vec{w} = \mu \vec{u} \in (T_{M_0} \mathcal{S}) \cap P$ ,  $\vec{u}$  est remplacé par  $\mu \vec{u}$ . Comme

$$\Phi_i(\mu \vec{u}) = \mu^2 \Phi_i(\vec{u})$$

pour  $i = 1, 2$ , cela ne change pas la valeur du quotient. La courbure est donc totalement déterminée par le plan  $P$ .

**DÉFINITION 3.3.10.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^2$  et soit  $(s_0, t_0)$  le paramètre d'un point régulier. Pour un plan  $P$  passant par  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  et dont la direction contient  $\vec{N}(M_0)$ , on appelle *courbure normale* dans la direction de  $P$  le nombre

$$c_n(P) = \frac{\Phi_2(\vec{u})}{\Phi_1(\vec{u})}$$

où  $\vec{u} = (D_{(s_0, t_0)} \varphi)^{-1}(\vec{v})$  et  $\vec{v} \in (T_{M_0} \mathcal{S}) \cap P$  est un vecteur non nul.

### 3.4 COURBURE

Nous avons vu qu'à chaque plan contenant la normale à une surface est associé une courbure normale. Pour rendre compte du phénomène de courbure dans son intégralité, il faut prendre en compte toutes ces courbures normales et la façon dont elles varient. Autrement dit, la courbure d'une surface en un point pourrait être pensée comme le quotient de formes quadratiques  $\Phi_2/\Phi_1$ .

#### 3.4.1 COURBURE DE GAUSS

Pour mieux comprendre cet objet, nous allons d'abord lui donner une forme plus simple en utilisant les propriétés des formes quadratiques du plan euclidien. Commençons par en rappeler la définition.

DÉFINITION 3.4.1. Une forme quadratique du plan est une fonction  $Q : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de la forme

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy.$$

Une forme quadratique est dite *définie positive* si  $Q(x, y) > 0$  dès que  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Les formes quadratiques ont de nombreuses propriétés remarquables, notamment du point de vue de la réduction. Nous ne donnerons ici que le résultat dont nous avons besoin en dimension 2. Remarquons que plutôt que de considérer  $Q$  comme une fonction de deux variables, on peut la considérer comme une fonction dont la variable est un vecteur de  $\mathbf{R}^2$  : si  $\vec{v}$  a pour coordonnées  $(x, y)$  dans la base canonique, on pose  $Q(\vec{v}) = Q(x, y)$ . Cette approche permet d'exprimer  $Q$  dans différentes bases.

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $(\cdot, \cdot)$  un produit scalaire sur  $\mathbf{R}^2$  et soit  $Q$  une forme quadratique. Alors, il existe une base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  de  $\mathbf{R}^2$  orthonormée pour  $(\cdot, \cdot)$  telle que pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,*

$$Q(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha^2Q(\vec{v}_1) + \beta^2Q(\vec{v}_2).$$

*Proof.* Soit  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  une base de  $\mathbf{R}^2$  orthonormée pour  $(\cdot, \cdot)$  et notons  $(x, y)$  et  $(x', y')$  les coordonnées respectives de  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . Si  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , alors

$$\begin{aligned} Q(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) &= a(\alpha x + \beta x')^2 + b(\alpha y + \beta y')^2 + c(\alpha x + \beta x')(\alpha y + \beta y') \\ &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha\beta. \end{aligned}$$

Autrement dit, si  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(\alpha, \beta)$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , alors  $Q(\vec{u}) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha\beta$ . Considérons maintenant  $\theta \in \mathbf{R}$  et posons

$$\begin{cases} \vec{u}_1(\theta) &= \cos(\theta)\vec{v}_1 + \sin(\theta)\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2(\theta) &= -\sin(\theta)\vec{v}_1 + \cos(\theta)\vec{v}_2 \end{cases}$$

Alors, la famille  $(\vec{u}_1(\theta), \vec{u}_2(\theta))$  est toujours orthonormée pour  $(\cdot, \cdot)$  et la même preuve que pour la Proposition 2.2.2 montre qu'il existe  $\theta_0$  tel que

$$Q(\alpha\vec{u}_1(\theta_0) + \beta\vec{u}_2(\theta_0)) = A'\alpha^2 + B'\beta^2. \tag{3.2}$$

Il suffit donc de poser  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1(\theta_0)$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{u}_2(\theta_0)$  et de constater que d'après l'Équation (3.2),  $A' = Q(\vec{v}_1)$  et  $B' = Q(\vec{v}_2)$ . ■

Nous pouvons maintenant appliquer ce résultat à l'étude des formes fondamentales.

**THÉORÈME 3.4.3** (Euler) Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée, soit  $(s_0, t_0) \in U$  le paramètre d'un point régulier et soit  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$ . Alors, il existe deux vecteurs normaux orthogonaux  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_{M_0}\mathcal{S}$  et deux réels  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  tels que si  $P$  est un plan contenant la normale à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$  et si  $(T_{M_0}\mathcal{S}) \cap P$  forme un angle  $\theta$  avec  $\vec{v}_1$ , on a

$$c_n(P) = \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta).$$

||

*Proof.* Le point  $M_0$  étant régulier,  $D_{(s_0, t_0)}\varphi$  est inversible donc la première forme fondamentale  $\Phi_1$  est définie positive. Par conséquent, il existe un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathbf{R}^2$  tel que pour tout  $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$\left( \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right) = \Phi_1(h, k)$$

Notons  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  la base orthonormée pour  $(\cdot, \cdot)$  donnée par la Proposition 3.4.2 appliquée à  $\Phi_2$  et posons  $\lambda_1 = \Phi_2(\vec{u}_1)$  et  $\lambda_2 = \Phi_2(\vec{u}_2)$ . Pour  $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ , on a

$$\frac{\Phi_2(\vec{u})}{\Phi_1(\vec{u})} = \frac{\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Posons, pour  $i = 1, 2$ ,  $\vec{v}_i = D_{(s_0, t_0)}(\varphi)(\vec{u}_i)$ . Si  $P$  est un plan contenant la normale à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$  et si  $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in (T_{M_0}\mathcal{S}) \cap P$ , alors l'angle  $\theta$  entre  $\vec{v}$  et  $\vec{v}_1$  satisfait

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \sin(\theta) &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$c_n(P) = \frac{\Phi_2(\vec{u})}{\Phi_1(\vec{u})} = \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta).$$

■

Les valeurs possibles de la courbure normale sont donc toutes les valeurs comprises entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , ce qui mène à la définition suivante.

**DÉFINITION 3.4.4.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^2$  et soit  $(s_0, t_0) \in U$  le paramètre d'un point régulier. Les *courbures principales* au point  $\varphi(s_0, t_0)$  sont le minimum et le maximum du quotient des formes fondamentales. Les directions des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  associés sont appelées *directions principales* et elles sont orthogonales.

Nous avons progressé dans notre compréhension de la courbure d'une surface : elle est, en chaque point, déterminé par deux nombres. Cependant, ces courbures principales ne sont pas tout à fait des objets géométriques, au sens où elles ne sont pas invariantes par changement de paramétrage.

**Proposition 3.4.5.** *Un changement de paramétrage multiplie les courbures principales par  $\pm 1$ .*

*Proof.* Soit  $F : V \rightarrow U$  un changement de paramétrage et soit  $\psi : \varphi \circ F : V \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe reparamétrée. Pour  $(a_0, b_0) \in V$  et  $(s_0, t_0) = F(a_0, b_0)$  des paramètres de points réguliers, nous noterons  $\Phi_i$  et  $\Psi_i$  les formes fondamentales de  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement, pour  $i = 1, 2$ . En utilisant les formules de dérivation des fonctions composées, on voit que la différentielle de  $\psi$  s'écrit

$$D_{(a_0, b_0)}\psi = (D_{(s_0, t_0)}\varphi) \circ D_{(a_0, b_0)}F,$$

ce qui nous donne la première forme fondamentale :

$$\Psi_1 = \Phi_1 \circ D_{(a_0, b_0)}F.$$

Pour la deuxième forme fondamentale, il nous faut d'abord calculer le nouveau vecteur normal. Soient  $F_1, F_2 : V \rightarrow \mathbf{R}$  telles que  $F(a, b) = (F_1(a, b), F_2(a, b))$  pour tout  $(a, b) \in V$ . La formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial a} \wedge \frac{\partial\psi}{\partial b} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial a} \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial F_2}{\partial a} \frac{\partial\varphi}{\partial b} \right) \wedge \left( \frac{\partial F_1}{\partial b} \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial F_2}{\partial b} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) \\ &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial a} \frac{\partial F_2}{\partial b} - \frac{\partial F_2}{\partial a} \frac{\partial F_1}{\partial b} \right) \frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ &= \det \left( J_{(a_0, b_0)}(F) \right) \frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Notons  $j_{(a_0, b_0)}(F)$  le déterminant de la matrice jacobienne de  $F$ . En divisant par la norme, on obtient le nouveau vecteur normal  $\vec{N}_\psi$  qui est donc égal à

$$\vec{N}_\psi(a_0, b_0) = \frac{j_{(a_0, b_0)}(F)}{|j_{(a_0, b_0)}(F)|} \vec{N}_\varphi(s_0, t_0).$$

Il nous reste à calculer la différentielle seconde de  $\psi$ . Cela se fait en appliquant la formule de dérivation des fonctions composées à  $D_{(a_0, b_0)}\psi$  :

$$D_{(a_0, b_0)}^2\psi = (D_{(s_0, t_0)}^2\varphi) \circ D_{(a_0, b_0)}F + (D_{(s_0, t_0)}\varphi) \circ D_{(a_0, b_0)}^2F.$$

Par la Remarque 3.3.4, l'image du second terme est incluse dans  $T_{M_0}\mathcal{S}$ , qui est orthogonal à  $\vec{N}_\varphi(s_0, t_0)$  et donc également à  $\vec{N}_\psi(a_0, b_0)$ . Par conséquent, seul le premier terme intervient dans la deuxième forme fondamentale et on a

$$\Psi_2 = \frac{j_{(a_0, b_0)}(F)}{|j_{(a_0, b_0)}(F)|} \Phi_2 \circ D_{(a_0, b_0)}F.$$

Le quotient de  $j_{(a_0, b_0)}(F)$  par sa valeur absolue est égal à  $\pm 1$ , d'où

$$\frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \pm \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \circ D_{(a_0, b_0)}F.$$

Comme  $J_{(a_0, b_0)}(F)$  est inversible,  $D_{(a_0, b_0)}F$  est bijective et le minimum et le maximum de  $\Psi_2/\Psi_1$  sont les mêmes, au signe près, que ceux de  $\Phi_2/\Phi_1$ . D'après le Théorème 3.4.3, ces deux nombres sont les courbures principales. ■

*Remarque 3.4.6.* Si le déterminant de la matrice jacobienne de  $F$  est négatif, le vecteur normal change de sens et n'est donc plus positivement colinéaire au vecteur normal à  $\psi$ . C'est la raison pour laquelle  $\Phi_2$  change de signe. Réciproquement, si au début le vecteur normal n'était pas dans le bon sens, il suffirait de faire un changement de paramétrage dont la matrice jacobienne a un déterminant négatif. Ainsi, notre hypothèse sur le vecteur normal n'était en fait pas restrictive.

On peut utiliser les courbures principales pour définir plusieurs quantités significatives, la plus importante étant la courbure de Gauss qui, elle, est **géométrique** au sens où elle est invariante par changement de paramétrage.

**DÉFINITION 3.4.7.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée et soit  $M_0$  un point régulier. On a les notions suivantes de courbure au point  $M_0$  :

- La *courbure moyenne*  $c_m(M_0)$  est la moyenne des courbures principales en  $M_0$ , c'est-à-dire

$$c_m(M_0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

- La *courbure de Gauss*  $K(M_0)$  est le produit des courbures principales en  $m_0$ , c'est-à-dire

$$K(M_0) = \lambda_1 \times \lambda_2.$$

- La *courbure totale* de  $\varphi$  est l'intégrale sur la surface de sa courbure de Gauss, qui est donnée par

$$c(\varphi) = \iint_U K(\varphi(s, t)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt$$

si cette intégrale a un sens.

La Proposition 3.4.5 implique que la courbure de Gauss est invariante par changement de paramétrage. C'est donc la notion de courbure que nous retiendrons comme la plus significative. Son signe permet de classer les points d'une surface de la façon suivante :

DÉFINITION 3.4.8. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée, soit  $(s_0, t_0) \in U$  le paramètre d'un point régulier et soit  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$ . Le point  $M_0$  est dit :

- *Elliptique* si  $K(M_0) > 0$ .
- *Hyperbolique* si  $K(M_0) < 0$ .
- *Parabolique* si  $K(M_0) = 0$  mais une des courbures principales est non nulle.

De plus, un point auquel les deux courbures principales sont égales est appelé *ombilic*.

### 3.4.2 POSITION PAR RAPPORT AU PLAN TANGENT

La courbure de Gauss donne également une information sur la position de la surface par rapport à son plan tangent. Pour le voir, il nous faut réinterpréter la seconde forme fondamentale. Considérons une nappe paramétrée  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ , soit  $(s_0, t_0) \in U$  le paramètre d'un point régulier et soit  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$ . On souhaite étudier la distance d'un point  $M = \varphi(s, t)$  au plan tangent  $T_{M_0}\mathcal{S}$  à  $\mathcal{S}$  en  $M_0$ .

Rappelons que cette distance  $d(M, T_{M_0}\mathcal{S})$  est par définition la distance de  $M$  à son projeté orthogonal  $H$  sur  $T_{M_0}\mathcal{S}$ . Comme le vecteur  $\overrightarrow{HM}$  est orthogonal à  $T_{M_0}\mathcal{S}$ , il existe un réel  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que

$$\overrightarrow{HM} = \lambda \vec{N}(s_0, t_0).$$

De plus, le point  $H$  appartenant au plan tangent,  $\overrightarrow{HM_0}$  est un vecteur orthogonal à  $\vec{N}(s_0, t_0)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} d(M, T_{M_0}\mathcal{S}) &= \|\overrightarrow{HM}\| \\ &= \left| \langle \overrightarrow{HM}, \vec{N}(s_0, t_0) \rangle \right| \\ &= \left| \langle \overrightarrow{HM_0}, \vec{N}(s_0, t_0) \rangle + \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{N}(s_0, t_0) \rangle \right| \\ &= \left| \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{N}(s_0, t_0) \rangle \right|. \end{aligned}$$

Il nous reste à estimer cette quantité pour un point  $M$  proche de  $M_0$ , ce qui se fait bien évidemment à l'aide d'un développement limité. Rappelons que le développement limité à l'ordre 2 de  $\varphi$  s'écrit

$$\varphi(s_0 + h, t_0 + k) = \varphi(s_0, t_0) + D_{s_0, t_0}(\varphi)(h, k) + \frac{1}{2}D_{s_0, t_0}^2(\varphi)(h, k) + o(\|(h, k)\|^2).$$

De plus,  $D_{s_0, t_0}(\varphi)(h, k)$  est orthogonal à  $\vec{N}(s_0, t_0)$  par la Remarque 3.3.4, donc pour un point  $M = \varphi(s_0 + h, t_0 + k)$  on a

$$\begin{aligned} d(M, T_{M_0}\mathcal{S}) &= \left| \left\langle \frac{1}{2}D_{s_0, t_0}^2(\varphi)(h, k), \vec{N}(s_0, t_0) \right\rangle \right| + o(\|(h, k)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} |\Phi_2(h, k)| + o(\|(h, k)\|^2). \end{aligned}$$

Autrement dit, la seconde forme fondamentale détermine, au second ordre près, la distance de la surface au plan tangent. Si plutôt que la distance on s'intéresse à la valeur de  $\lambda$  lui-même (et donc à son signe), le même calcul montre que

$$\langle \overrightarrow{HM}, \vec{N}(s_0, t_0) \rangle = \frac{1}{2} \Phi_2(h, k) + o(\|(h, k)\|^2).$$

Cette équation indique en particulier que le signe du produit scalaire est, pour des points suffisamment proches de  $M_0$ , le même que le signe de la seconde forme fondamentale. On en déduit la position de la surface par rapport au plan tangent, qui est déterminée par le signe de  $\lambda$ .

- Si la forme quadratique  $\Phi_2$  est de signe constant, alors la surface reste toujours du même côté de son plan tangent au voisinage de  $M_0$ .

- Si la forme quadratique  $\Phi_2$  change de signe, alors la surface possède des points arbitrairement proches de  $M_0$  des deux côtés du plan tangent, autrement dit elle traverse son plan tangent en  $M_0$ .

Il est facile de voir que la forme quadratique  $\Phi_2$  est de signe constant si et seulement si son déterminant est positif. On peut donc réinterpréter de que nous venons de dire à l'aide de la courbure de Gauss grâce à la formule de la Proposition 3.4.15 ci-après.

### 3.4.3 EXEMPLES

Nous allons maintenant traiter trois exemples de calculs de courbure.

**Exemple 3.4.9.** Soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée de l'Exemple 3.1.7, dont le support est le plan dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et passant par le point de coordonnées  $(a, b, c)$ . Nous avons vu qu'en tout point  $(s_0, t_0)$ ,

$$D_{(s_0, t_0)}\varphi(h, k) = h\vec{u} + k\vec{v}.$$

Autrement dit, la fonction  $(s, t) \mapsto D_{(s, t)}\varphi$  est constante. Par conséquent, ses dérivées partielles sont nulles. Autrement dit,  $D_{(s, t)}^2\varphi$  est la forme quadratique nulle pour tout  $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ . Ceci implique que les courbures principales en tout point sont nulles, ainsi que la courbure moyenne et la courbure de Gauss. En particulier, tous les points sont des ombilics.

**Exemple 3.4.10.** Soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée de l'Exemple 3.1.9, dont le support est la sphère de centre de coordonnées  $(a, b, c)$  et de rayon  $R$ . En utilisant les calculs de l'Exemple 3.2.6 et en remarquant que les deux dérivées partielles premières sont orthogonales, on a

$$\begin{aligned} \Phi_1(h, k) &= h^2 \left\| \begin{pmatrix} -R \sin(s) \cos(t) \\ R \cos(s) \cos(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix} \right\|^2 + k^2 \left\| \begin{pmatrix} -R \cos(s) \sin(t) \\ -R \sin(s) \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= R^2(h^2 \cos^2(t) + k^2). \end{aligned}$$

D'autre par, on a

$$D_{(s, t)}^2\varphi(h, k) = h^2 \begin{pmatrix} -R \cos(s) \cos(t) \\ -R \sin(s) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} -R \cos(s) \cos(t) \\ -R \sin(s) \cos(t) \\ -R \sin(t) \end{pmatrix} + 2hk \begin{pmatrix} +R \sin(s) \sin(t) \\ -R \cos(s) \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on déduit de l'expression du produit vectoriel de l'Exemple 3.2.6 les coordonnées du vecteur normal :

$$\vec{N}(s, t) = \begin{pmatrix} \cos(s) \cos(t) \\ \sin(s) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

En remarquant que le terme en  $hk$  lui est orthogonal, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_2(h, k) &= h^2 \left( -R \cos^2(s) \cos^2(t) - R \sin^2(s) \cos^2(t) \right) \\ &\quad + k^2 \left( -R \cos^2(s) \cos^2(t) - R \sin^2(s) \cos^2(t) - R \sin^2(t) \right) \\ &= - \left( h^2 \cos^2(t) + k^2 \right) \\ &= -R^{-1} \Phi_1(h, k). \end{aligned}$$

Ainsi le quotient des formes fondamentales est constant égal à  $-R^{-1}$ . Le signe moins n'est bien sûr dû qu'au paramétrage et on pourrait obtenir un quotient positif en faisant un changement de paramétrage approprié. Ainsi, les courbures principales sont toutes deux égales à  $-R^{-1}$  et la courbure de Gauss est égale à  $R^{-2}$ . Cette fonction étant constante, la courbure totale est égale à son produit par l'aire de la sphère, c'est-à-dire  $4\pi$  (voir l'Exemple 3.5.6). De plus, tout point est un ombilic. Il est possible de montrer qu'une surface dont tous les points sont des ombilics est contenue dans un plan ou dans une sphère.

**Exemple 3.4.11.** Soit  $R > 0$  et soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie par

$$\varphi(s, t) = (R \sin(s), R \cos(s), t).$$

Son support géométrique est un *cylindre de révolution* d'axe  $O\vec{k}$ . Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = R \cos(s) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = -R \sin(s) \\ \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = 1 \end{cases}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -R \sin(s) \\ -R \cos(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les deux dérivées partielles sont orthogonales et qu'il n'y aura par conséquent pas de terme en  $hk$  dans  $\Phi_1$ . Calculons maintenant la différentielle seconde :

$$D_{(s,t)}^2 \varphi(h, k) = h^2 \begin{pmatrix} -R \sin(s) \\ -R \cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2hk \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -Rh^2 \begin{pmatrix} \sin(s) \\ \cos(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\Phi_2(h, k) = Rh^2(\sin^2(s) + \cos^2(s)) = Rh^2.$$

Les courbures principales sont ainsi les extrema de la fonction

$$(h, k) \mapsto \frac{Rh^2}{R^2h^2 + k^2}.$$

Il est clair que le minimum est 0 (dès que  $h = 0$ ) et que le maximum est  $1/R$  (dès que  $k = 0$ ). Tous les points du cylindre sont donc paraboliques et sa courbure de Gauss est par conséquent identiquement nulle.

#### 3.4.4 COURBURE ET DÉTERMINANT

La courbure de Gauss est une information importante sur la surface, mais elle nécessite de déterminer les courbures principales, ce qui est en général difficile. Il existe heureusement un moyen d'obtenir la courbure de Gauss sans passer par les courbures principales. Pour cela nous avons besoin de la notion de déterminant d'une forme quadratique.

**DÉFINITION 3.4.12.** Soit  $Q$  une forme quadratique donnée par

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy.$$

Son *déterminant* est

$$\det(Q) = ab - \frac{c^2}{4}.$$

**Remarque 3.4.13.** Le déterminant est donc simplement le discriminant de l'équation du second degré  $Q(x, y) = 0$ .

Dans le cas des courbes planes, nous avons exprimé la courbure à l'aide d'un déterminant. L'intérêt de cette formule et que le déterminant peut être calculé dans n'importe quelle base orthonormée. Le déterminant des formes quadratiques possède une propriété similaire. Plus précisément, considérons une forme quadratique  $Q : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  et une base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  de  $\mathbf{R}^2$ . On peut alors considérer la forme quadratique  $Q' : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$Q'(\alpha, \beta) = Q(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2).$$

La forme quadratique  $Q'$  est en fait la même que  $Q$ , mais exprimée dans la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ . Il est bien sûr possible d'écrire ses coefficients en fonction de ceux de  $Q$ , mais la formule générale est compliquée. Par contre, il est facile de relier le déterminant de  $Q'$  à celui de  $Q$ .

**Proposition 3.4.14.** *Soit  $Q$  une forme quadratique, soit  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  une base et soit  $Q'$  la forme quadratique définie par*

$$Q'(\alpha, \beta) = Q(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2).$$

Alors,  $\det(Q') = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^2 \det(Q)$ .

