TD I – Corrigé

1. Études de courbes en coordonnées cartésiennes

***Exercice 1.1* (Astroïde). —** L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, il suffit donc de faire l'étude sur $[-\pi,\pi]$.
- On a $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $[0,\pi]$.
- On a $x(\pi-t)=-x(t)$ et $y(\pi-t)=y(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- On a $x\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=x(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

De plus $\|\gamma(t)\|^2 \leqslant 1$ et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier les fonctions x et y :

$$\begin{cases} x'(t) &= -3\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) &= 3\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}$$

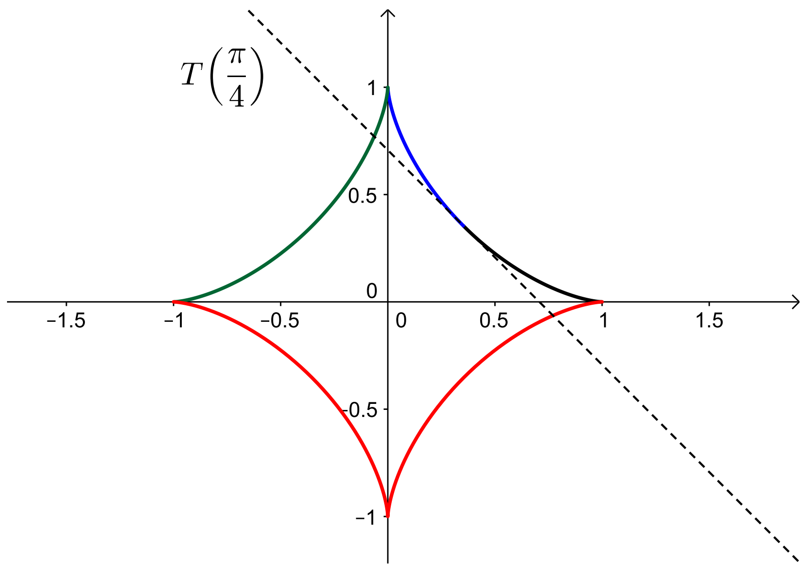
Sur l'intervalle $[0,\pi/4]$ on a $x'(t)\leqslant 0$ et $y'(t)\geqslant 0$. Ainsi, x est toujours décroissante et y est toujours croissante sur $[0,\pi/4]$. Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En $t=\pi/4$ on a

$$\overrightarrow{\gamma}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3(-1,1).$$

En $t=0$ on a

$$\overrightarrow{\gamma}'(0)=\overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{\gamma}''(0)=(-3,0).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à $[0,\pi/4]$ est en noir. La partie correspondant à $[\pi/4,\pi/2]$, en bleu, est obtenue par réflexion par rapport à la première bissectrice des axes. La partie correspondant à $[\pi/2,\pi]$, en vert, est obtenue par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. Le reste de la courbe, en rouge, est obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses.



***Exercice 1.2* (Cardioïde). —** **1**. On a d'une part

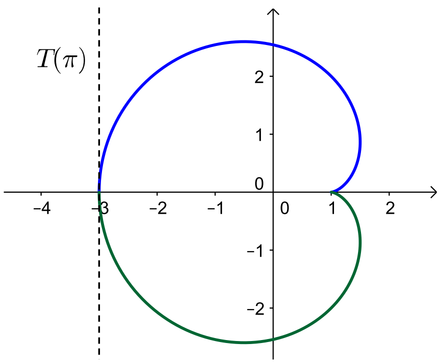
$$\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)-\sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right)$$

et d'autre part
$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)=\cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)-\sin\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right),$$
d'où
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\\ &- \cos^2\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right)-\sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin(p)-\frac{1}{2}\sin(q).\end{aligned}$$
La deuxième égalité se démontre de même.

2. L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :
- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, il suffit donc de faire l'étude sur $[-\pi,\pi]$.
- On a $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $[0,\pi]$.