*Proof.* Notons  $(x, y)$  et  $(x', y')$  les coordonnées respectives de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . On sait que

$$Q'(\alpha, \beta) = \alpha^2 Q(\vec{v}_1) + \beta^2 Q(\vec{v}_2) + \alpha\beta(2axx' + 2byy' + c(xy' + yx')).$$

Il nous faut donc calculer

$$\det(Q') = Q(\vec{v}_1)Q(\vec{v}_2) - \frac{(2axx' + 2byy' + c(xy' + yx'))^2}{4}.$$

Le calcul étant un peu long, nous allons procéder par étapes :

- Les termes multiples de  $ab$  donnent

$$x^2y'^2 + y^2x'^2 - 2xx'yy' = (xy' - yx')^2$$

- Les termes multiples de  $bc$  donnent

$$y^2x'y' + xy y'^2 - yy'(xy' + yx') = 0$$

- Les termes multiples de  $ac$  donnent

$$x^2x'y' + xyx'^2 - xx'(xy' + yx') = 0$$

- Les termes multiples de  $a^2$  et  $b^2$  donnent 0

- Les termes multiples de  $c^2$  donnent

$$xyx'y' - \frac{x^2y'^2 + 2xyx'y' + x'^2y^2}{4} = \frac{(xy' - yx')^2}{4}.$$

En regroupant on obtient

$$\det(Q') = (xy' - yx')^2 \left( ab - \frac{c^2}{4} \right) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^2 \det(Q).$$

■

Grâce à ce lemme, nous pouvons exprimer la courbure de Gauss à l'aide des déterminants des formes fondamentales.

**Proposition 3.4.15.** *Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée et soit  $M_0$  un point régulier. Alors,*

$$K(M_0) = \frac{\det(\Phi_2)}{\det(\Phi_1)}.$$

*Proof.* Soit  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  la base du Théorème 3.4.3 et soient  $\Phi'_1$  et  $\Phi'_2$  les formes fondamentales exprimées dans cette base. On a, d'après le Théorème 3.4.3,  $\det(\Phi'_2) = \lambda_1\lambda_2$  et  $\det(\Phi'_1) = 1$ . On en déduit par la Proposition 3.4.14 que

$$\frac{\det(\Phi_2)}{\det(\Phi_1)} = \frac{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^2 \det(\Phi'_2)}{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^2 \det(\Phi'_1)} = \frac{\det(\Phi'_2)}{\det(\Phi'_1)} = \lambda_1\lambda_2 = K(M_0).$$

■

Nous avons montré que les courbures principales sont invariantes au signe près par changement de paramétrage. Toutefois, leur définition ne fait pas seulement intervenir le paramétrage  $\varphi$ , mais aussi le vecteur normal, qui n'a de sens que parce que nous avons considéré les surfaces comme des parties de  $\mathbf{R}^3$ . Autrement dit, notre définition de la courbure de Gauss dépend a priori de la façon dont la surface est représentée dans  $\mathbf{R}^3$ . Un théorème très profond (et dont la preuve dépasse notre cadre) affirme que cela n'est pas le cas : la courbure de Gauss est un nombre qui ne dépend que de la surface en elle-même et pas de la façon dont on la représente.

**THÉORÈME 3.4.16** (Gauss – Theorema Egregium) La courbure de Gauss est invariante par isométries locales. En particulier, elle ne dépend pas de la représentation de la surface dans  $\mathbf{R}^3$ .

La courbure de Gauss est donc une propriété intrinsèque de la nappe paramétrée  $\varphi$ . Ainsi, on peut parler de la courbure totale de  $\varphi$ , qui est bien définie. On peut d'ailleurs montrer qu'elle ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à la surface.

**THÉORÈME 3.4.17** (Gauss – Bonnet) La courbure totale d'une surface compacte sans bord ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent.

Il existe une formule explicite (dite *formule de Gauss-Bonnet*) qui montre que la courbure totale est un multiple entier de  $4\pi$ . L'entier en question est déterminé par le *genre* de la surface, un invariant topologique que nous ne définirons pas.

## 3.5 AIRE D'UNE SURFACE

Nous allons dans cette section voir comment calculer l'aire d'une nappe paramétrée. Encore une fois, nous allons nous inspirer du cas des courbes. Nous avons obtenu la longueur comme un intégrale en approchant la courbe par des segments de plus en plus fins. On peut donc imaginer qu'il suffira d'approcher la surface par des polygones de plus en plus fins pour obtenir l'expression de l'aire. Une telle approche nécessite des hypothèses plus restrictives que dans le cas des courbes, dues aux subtilités de l'intégration des fonctions de deux variables. Toutefois, dans les cas où l'approximation se comporte bien, elle mène à une expression de l'aire de la surface que nous pourrions ensuite prendre comme définition.

### 3.5.1 APPROXIMATION PAR DES PARALLÉLOGRAMMES

Dans le cas des courbes, nous avons décomposé l'intervalle de définition  $I$  de l'arc paramétré en segments, puis nous avons considéré les segments formés par les images des extrémités des segments de départ. Nous allons procéder de même ici en utilisant des rectangles. Soit donc  $[a, b] \times [c, d]$  un rectangle inclus dans  $U$ . Il nous faudrait calculer l'aire du quadrilatère  $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\varphi(d)$ , mais cette aire n'est pas bien définie quand les quatre points ne sont pas coplanaires. Nous allons donc utiliser le développement limité de  $\varphi$  pour approcher cette aire. Plus précisément, soit  $(s_0, t_0) \in U$  et  $h, k \in \mathbf{R}$  tels que  $R_{h,k} = [s_0, s_0 + h] \times [t_0, t_0 + k] \subset U$ . Alors,

$$\varphi(s_0 + h, t_0 + k) = \varphi(s_0, t_0) + h \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) + k \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) + \|(h, k)\| \vec{\varepsilon}(h, k).$$

En prenant  $h = 0$  ou  $k = 0$  dans cette expression, on obtient également :

$$\begin{aligned} \varphi(s_0, t_0 + k) &= \varphi(s_0, t_0) + k \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) + \|(h, k)\| \vec{\varepsilon}(h, k) \\ \varphi(s_0 + h, t_0) &= \varphi(s_0, t_0) + h \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) + \|(h, k)\| \vec{\varepsilon}(h, k) \end{aligned}$$

Ainsi, le quadrilatère  $\varphi(R_{h,k})$  peut être approché par un parallélogramme dans le plan tangent engendré par les vecteurs

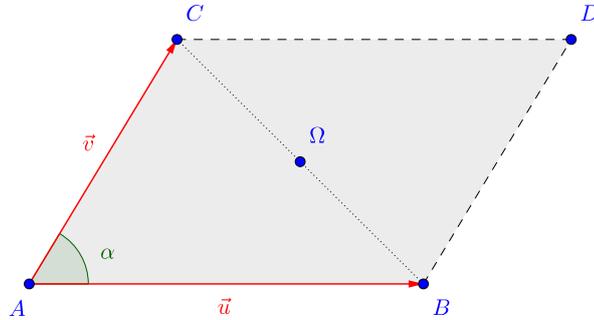
$$h \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \text{ et } k \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0).$$

Pour pouvoir poursuivre les calculs, rappelons la formule donnant l'aire d'un parallélogramme :

**Proposition 3.5.1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. L'aire du parallélogramme  $\mathcal{P}$  engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est égale à

$$A(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

*Proof.* Notons  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les sommets du parallélogramme et considérons les triangles  $ABD$  et  $BCD$ .



Ces deux triangles sont images l'un de l'autre par la symétrie par rapport au centre  $\Omega$  du parallélogramme, donc ils sont isométriques. En particulier,  $A(\mathcal{P})$  est égal au double de leur aire. Soit  $\alpha$  l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Alors, l'aire de  $ABD$  est égale à

$$\frac{1}{2} \sin(\alpha) AB \times AD = \frac{1}{2} \sin(\alpha) \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Nous devons donc montrer que la norme de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est égale à  $\sin(\alpha) \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ . Considérons d'abord la première coordonnée. En l'élevant au carré et en développant, on trouve

$$(u_y v_z - u_z v_y)^2 = u_y^2 v_z^2 - 2u_y u_z v_y v_z + u_z^2 v_y^2.$$

En développant de même les autres coordonnées du produit vectoriel et en additionnant, on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 &= u_y^2 v_z^2 + u_z^2 v_x^2 + u_x^2 v_y^2 + v_y^2 u_z^2 + v_z^2 u_x^2 + v_x^2 u_y^2 - 2(u_y v_y u_z v_z + u_z v_z u_x v_x + u_x v_x u_y v_y) \\ &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &\quad - (u_x^2 v_x^2 + u_y^2 v_y^2 + u_z^2 v_z^2) - 2(u_y v_y u_z v_z + u_z v_z u_x v_x + u_x v_x u_y v_y) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \cos(\alpha)^2 \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \\ &= \sin(\alpha)^2 \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité voulue. ■

Nous utiliserons donc la formule suivante pour l'aire de  $\varphi(R_{h,k})$  :

$$A(\varphi(R_{h,k})) = hk \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\| + \|(h, k)\| \|\vec{\varepsilon}(h, k)\|.$$

*Remarque 3.5.2.* On pourrait également calculer l'aire de  $\varphi(R_{h,k})$  en découpant le rectangle de départ en deux triangles et en additionnant l'aire de chacune des deux images. Les développements limités précédents montrent cependant que l'aire obtenue de cette façon coïncide au premier ordre avec notre formule. On pourrait également envisager de décomposer directement l'ouvert de départ en triangles, mais la définition de l'intégrale d'une partie de  $\mathbf{R}^2$  est plus facile à manipuler avec des rectangles.

Supposons dorénavant que  $U$  est borné. Il existe alors des réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $U$  soit contenu dans  $[a, b] \times [c, d]$ . Pour  $n, m \in \mathbf{N}$ , posons  $h = (b - a)/n$  et  $k = (d - c)/m$  et notons  $R_{i,j}$  le rectangle

$$R_{i,j} = [a + ih, a + (i + 1)h] \times [b + jk, b + (j + 1)k].$$

L'ouvert  $U$  est contenu dans la réunion de tous ces rectangles. On peut donc comparer les deux quantités suivantes :

$$A_{n,m}^-(U) = \sum_{R_{i,j} \subset U} A(R_{i,j})$$

Supposons que  $\varphi$  est simple, alors les images des intérieurs des rectangles  $R_{i,j}$  sont deux à deux disjointes, donc

$$\begin{aligned} A_{n,m}^-(\varphi(U)) &= \sum_{R_{i,j} \subset U} \varphi(R_{i,j}) \\ &= \sum_{R_{i,j} \subset U} hk \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(a + ih, b + jk) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(a + ih, b + jk) \right\| \\ &+ \sum_{R_{i,j} \subset U} \|(h, k)\| \|\vec{\varepsilon}(h, k)\| \end{aligned}$$

Supposons que  $U$  soit une partie *quarrable* du plan, c'est-à-dire que

$$\limsup_{n,m \rightarrow +\infty} A_{n,m}^-(U) = \liminf_{n,m \rightarrow +\infty} A_{n,m}^+(U).$$

Alors, la somme apparaissant au membre de droite dans l'expression de  $A_{n,m}^-(\varphi(U))$  est une somme de Riemann convergeant (c'est la définition de l'intégrale double sur une partie quarrable) vers

$$\iint_U \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt.$$

Quant au second terme, il est majoré en valeur absolue par

$$nm \|(h, k)\| \|\vec{\varepsilon}(h, k)\| \leq (b - a)(d - c) \|\vec{\varepsilon}(h, k)\|$$

qui tend vers 0 quand  $n$  et  $m$  tendent vers  $+\infty$ . Nous avons donc trouvé, sous certaines hypothèses techniques, une expression de l'aire de la surface. Nous allons prendre cette expression comme définition.

**DÉFINITION 3.5.3.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  une nappe paramétrée simple et soit  $\mathcal{S}$  son support. L'aire de  $\mathcal{S}$  est définie comme

$$\iint_U \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\| ds dt.$$

*Remarque 3.5.4.* Il est possible de donner une justification plus générale de cette formule en utilisant le vocabulaire des formes différentielles, mais cela sort du cadre de ce cours. Nous nous contenterons donc de la justification précédente.

La formule de l'aire pose un problème : en un point singulier, le produit vectoriel s'annule. Autrement dit, l'aire d'une nappe paramétrée ne change pas si on retire ses points singuliers. Pour que nos calculs aient un sens, il faut pouvoir considérer que les points singuliers sont effectivement "négligeables" par rapport à l'ensemble de la surface. Nous admettrons ici qu'un ensemble fini de points est toujours "négligeable" en ce sens. Avant d'aborder quelques exemples, montrons que notre formule définit une quantité **géométrique**, c'est-à-dire invariante par changement de paramétrage.

**Proposition 3.5.5.** *L'aire est invariante par changement de paramétrage.*

*Proof.* Nous avons déjà vu lors de la preuve de la Proposition 3.4.5 qu'un changement de paramétrage  $F : V \rightarrow U$  multiplie le vecteur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$$

par  $\det(J_{(a_0, b_0)}(F))$ . La formule de changement de variables dans les intégrales doubles donne donc

$$\begin{aligned} \iint_U \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt &= \iint_V |\det(J_{(a, b)}(F))| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \circ F(a, b) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \circ F(a, b) \right\| da db \\ &= \iint_V \left\| \frac{\partial(\varphi \circ F)}{\partial a}(a, b) \wedge \frac{\partial(\varphi \circ F)}{\partial b}(a, b) \right\| da db. \end{aligned}$$

■

### 3.5.2 EXEMPLES

Traisons maintenant deux exemples de calcul d'aire.

**Exemple 3.5.6.** Considérons le paramétrage de la sphère  $\varphi$  de l'Exemple 3.1.9 et restreignons son ensemble de départ à  $[0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$ . On a alors un paramétrage simple régulier dont le support est la sphère privée des pôles nord et sud, qui a par conséquent la même aire que la sphère entière. Nous avons montré dans l'Exemple 3.2.6 que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = R \cos(t) \overrightarrow{C\varphi(s, t)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos(t) \|\overrightarrow{C\varphi(s, t)}\| ds dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos(t) ds dt \\ &= 2\pi R^2 [\sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Exemple 3.5.7.** Soient  $0 < r < R$  des réels et soit  $\varphi : [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée de classe  $C^\infty$  définie par

$$\varphi(s, t) = ((R + r \cos(s)) \cos(t), (R + r \cos(s)) \sin(t), r \sin(s)).$$

Le support de  $\varphi$  est un *tore de révolution*. Le calcul des dérivées partielles donne

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = -r \sin(s) \cos(t) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = -r \sin(s) \sin(t) \\ \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) = r \cos(s) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = -(R + r \cos(s)) \sin(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = (R + r \cos(s)) \cos(t) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = 0 \end{cases}$$

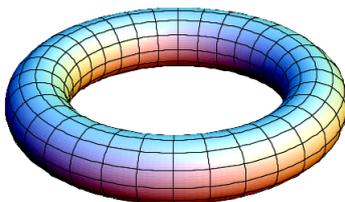
On peut vérifier sur ces expressions qu'il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers et que par conséquent l'aire de l'ensemble des points réguliers est égale à l'aire du tore tout entier. Le calcul du produit vectoriel donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -r(R + r \cos(s)) \cos(s) \cos(t) \\ -r(R + r \cos(s)) \cos(s) \sin(t) \\ -r(R + r \cos(s)) \sin(s) \cos^2(t) - r(R + r \cos(s)) \sin(s) \sin(t)^2 \end{pmatrix} \\ &= -r(R + r \cos(s)) \begin{pmatrix} \cos(s) \cos(t) \\ \cos(s) \sin(t) \\ \sin(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que le vecteur apparaissant dans le membre de droite est de norme 1. De plus, comme  $R > r$ ,  $(R + r \cos(s)) > 0$  quel que soit  $s$  donc la norme du produit vectoriel est égale à  $r(R + r \cos(s))$ . L'aire est donc donnée par

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos(s)) ds dt \\ &= (2\pi)^2 r R + 2\pi r^2 [\sin(s)]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

Voici une représentation du tore de révolution :



### 3.5.3 LIEN AVEC LA PREMIÈRE FORME FONDAMENTALE

L'aire de la surface se relie naturellement à la première forme fondamentale. Pour le voir, remarquons que par définition

$$\Phi_1(h, k) = h^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \right\|^2 + k^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\|^2 + 2hk \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\rangle.$$

La première forme fondamentale est donc entièrement déterminée par ses *coefficients*

$$\begin{cases} E = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \right\|^2 \\ F = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\|^2 \\ G = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \right\rangle \end{cases}$$

Ces coefficients déterminent également l'aire de la surface :

**Proposition 3.5.8.** *Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  les coefficients de la première forme fondamentale d'une surface  $\mathcal{S}$ . Alors, l'aire de  $\mathcal{S}$  est donnée par*

$$A(\mathcal{S}) = \iint_U \sqrt{EG - F^2} ds dt.$$

*Proof.* Nous avons montré dans la preuve de la Proposition 3.5.1 que pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\|^2 &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\rangle^2 \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

■

Pour considérer la courbure d'une surface de façon globale, il faut d'abord s'intéresser à la fonction définie sur  $\mathcal{S}$  qui à chaque point associe sa première forme fondamentale. En géométrie différentielle, cette fonction s'appelle un *tenseur*. Dans le cas particulier des surfaces de  $\mathbf{R}^3$ , ce tenseur est parfois appelé *tenseur métrique*, puisqu'il permet de calculer les aires (ainsi que les longueurs de courbes tracées sur la surface) et est noté  $g$ . En remarquant que

$$EG - F^2 = \det(\Phi_1) = \det(g),$$

on peut penser à  $\sqrt{\det(g)}$  comme à "l'élément d'aire" de la surface. Cette idée se généralise aux variété Riemanniennes orientables de toutes dimensions, et  $\sqrt{|\det(g)|}$  définit la *forme volume canonique* de la variété. Ajoutons que dans le cas des courbes, l'analogie de la première forme fondamentale est la norme de la dérivée, c'est-à-dire  $\|\vec{\gamma}'(t)\|$ , qui d'après la formule de la Définition 1.6.3 donnant la longueur d'une courbe est bien "l'élément de longueur" de la courbe.

### 3.6 SURFACES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION

Nous avons jusqu'à maintenant étudié les surfaces à l'aide d'un paramétrage global. Nous avons cependant vu dans la Section 3.2.3 avec l'exemple de la sphère que ce cadre est insuffisant pour décrire même les surfaces les plus courantes. Nous allons donc maintenant étudier les surfaces qui sont définies par une équation, dans un sens que nous précisons. L'idée sera bien sûr de se ramener à des paramétrages, et cela se fera grâce au *Théorème d'inversion locale*. Avant d'aborder ce sujet, nous commençons par étudier un type particulier de surfaces.

#### 3.6.1 GRAPHE D'UNE FONCTION

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. On peut considérer la nappe paramétrée  $\varphi_F : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\varphi_F(s, t) = (s, t, F(s, t)).$$

On constate que  $\varphi_F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Le support de  $\varphi_F$  est appelé *graphe* de  $F$  et noté  $\mathcal{S}_F$ . En utilisant ce que nous avons fait précédemment, il est possible d'exprimer en fonction de  $F$  toutes les propriétés géométriques de  $\mathcal{S}_F$ . Considérons d'abord le plan tangent.

**Proposition 3.6.1.** *Soit  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^2$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors, la nappe paramétrée  $\varphi_F$  est régulière. De plus, si  $(s_0, t_0) \in U$ , alors le plan tangent au point  $M_0 = \varphi_F(s_0, t_0)$  a pour équation*

$$z - F(s_0, t_0) = (x - s_0) \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) + (y - t_0) \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0).$$

*Proof.* Le calcul des dérivées partielles donne

$$\frac{\partial \varphi_F}{\partial s}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_F}{\partial t}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont jamais colinéaires et la nappe est donc régulière. Quant à l'équation du plan tangent, elle s'obtient directement à partir de l'Équation (3.1). ■

Si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut également calculer la courbure de Gauss de  $\varphi_F$  en un point  $M_0$ .

**Proposition 3.6.2.** Soit  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , soit  $(s_0, t_0) \in U$  et soit  $M_0 = \varphi_F(s_0, t_0)$ . Alors, la courbure de Gauss au point  $M_0$  est donnée par

$$K(M_0) = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s_0, t_0) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s_0, t_0) - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s_0, t_0) \right)^2}{\left( 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \right)^2}.$$

*Proof.* Le calcul de la Proposition 3.6.1 donne la première forme fondamentale :

$$\begin{aligned} \Phi_1(h, k) &= h^2 + k^2 + \left( h \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) + k \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \\ &= h^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 \right) + k^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \right) + 2hk \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0). \end{aligned}$$

D'autre part, le calcul de la différentielle seconde donne

$$D_{(s_0, t_0)}^2 \varphi_F(h, k) = h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s_0, t_0) \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s_0, t_0) \end{pmatrix} + 2hk \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix}.$$

Il nous reste à trouver le vecteur normal, qui s'obtient grâce au produit vectoriel :

$$\frac{\partial \varphi_F}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \varphi_F}{\partial t}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \\ -\frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\Phi_2(h, k) = \left\langle D_{(s_0, t_0)}^2 \varphi_F(h, k), \vec{N}(s_0, t_0) \right\rangle = \frac{h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s_0, t_0) + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s_0, t_0) + 2hk \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s_0, t_0)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2}}.$$

Pour obtenir la courbure de Gauss, il nous suffit d'après la Proposition 3.4.15 de calculer les déterminants de ces deux formes quadratiques. On trouve

$$\begin{aligned} \det(\Phi_1) &= \left( 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \\ &= 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\det(\Phi_2) = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s_0, t_0) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s_0, t_0) - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s_0, t_0) \right)^2}{1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} K(M_0) &= \frac{\det(\Phi_2)}{\det(\Phi_1)} \\ &= \frac{\left( \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s_0, t_0) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s_0, t_0) - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \right)}{\left( 1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2 \right)^2}. \end{aligned}$$

■

Au cours de la preuve, nous avons obtenu l'expression de vecteur normal, qui permet de calculer l'aire de  $\mathcal{S}_F$  si l'ouvert  $U$  est borné :

$$A(\mathcal{S}_F) = \iint_U \sqrt{1 + \left( \frac{\partial F}{\partial s}(s_0, t_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial t}(s_0, t_0) \right)^2} ds dt.$$

Concluons en remarquant que nous aurions également pu définir des nappes paramétrées de coordonnées  $(s, F(s, t), t)$  ou  $(F(s, t), s, t)$ . Les supports de ces nappes s'obtiennent à partir de  $\mathcal{S}_F$  en appliquant des isométries de l'espace et ont donc les mêmes propriétés géométriques. C'est pourquoi nous n'avons pas besoin de les étudier explicitement.

### 3.6.2 PARAMÉTRAGE LOCAL

Les graphes de fonctions que nous avons étudiés précédemment sont des nappes paramétrées particulières. Cependant, elles fournissent également un exemple de surface définie par une équation, à savoir

$$z = F(x, y).$$

Nous allons maintenant voir que toute surface définie par une équation suffisamment régulière peut s'étudier comme un graphe de fonction. Pour cela, commençons par donner une définition précise de notre objet d'étude.

**DÉFINITION 3.6.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^3$  et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. La *surface définie par l'équation*

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient  $f(x, y, z) = 0$ . Elle est notée  $\mathcal{S}_f$ .

Cet ensemble n'a a priori pas de structure particulière. Pour pouvoir l'étudier avec nos outils, il faudra donc faire une hypothèse sur  $f$ . Cette hypothèse va nous être suggérée par le *Théorème des fonctions implicites*, que nous rappelons.

**THÉORÈME 3.6.4** (Fonctions implicites) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^3$  et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ . Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  tel que

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Alors, il existe

- Un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$  tel que  $(x_0, y_0) \in U$
- Un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$  tel que  $z_0 \in I$  et  $U \times I \subset \Omega$
- Une application  $F : U \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^k$

tels que

$$(x, y, z) \in U \times I \text{ et } f(x, y, z) = 0 \iff z = F(x, y).$$

*Remarque 3.6.5.* Une conséquence de l'équivalence ci-dessus est que  $F(x_0, y_0) = z_0$ .

*Remarque 3.6.6.* Le *Théorème des fonctions implicites* peut aussi se formuler pour les variables  $x$  et  $y$  au lieu de  $z$  (en adaptant l'hypothèse) mais pour simplifier nous l'appliquerons toujours par rapport à la variable  $z$ .

Autrement dit, si la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $z$  est non nulle alors la surface est, au voisinage du point considéré, le graphe d'une fonction. On peut donc étudier la géométrie de la surface en ce point grâce aux outils développés précédemment. Cela a un sens car dans le *Théorème 3.6.4*, la fonction  $F$  est unique une fois les ouverts  $U$  et  $I$  fixés. De plus, les dérivées partielles de  $F$  au point  $(x_0, y_0)$ , qui sont les informations dont nous avons besoin, se calculent en fonction des dérivées partielles de  $f$ . Pour voir cela, il suffit de considérer la fonction  $G : U \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$G(x, y) = f(x, y, F(x, y)).$$

Le *Théorème 3.6.4* affirme que  $G$  est constante égale à 0 sur  $U$ . En particulier, toutes ses dérivées partielles sont nulles au point  $(x_0, y_0)$ . Le calcul des dérivées partielles premières donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en utilisant le fait que la dérivée partielle par rapport à  $z$  ne s'annule pas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= - \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= - \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

En utilisant ces expressions, nous pouvons donc décrire les propriétés géométriques de la surface  $\mathcal{S}_f$  et en particulier son plan tangent.

**Proposition 3.6.7.** *Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  un point tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

*Alors, le plan tangent à  $\mathcal{S}_f$  au point  $M_0$  a pour équation*

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

*Proof.* Il suffit d'appliquer la *Proposition 3.6.1* en exprimant les dérivées partielles de  $F$  à l'aide de celles de  $f$ . ■

On voit ici que le plan tangent ne dépend en fait que de  $f$  et pas de la fonction implicite  $F$ . En particulier, d'après les calculs de la section précédente le vecteur de coordonnées

$$\left( -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)$$

est normal à  $\mathcal{S}_f$  au point  $M_0$ . Ce vecteur est colinéaire au *gradient* de  $f$ , qui a pour coordonnées

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0) \right).$$

En calculant les dérivées partielles secondes de  $G$  et en les égalant à 0, on peut également exprimer les dérivées partielles secondes de  $F$  en fonction de celles de  $f$ . La *Proposition 3.6.2* donne alors une expression de la courbure ne dépendant que de  $f$ . Cela dit, les expressions obtenues sont très compliquées et peu éclairantes. Il vaut mieux faire les calculs au cas par cas en utilisant les particularités de la fonction  $f$  pour obtenir des simplifications.

3.6.3 EXEMPLE

Soient  $a, b, c$  trois réels non nuls, soit  $\kappa \in \mathbf{R}$  et soit  $\mathcal{S}_{a,b,c}(\kappa)$  la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \kappa,$$

appelée *quadrique à centre* parce qu'elle est symétrique par rapport à l'origine du repère. Nous allons étudier le plan tangent et la courbure en un point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . Soit  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - \kappa,$$

elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{2x_0}{a}, \frac{2y_0}{b}, \frac{2z_0}{c} \right)$$

et ce vecteur dirige la normale à  $\mathcal{S}_{a,b,c}$  en  $M_0$ . Dans le cas  $a = b = c$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0, y_0, z_0)$  est colinéaire à  $\overrightarrow{OM_0}$  et on retrouve le plan tangent usuel à la sphère si  $\kappa$  est de même signe que  $a$  (autrement  $\mathcal{S}_{a,b,c}(\kappa)$  est *dégénérée* : c'est soit un point soit l'ensemble vide). Dans le cas général, un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  appartient au plan tangent si et seulement si  $\overrightarrow{M_0M}$  est orthogonal au gradient, ce qui donne l'équation

$$\begin{aligned} \frac{2x_0}{a}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c}(z - z_0) &= 0 \\ \frac{x_0}{a}x + \frac{y_0}{b}y + \frac{z_0}{c}z &= \frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} + \frac{z_0^2}{c} \\ \frac{x_0}{a}x + \frac{y_0}{b}y + \frac{z_0}{c}z &= \kappa \end{aligned}$$

Supposons  $z_0 \neq 0$  et considérons une fonction implicite  $F : U \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $M_0$  telle que  $f(x, y, F(x, y)) = 0$ . Ceci est possible d'après le Théorème 3.6.4 car

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z_0}{c} \neq 0.$$

En posant  $G : (x, y) \mapsto f(x, y, F(x, y))$  et en dérivant par rapport à  $x$  et  $y$  on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= 2\frac{x}{a} + 2\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\frac{F(x, y)}{c} \\ 0 &= 2\frac{y}{b} + 2\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{F(x, y)}{c}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= -\frac{cx}{aF(x, y)} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= -\frac{cy}{bF(x, y)}. \end{aligned}$$

En dérivant à nouveau ces expressions on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{a} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)\frac{F(x, y)}{c} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right)^2\frac{1}{c} \\ 0 &= \frac{2}{b} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)\frac{F(x, y)}{c} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right)^2\frac{1}{c} \\ 0 &= 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x, y)\frac{F(x, y)}{c} + 2\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{1}{c} \\ 0 &= 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x, y)\frac{F(x, y)}{c} + 2\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\frac{1}{c} \end{aligned}$$

On sait que  $F(x_0, y_0) = z_0$ . En prenant les égalités précédentes au point  $(x_0, y_0)$  on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= -\frac{cx_0}{az_0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\frac{c}{az_0} - \frac{c^2 x_0^2}{a^2 z_0^3}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{c^2 x_0 y_0}{abz_0^3} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{cy_0}{bz_0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -\frac{c}{bz_0} - \frac{c^2 y_0^2}{b^2 z_0^3}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{c^2 x_0 y_0}{abz_0^3} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant appliquer la Proposition 3.6.2 pour calculer la courbure de Gauss au point  $M_0$ . Calculons d'abord le numérateur :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{c}{az_0} - \frac{c^2 x_0^2}{a^2 z_0^3}\right) \left(-\frac{c}{bz_0} - \frac{c^2 y_0^2}{b^2 z_0^3}\right) - \left(\frac{c^2 x_0 y_0}{abz_0^3}\right)^2 &= \frac{c^2}{abz_0^2} + \frac{c^3 y_0^2}{ab^2 z_0^4} + \frac{c^3 x_0^2}{a^2 b z_0^4} \\ &= \frac{c^2}{abz_0^2} \left(1 + \frac{cx_0^2}{az_0^2} + \frac{cy_0^2}{bz_0^2}\right) \\ &= \frac{c^3}{abz_0^4} \left(\frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} + \frac{z_0^2}{c}\right) \\ &= \frac{c^3}{abz_0^4} \kappa \end{aligned}$$

et le dénominateur :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{c^2 x_0^2}{a^2 z_0^2} + \frac{c^2 y_0^2}{b^2 z_0^2}\right)^2 &= \frac{c^4}{z_0^4} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right)^2 \\ &= \frac{c^4}{z_0^4} D^2, \end{aligned}$$

Le terme  $z_0^4$  sera simplifié dans le quotient, la seule quantité dépendant de  $M_0$  est donc  $D$ , qui peut s'interpréter géométriquement. Pour cela, notons  $H_0$  le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan tangent au point  $M_0$ . Alors, le vecteur  $\overrightarrow{OH_0}$  est colinéaire au gradient, donc les coordonnées de  $H_0$  sont de la forme

$$H_0 : \left(\lambda \frac{x_0}{a}, \lambda \frac{y_0}{b}, \lambda \frac{z_0}{c}\right).$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Comme de plus  $H_0$  appartient au plan tangent, on a

$$\kappa = \lambda \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = \lambda D$$

donc  $\lambda = \kappa D^{-1}$ . On en déduit que la distance de  $O$  au plan tangent en  $M_0$  est égale à

$$D_0 = \|\overrightarrow{OH_0}\| = |\lambda| \sqrt{D} = |\kappa| \sqrt{D}^{-1}.$$

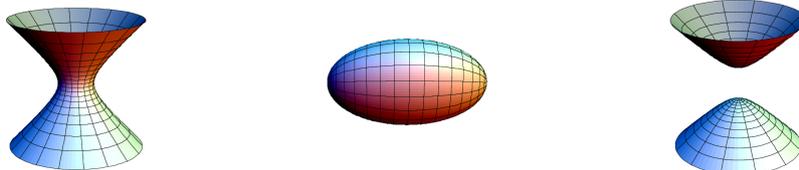
Nous pouvons maintenant exprimer la courbure de Gauss au point  $M_0$  en fonction de  $D_0$  :

$$K(M_0) = \frac{c^3}{abz_0^4} \frac{z_0^4}{c^4} \frac{\kappa}{D^2} = \frac{D_0^4}{\kappa^3 abc}.$$

Si  $z_0 = 0$  mais  $x_0 \neq 0$  ou  $y_0 \neq 0$ , on peut appliquer le Théorème 3.6.4 à la variable non nulle et ainsi obtenir la même expression de la courbure. Quant au point  $(0, 0, 0)$ , s'il appartient à  $\mathcal{S}_f$  (ce qui implique que  $\kappa = 0$ ) il est toujours singulier.

Notons que si  $a = b = c = 1$  et  $\kappa = R^2 > 0$ , on a  $D_0 = R$  et on retrouve bien  $K(M_0) = R^{-2}$  en tout point. Plus généralement, si  $|a| = |b| = |c| = 1$ , alors  $D^2 = \kappa^2$  et la surface  $\mathcal{S}_{a,b,c}(\kappa)$  est à courbure constante. Une telle surface possède d'ailleurs des symétries supplémentaires (considérer les réflexions par rapport à certains plans).

Voici quelques exemples de quadriques à centre : l'hyperboloïde à une nappe, l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes (de gauche à droite).



### 3.7 VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

Nous avons constaté à la Section 3.2.3 que la notion de nappe paramétrée était insuffisante pour rendre compte de la géométrie de la sphère. La description de la sphère comme surface d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  est plus satisfaisante. La stratégie consiste cependant à se ramener à des nappes paramétrées au voisinage d'un point donné et à utiliser les résultats développés pour les nappes paramétrées. Il est naturel de se demander si cette technique peut s'adapter à un cadre plus général, pour étudier des surfaces qui ne sont pas nécessairement définies par une équation. C'est ce que nous allons entreprendre maintenant.

#### 3.7.1 CARTES ET ATLAS

Fixons une partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Pour pouvoir parler de continuité, il nous faut un analogue des disques ouverts : le *disque ouvert induit* de  $\mathcal{S}$  de centre  $x$  et de rayon  $R$  est l'ensemble

$$D_{\mathcal{S}}(x, R) = B(x, R) \cap \mathcal{S},$$

où  $B(x, R)$  est la *boule ouvert* de centre  $x$  et de rayon  $R$  dans l'espace affine  $\mathbf{R}^3$ . La définition de la continuité est alors la même que dans le cas de  $\mathbf{R}^2$ . L'idée pour étudier  $\mathcal{S}$  comme une surface est de trouver, au voisinage de chaque point, une nappe paramétrée contenant ce point et contenue dans  $\mathcal{S}$ . Un tel paramétrage est appelé *carte locale*. Cependant, elle est généralement définie par son application réciproque, c'est-à-dire comme une application de la surface vers  $\mathbf{R}^2$  :

DÉFINITION 3.7.1. Soit  $M_0$  un point de  $\mathcal{S}$ . Une carte locale pour  $\mathcal{S}$  au point  $M_0$  est donnée par :

- Un ouvert  $V$  de  $\mathcal{S}$  contenant  $M_0$
- Un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$
- Une application  $\varphi : V \rightarrow U$  qui est un homéomorphisme sur son image.

*Remarque 3.7.2.* L'hypothèse que  $\varphi$  est un homéomorphisme garantit que  $\mathcal{S}$  est bien un objet de dimension 2. En effet, tout point d'une boule est par exemple contenu dans un morceau de sphère qui est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ . Cependant, le morceau de sphère lui-même n'est pas un ouvert de la boule, donc il ne définit pas une carte locale.

Soit  $\varphi_1 : V_1 \rightarrow U_1$  une carte locale. L'application  $\varphi_1^{-1} : U_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une nappe paramétrée au sens où nous l'avons étudié. Si elle est suffisamment régulière, elle définit donc un plan tangent au point  $M_0$  et une courbure de Gauss. Cependant, que se passe-t-il si on considère une autre carte locale  $\varphi_2 : V_2 \rightarrow U_2$  telle que  $M_0 \in V_2$ . On aura alors un autre plan tangent et nous ne saurons plus lequel choisir ... à moins qu'ils ne coïncident ! Pour cela, il suffit d'après la Proposition 3.2.4 qu'il existe un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  entre  $\varphi_1^{-1}$  et  $\varphi_2^{-1}$ . On dispose déjà un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^0$  : il s'agit de l'application  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ , qui est appelée *changement de carte*. Il suffirait donc qu'il soit plus régulier pour lever l'ambiguïté. C'est l'objet de la prochaine définition.

DÉFINITION 3.7.3. Deux cartes locales  $(U_1, V_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, V_2, \varphi_2)$  au point  $M_0$  sont dites  $\mathcal{C}^k$ -compatibles si l'application

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \varphi_2(V_1 \cap V_2)$$

est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$ .

*Remarque 3.7.4.* Dire que l'application  $\varphi_2$  elle-même est de classe  $\mathcal{C}^k$  n'a a priori pas de sens puisqu'elle est définie sur un ouvert de  $\mathcal{S}$ , qui n'est pas un ouvert de  $\mathbf{R}^3$ . C'est la raison pour laquelle on ne peut étudier la régularité que pour les changements de cartes.

Si deux cartes locales sont  $\mathcal{C}^k$ -compatibles, l'application  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  est donc un changement de paramétrage de classe  $\mathcal{C}^k$  pour  $\varphi_1$  et la nappe reparamétrée est  $\varphi_2$ . Il s'ensuit que toutes les propriétés **géométriques** de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont identiques. Pour pouvoir étudier une surface, il suffit donc de se donner des cartes locales qui sont toutes compatibles et telles que tout point de la surface est paramétré par au moins une des cartes. Donnons un nom à un tel ensemble.

**DÉFINITION 3.7.5.** Un *atlas* de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{S}$  est la donnée d'une famille  $\mathcal{A} = (U_i, V_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de cartes locales deux à deux  $\mathcal{C}^k$ -compatibles et telle que  $\mathcal{S} = \cup_{i \in I} V_i$ .

### 3.7.2 QU'EST-CE QU'UNE SURFACE ?

La définition d'une surface semble maintenant claire : il s'agit d'une partie de  $\mathbf{R}^3$  pour laquelle on a fixé un atlas.

**DÉFINITION 3.7.6.** Une *variété* de dimension 2 et de classe  $\mathcal{C}^k$  *plongée* dans  $\mathbf{R}^3$  est une partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbf{R}^3$  munie d'un atlas de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Exemple 3.7.7.** Une nappe paramétrée simple  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^k$  est une variété plongée de classe  $\mathcal{C}^k$ . L'espace sous-jacent est son support géométrique  $\mathcal{S}$  et l'atlas est composé d'une seule carte locale  $\varphi^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow U$ .

**Exemple 3.7.8.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^3$ , soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$  et soit  $\mathcal{S}_f$  la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ . Si pour tout point de  $\mathcal{S}_f$ , l'une au moins des dérivées partielles de  $f$  est non nulle, alors  $\mathcal{S}_f$  est une variété plongée de classe  $\mathcal{C}^k$ . Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fonctions implicites décrivant la même coordonnée, le changement de carte est simplement l'identité (par unicité de la fonction implicite). Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fonctions implicites décrivant deux coordonnées différentes, on peut aisément vérifier que le changement de cartes est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Si par exemple  $F_1$  décrit  $z$  et  $F_2$  décrit  $x$ , le changement de cartes associé est

$$(x, y) \mapsto (y, F_1(x, y)).$$

Étant donnée une variété plongée dans  $\mathbf{R}^3$ , on peut étudier son plan tangent et sa courbure de Gauss à l'aide des outils développés dans ce chapitre. Il suffit, en un point  $M_0$  donné, de choisir n'importe quelle carte locale de l'atlas. Par contre, les courbures principales ne sont définies qu'au signe près, puisqu'un changement de paramétrage peut les multiplier par  $-1$ . Pour pouvoir les définir, il faut choisir des cartes locales particulières.

**DÉFINITION 3.7.9.** Deux cartes locales  $(U_1, V_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, V_2, \varphi_2)$  au point  $M_0$  sont dites *positivement compatibles* si le déterminant de la matrice jacobienne de  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  au point  $M_0$  est positif.

Il suffit donc de se retravailler à un atlas dont les cartes sont toutes positivement compatibles : c'est la notion d'*orientation*.

**DÉFINITION 3.7.10.** Une *orientation* sur une variété plongée  $\mathcal{S}$  est une partie  $\mathcal{A}_+ = (U_j, V_j, \varphi_j)_{j \in J \subset I}$  de l'atlas  $\mathcal{A}$  telle que

- Les cartes locales de  $\mathcal{A}_+$  sont deux à deux positivement compatibles.
- $\mathcal{S} = \cup_{j \in J} V_j$ .

Une variété plongée munie d'une orientation est dite *orientée*. Une variété plongée qui peut être munie d'une orientation est dite *orientable*.

Remarquons qu'une nappe paramétrée simple régulière est, par définition, orientée. Pour une variété plongée orientée, les courbures principales sont donc bien définies. De même, on peut définir en tout point un vecteur normal de façon continue. En effet, pour deux cartes  $(U_1, V_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, V_2, \varphi_2)$  positivement compatibles, les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

sont positivement colinéaires. On peut donc définir une application continue

$$\vec{N} : V_1 \cup V_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

qui à chaque point associe un vecteur normal de norme 1. Par le même raisonnement, on peut prolonger  $\vec{N}$  en une application continue sur toute la surface  $\mathcal{S}$ . Cette propriété permet de montrer qu'il existe des variétés plongées non-orientables.

**Exemple 3.7.11.** Soit  $\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée simple définie par

$$\varphi(s, t) = \left( \left( 1 + \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right) \cos(s), \left( 1 + \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right) \sin(s), \frac{t}{2} \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right).$$

Son support géométrique  $\mathcal{S}$  est appelé *ruban de Möbius*. La nappe  $\varphi$  n'est bien sûr pas régulière mais peut être complétée en un atlas pour obtenir une variété plongée. La variété obtenue ne sera cependant pas orientable. Supposons en effet qu'il existe un atlas  $\mathcal{A}_+$  contenant  $\varphi$  et tel que  $\mathcal{S}$  soit orientée. Il existe alors une fonction continue  $\vec{N} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}^3$  donnant en tout point un vecteur normal de norme 1 et tel que pour tout point régulier pour  $\varphi$ ,

$$\vec{N}(\varphi(s, t)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \right\|} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t).$$

Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) &= \frac{t}{4} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{2}\right) \cos(s) \\ -\sin\left(\frac{s}{2}\right) \sin(s) \\ \cos\left(\frac{s}{2}\right) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y(s, t) \\ x(s, t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \cos(s) \\ \cos\left(\frac{s}{2}\right) \sin(s) \\ \sin\left(\frac{s}{2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

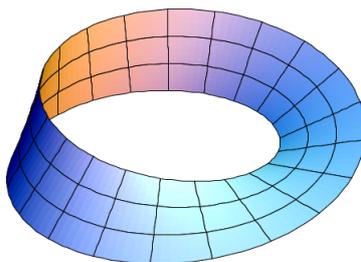
ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = \frac{t}{8} \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x(s, t) \sin\left(\frac{s}{2}\right) \\ y(s, t) \sin\left(\frac{s}{2}\right) \\ -\left(1 + \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Soit  $M_0 = \varphi(0, -1)$ . Alors,  $\varphi(s, 1) \rightarrow M_0$  quand  $s \rightarrow 2\pi$ . Par continuité,  $\vec{N}(\varphi(s, 1))$  devrait donc tendre vers  $\vec{N}(M_0)$ . Or, pour  $s \in [0, 2\pi[$ ,  $\vec{N}(s, 1)$  est positivement colinéaire à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, 1) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, 1) \xrightarrow{s \rightarrow 2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, -1) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, -1),$$

une contradiction. Voici une représentation du ruban de Möbius :



Mais pourquoi avoir choisi au départ une partie de  $\mathbf{R}^3$ ? Les définitions de la Section 3.7.1 ont un sens pour n'importe quel espace topologique. D'ailleurs, les cartes locales pourraient très bien avoir pour image un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  pour un entier  $n$  quelconque. Cette idée mène à la notion centrale de la géométrie différentielle, celle de *variété différentielle*.

**DÉFINITION 3.7.12.** Une variété différentielle de dimension 2 et de classe  $\mathcal{C}^k$  est un espace topologique  $\mathcal{S}$  muni d'un atlas de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Mais comment définir alors l'espace tangent? Nous savons que dans le cas des variétés plongées, l'espace tangent est l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes tracées sur la surface. Dans le cas général, si  $\gamma$  est une courbe tracée sur la surface et passant par un point  $M_0$ , on peut considérer une carte locale  $\varphi$  et la courbe  $\varphi \circ \gamma$ . Son vecteur tangent en  $M_0$  est bien défini et appartient à  $\mathbf{R}^2$ . Il suffit alors de définir l'espace tangent en  $M_0$  comme l'ensemble des vecteurs ainsi obtenus pour toutes les courbes passant par  $M_0$ . Il faut ensuite montrer que cet ensemble est un espace vectoriel de dimension 2 qui ne dépend pas de la carte choisie.