De plus, $\|\gamma(y)\|^2\leqslant 18$ et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier les fonctions x et y :
$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t)+2\sin(2t) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\\ y'(t) = 2\cos(t)-2\cos(2t) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\end{cases}$$
Sur l'intervalle $[0,\pi]$, $\sin(t/2)\geqslant 0$ et $\sin(3t/2)$ change de signe une fois en $2\pi/3$. Ainsi, y est croissante sur $[0,2\pi/3]$ puis décroissante sur $[2\pi/3,\pi]$. D'autre part, $\cos(3t/2)$ change de signe une fois, pour $t=\pi/3$. Ainsi, x est croissante sur $[0,\pi/3]$ puis décroissante sur $[\pi/3,\pi]$. Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En $t=\pi$ on a
$$\overrightarrow{\gamma}'(\pi)=(0,-2)$$
En $t=0$ on a
$$\overrightarrow{\gamma}'(0)=\overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{\gamma}''(0)=(2,0).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à $[0,\pi]$ est en bleu. Le reste de la courbe, en vert, est obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 1.3. — L'arc n'a pas de symétrie particulière, nous allons donc faire l'étude sur $\mathbb{R}$. On remarque que
$$\|\gamma(t)\|^2 \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
il y a donc deux branches infinies, en $\pm\infty$.
- En $+\infty$, on a
$$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$$

et la courbe a une branche parabolique dans la direction $\vec{j}$.

- En $-\infty$, on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

et la courbe a une branche parabolique dans la direction $\vec{j}$.

Nous pouvons maintenant étudier les fonctions x et y :

$$\begin{cases} x'(t) &= 2t+3t^2 \\ y'(t) &= 4t^3 \end{cases}$$

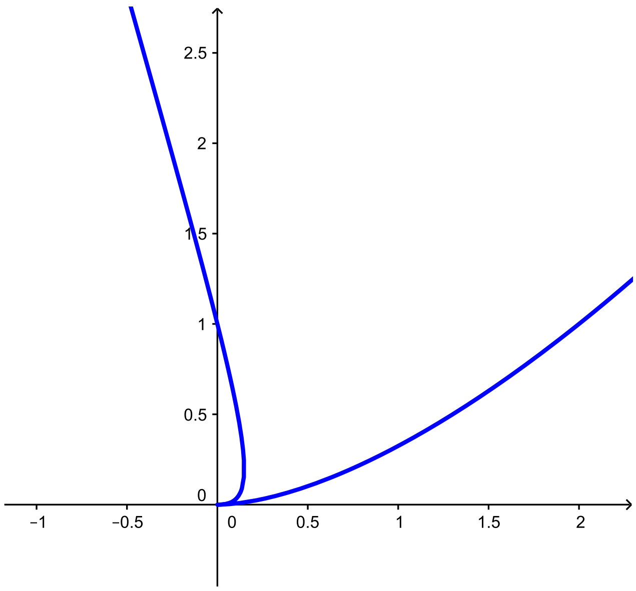
Sur l'intervalle $]-\infty,0]$, on a $y'(t)\leqslant 0$ et sur l'intervalle $[0,+\infty[$, on a $y'(t)\geqslant 0$. Ainsi, y est décroissante pour $t\in]-\infty,0]$ puis croissante pour $t\in[0,+\infty[$. D'autre part, on a

$$x'(t) = t(2+3t)$$

donc $x(t)\leqslant 0$ pour $t\in[-2/3,0]$ et $x(t)\geqslant 0$ en dehors. Ainsi, x est croissante sur $]-\infty,-2/3]$, puis décroissante sur $[-2/3,0]$, puis à nouveau croissante sur $[-2/3,+\infty[$. Il y a un unique point singulier en $t=0$. Pour déterminer sa nature, nous devons calculer les dérivées successives :

$$\vec{\gamma}''(0) = (2,0),\ \vec{\gamma}'''(0) = (6,0) \text{ et } \vec{\gamma}'''(0) = (0,24).$$

On a donc un point de rebroussement de seconde espèce. Nous pouvons maintenant tracer la courbe.



Un calcul direct permet de montrer qu'en $t=-4/3$, la courbure s'annule et change de signe. La branche infinie "de gauche" s'infléchit donc en ce point. Pour des raisons d'échelle, ce phénomène n'apparaît pas sur la figure précédente.