La question de la courbure est plus complexe. En effet, les calculs nécessitent un produit scalaire sur le plan tangent. Dans le cas d'une variété plongée, ce produit scalaire est hérité de l'espace ambiant. Dans le cas général, il n'y a pas d'espace ambiant, il faut donc choisir un produit scalaire sur chaque espace tangent. Bien sûr, il est préférable que ces produits scalaire varient de façon continue, voir même différentiable sur la variété. Cette idée se formalise à l'aide de la notion de *métrique* sur la variété, qui mène au domaine de la *géométrie riemannienne*. De fait, toute variété différentielle de dimension 2 peut être munie d'une métrique en vertu du remarquable résultat suivant :

**THÉORÈME 3.7.13** (Whitney) Toute variété différentielle de dimension 2 peut être plongée dans  $\mathbf{R}^4$ .

Ce qui est important dans cet énoncé, c'est qu'on ne peut pas toujours plonger la variété dans  $\mathbf{R}^3$ . La notion de variété différentielle est donc plus riche que la notion de variété plongée.

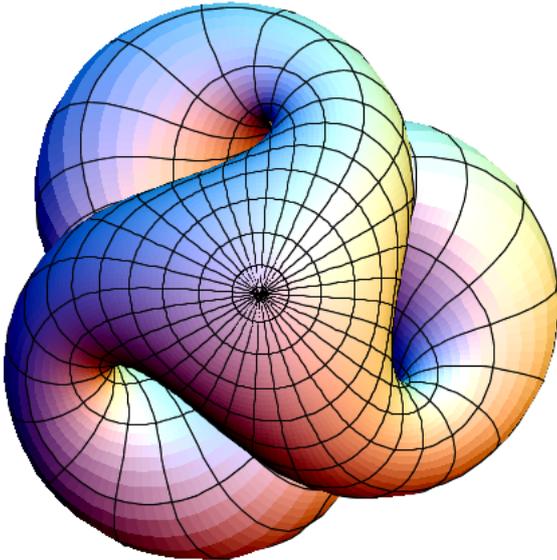
**Exemple 3.7.14.** Soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$  la nappe paramétrée définie par

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos^2(u) (\sin^2(v) - \cos^2(v)) \\ \cos(u) \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \sin(u) \cos(v) \\ \cos^2(u) \cos(v) \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Son support est appelé *plan projectif* et on peut montrer qu'il n'est pas plongeable dans  $\mathbf{R}^3$  (ceci montre que le Théorème 3.7.13 est optimal). On peut toutefois la représenter dans  $\mathbf{R}^3$  en autorisant des auto-intersections grâce au paramétrage suivant :

$$\varphi(s, t) = \frac{\cos(s)}{\sqrt{2} - \sin(2s) \sin(3v)} \begin{pmatrix} \cos(s) \cos(2t) + \sqrt{2} \sin(s) \cos(t) \\ \cos(s) \cos(2t) - \sqrt{2} \sin(s) \cos(t) \\ 3 \cos(s) \end{pmatrix}.$$

La surface obtenue est appelée *surface de Boy*, en voici une représentation :



---

---

# CHAPITRE 4

---

## EXERCICES

### 4.1 COURBES PLANES

#### 4.1.1 ÉTUDES DE COURBES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

**EXERCICE 4.1.1** (Astroïde). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Étudier l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , défini en coordonnées cartésiennes dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)).$$

**EXERCICE 4.1.2** (Cardioïde). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1. Montrer que pour tous réels  $p$  et  $q$ ,

$$\begin{aligned}\sin(p) - \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

2. Étudier l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , défini en coordonnées cartésiennes dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\gamma(t) = (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t)).$$

**EXERCICE 4.1.3.** On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Étudier l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , défini en coordonnées cartésiennes dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\gamma(t) = (t^2 + t^3, t^4).$$

**EXERCICE 4.1.4** (Courbe orthoptique). Soit  $\mathcal{C}$  une courbe paramétrée. On appelle *courbe orthoptique* de  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points du plan qui sont point d'intersection de deux tangentes à  $\mathcal{C}$  orthogonales. Le but de cet exercice est de construire la courbe orthoptique de l'astroïde étudiée à l'exercice 4.1.1.

1. Donner un vecteur tangent unitaire en un point régulier quelconque de l'astroïde.
2. Donner une condition sur  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$  pour que les tangentes aux points  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$  soient orthogonales.
3. Calculer une équation de la tangente en un point régulier quelconque de l'astroïde.
4. Dédire de ce qui précède un paramétrage de la courbe orthoptique de l'astroïde.
5. Étudier cette courbe et la tracer sur le même dessin que l'astroïde. Cette courbe est appelée *quadrifolium*.

4.1.2 ÉTUDES DE COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES

**EXERCICE 4.1.5.** On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Étudier l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ , défini en coordonnées polaires dans le repère  $\mathcal{R}$  par :

$$\rho(\theta) = 1 + 2 \cos(\theta).$$

**EXERCICE 4.1.6** (Eadem mutata resurgo). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soient  $a, b \in \mathbf{R}_+^*$  tels que  $b \neq 1$  et soit  $\mathcal{C}$  le support de l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini en coordonnées polaire dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\rho = ab^\theta.$$

Cette courbe est appelée *spirale logarithmique*.

1. Montrer que  $\gamma$  est birégulier.
2. Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$ , que vaut le cosinus de l'angle entre la tangente au point  $M$  et la droite  $(OM)$  ?
3. Notons  $\ell(M)$  la longueur de l'arc de courbe compris entre  $O$  et  $M$ . Calculer  $\frac{\ell(M)}{OM}$ .
4. Calculer la courbure en tout point de  $\mathcal{C}$ .
5. Dédurre de ce qui précède une construction géométrique du centre de courbure en tout point de  $\mathcal{C}$ .

4.1.3 EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

**EXERCICE 4.1.7** (Courbes cartésiennes). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Étudier les courbes paramétrées suivantes, définies par leurs coordonnées cartésiennes dans le repère  $\mathcal{R}$  :

1. La *cycloïde* :  $x(t) = t - \sin(t)$  et  $y(t) = 1 - \cos(t)$ .
2. La *courbe de Lissajous* :  $x(t) = \cos(3t)$  et  $y(t) = \sin(4t)$ .
3.  $x(t) = 3t^4 - 2t^3$  et  $y(t) = t^2 - t$ .
4.  $x(t) = te^t$  et  $y(t) = \frac{e^t}{t}$ . Étudier l'arc sur les intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
5.  $x(t) = \frac{e^t}{\cos(t)}$  et  $y(t) = e^t \sin(t)$ . Étudier l'arc sur les intervalles  $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$  pour  $k \in \mathbf{Z}$ .

**EXERCICE 4.1.8** (Courbes polaires). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Étudier les courbes paramétrées suivantes, définies par leurs coordonnées polaires dans le repère  $\mathcal{R}$  :

1.  $\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$ .
2.  $\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(2\theta)}$ .
3.  $\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$ .
4.  $\rho(\theta) = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ .

$$5. \rho(\theta) = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right).$$

**EXERCICE 4.1.9** (Lemniscate de Bernoulli). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Étudier la courbe dont les coordonnées polaires dans le repère  $\mathcal{R}$  vérifient l'équation

$$\rho^2 = \cos(2\theta).$$

**EXERCICE 4.1.10** (Courbe podaire). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan ainsi qu'un point  $P$  de coordonnées  $(0, a)$ , où  $a > 0$ . Pour un réel  $R > 0$ , on considère l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$$

On note  $\mathcal{C}$  son support, qui est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

1. Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en tout point.
2. Pour  $t \in \mathbf{R}$ , calculer les coordonnées du projeté orthogonal de  $P$  sur la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $\gamma(t)$ .
3. En déduire un paramétrage de la *podaire* de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $P$ , c'est-à-dire le lieu des projetés orthogonaux de  $P$  sur les tangentes à  $\mathcal{C}$ .
4. Étudier la podaire de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $P$  dans les cas suivants :
  - (a)  $a = R/2$
  - (b)  $a = R$
  - (c)  $a = 2R$

**EXERCICE 4.1.11** (Plus court chemin). Soient  $A, B \in \mathbf{R}^2$  et soit  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $\gamma(t_0) = A$  et  $\gamma(t_1) = B$ . Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $\mathbf{R}^2$  tel que  $\|\vec{v}\| = 1$ .

1. Montrer que

$$\langle \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \vec{v}, \vec{\gamma}'(t) \rangle dt.$$

2. En déduire que  $|\langle \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle| \leq \ell_\gamma(t_0, t_1)$ .
3. En utilisant un vecteur  $\vec{v}$  bien choisi, montrer que  $\ell_\gamma(t_0, t_1) \geq \|\overrightarrow{AB}\|$ .
4. Quelle courbe réalise le plus court chemin entre les points  $A$  et  $B$  ?

## 4.2 CONIQUES

### 4.2.1 DÉFINITIONS DES CONIQUES

**EXERCICE 4.2.1** (Foyer et directrice). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $x = 5$  et soit  $F$  le point de coordonnée  $(1, -1)$ . On considère la conique  $\mathcal{C}$  de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$  et d'excentricité  $e = 1/3$ .

1. Déterminer la nature de  $\mathcal{C}$ .
2. Donner une équation de l'axe focal de  $\mathcal{C}$  ainsi que les coordonnées de son centre.
3. Donner une équation de la seconde directrice ainsi que les coordonnées du second foyer.
4. Donner une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

**EXERCICE 4.2.2** (Équation polaire). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Pour chacune des équations polaires suivantes, décrire la courbe associée.

1.  $\rho = \frac{1}{2 + \cos(\theta)}$ .

2.  $\rho = \frac{1}{1 - \sin(\theta)}$ .

3.  $\rho = \frac{1}{2 - \cos(\theta)}$ .

**EXERCICE 4.2.3** (Équation polynomiale). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soit  $P$  un polynôme de degré trois à coefficients réels. On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y)$  tels que  $P(x) = P(y)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est la réunion d'une droite dont on donnera une équation et d'une courbe du second degré.
2. On suppose que la courbe du second degré de  $\mathcal{C}$  non dégénérée, montrer qu'il s'agit d'une ellipse et calculer son excentricité et son paramètre.

### 4.2.2 ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES DE CONIQUES

**EXERCICE 4.2.4.** On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soit  $\mathcal{C}$  une ellipse de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $b$ .

1. Donner une paramétrisation cartésienne de  $\mathcal{C}$ .
2. Donner l'expression de la courbure en un point quelconque de  $\mathcal{C}$ .
3. Quels sont les points de plus forte et de plus faible courbure ? Donner les coordonnées des centres de courbure dans ces cas.

**EXERCICE 4.2.5** (Orthoptique d'une parabole). Soit  $\mathcal{C}$  une parabole de paramètre  $p$ .

1. Donner une paramétrisation cartésienne de  $\mathcal{C}$  dans son repère au sommet.
2. Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en un point quelconque.
3. À quelle condition deux tangentes à  $\mathcal{C}$  sont-elles orthogonales ?
4. En déduire la *courbe orthoptique* de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire l'ensemble des points d'intersections de deux tangentes à  $\mathcal{C}$  orthogonales.

**EXERCICE 4.2.6.** On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  tels que  $0 < b < a$ . Pour  $\lambda \notin \{a, b\}$ , on note  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1.$$

1. Quelle est la nature de la courbe  $\mathcal{C}_\lambda$  en fonction de  $\lambda$  ?
2. Quand  $\mathcal{C}_\lambda$  est une conique, calculer les coordonnées des ses foyers.
3. Donner un vecteur normal à  $\mathcal{C}_\lambda$  en un point  $(x_0, y_0)$  quelconque.
4. Montrer que si, pour  $\lambda \neq \mu$ ,  $\mathcal{C}_\lambda$  et  $\mathcal{C}_\mu$  ont une intersection non vide, alors leurs tangentes aux points d'intersection sont orthogonales.

#### 4.2.3 EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

**EXERCICE 4.2.7** (Courbes du second degré). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Pour chacune des équation suivantes, décrire la courbe du second degré associée.

1.  $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$ .
2.  $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$ .
3.  $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$ .
4.  $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 2y = -1$ .
5.  $2xy - 2x + 4y - 5 = 0$ .

**EXERCICE 4.2.8.** On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soit  $\mathcal{C}$  une hyperbole et soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$ .

1. Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $M$ .
2. Montrer que cette tangente rencontre les deux asymptotes de  $\mathcal{C}$ . On notera  $P$  et  $Q$  les points d'intersection.
3. Montrer que  $M$  est le milieu du segment  $[PQ]$ .

**EXERCICE 4.2.9.** On rappelle que si  $\mathcal{C}$  est une courbe du plan, sa courbe orthoptique est l'ensemble des points d'intersection de deux tangentes à  $\mathcal{C}$  orthogonales.

1. Donner une paramétrisation de la courbe orthoptique à une hyperbole.
2. Donner une paramétrisation de la courbe orthoptique à une ellipse.
3. Étudier les deux courbes paramétrées précédentes.

**EXERCICE 4.2.10** (Champ de force centrale). On fixe un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré. On note  $\rho(t)$  et  $\theta(t)$  les coordonnées polaires de  $\gamma(t)$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et on pose, pour  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\vec{v}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ . On suppose pour tout  $t \in I$ ,  $\vec{\gamma}''(t)$  est colinéaire à  $\vec{u}_\theta(t)$ .

1. Donner l'expression de  $\vec{\gamma}'(t)$  et  $\vec{\gamma}''(t)$  dans la base  $(\vec{u}_{\theta(t)}, \vec{v}_{\theta(t)})$ .
2. Montrer qu'il existe une constante  $C$  (appelée *constante des aires*) telle que pour tout  $t \in I$ ,

$$\rho(t)^2 \theta'(t) = C.$$

3. On suppose qu'il existe une fonction  $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^*$  telle que pour tout  $t \in I$ ,  $\rho(t) = r \circ \theta(t)$  et on pose  $q = 1/r$ . Montrer la *première formule de Binet* :

$$\vec{\gamma}'(t) = C \left( q \circ \theta(t) \vec{v}_{\theta(t)} - q' \circ \theta(t) \vec{u}_{\theta(t)} \right).$$

4. En déduire la *seconde formule de Binet* :

$$\vec{\gamma}''(t) = -C^2 q \circ \theta(t)^2 (q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)) \vec{u}_{\theta(t)}.$$

5. On suppose maintenant qu'il existe  $\mu \in \mathbf{R}$  telle que pour tout  $t \in I$ ,

$$\vec{\gamma}''(t) = \frac{-\mu}{d(O, \gamma(t))^2} \vec{u}_{\theta(t)}.$$

Montrer que le support de  $\gamma$  est une conique.

## 4.3 SURFACES

### 4.3.1 PLAN TANGENT

**EXERCICE 4.3.1.** On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\varphi(s, t) = (\sinh(s), \sinh(t), s + t).$$

Donner une équation du plan tangent au support de  $\varphi$  en tout point.

**EXERCICE 4.3.2** (Paramétrage stéréographique). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $\varphi_N : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\varphi_N(s, t) = \left( \frac{2s}{1 + s^2 + t^2}, \frac{2t}{1 + s^2 + t^2}, \frac{-1 + s^2 + t^2}{1 + s^2 + t^2} \right).$$

1. Quel est le support de  $\varphi_N$  ?
2. Montrer que  $\varphi_N$  est régulière et calculer son plan tangent en tout point.

**EXERCICE 4.3.3.** On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\varphi(s, t) = (s \cos(t), s \sin(t), f(s, t)).$$

1. Déterminer les points singuliers de  $\varphi$ .
2. Pour un point régulier, déterminer l'intersection du plan tangent avec l'axe  $O\vec{k}$ .

**EXERCICE 4.3.4.** On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  a fonction définie par

$$f(x, y, z) = xy - z^3$$

et soit  $\mathcal{S}_f$  l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient

$$\begin{cases} (x, z) & \neq (0, 0) \\ f(x, y, z) & = 0 \end{cases}$$

1. Donner un paramétrage de  $\mathcal{S}_f$ .
2. Quels sont les plans tangents à  $\mathcal{S}_f$  contenant la droite définie par les équations  $x = 2$  et  $y = 3z - 3$  ?

### 4.3.2 COURBURE

**EXERCICE 4.3.5** (Cône de révolution). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $\pi/2 > \alpha > 0$  et soit  $\varphi : \mathbf{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\varphi(s, t) = (s \cos(t), s \sin(t), s \cot(\alpha)),$$

où  $\cot$  désigne la fonction cotangente. Calculer les courbures principales en tout point du support de  $\varphi$ .

**EXERCICE 4.3.6** (Tore). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $0 < r < R$  et soit  $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$  la nappe paramétrée définie dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\varphi(s, t) = ((R + r \cos(s)) \cos(t), (R + r \cos(s)) \sin(t), r \sin(s)).$$

1. Calculer les formes fondamentales en tout point et en déduire la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

- Calculer la courbure totale de  $\varphi$ .

**EXERCICE 4.3.7** (Hyperboloïde à une nappe). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $\mathcal{S}$  la surface d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

- Donner un paramétrage de  $\mathcal{S}$ .
- Calculer les formes fondamentales en tout point de  $\mathcal{S}$ . En déduire les courbures principales et la courbure de Gauss en tout point.

**EXERCICE 4.3.8** (Paraboloïde elliptique). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $\mathcal{S}$  la surface d'équation

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

Calculer la courbure de Gauss en tout point de  $\mathcal{S}$ .

### 4.3.3 EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

**EXERCICE 4.3.9.** On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Pour chacune des nappes paramétrées suivantes, déterminer les points réguliers, une équation du plan tangent en ces points ainsi que la courbure de Gauss.

- Le *paraboloïde hyperbolique* :

$$\varphi(s, t) = \left( \frac{a}{2}(s+t), \frac{b}{2}(s-t), st \right),$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels non nuls.

- La *conoïde de Plücker* :

$$\varphi(s, t) = (s \cos(t), s \sin(t), \sin(2t)).$$

- Le *ruban de Möbius* :

$$\varphi(s, t) = \left( \left( 1 + \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right) \cos(s), \left( 1 + \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right) \sin(s), \frac{t}{2} \sin\left(\frac{s}{2}\right) \right).$$

**EXERCICE 4.3.10** (Surfaces de révolution). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et soient  $x, y : I \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que pour tout  $t \in I$ ,  $x(t) \geq 0$  et

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1.$$

On considère la nappe paramétrée  $\varphi : [0, 2\pi[ \times I \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie dans le repère  $\mathcal{R}$  par

$$\varphi(s, t) = (\cos(s)x(t), \sin(s)x(t), y(t)).$$

- Quels sont les points singuliers de  $\varphi$  ?
- Donner une équation du plan tangent en un point régulier quelconque.
- On suppose que  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ , exprimer la courbure de Gauss en tout point régulier en fonction de  $x$  et  $x''$ . On pourra dériver l'équation  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$  pour simplifier l'expression.
- À quelle condition sur les fonctions  $x$  et  $y$  la nappe  $\varphi$  est-elle à courbure de Gauss constante ?

**EXERCICE 4.3.11** (Surfaces réglées). On fixe un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace. Soient  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ . On considère les vecteurs  $\vec{u}(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$  et  $\vec{v}(t) = (x_2'(t), y_2'(t), z_2'(t))$  et on suppose que

$$\|\vec{u}(t)\| = 1, \|\vec{v}(t)\| = 1 \text{ et } \langle \vec{u}'(t), \vec{v}(t) \rangle = 0.$$

On définit une nappe paramétrée  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$\varphi(s, t) = (x_2(t) + sx_1(t), y_2(t) + sy_1(t), z_2(t) + sz_1(t)).$$

1. Exprimer le vecteur normal en tout point à l'aide de  $\vec{u}, \vec{u}'$  et  $\vec{v}$ .
2. Montrer que  $\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) = p(t)\vec{u}'(t)$ , où

$$p(t) = \frac{\det(\vec{v}(t), \vec{u}(t), \vec{u}'(t))}{\|\vec{u}'(t)\|^2}.$$

En déduire une expression de la courbure de Gauss en tout point en fonction de  $p(t)$ .

3. À quelle condition la courbure de Gauss est-elle identiquement nulle ?



---

---

# CHAPITRE 5

---

## CORRECTION DES EXERCICES

### 5.1 COURBES PLANES

#### 5.1.1 ÉTUDES DE COURBES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

**EXERCICE 5.1.1** (Astroïde). L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques, il suffit donc de faire l'étude sur  $[-\pi, \pi]$ .
- On a  $x(-t) = x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $[0, \pi]$ .
- On a  $x(\pi - t) = -x(t)$  et  $y(\pi - t) = y(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- On a  $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$  et  $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

De plus  $\|\gamma(t)\|^2 \leq 1$  et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier les fonctions  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x'(t) &= -3 \sin(t) \cos^2(t) \\ y'(t) &= 3 \cos(t) \sin^2(t) \end{cases}$$

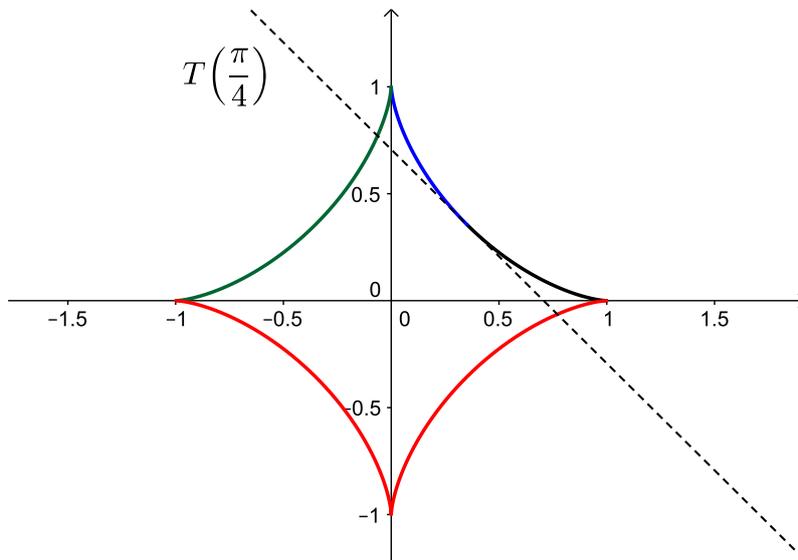
Sur l'intervalle  $[0, \pi/4]$  on a  $x'(t) \leq 0$  et  $y'(t) \geq 0$ . Ainsi,  $x$  est toujours décroissante et  $y$  est toujours croissante sur  $[0, \pi/4]$ . Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En  $t = \pi/4$  on a

$$\vec{\gamma}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 (-1, 1).$$

En  $t = 0$  on a

$$\vec{\gamma}'(0) = \vec{0} \text{ et } \vec{\gamma}''(0) = (-3, 0).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à  $[0, \pi/4]$  est en noir. La partie correspondant à  $[\pi/4, \pi/2]$ , en bleu, est obtenue par réflexion par rapport à la première bissectrice des axes. La partie correspondant à  $[\pi/2, \pi]$ , en vert, est obtenue par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. Le reste de la courbe, en rouge, est obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses.



**EXERCICE 5.1.2** (Cardioïde). 1. On a d'une part

$$\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) - \sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right)$$

et d'autre part

$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right) \\ &\quad - \cos^2\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right) - \sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin(p) - \frac{1}{2}\sin(q). \end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de même.

2. L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques, il suffit donc de faire l'étude sur  $[-\pi, \pi]$ .
- On a  $x(-t) = x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $[0, \pi]$ .

De plus,  $\|\gamma(y)\|^2 \leq 18$  et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier les fonctions  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right) \\ y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \end{cases}$$

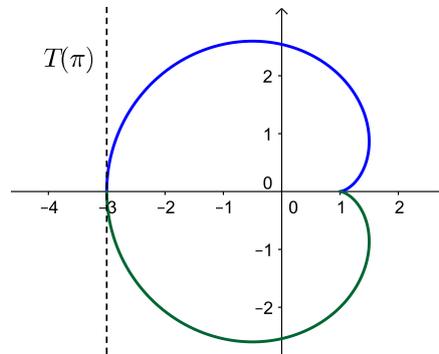
Sur l'intervalle  $[0, \pi]$ ,  $\sin(t/2) \geq 0$  et  $\sin(3t/2)$  change de signe une fois en  $2\pi/3$ . Ainsi,  $y$  est croissante sur  $[0, 2\pi/3]$  puis décroissante sur  $[2\pi/3, \pi]$ . D'autre part,  $\cos(3t/2)$  change de signe une fois, pour  $t = \pi/3$ . Ainsi,  $x$  est croissante sur  $[0, \pi/3]$  puis décroissante sur  $[\pi/3, \pi]$ . Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En  $t = \pi$  on a

$$\vec{\gamma}'(\pi) = (0, -2)$$

En  $t = 0$  on a

$$\vec{\gamma}'(0) = \vec{0} \text{ et } \vec{\gamma}''(0) = (2, 0).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à  $[0, \pi]$  est en bleu. Le reste de la courbe, en vert, est obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses.



**EXERCICE 5.1.3.** L'arc n'a pas de symétrie particulière, nous allons donc faire l'étude sur  $\mathbf{R}$ . On remarque que

$$\|\gamma(t)\|^2 \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} +\infty,$$

il y a donc deux branches infinies, en  $\pm\infty$ .

- En  $+\infty$ , on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

et la courbe a une branche parabolique dans la direction  $\vec{j}$ .

- En  $-\infty$ , on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

et la courbe a une branche parabolique dans la direction  $\vec{j}$ .

Nous pouvons maintenant étudier les fonctions  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x'(t) = 2t + 3t^2 \\ y'(t) = 4t^3 \end{cases}$$

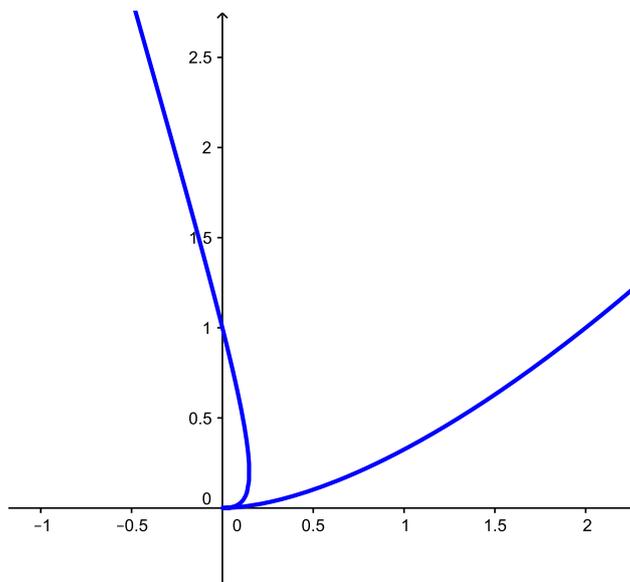
Sur l'intervalle  $] -\infty, 0]$ , on a  $y'(t) \leq 0$  et sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , on a  $y'(t) \geq 0$ . Ainsi,  $y$  est décroissante pour  $t \in ] -\infty, 0]$  puis croissante pour  $t \in [0, +\infty[$ . D'autre part, on a

$$x'(t) = t(2 + 3t)$$

donc  $x(t) \leq 0$  pour  $t \in [-2/3, 0]$  et  $x(t) \geq 0$  en dehors. Ainsi,  $x$  est croissante sur  $] -\infty, -2/3]$ , puis décroissante sur  $[-2/3, 0]$ , puis à nouveau croissante sur  $[-2/3, +\infty[$ . Il y a un unique point singulier en  $t = 0$ . Pour déterminer sa nature, nous devons calculer les dérivées successives :

$$\vec{\gamma}''(0) = (2, 0), \vec{\gamma}'''(0) = (6, 0) \text{ et } \vec{\gamma}^{(4)}(0) = (0, 24).$$

On a donc un point de rebroussement de seconde espèce. Nous pouvons maintenant tracer la courbe.



Un calcul direct permet de montrer qu'en  $t = -4/3$ , la courbure s'annule et change de signe. La branche infinie "de gauche" s'infléchit donc en ce point. Pour des raisons d'échelle, ce phénomène n'apparaît pas sur la figure précédente.

**EXERCICE 5.1.4** (Courbe orthoptique). 1. D'après l'exercice 5.1.1, le vecteur tangent à la courbe au point de paramètre  $t$  est

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'(t) &= (-3 \sin(t) \cos^2(t), 3 \cos(t) \sin^2(t)) \\ &= 3 \sin(t) \cos(t) (-\cos(t), \sin(t)).\end{aligned}$$

Le point de paramètre  $t$  est régulier si et seulement si  $\sin(t) \cos(t) \neq 0$  et le vecteur  $\vec{u}(t)$  de coordonnées  $(-\cos(t), \sin(t))$  est alors un vecteur tangent unitaire.

2. Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}(t_1), \vec{u}(t_2) \rangle &= \cos(t_1) \cos(t_2) + \sin(t_1) \sin(t_2) \\ &= \cos(t_1 - t_2).\end{aligned}$$

Ainsi, les tangentes aux points  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$  seront orthogonales si et seulement si

$$t_1 = t_2 + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

pour  $k \in \mathbf{Z}$ .

3. L'équation de la tangente au point  $\gamma(t)$  est

$$\begin{aligned}\sin(t)(x - \cos^3(t)) - (-\cos(t))(y - \sin^3(t)) &= 0 \\ \sin(t)x + \cos(t)y &= \sin(t) \cos^3(t) + \cos(t) \sin^3(t) \\ \sin(t)x + \cos(t)y &= \sin(t) \cos(t)\end{aligned}$$

4. Il découle de ce qui précède que la courbe cherchée est l'ensemble des points d'intersections des tangentes à l'astroïde aux points  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t + \pi/2)$  quand  $t$  parcourt  $\mathbf{R}$ . L'équation de la tangente au point  $t + \pi/2$  est

$$\begin{aligned}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)x + \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)y &= \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(t)x - \sin(t)y &= -\cos(t) \sin(t) \\ \cos(t)x - \sin(t)y &= -\cos(t) \sin(t)\end{aligned}$$

Le point d'intersection des tangentes aux points  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t + \pi/2)$  est donc défini par le système d'équations

$$\begin{cases} \sin(t)x + \cos(t)y = \sin(t)\cos(t) \\ \cos(t)x - \sin(t)y = -\sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par  $\sin(t)$  et la seconde par  $\cos(t)$  et en additionnant, on obtient

$$x = \sin^2(t)\cos(t) - \sin(t)\cos^2(t).$$

En multipliant la première ligne par  $\cos(t)$  et la seconde par  $-\sin(t)$  et en additionnant, on obtient

$$y = \sin(t)\cos^2(t) + \sin^2(t)\cos(t).$$

La courbe orthoptique de l'astroïde est donc le support de l'arc paramétré  $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\psi(t) = (\sin^2(t)\cos(t) - \sin(t)\cos^2(t), \sin(t)\cos^2(t) + \sin^2(t)\cos(t)).$$

5. L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques, il suffit donc de faire l'étude sur  $[-\pi, \pi]$ .
- On a  $x(-t) = y(t)$  et  $y(-t) = x(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $[0, \pi]$ .
- On a  $x(\pi - t) = -y(t)$  et  $y(\pi - t) = -x(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- On a  $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -x(t)$  et  $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ , il suffit donc de faire l'étude sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

De plus  $d(0, \gamma(t))^2 \leq 8$  et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier les fonctions  $x$  et  $y$ . Commençons par  $x$ ,

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2\sin(t)\cos^2(t) - \sin^3(t) - \cos^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) \\ &= 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) - (\sin^3(t) + \cos^3(t)) \\ &= 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) \\ &\quad - (\cos(t) + \sin(t))(\cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)) \\ &= 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) - (\cos(t) + \sin(t))(1 - \sin(t)\cos(t)) \\ &= 2(\cos(t) + \sin(t))(-1 + 3\sin(t)\cos(t)) \\ &= 2(\cos(t) + \sin(t))\left(-1 + \frac{3}{2}\sin(2t)\right). \end{aligned}$$

Sur l'intervalle  $[0, \pi/4]$  la fonction

$$t \mapsto 1 - 3\sin(2t)/2$$

est strictement décroissante. Il existe donc un unique  $t_0 \in [0, \pi/4]$  tel que  $x'(t) \leq 0$  pour  $t \in [0, t_0]$  et  $x'(t) \geq 0$  pour  $[t_0, \pi/4]$ . Ainsi,  $x$  est décroissante sur  $[0, t_0]$  puis croissante sur  $[t_0, \pi/4]$ . Nous pouvons maintenant étudier  $y$  :

$$\begin{aligned} y'(t) &= -2\sin^2(t)\cos(t) + \cos^3(t) - \sin^3(t) + 2\sin(t)\cos^2(t) \\ &= 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t) - \sin(t)) + (\cos^3(t) - \sin^3(t)) \\ &= 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t) - \sin(t)) \\ &\quad + (\cos(t) - \sin(t))(\cos^2(t) + \sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)) \\ &= 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t) - \sin(t)) + (\cos(t) - \sin(t))(1 + \sin(t)\cos(t)) \\ &= 2(\cos(t) - \sin(t))(1 + 3\sin(t)\cos(t)) \\ &= 2(\cos(t) - \sin(t))\left(1 + \frac{3}{2}\sin(2t)\right). \end{aligned}$$

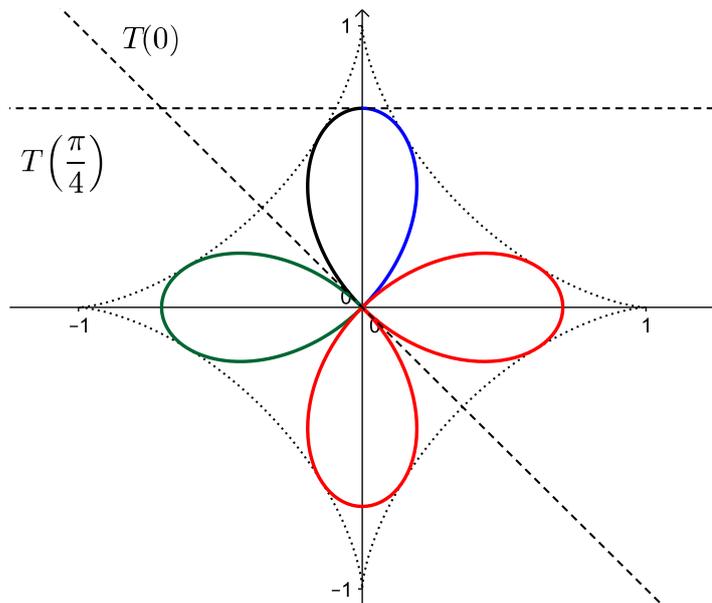
Sur l'intervalle  $[0, \pi/4]$ , on a  $y'(t) \geq 0$ . Ainsi,  $y$  est toujours croissante. Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En  $t = \pi/4$  on a

$$\vec{\gamma}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

En  $t = 0$  on a

$$\vec{\gamma}'(0) = (-2, 2).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à  $[0, \pi/4]$  est en noir. La partie correspondant à  $[\pi/4, \pi/2]$ , en bleu, est obtenue par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. La partie correspondant à  $[\pi/2, \pi]$ , en vert, est obtenue par réflexion par rapport à la seconde bissectrice des axes. Le reste de la courbe, en rouge, est obtenu par réflexion par rapport à la première bissectrice des axes.



### 5.1.2 ÉTUDES DE COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES

**EXERCICE 5.1.5.** L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- La fonction  $\rho$  est  $2\pi$ -périodique, il suffit donc de faire l'étude sur  $[-\pi, \pi]$ .
- On a  $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ , et  $\vec{u}_{-\theta} = \sigma_x(\vec{u}_\theta)$  où  $\sigma_x$  désigne la réflexion par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit que  $\gamma(-t) = \sigma_x(\gamma(t))$  et qu'il suffit donc de faire l'étude sur  $[0, \pi]$ .

De plus,  $|\rho(\theta)| \leq 3$  et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier la fonction  $\rho$  :

$$\rho'(\theta) = -2 \sin(\theta).$$

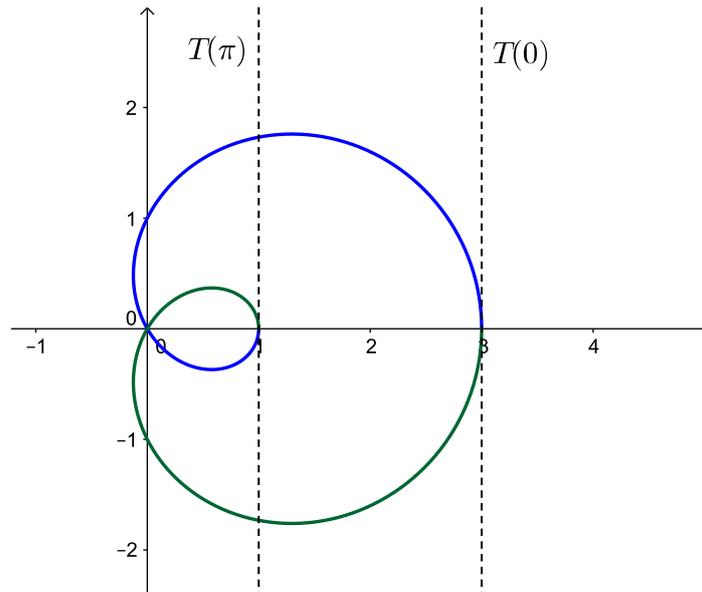
Sur l'intervalle  $[0, \pi]$  on a  $\rho'(\theta) \leq 0$ . Ainsi,  $\rho$  est toujours décroissante. De plus,  $\rho$  s'annule en  $\theta = 2\pi/3$ . On a donc  $\rho(\theta) \geq 0$  pour  $\theta \in [0, 2\pi/3]$  et  $\rho(\theta) \leq 0$  pour  $\theta \in [2\pi/3, \pi]$ . Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En  $t = \pi$  on a, avec les notations du cours,

$$\vec{\gamma}'(\pi) = \rho'(\pi)\vec{u}_\pi + \rho(\pi)\vec{v}_\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En  $t = 0$  on a

$$\vec{\gamma}'(0) = \rho'(0)\vec{u}_0 + \rho(0)\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à  $[0, \pi]$  est en bleu. Le reste de la courbe, en vert, est obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses.



**EXERCICE 5.1.6** (Eadem mutata resurgo). 1. Calculons les dérivées de  $\gamma$  :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'(\theta) &= \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta \\ &= a \ln(b)b^\theta\vec{u}_\theta + ab^\theta\vec{v}_\theta\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}''(\theta) &= a \ln(b)^2 b^\theta \vec{u}_\theta + a \ln(b) b^\theta \vec{v}_\theta + a \ln(b) b^\theta \vec{v}_\theta - ab^\theta \vec{u}_\theta \\ &= ab^\theta (\ln(b)^2 - 1) \vec{u}_\theta + 2a \ln(b) b^\theta \vec{v}_\theta.\end{aligned}$$

Pour montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre, il suffit de vérifier que leur déterminant est non nul :

$$\begin{aligned}\det(\vec{\gamma}'(\theta), \vec{\gamma}''(\theta)) &= 2a^2 \ln(b)^2 b^{2\theta} - a^2 b^{2\theta} (\ln(b)^2 - 1) \\ &= a^2 \ln(b)^2 b^{2\theta} + a^2 b^{2\theta} \\ &= a^2 b^{2\theta} (\ln(b)^2 + 1) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

2. Soit  $\alpha$  l'angle entre la tangente au point  $M = \gamma(t)$  et la droite  $(OM)$ . Un calcul immédiat montre que  $\|\gamma'(t)\| = ab^\theta \sqrt{1 + \ln(b)^2}$ . Comme  $(OM)$  est dirigée par  $\vec{u}_\theta$ , on a alors

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\langle \vec{\gamma}'(t), \vec{u}_\theta \rangle}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \\ &= \frac{a \ln(b) b^\theta}{ab^\theta \sqrt{1 + \ln(b)^2}} \\ &= \frac{\ln(b)}{\sqrt{1 + \ln(b)^2}}.\end{aligned}$$

On remarque que cet angle ne dépend pas du point  $M$ .

3. D'après le cours, pour  $M = \gamma(t)$ ,

$$\begin{aligned}
 \ell(M) &= \int_{-\infty}^t \|\vec{\gamma}'(\theta)\| d\theta \\
 &= \int_{-\infty}^t ab^\theta \sqrt{1 + \ln(b)^2} d\theta \\
 &= a\sqrt{1 + \ln(b)^2} \left[ \frac{b^\theta}{\ln(b)} \right]_{-\infty}^t \\
 &= ab^\theta \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(b)^2}} \\
 &= OM \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(b)^2}}.
 \end{aligned}$$

On remarque que  $\ell(M)/OM$  ne dépend pas du point  $M$ .

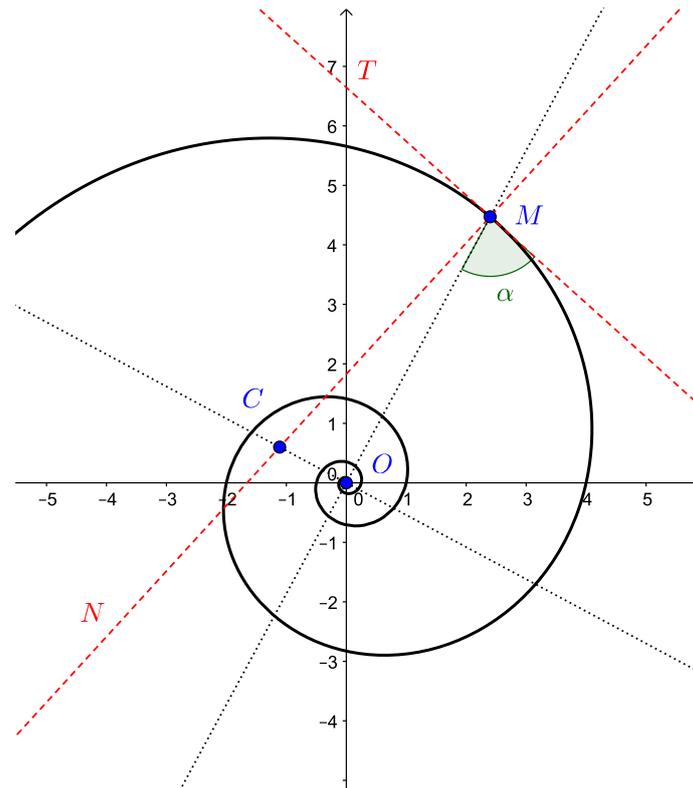
4. Il suffit d'appliquer la formule du cours :

$$\begin{aligned}
 c(t) &= \frac{\det(\vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t))}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3} \\
 &= \frac{(ab^\theta)^2 (\ln(b)^2 + 1)}{(ab^\theta \sqrt{1 + \ln(b)^2})^3} \\
 &= \frac{1}{OM} \frac{1}{\sqrt{1 + \ln(b)^2}} \\
 &= \frac{\sin(\alpha)}{OM}
 \end{aligned}$$

5. On remarque que le rayon de courbure au point  $M = \gamma(t)$  est égal à

$$R = \frac{OM}{\sin(\alpha)}.$$

Si  $C$  désigne le centre de courbure, on a donc  $OM = CM \sin(\alpha) = CM \cos(\pi/2 - \alpha)$ . Il s'ensuit que le triangle  $OCM$  est rectangle en  $O$ . Pour trouver  $C$ , il suffit donc de tracer la normale à la courbe au point  $M$  et la perpendiculaire à  $OM$  passant par  $O$ . Ces deux droites s'intersectent au centre de courbure.

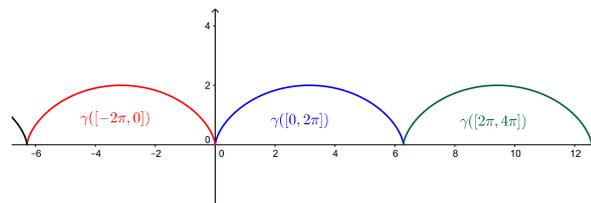


## 5.1.3 EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

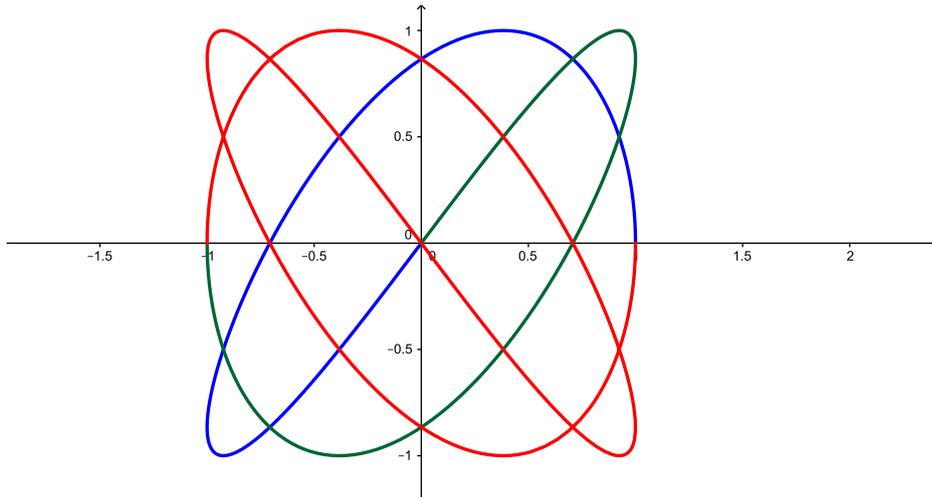
*Cette section contient quelques indications pour les exercices complémentaires.*

**EXERCICE 5.1.7** (Courbes cartésiennes). Voici les tracés des courbes.

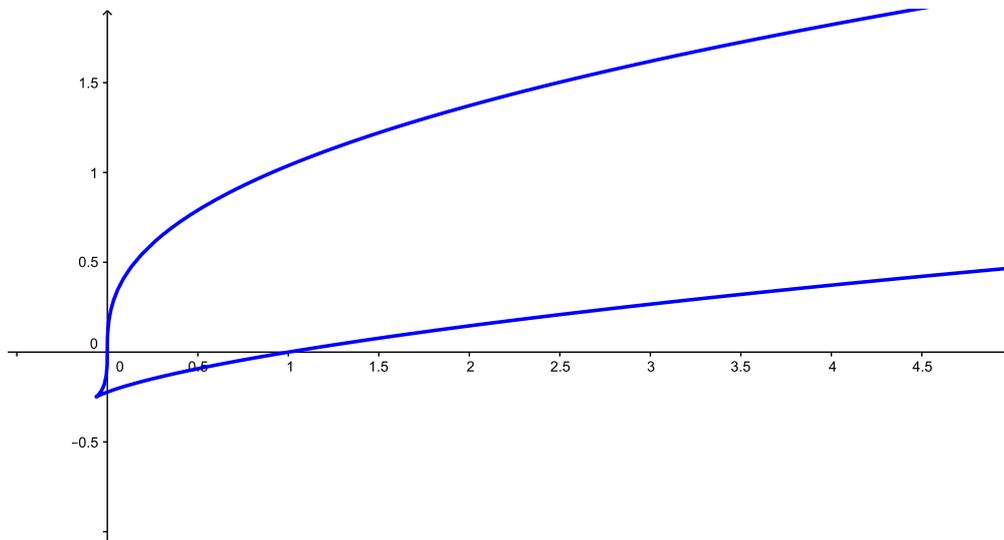
1. La cycloïde :  $x(t) = t - \sin(t)$  et  $y(t) = 1 - \cos(t)$ .



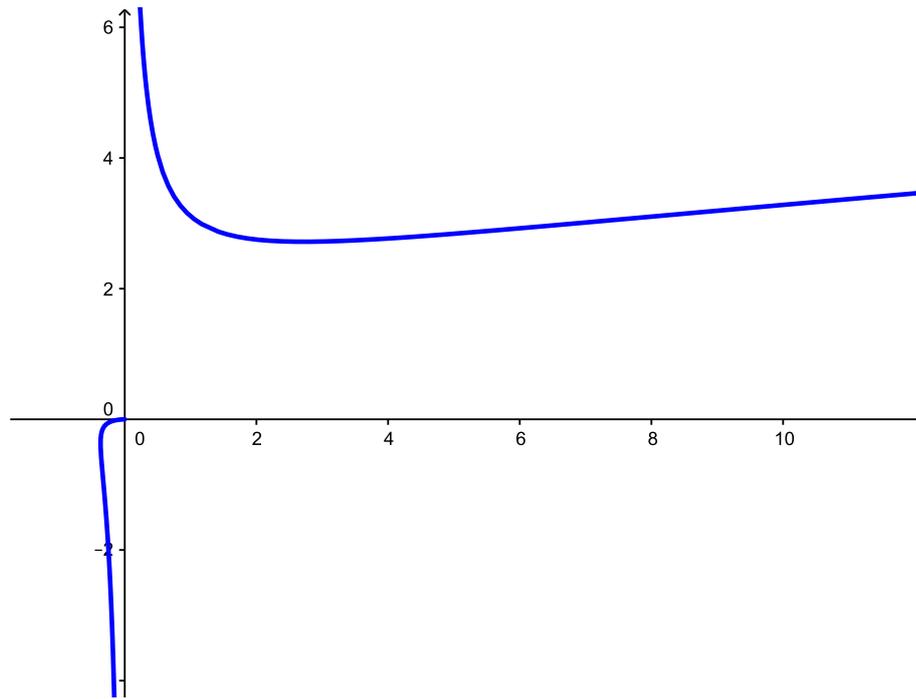
2. La courbe de Lissajous :  $x(t) = \cos(3t)$  et  $y(t) = \sin(4t)$ .



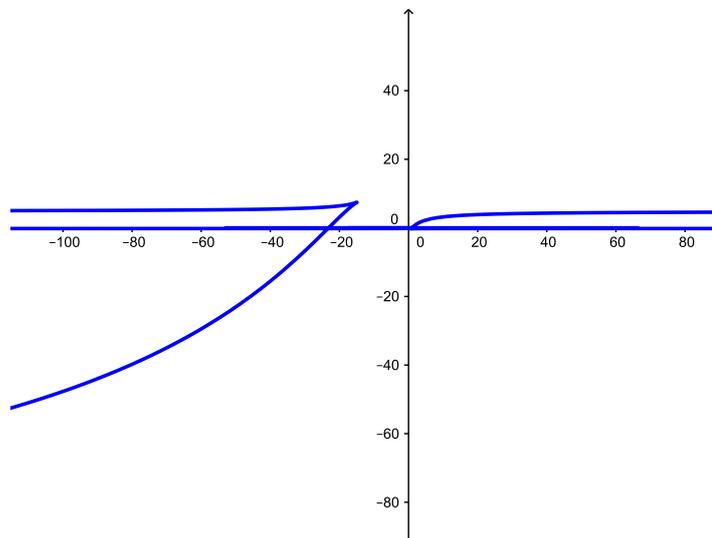
3.  $x(t) = 3t^4 - 2t^3$  et  $y(t) = t^2 - t$ .



4.  $x(t) = te^t$  et  $y(t) = \frac{e^t}{t}$ .

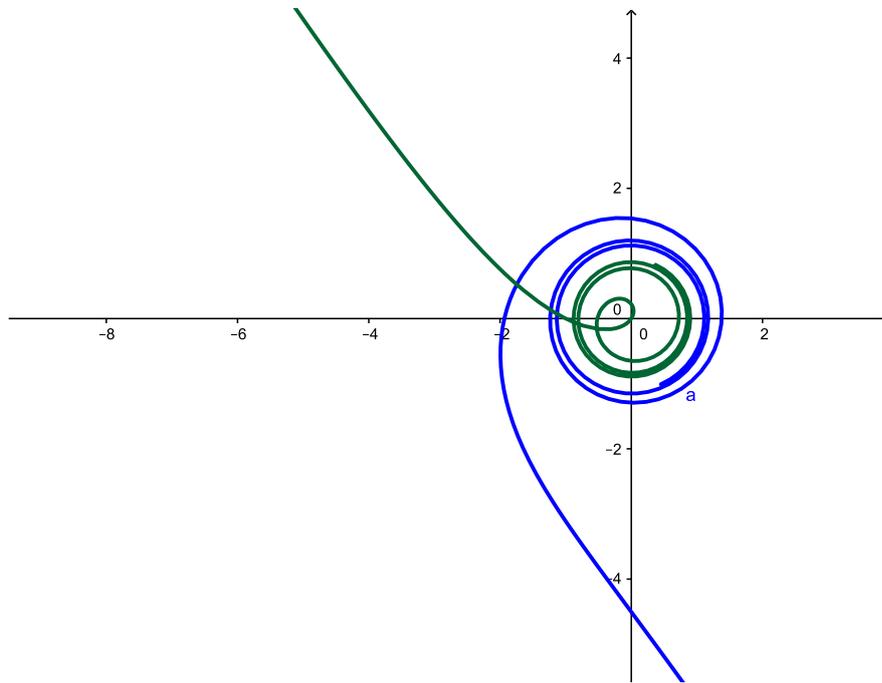


5.  $x(t) = \frac{e^t}{\cos(t)}$  et  $y(t) = e^t \sin(t)$ .

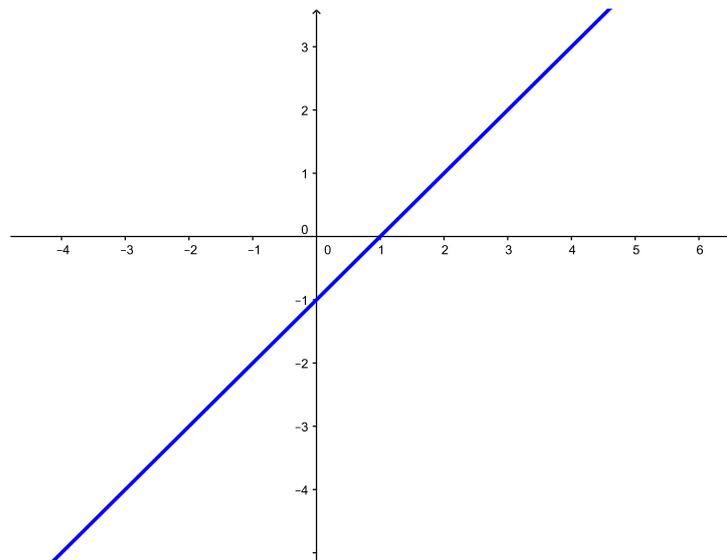


**EXERCICE 5.1.8** (Courbes polaires). Voici les tracés des courbes.

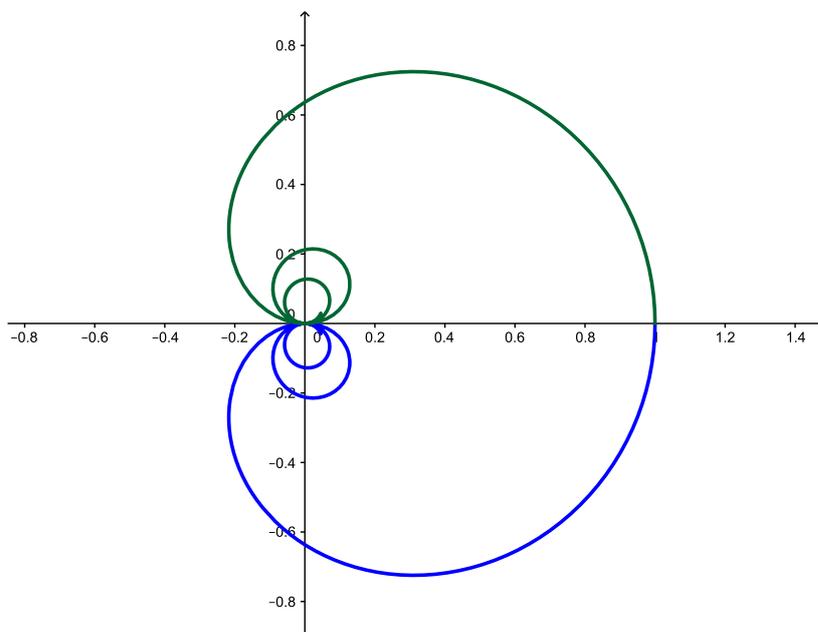
1.  $\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$ .



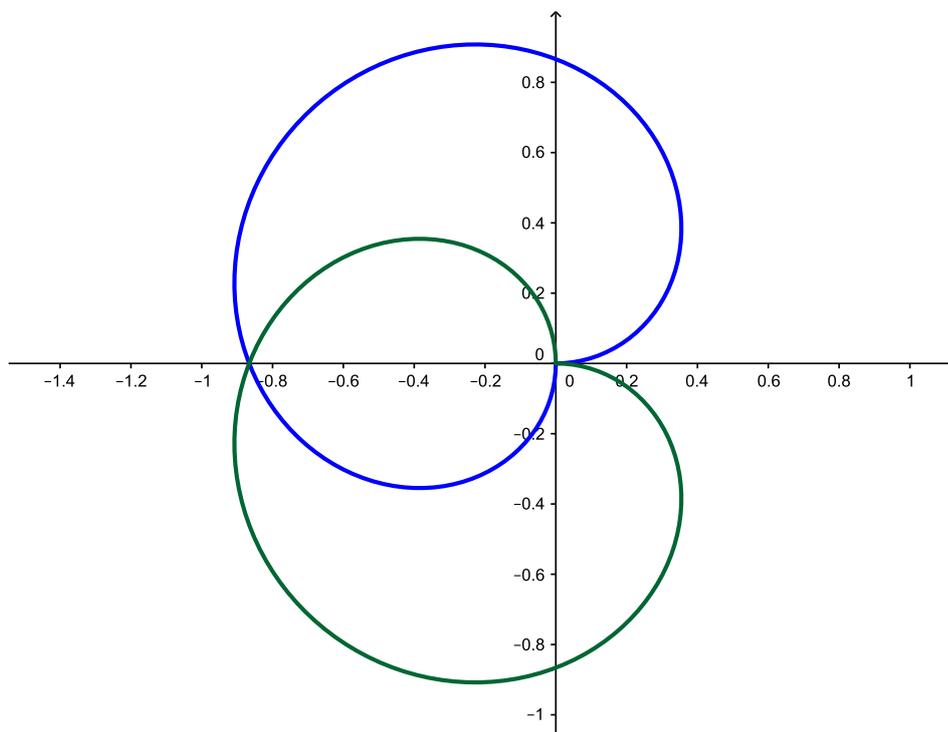
2.  $\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(2\theta)}$ .



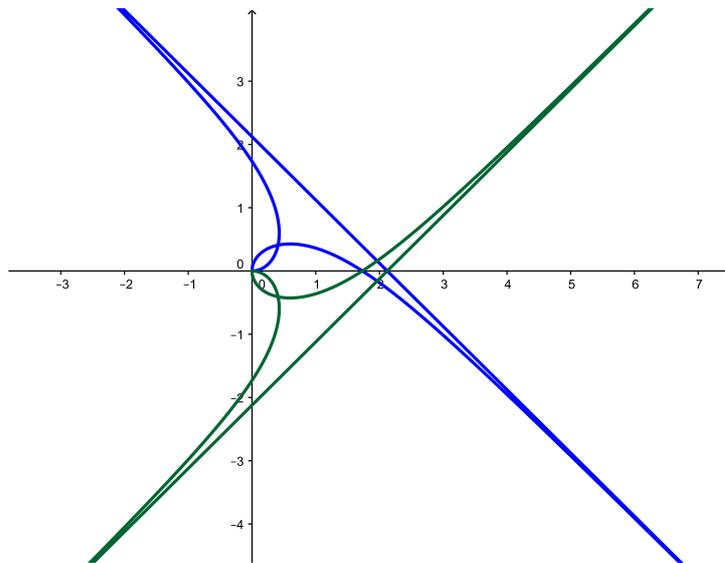
$$3. \rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$



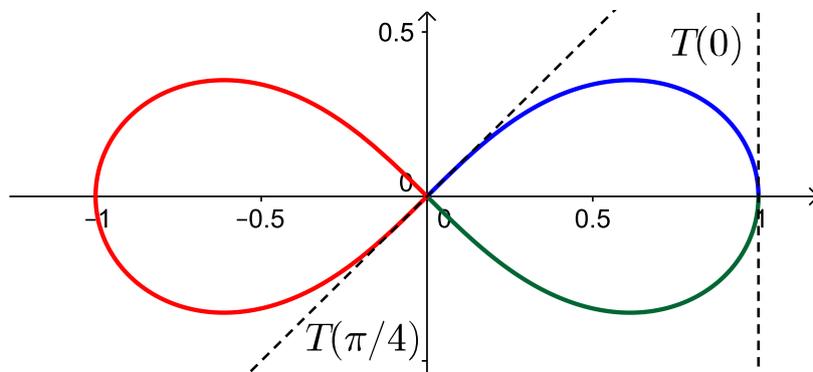
$$4. \rho(\theta) = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right).$$



5.  $\rho(\theta) = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ .



**EXERCICE 5.1.9** (Lemniscate de Bernoulli). Il faut étudier la courbe d'équation  $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$  sur  $[0, \pi/4]$  puis faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir la courbe sur  $[-\pi/4, 0]$ . En faisant une symétrie par rapport à l'origine on obtient ensuite le support de la courbe d'équation  $\rho = -\sqrt{\cos(2\theta)}$ . La réunion des deux est la courbe cherchée.



## 5.2 CONIQUES

### 5.2.1 DÉFINITIONS DES CONIQUES

**EXERCICE 5.2.1** (Foyer et directrice). 1. L'excentricité de  $\mathcal{C}$  est strictement inférieure à 1, c'est donc une ellipse.

2. L'axe focal est orthogonal à  $\mathcal{D}$ , donc a pour équation  $y = \alpha$  pour un certain réel  $\alpha$ . De plus,  $F$  appartient à l'axe focal. Son équation est donc  $y = -1$ . Dans le repère focal, les coordonnées du centre sont

$$\left( \frac{-de^2}{1-e^2}, 0 \right)$$

où  $d$  est la distance de  $F$  à l'axe focal, c'est-à-dire  $d = 4$ . L'abscisse du centre dans le repère focal est donc  $-1/2$ . Pour en déduire ses coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}$ , il suffit d'ajouter celles de  $F$ , ce qui donne

$$C : \left( \frac{1}{2}, -1 \right).$$

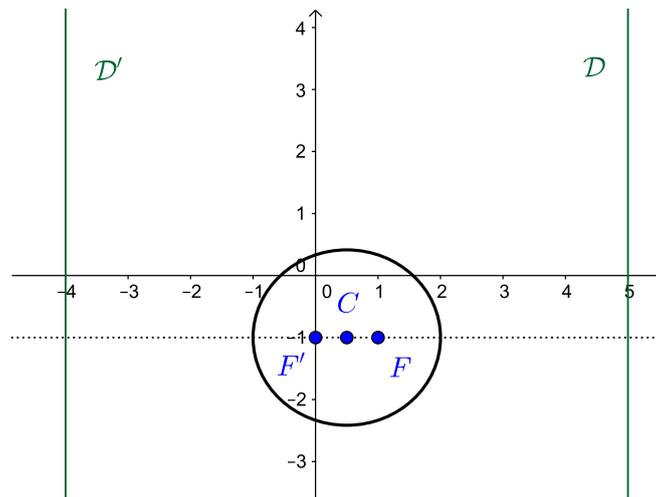
3. La second directrice s'obtient par symétrie par rapport à  $C$  et a donc pour équation  $x = -4$ . De même,  $F'$  a pour coordonnées  $(0, -1)$ .

4. La conique  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que

$$MF^2 = e^2 d(M, \mathcal{D})^2.$$

Dans le repère  $\mathcal{R}$ , cette égalité s'écrit

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{9}(x-1-4)^2 = \frac{1}{9}(x-5)^2.$$



**EXERCICE 5.2.2** (Équation polaire). 1. On a

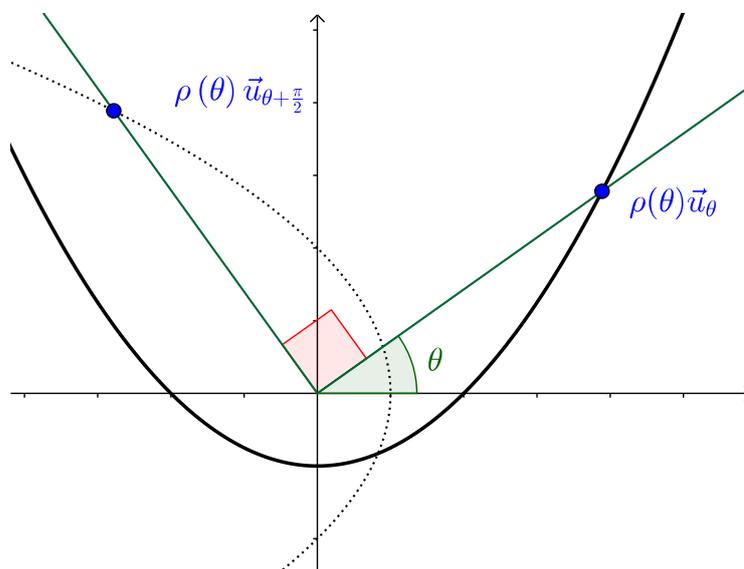
$$\rho(\theta) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2} \cos(\theta)}.$$

Il s'agit donc d'une ellipse d'excentricité  $1/2$  et de paramètre  $1/2$ .

2. On a

$$\begin{aligned}
 \rho(\theta)\vec{u}_\theta &= \frac{1}{1 - \sin(\theta)}\vec{u}_\theta \\
 &= \frac{1}{1 + \cos(\theta + \pi/2)}\vec{u}_\theta \\
 &= \frac{1}{1 + \cos(\theta + \pi/2)}f(\vec{u}_{\theta+\pi/2})
 \end{aligned}$$

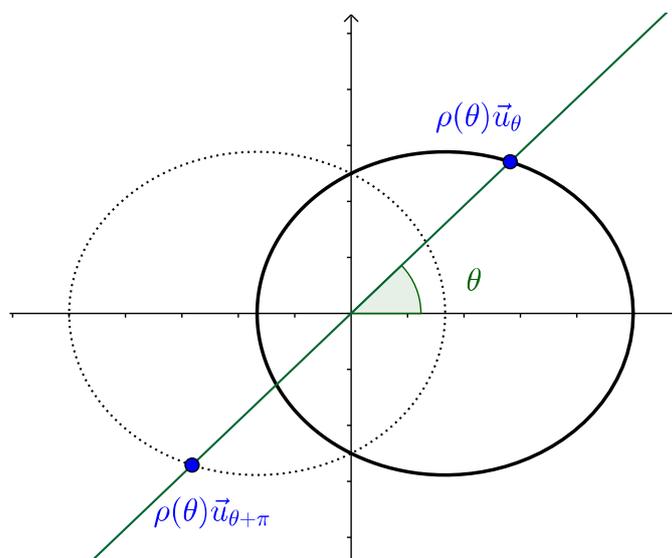
où  $f$  est la rotation vectorielle d'angle  $-\pi/2$ . Il s'agit donc d'une parabole de paramètre 1.



3. On a

$$\begin{aligned}
 \rho(\theta)\vec{u}_\theta &= \frac{1}{2 - \cos(\theta)}\vec{u}_\theta \\
 &= \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)}\vec{u}_\theta \\
 &= \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta + \pi)}\vec{u}_\theta \\
 &= \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta + \pi)}g(\vec{u}_{\theta+\pi})
 \end{aligned}$$

où  $g$  est la rotation vectorielle d'angle  $-\pi$ , c'est-à-dire la symétrie par rapport à l'origine. Il s'agit donc d'une ellipse d'excentricité  $1/2$  et de paramètre  $1/2$ .



**EXERCICE 5.2.3** (Équation polynomiale). 1. Posons  $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a \neq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= a(x^3 - y^3) + b(x^2 - y^2) + c(x - y) \\ &= a(x - y) \left( x^2 + xy + y^2 + \frac{b}{a}(x + y) + \frac{c}{a} \right) \\ &= a(x - y)Q(x, y). \end{aligned}$$

On a donc  $P(x) = P(y)$  si et seulement si  $x = y$  ou  $Q(x, y) = 0$ . Ainsi, l'ensemble des points tels que  $P(x) = P(y)$  est la réunion de la droite d'équation  $x = y$  et de la courbe du second degré d'équation  $Q(x, y) = 0$ .

2. Calculons le discriminant de l'équation  $Q(x, y) = 0$  :

$$\Delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

donc si la courbe est non-dégénérée c'est une ellipse. De plus, sa trace est égale à  $T = 1 + 1 = 2$ . Le polynôme caractéristique s'écrit donc

$$X^2 - 2X + 3 = \left(X - \frac{1}{2}\right) \left(X - \frac{3}{2}\right).$$

On en déduit que  $a^2 = 2$  et  $b^2 = 2/3$ . L'excentricité est alors donnée par

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et le paramètre par

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

### 5.2.2 ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES DE CONIQUES

**EXERCICE 5.2.4.** 1. D'après le cours, une paramétrisation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est donnée par l'arc paramétré  $\gamma : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)).$$

2. Calculons les dérivées de  $\gamma$  :

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\gamma}''(t) = \begin{pmatrix} -a \cos(t) \\ -b \sin(t) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det(\vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t)) = ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t) = ab.$$

On en déduit l'expression de la courbure au point de paramètre  $t$  :

$$c(t) = \frac{\det(\vec{\gamma}'(t), \vec{\gamma}''(t))}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}.$$

3. Il est clair que  $f(t) = (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}$  varie entre  $a^3$  et  $b^3$ . La courbure est maximale quand  $f$  est minimale, c'est-à-dire  $f(t) = b^3$ . On a alors

$$c(t) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}.$$

Cette valeur est atteinte pour  $\sin(t) = 0$ , donc  $t \in \{0, \pi\}$ . La courbure est minimale quand  $f$  est maximale, c'est-à-dire  $f(t) = a^3$ . On a alors

$$c(t) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}.$$

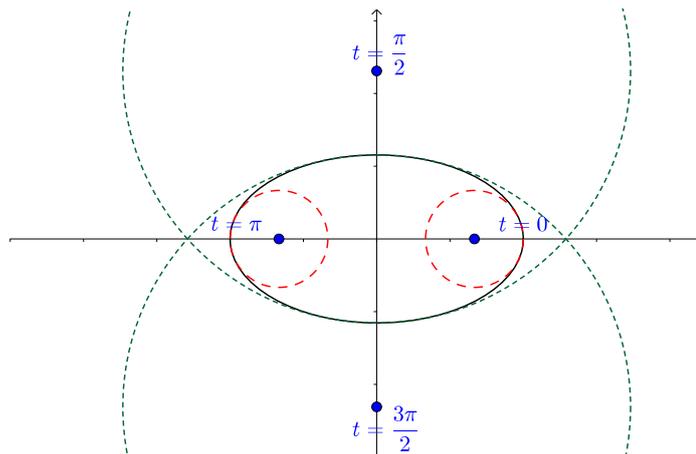
Cette valeur est atteinte pour  $\cos(t) = 0$ , donc  $t \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ . Il nous faut maintenant calculer les vecteurs normaux pour ces quatre paramètres. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma}'(0) = (0, b) \\ \vec{\gamma}'(\pi) = (0, -b) \\ \vec{\gamma}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a, 0) \\ \vec{\gamma}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-a, 0) \end{array} \right. \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}(0) = (-1, 0) \\ \vec{N}(\pi) = (1, 0) \\ \vec{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \\ \vec{N}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1) \end{array} \right.$$

dont on déduit les coordonnées des centres de courbure en translatant de  $c(t)^{-1}\vec{N}(t)$  :

$$\begin{aligned} t = 0 & : \left( a - \frac{b^2}{a}, 0 \right) \\ t = \frac{\pi}{2} & : \left( 0, b - \frac{a^2}{b} \right) \\ t = \pi & : \left( -a + \frac{b^2}{a}, 0 \right) \\ t = \frac{3\pi}{2} & : \left( 0, -b + \frac{a^2}{b} \right) \end{aligned}$$

Sur la figure ci-dessous où  $a = 2$  et  $b = 2/\sqrt{3}$ , les points de plus fortes courbures ont leur cercle osculateur en rouge et les points de plus faible courbure ont leur cercle osculateur en vert.



**EXERCICE 5.2.5.** 1. D'après le cours, une paramétrisation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est donnée par l'arc paramétré  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  défini par

$$\gamma(t) = \left( -\frac{t^2}{2p}, t \right).$$

2. Le vecteur dérivé au point de paramètre  $t$  est

$$\vec{\gamma}'(t) = \left( -\frac{t}{p}, 1 \right).$$

On en déduit une équation de la tangente au point  $\gamma(t)$  :

$$\begin{aligned} \left( x - \frac{-t^2}{2p} \right) - \left( -\frac{t}{p} \right) (y - t) &= 0 \\ x + \frac{t}{p}y &= \frac{t^2}{2p}. \end{aligned}$$

3. Pour que les tangentes aux points  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$  soient orthogonales, il faut et il suffit que  $\vec{\gamma}'(t_1)$  et  $\vec{\gamma}'(t_2)$  soient orthogonaux. Calculons donc leur produit scalaire :

$$\langle \vec{\gamma}'(t_1), \vec{\gamma}'(t_2) \rangle = \frac{t_1 t_2}{p^2} + 1.$$

Les tangentes seront donc orthogonales si et seulement si

$$t_1 t_2 = -p^2.$$

4. Soient  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$  tels que  $t_1 t_2 = -p^2$ . Les tangentes aux points  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$  sont orthogonales et les coordonnées  $(x, y)$  de leur point d'intersection vérifient

$$\begin{cases} x + \frac{t_1}{p}y = \frac{t_1^2}{2p} \\ x + \frac{t_2}{p}y = \frac{t_2^2}{2p} \end{cases}$$

En multipliant la première équation par  $t_2$  et la seconde par  $-t_1$  et en additionnant on obtient

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)x &= \frac{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2}{2p} \\ &= \frac{t_1 t_2}{2p} (t_1 - t_2) \\ &= -\frac{p}{2} (t_1 - t_2). \end{aligned}$$

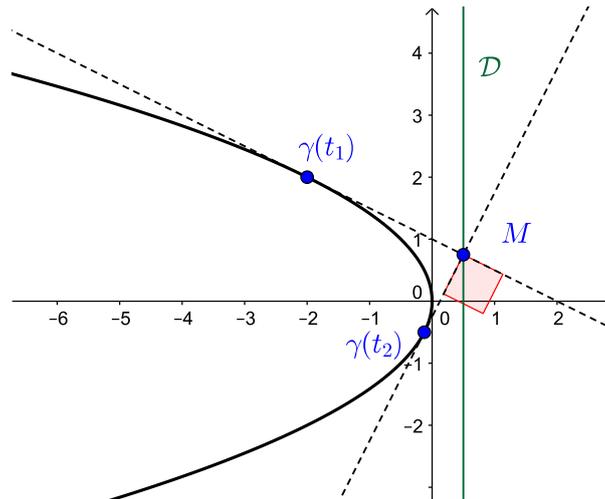
Il s'ensuit que  $x = p/2$ . Ainsi, la courbe orthoptique de la parabole est contenue dans la droite d'équation  $x = p/2$  dans le repère au sommet, c'est-à-dire la directrice de  $\mathcal{C}$ . De plus,

$$y = \frac{-1}{2t_1} + \frac{t_1}{2p}.$$

Comme la fonction  $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$t \mapsto \frac{-1}{2t} + \frac{t}{2p}$$

est surjective, la courbe orthoptique de  $\mathcal{C}$  est la totalité de sa directrice.



**EXERCICE 5.2.6.** Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  tels que  $0 < b < a$ . Pour  $\lambda \notin \{a, b\}$ , on note  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1.$$

1. Il y a plusieurs cas à distinguer :

- Si  $a < \lambda$  et  $b < \lambda$ , alors  $\mathcal{C}_\lambda = \emptyset$ .
- Si  $a < \lambda$  et  $b > \lambda$ , alors  $\mathcal{C}_\lambda$  est une hyperbole.
- Si  $a > \lambda$  et  $b > \lambda$ , alors  $\mathcal{C}_\lambda$  est une ellipse.

2. Dans le repère central, le foyer a pour coordonnées

$$\left( \frac{pe}{1 - e^2}, 0 \right)$$

Commençons par mettre l'équation sous forme canonique. Si  $b < \lambda$  et  $a > \lambda$ , on a

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

avec  $A^2 = a - \lambda$  et  $B^2 = \lambda - b$ . Le foyer a donc pour abscisse

$$\frac{pe}{1 - e^2} = \frac{B^2 \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}}{A \frac{-B^2}{A^2}} = -A \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} = -\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{a - b}.$$

Si  $a > \lambda$  et  $b > \lambda$ , on a

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

avec  $A^2 = a - \lambda$  et  $B^2 = b - \lambda$ . Le foyer a donc pour abscisse

$$\frac{pe}{1 - e^2} = \frac{B^2 \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}}{A \frac{B^2}{A^2}} = A \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{a - b}.$$

Les deux foyers étant symétriques par rapport au centre  $O$  de  $\mathcal{C}_\lambda$ , dans les deux cas ils ont pour coordonnées  $(\pm\sqrt{a-b}, 0)$  dans  $\mathcal{R}$ .

3. D'après le cours, le vecteur  $\vec{N}_\lambda(x_0, y_0)$  de coordonnées

$$\left( \frac{x_0}{a - \lambda}, \frac{y_0}{b - \lambda} \right)$$

est normal à  $\mathcal{C}_\lambda$  au point de coordonnées  $(x_0, y_0)$ .

4. Soit  $(x, y) \in \mathcal{C}_\lambda \cap \mathcal{C}_\mu$ . On a

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1 = \frac{x^2}{a - \mu} + \frac{y^2}{b - \mu},$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2}{a - \lambda} - \frac{x^2}{a - \mu} + \frac{y^2}{b - \lambda} - \frac{y^2}{b - \mu} \\ &= \frac{x^2(\lambda - \mu)}{(a - \lambda)(a - \mu)} + \frac{y^2(\lambda - \mu)}{(b - \lambda)(b - \mu)} \\ &= (\lambda - \mu) \left( \frac{x^2}{(a - \lambda)(a - \mu)} + \frac{y^2}{(b - \lambda)(b - \mu)} \right) \end{aligned}$$

Comme  $\lambda \neq \mu$ , le terme entre parenthèses doit être nul. Or,

$$\left\langle \vec{N}_\lambda(x, y), \vec{N}_\mu(x, y) \right\rangle = \frac{x^2}{(a - \lambda)(a - \mu)} + \frac{y^2}{(b - \lambda)(b - \mu)},$$

donc les tangentes à  $\mathcal{C}_\lambda$  et  $\mathcal{C}_\mu$  sont orthogonales au point d'intersection puisque leurs normales le sont.

### 5.2.3 EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

*Cette section contient quelques indications pour les exercices complémentaires.*

**EXERCICE 5.2.4** (Champ de force centrale). 1. Il suffit de dériver pour obtenir

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'(t) &= \rho'(t)\vec{u}_{\theta(t)} + \rho(t)\theta'(t)\vec{v}_{\theta(t)} \\ \vec{\gamma}''(t) &= \rho''(t)\vec{u}_{\theta(t)} + \rho'(t)\theta'(t)\vec{v}_{\theta(t)} + (\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t))\vec{v}_{\theta(t)} - \rho(t)\theta'(t)^2\vec{u}_{\theta(t)}. \end{aligned}$$

2. Par hypothèse,  $\vec{\gamma}''(t)$  est colinéaire à  $\vec{u}_{\theta(t)}$ . La composante selon  $\vec{v}_{\theta(t)}$  doit donc être nulle, c'est-à-dire

$$2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t) = 0.$$

En multipliant par  $\rho(t)$  les deux membres de cette équation, on obtient

$$2\rho(t)\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)^2\theta''(t) = 0$$

où l'on reconnaît la dérivée de  $\rho(t)^2\theta'(t)$ . Cette fonction ayant une dérivée nulle, elle est constante, d'où le résultat.

3. Il suffit de calculer  $q' \circ \theta(t)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q' \circ \theta(t) &= \frac{-r' \circ \theta(t)}{r^2 \circ \theta(t)} \\ &= \frac{1}{\theta'(t)} \frac{-\theta'(t)r' \circ \theta(t)}{r^2 \circ \theta(t)} \\ &= \frac{1}{\theta'(t)} \frac{-(r \circ \theta)'(t)}{(r \circ \theta(t))^2} \\ &= \frac{1}{\theta'(t)} \frac{-\rho'(t)}{\rho(t)^2} \\ &= \frac{-\rho'(t)}{C}. \end{aligned}$$

4. En dérivant la première formule de Binet, on obtient

$$\vec{\gamma}''(t) = C \left( \theta'(t)q' \circ \theta(t)\vec{v}_{\theta(t)} - \theta'(t)q \circ \theta(t)\vec{u}_{\theta(t)} - \theta'(t)q'' \circ \theta(t)\vec{u}_{\theta(t)} + q' \circ \theta(t)\vec{v}_{\theta(t)} \right).$$

Par hypothèse, la composante sur  $\vec{v}_{\theta(t)}$  est nulle, il suffit donc d'étudier la composante sur  $\vec{u}_{\theta}$  qui après factorisation donne

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}''(t) &= -C\theta'(t) (q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)) \vec{u}_{\theta(t)} \\ &= -C^2q \circ \theta(t)^2 (q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)) \vec{u}_{\theta(t)}. \end{aligned}$$

5. Remarquons que  $d(O, \gamma(t))^{-2} = \rho(t)^{-2} = q \circ \theta(t)^2$ . La second formule de Binet donne donc

$$-C^2q \circ \theta(t)^2 (q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)) = -\mu q \circ \theta(t)^2.$$

Après simplification, on voit que la fonction  $q$  satisfait une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, à savoir

$$q'' + q = \frac{\mu}{C^2}.$$

Il existe donc deux constantes  $A, \phi \in \mathbf{R}$  telles que pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$q(t) = A \cos(t + \phi) + \frac{\mu}{C^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{q \circ \theta(t)} \\ &= \frac{1}{\mu/C^2 + A \cos(\theta(t) + \phi)} \\ &= \frac{C^2/\mu}{1 + A' \cos(\theta(t) + \phi)} \end{aligned}$$

où  $A' = C^2 A/\mu$ . On reconnaît l'équation polaire d'une conique, d'où le résultat.

## 5.3 SURFACES

### 5.3.1 PLAN TANGENT

**EXERCICE 5.3.1.** Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cosh(s) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\cosh(t) \\ -\cosh(s) \\ \cosh(s) \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Soit  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  un point de  $\mathcal{S}$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . D'après le cours, une équation de  $T_{M_0}\mathcal{S}$  est donnée par

$$-\cosh(t_0)(x - x_0) - \cosh(s_0)(y - y_0) + \cosh(s_0) \cosh(t_0)(z - z_0) = 0.$$

En isolant les variables d'un côté et les constantes de l'autre, cette équation devient

$$\begin{aligned} \cosh(s_0) \cosh(t_0)z - \cosh(t_0)x - \cosh(s_0)y &= \cosh(s_0) \cosh(t_0)(s_0 + t_0) \\ &\quad - \cosh(t_0) \sinh(s_0) - \sinh(t_0) \cosh(s_0). \end{aligned}$$

qui après division par  $\cosh(s_0) \cosh(t_0)$  (la fonction cosinus hyperbolique ne s'annule jamais) prend la forme

$$z - \frac{x}{\cosh(s_0)} - \frac{y}{\cosh(t_0)} = s_0 + t_0 - \tanh(s_0) - \tanh(t_0).$$

**EXERCICE 5.3.2** (Paramétrage stéréographique). 1. Montrons que le support de  $\varphi_N$  est la sphère de centre 0 et de rayon 1 privée du pôle nord. Pour cela, posons  $k = 1 + s^2 + t^2$ . On a alors

$$\begin{aligned} d(O, \varphi(s, t)) &= x(s, t)^2 + y(s, t)^2 + z(s, t)^2 \\ &= \frac{1}{k^2} (4s^2 + 4t^2 + (-1 + s^2 + t^2)^2) \\ &= \frac{1}{k^2} (4s^2 + 4t^2 + 1 + s^4 + t^4 - 2s^2 - 2t^2 + 2s^2t^2) \\ &= \frac{1}{k^2} (1 + s^4 + t^4 + 2s^2 + 2t^2 + 2s^2t^2) \\ &= \frac{1}{k^2} (1 + s^2 + t^2)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc le support de  $\varphi_N$  est inclus dans la sphère. De plus, si  $x(s, t) = 0 = y(s, t)$  alors  $z(s, t) = -1$ . Ainsi, l'intersection du support de  $\varphi_N$  avec l'axe  $O\vec{k}$  ne contient que le pôle sud, ce qui montre que le support de  $\varphi_N$  ne contient pas le pôle nord. Réciproquement, soit  $M$  un point de la sphère de coordonnées  $(x, y, z)$  qui n'est pas le pôle nord. Si  $M$  est le pôle sud, nous avons vu que  $M = \varphi(0, 0)$  appartient au support de  $\varphi_N$ . Sinon, supposons  $x \neq 0$ . On doit alors avoir  $2s = kx$  et  $2t = ky$ , d'où

$$t = \frac{sy}{x}.$$

Ceci permet de trouver une équation donnant  $s$ . En effet,

$$\begin{aligned} 2s &= kx \\ 2s &= x + s^2x + t^2x \\ s^2x + s^2\frac{y^2}{x} - 2s + x &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = 4 - 4x \left( x + \frac{y^2}{x} \right) = 4(1 - x^2 - y^2) = 4z^2 \geq 0.$$

L'équation admet au moins une solution, donc  $M$  appartient au support de  $\varphi_N$ . Si  $x = 0$ , alors  $y \neq 0$  et un calcul similaire permet de conclure.

2. Calculons les dérivées partielles de  $\varphi_N$  :

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial s} = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} 2k - 4s^2 \\ -4ts \\ 2sk - 2(k-2)s \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} 2k - 4s^2 \\ -4ts \\ 4s \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial t} = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -4ts \\ 2k - 4t^2 \\ 2tk - 2(k-2)t \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -4ts \\ 2k - 4t^2 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel est donc égal à

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_N}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} &= \frac{1}{k^4} \begin{pmatrix} -16t^2s - 4s(2k - 4t^2) \\ -16ts^2 - 4t(2k - 4s^2) \\ (2k - 4s^2)(2k - 4t^2) - 16t^2s^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{k^4} \begin{pmatrix} -4t^2s - 2sk + 4st^2 \\ -4ts^2 - 2tk + 4ts^2 \\ k^2 - 2kt^2 - 2ks^2 + 4s^2t^2 - 4t^2s^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{k^3} \begin{pmatrix} -2s \\ -2t \\ k - 2t^2 - 2s^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{k^3} \begin{pmatrix} -2s \\ -2t \\ 1 - s^2 - t^2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{4}{k^2} \overrightarrow{O\varphi(s, t)}. \end{aligned}$$

D'une part, le produit vectoriel ne s'annule pas donc la nappe est régulière et d'autre part, le vecteur normal est colinéaire à  $\overrightarrow{O\varphi(s, t)}$  donc le plan tangent est le plan tangent usuel à la sphère.

**EXERCICE 5.3.3.** 1. Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \end{pmatrix},$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \sin(t) \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) - s \cos(t) \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \\ -s \sin(t) \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) - \cos(t) \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \\ s \end{pmatrix}.$$

Si ce vecteur est nul, on a  $s = 0$  donc

$$\begin{cases} \sin(t) \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0 \\ \cos(t) \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$  ne s'annulent pas en même temps, on doit donc avoir  $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$ . Réciproquement, si  $t$  vérifie  $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$  alors le point  $\varphi(0, t)$  est singulier.

2. Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y, z)$  et soit  $M_0 = \varphi(s_0, t_0)$  un point régulier. Si  $M$  appartient à l'axe  $O\vec{k}$ , on a  $x = y = 0$ . Si de plus,  $M$  appartient à  $T_{M_0}\mathcal{S}$ , alors  $\overrightarrow{MM_0}$  est orthogonal au vecteur normal en ce point, d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \sin(t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) - s_0 \cos(t_0) \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) \right) (0 - s_0 \cos(t_0)) \\ &\quad + \left( -s_0 \sin(t_0) \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) - \cos(t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) \right) (0 - s_0 \sin(t_0)) \\ &\quad + s_0(z - f(s_0, t_0)) \\ s_0 z &= -s_0^2 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) + s_0 f(s_0, t_0) \end{aligned}$$

Si  $s_0 \neq 0$ , l'intersection du plan tangent avec l'axe  $O\vec{k}$  est donc le point de coordonnées  $(0, 0, z)$  avec

$$z = -s_0 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) + f(s_0, t_0).$$

Si  $s_0 = 0$ , le vecteur normal est orthogonal à  $O\vec{k}$ . Comme de plus  $\varphi(s_0, t_0)$  appartient à  $O\vec{k}$ , ce dernier est inclus dans le plan tangent et l'intersection est donc l'axe  $O\vec{k}$  lui-même.

**EXERCICE 5.3.4.** 1. Considérons la nappe paramétrée  $\varphi : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\varphi(s, t) = \left( s, \frac{t^3}{s}, t \right).$$

Le support de  $\varphi$  est contenu dans  $\mathcal{S}_f$ . Réciproquement, soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y, z)$  de  $\mathcal{S}_f$ . Comme  $x \neq 0$ ,  $M = \varphi(x, z)$  et le support de  $\varphi$  est exactement  $\mathcal{S}_f$  privé de  $O\vec{j}$ .

2. Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t^3/s^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2/s \\ 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -t^3/s^2 \\ -1 \\ 3t^2/s \end{pmatrix}.$$

Une équation du plan tangent en un point  $M = \varphi(s_0, t_0)$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  est donc

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{t_0^3}{s_0^2}(x - x_0) - (y - y_0) + 3\frac{t_0^2}{s_0}(z - z_0) \\ 0 &= -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0) - (y - y_0) + 3\frac{z_0^2}{x_0}(z - z_0) \end{aligned}$$

ce qui après simplification donne

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{x_0}x + y - 3\frac{z_0^2}{x_0}z &= y_0 + y_0 - 3\frac{z_0^3}{x_0} \\ y_0x + x_0y - 3z_0^2z &= 2x_0y_0 - 3z_0^3 \\ y_0x + x_0y - 3z_0^2z &= -z_0^3 \end{aligned}$$

Les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les plan d'équation  $x = 2$  et  $y = 3z - 3$  vérifient donc

$$\begin{aligned} 2y_0 + x_0(3z - 3) - 3z_0^2z &= -z_0^3 \\ 3z(x_0 - z_0^2) &= -z_0^3 - 2y_0 + 3x_0 \end{aligned}$$

Pour que cette équation soit satisfaite pour tout  $z$ , il faut et il suffit que

$$\begin{cases} x_0 - z_0^2 &= 0 \\ -z_0^3 - 2y_0 + 3x_0 &= 0 \end{cases}$$

De la première équation on déduit  $x_0 = z_0^2$  et donc  $y_0 = z_0$ . La second équation devient alors

$$\begin{aligned} -z_0^3 - 2z_0 + 3z_0^2 &= 0 \\ z_0(z_0^2 - 3z_0 + 2) &= 0 \\ z_0(z_0 - 1)(z_0 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi les plans tangents contenant la droite considérée sont les plans tangents aux points de coordonnées  $(1, 1, 1)$  et  $(4, 2, 2)$ .

### 5.3.2 COURBURE

**EXERCICE 5.3.5** (Cône de révolution). Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cot(\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s \sin(t) \\ s \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s \cos(t) \cot(\alpha) \\ -s \sin(t) \cot(\alpha) \\ s(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \cot(\alpha) \cos(t) \\ -s \cot(\alpha) \sin(t) \\ s \end{pmatrix}.$$

La norme de ce vecteur est égale à  $\sqrt{s^2(1 + \cot^2(\alpha))}$  et on en déduit le vecteur normal  $\vec{N}$  en divisant. Calculons maintenant les dérivées partielles secondes de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} -s \cos(t) \\ -s \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit les formes fondamentales :

$$\Phi_1(h, k) = (1 + \cot^2(\alpha))h^2 + s^2k^2$$

et

$$\Phi_2(h, k) = \frac{1}{\sqrt{s^2(1 + \cot^2(\alpha))}} s^2 \cot(\alpha) k^2.$$

Le minimum de  $\Phi_2/\Phi_1$  est 0, atteint en  $k = 0$ . Quant à son maximum, il est atteint en  $h = 0$  et vaut (en remarquant que pour  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ ,  $\sin(\alpha) > 0$ )

$$\frac{1}{\sqrt{s^2(1 + \cot^2(\alpha))}} \frac{s^2 \cot(\alpha)}{s^2} = \frac{1}{|s|} \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{|s|}.$$

Les courbures principales sont donc 0 et  $\cos(\alpha)/|s|$ .

**EXERCICE 5.3.6** (Tore). 1. Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -r \sin(s) \cos(t) \\ -r \sin(s) \sin(t) \\ r \cos(s) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -(R + r \cos(s)) \sin(t) \\ (R + r \cos(s)) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que les deux dérivées partielles sont orthogonales. Il n'y aura donc pas de terme en  $hk$  dans  $\Phi_1$ . De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -r(R + r \cos(s)) \cos(s) \cos(t) \\ -r(R + r \cos(s)) \cos(s) \sin(t) \\ -r(R + r \cos(s))(\sin(s) \cos^2(t) + \sin(s) \sin^2(t)) \end{pmatrix} \\ &= r(R + r \cos(s)) \begin{pmatrix} -\cos(s) \cos(t) \\ -\cos(s) \sin(t) \\ -\sin(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le vecteur de la dernière égalité étant de norme 1 et positivement colinéaire au produit vectoriel, c'est le vecteur normal  $\vec{N}$ . Calculons maintenant les dérivées partielles secondes de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= \begin{pmatrix} -r \cos(s) \cos(t) \\ -r \cos(s) \sin(t) \\ -r \sin(s) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \begin{pmatrix} -(R + r \cos(s)) \cos(t) \\ -(R + r \cos(s)) \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} &= \begin{pmatrix} r \sin(s) \sin(t) \\ -r \sin(s) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons que  $\frac{\partial \varphi}{\partial s \partial t}$  est orthogonal à  $\vec{N}$  et qu'il n'y a par conséquent pas de terme en  $hk$  dans  $\Phi_2$ . On en déduit les formes fondamentales :

$$\begin{cases} \Phi_1(h, k) &= r^2 h^2 + (R + r \cos(s))^2 k^2 \\ \Phi_2(h, k) &= r h^2 + \cos(s)(R + r \cos(s)) k^2 \end{cases}$$

Les vecteurs  $\vec{v}_1 = (r^{-1}, 0)$  et  $\vec{v}_2 = (0, (R + r \cos(s))^{-1})$  forment une base orthonormée pour  $\Phi_1$ . Les courbures principales sont donc les valeurs de  $\Phi_2$  sur ces deux vecteurs, à savoir

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\cos(s)}{R + r \cos(s)}.$$

On en déduit la courbure moyenne et la courbure de Gauss :

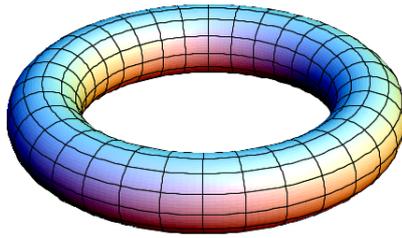
$$c_m = \frac{R + 2r \cos(s)}{r(R + r \cos(s))} \text{ et } K = \frac{\cos(s)}{r(R + r \cos(s))}.$$

2. Nous avons vu plus haut que

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| = r(R + r \cos(s))$$

La courbure totale est donc donnée par

$$\begin{aligned} c &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(s)}{r(R + r \cos(s))} r(R + r \cos(s)) ds dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s) ds dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \cos(s) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$



**EXERCICE 5.3.7** (Hyperboloïde à une nappe). 1. Pour tout  $z \in \mathbf{R}$ , il existe  $s \in \mathbf{R}$  tel que

$$z = \sinh(s).$$

Alors,

$$x^2 + y^2 = 1 + \sinh^2(s) = \cosh(s),$$

donc il existe  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $x = \cosh(s) \cos(t)$  et  $y = \cosh(s) \sin(t)$ . Ainsi, la nappe paramétrée  $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par

$$\varphi(s, t) = (\cosh(s) \cos(t), \cosh(s) \sin(t), \sinh(s))$$

est un paramétrage de  $\mathcal{S}$ .

2. Calculons les dérivées partielles de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \sinh(s) \cos(t) \\ \sinh(s) \sin(t) \\ \cosh(s) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\cosh(s) \sin(t) \\ \cosh(s) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les deux dérivées partielles sont orthogonales et qu'il n'y aura par conséquent pas de terme en  $hk$  dans  $\Phi_1$ . De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -\cosh^2(s) \cos(t) \\ -\cosh^2(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \cosh(s) \cos^2(t) + \cosh(s) \sinh(s) \sin^2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cosh^2(s) \cos(t) \\ -\cosh^2(s) \sin(t) \\ \cosh(s) \sinh(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons  $\alpha(s) = \cosh(s) \sqrt{1 + \tanh^2(s)}$ . Alors,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \cosh^2(s) \alpha(s) \begin{pmatrix} -\cos(t)/\alpha(s) \\ -\sin(t)/\alpha(s) \\ \tanh(s)/\alpha(s) \end{pmatrix}$$

Le vecteur du membre de droite étant de norme 1 et positivement colinéaire au produit vectoriel, c'est le vecteur normal  $\vec{N}$ . Calculons maintenant les dérivées partielles secondes de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} \cosh(s) \cos(t) \\ \cosh(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} -\cosh(s) \cos(t) \\ -\cosh(s) \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} = \begin{pmatrix} -\sinh(s) \sin(t) \\ \sinh(s) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons que  $\frac{\partial \varphi}{\partial s \partial t}$  est orthogonal à  $\vec{N}$  et qu'il n'y aura par conséquent pas de terme en  $hk$  dans  $\Phi_2$ . Nous pouvons maintenant calculer les formes fondamentales :

$$\begin{aligned}\Phi_1(h, k) &= h^2 \left( \sinh^2(s) \cos^2(t) + \sinh^2(s) \sin^2(t) + \cosh^2(s) \right) \\ &+ k^2 \left( \cosh^2(s) \sin^2(t) + \cosh^2(s) \cos^2(t) \right) \\ &= h^2 \left( \cosh^2(s) + \sinh^2(s) \right) + k^2 \cosh^2(s) \\ &= h^2 \cosh^2(s) \alpha(s)^2 + k^2 \cosh^2(s)\end{aligned}$$

et

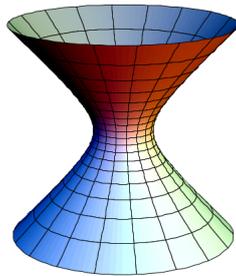
$$\begin{aligned}\Phi_2(h, k) &= h^2 \frac{\cosh(s) \cos^2(t) - \cosh(s) \sin^2(t) + \sinh(s) \tanh(s)}{\alpha(s)} \\ &+ k^2 \frac{\cosh(s) \cos^2(t) + \cosh(s) \sin^2(t)}{\alpha(s)} \\ &= h^2 \frac{\sinh^2(s) - \cosh^2(s)}{\cosh(s) \alpha(s)} + k^2 \frac{\cosh(s)}{\alpha(s)} \\ &= -h^2 \frac{1}{\cosh(s) \alpha(s)} + k^2 \frac{\cosh(s)}{\alpha(s)}\end{aligned}$$

Les vecteurs  $\vec{v}_1 = ((\cosh(s)\alpha(s))^{-1}, 0)$  et  $\vec{v}_2 = (0, \cosh(s)^{-1})$  forment une base orthonormée pour  $\Phi_1$ . Les courbures principales sont donc les valeurs de  $\Phi_2$  sur ces deux vecteurs, à savoir

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\cosh^3(s)\alpha(s)^3} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{\cosh(s)\alpha(s)}.$$

On en déduit la courbure de Gauss :

$$K(s, t) = -\frac{1}{(\cosh(s)\alpha(s))^4} = -\frac{1}{(\cosh^4(s) + \cosh^2(s) \sinh^2(s))^2} = -\frac{1}{d(O, \varphi(s, t))^4}.$$



### EXERCICE 5.3.8 (Paraboloïde elliptique).

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

La surface  $\mathcal{S}$  est le graphe de  $f$ , nous pouvons donc utiliser les résultats du cours pour calculer sa courbure de Gauss. Pour cela, il faut d'abord calculer les dérivées partielles de  $f$ . Les dérivées partielles premières sont

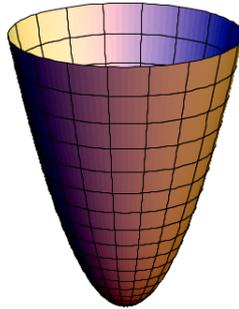
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{p} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{q}$$

et les dérivées partielles secondes sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{q} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

La courbure de Gauss est donc égale à

$$K = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{pq}}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2} = \frac{1}{pq \left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2}.$$



### 5.3.3 EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

*Cette section contient quelques indications pour les exercices complémentaires.*

**EXERCICE 5.3.9.** Il faut simplement faire soigneusement les calculs.

**EXERCICE 5.3.10** (Surfaces de révolution). Les surfaces étudiées dans cet exercice sont appelées *de révolution* car elles sont obtenues en faisant tourner le support de l'arc paramétré  $\gamma : t \mapsto (x(t), 0, y(t))$  autour de l'axe  $O\vec{k}$ .

1. Le calcul des dérivées partielles de  $\varphi$  donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -\sin(s)x(t) \\ \cos(s)x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \cos(s)x'(t) \\ \sin(s)x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = x(t) \begin{pmatrix} \cos(s)y'(t) \\ \sin(s)y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur de l'égalité ci-dessus est de norme 1, donc le produit vectoriel s'annule si et seulement si  $x(t)$  s'annule. Ainsi les points réguliers sont les points tels que  $x(t) \neq 0$ .

2. Comme  $x(t) \geq 0$  par hypothèse, le vecteur précédent est le vecteur normal en tout point régulier. Il suffit alors d'appliquer la formule du cours.
3. En appliquant la formule du cours avec les déterminants des formes fondamentales, on trouve

$$K = \frac{y'(t)}{x(t)}(y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t))$$

qu'il faut maintenant simplifier. En dérivant l'équation  $y'(t)^2 + x'(t)^2 = 1$ , on obtient

$$y'(t)y''(t) + x'(t)x''(t) = 0.$$

D'autre part, la même équation de départ peut se réécrire  $y'(t)^2 = 1 - x'(t)^2$ . En combinant ces deux résultats, on a

$$\begin{aligned} K &= \frac{y'(t)y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)^2}{x(t)} \\ &= \frac{-x'(t)x''(t)x'(t) - x''(t)(1 - x'(t)^2)}{x(t)} \\ &= -\frac{x''(t)}{x(t)}. \end{aligned}$$

4. Grâce à la question précédente, si la courbure de Gauss est constante on peut trouver une équation différentielle simple vérifiée par  $x(t)$ . Il faut cependant distinguer suivant le signe de la courbure.

- Si  $K = 0$  alors  $x''(t) = 0$  donc  $x(t) = At^2 + Bt + C$ , avec  $A, B, C \in \mathbf{R}$ .
- Si  $K > 0$  alors  $x''(t) + Kx(t) = 0$  donc  $x(t) = A \cos(\sqrt{K}t) + B \sin(\sqrt{K}t)$  avec  $A, B \in \mathbf{R}$ .
- Si  $K < 0$  alors  $x''(t) + Kx(t) = 0$  donc  $x(t) = A \cosh(\sqrt{-K}t) + B \sinh(\sqrt{-K}t)$  avec  $A, B \in \mathbf{R}$ .

Dans chaque cas, on a ensuite une expression explicite de  $y'(t) = \pm \sqrt{x'(t)^2 - 1}$  qui détermine  $y$  à une constante près. Notons qu'il n'est pas en général possible d'exprimer  $y$  en fonction de  $t$  à l'aide de fonctions usuelles.

**EXERCICE 5.3.11** (Surfaces réglées). Les surfaces étudiées dans cet exercice sont dites *réglées* car elles sont obtenues en prenant la réunion de toutes les droites  $D_t$  dirigées par  $\vec{u}(t)$  et passant par le point de coordonnées  $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ .

1. Le calcul des dérivées partielles donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \vec{u}(t) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{v}(t) + s\vec{u}'(t),$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) + s\vec{u}(t) \wedge \vec{u}'(t).$$

2. Les vecteurs  $\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)$  et  $\vec{u}'(t)$  sont par hypothèses tous deux orthogonaux à la fois à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Donc, il existe  $p(t) \in \mathbf{R}$  tel que  $\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) = p(t)\vec{u}'(t)$  et un calcul élémentaire donne

$$p(t) = \frac{\langle \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t), \vec{u}'(t) \rangle}{\|\vec{u}'(t)\|} = \frac{\det(\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{u}'(t))}{\|\vec{u}'(t)\|}.$$

De plus,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p(t)\vec{u}'(t) + s\vec{u}(t) \wedge \vec{u}'(t).$$

Comme  $\vec{u}(t)$  et  $\vec{u}'(t)$  sont orthogonaux,  $\|\vec{u} \wedge \vec{u}'(t)\| = \|\vec{u}\|\|\vec{u}'(t)\| = \|\vec{u}'(t)\|$  donc la norme du produit vectoriel des dérivées partielles premières est égale à

$$\sqrt{p(t)^2 + s^2} \|\vec{u}'(t)\|.$$

3. Un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \vec{v}'(t) + s\vec{u}''(t) \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} = \vec{u}'(t).$$

On a alors

$$\det(\Phi_1) = (p(t)^2 + s^2) \|\vec{u}'(t)\|^2.$$

et

$$\det(\Phi_2) = \frac{-(p(t) \|\vec{u}'(t)\|^2)^2}{(\sqrt{p(t)^2 + s^2} \|\vec{u}'(t)\|)^2} = -\frac{p(t)^2 \|\vec{u}'(t)\|^2}{p(t)^2 + s^2},$$

d'où

$$K(s, t) = \frac{-p(t)^2}{(p(t)^2 + s^2)^2}.$$

4. La courbure de Gauss est nulle si et seulement si  $p(t) = 0$ , ce qui équivaut au fait que  $\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{u}'$ .

---

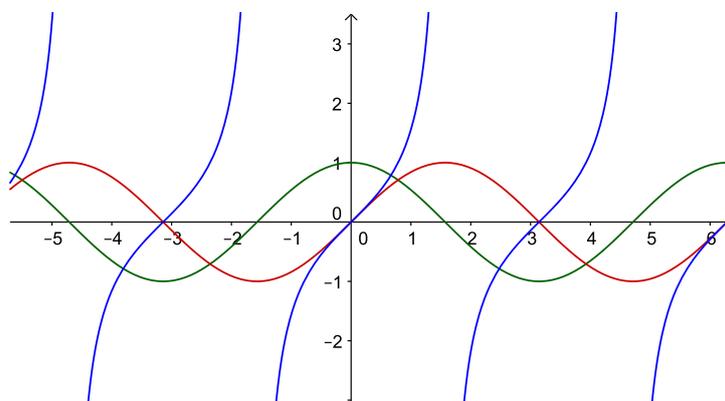
## APPENDICE : FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

### FONCTIONS CIRCULAIRES

Les fonctions trigonométriques dites *circulaires* sont les fonctions cosinus et sinus usuelles ainsi que la fonction tangente qui est, rappelons le, définie par  $\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $\cos(t) \neq 0$ .

#### SYMMÉTRIES

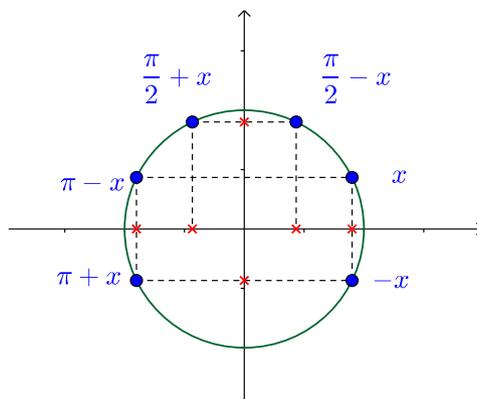
Rappelons tout d'abord les représentations graphiques des fonctions cos (en vert), sin (en rouge) et tan (en bleu).



Les fonctions cos et sin vérifient de nombreuses relations. Les principales sont résumées ci-dessous :

- $\cos(-x) = \cos(x)$  et  $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$  et  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$  et  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Ces formules peuvent être visualisées (et mémorisées) graphiquement, par exemple grâce à la figure suivante :



Rappelons également la formule célèbre et utile suivante : pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

#### VALEURS REMARQUABLES

Il est en général impossible de calculer exactement la valeur d'un cosinus ou d'un sinus. Il existe cependant quelques valeurs particulières qu'il est utile de connaître. Elles sont ici résumées dans un tableau.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$
cos(t)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin(t)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
tan(t)	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

#### FORMULES D'ADDITION

Il est possible de calculer le cosinus ou le sinus d'une somme de deux angles en fonction des valeurs des fonctions en chacun de ces angles. Plus précisément, on a

- Cosinus :

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)\end{aligned}$$

- Sinus :

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)\end{aligned}$$

- Tangente :

$$\begin{aligned}\tan(a + b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)} \\ \tan(a - b) &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}\end{aligned}$$

On en déduit en particulier les relations suivante :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}\end{aligned}$$

## FONCTIONS HYPERBOLIQUES

### DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Les fonctions trigonométriques hyperboliques peuvent être vues comme les valeurs des fonctions trigonométriques circulaires aux nombres imaginaires purs. Plus explicitement, en voici la définition.

DÉFINITION .0.1. La fonction *cosinus hyperbolique* est la fonction  $\cosh : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La fonction *sinus hyperbolique* est la fonction  $\sinh : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La fonction *tangente hyperbolique* est la fonction  $\tanh : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

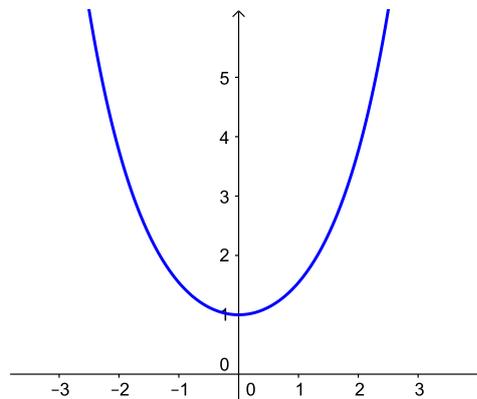
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Les propriétés suivantes se démontrent facilement à partir des définitions précédentes :

- La fonction cosinus hyperbolique est *paire* et pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\cosh'(t) = \sinh(t).$$

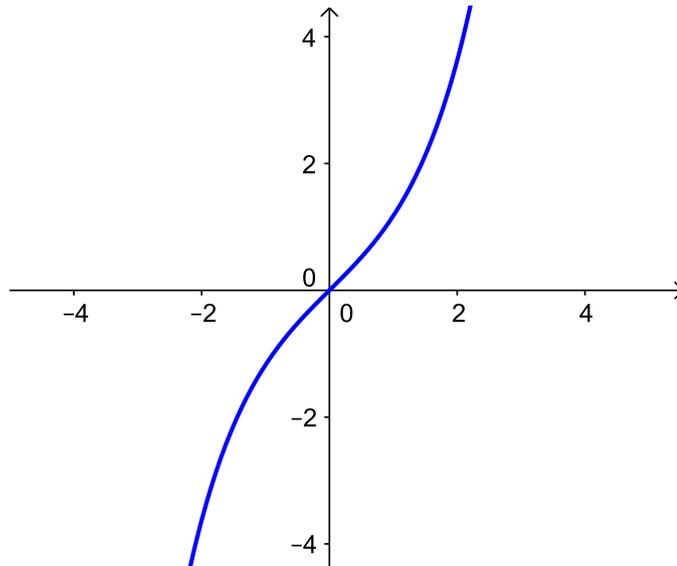
En voici une représentation graphique :



- La fonction sinus hyperbolique est *impaire* et pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\sinh'(t) = \cosh(t).$$

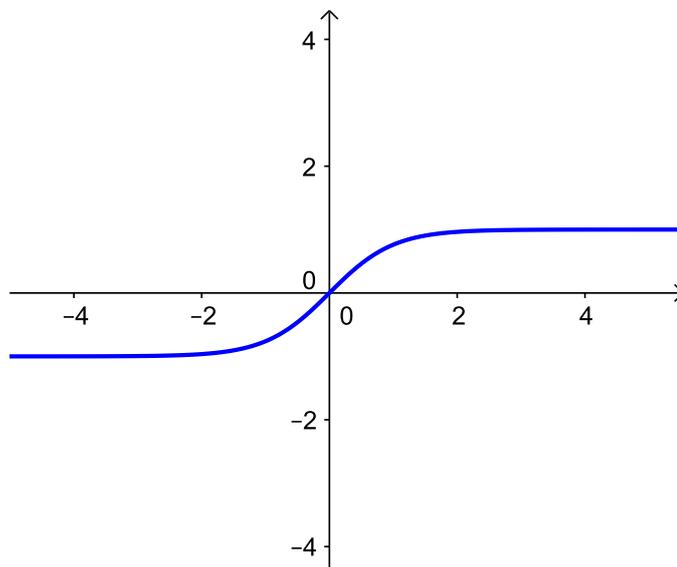
En voici une représentation graphique :



- La fonction tangente hyperbolique est *impaire* et pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} \tanh'(t) &= 1 - \tanh^2(t) \\ &= \frac{1}{\cosh^2(t)}. \end{aligned}$$

En voici une représentation graphique :



#### FORMULES D'ADDITION

Les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques hyperboliques peuvent se déduire de celles pour les fonctions trigonométriques circulaires grâce à la méthode mnémotechnique suivante : il suffit de remplacer formellement  $\cos$  par  $\cosh$  et  $\sin$  par  $i \cdot \sinh$ . Par exemple, on a pour tout  $t \in \mathbf{R}$

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

Appliquée systématiquement, cette méthode donne les égalités suivantes :

- Cosinus hyperbolique :

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

$$\cosh(a - b) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b)$$

- Sinus hyperbolique :

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b)$$

$$\sinh(a - b) = \sinh(a) \cosh(b) - \cosh(a) \sinh(b)$$

- Tangente hyperbolique :

$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a) \tanh(b)}$$

$$\tanh(a - b) = \frac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a) \tanh(b)}$$

On en déduit en particulier les relations suivante :

$$\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a)$$

$$\sinh(2a) = 2 \sinh(a) \cosh(a)$$

$$\tanh(2a) = \frac{2 \tanh(a)}{1 + \tanh(a)^2}$$