***Exercice 1.4* (Courbe orthoptique). —** **1.** D'après l'exercice 1.1, le vecteur tangent à l'astroïde au point de paramètre t est

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'(t) &= (-3\sin(t)\cos^2(t), 3\cos(t)\sin^2(t)) \\ &= 3\sin(t)\cos(t)(-\cos(t),\sin(t)). \end{aligned}$$

Le point de paramètre t est régulier si et seulement si $\sin(t)\cos(t)\neq 0$ et le vecteur $\vec{u}(t)$ de coordonnées $(-\cos(t),\sin(t))$ est alors un vecteur tangent unitaire.

2. Caculons le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}(t_1),\vec{u}(t_2)\rangle &= \cos(t_1)\cos(t_2)+\sin(t_1)\sin(t_2) \\ &= \cos(t_1-t_2). \end{aligned}$$

Ainsi, les tangentes aux points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ seront orthogonales si et seulement si

$$t_1 = t_2 + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

3. L'équation de la tangente au point $\gamma(t)$ est

$$\begin{array}{rcl} \sin(t)(x-\cos^3(t))-(-\cos(t))(y-\sin^3(t)) & = & 0 \\ \sin(t)x+\cos(t)y & = & \sin(t)\cos^3(t)+\cos(t)\sin^3(t) \\ \sin(t)x+\cos(t)y & = & \sin(t)\cos(t) \end{array}$$

4. Il découle de ce qui précède que la courbe cherchée est l'ensemble des points d'intersections des tangentes à l'astroïde aux points $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\pi/2)$ quand t parcourt $\mathbb{R}$. L'équation de la tangente au point $t+\pi/2$ est

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)x+\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)y & = & \sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos(t)x-\sin(t)y & = & -\cos(t)\sin(t) \\ \cos(t)x-\sin(t)y & = & -\cos(t)\sin(t) \end{array}$$

Le point d'intersection des tangentes aux points $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\pi/2)$ est donc défini par le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sin(t)x+\cos(t)y & = & \sin(t)\cos(t) \\ \cos(t)x-\sin(t)y & = & -\sin(t)\cos(t) \end{array}\right.$$

En multipliant la première ligne par $\sin(t)$ et la seconde par $\cos(t)$ et en additionnant, on obtient

$$x=\sin^2(t)\cos(t)-\sin(t)\cos^2(t).$$

En multipliant la première ligne par $\cos(t)$ et la seconde par $-\sin(t)$ et en additionnant, on obtient

$$y=\sin(t)\cos^2(t)+\sin^2(t)\cos(t).$$

La courbe orthoptique de l'astroïde est donc le support de l'arc paramétré $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ défini par

$$\psi(t)=(\sin^2(t)\cos(t)-\sin(t)\cos^2(t),\sin(t)\cos^2(t)+\sin^2(t)\cos(t)).$$

5. L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, il suffit donc de faire l'étude sur $[-\pi,\pi]$.
- On a $x(-t)=y(t)$ et $y(-t)=x(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $[0,\pi]$.
- On a $x(\pi-t)=-y(t)$ et $y(\pi-t)=-x(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- On a $x\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=-x(t)$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=y(t)$, il suffit donc de faire l'étude sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

De plus $d(0,\gamma(t))^2\leqslant 8$ et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier les fonctions x et y. Commençons par x,

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2\sin(t)\cos^2(t)-\sin^3(t)-\cos^3(t)+2\sin^2(t)\cos(t) \\ & = & 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t)+\sin(t))-(\sin^3(t)+\cos^3(t)) \\ & = & 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t)+\sin(t))-(\cos(t)+\sin(t))(\cos^2(t)-\sin(t)\cos(t)+\sin^2(t)) \\ & = & 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t)+\sin(t))-(\cos(t)+\sin(t))(1-\sin(t)\cos(t)) \\ & = & 2(\cos(t)+\sin(t))(-1+3\sin(t)\cos(t)) \\ & = & 2(\cos(t)+\sin(t))\left(-1+\dfrac{3}{2}\sin(2t)\right). \end{array}$$

Sur l'intervalle $[0,\pi/4]$ la fonction $t\mapsto 1-3\sin(2t)/2$ est strictement décroissante. Il existe donc un unique $t_0\in[0,\pi/4]$ tel que $x'(t)\leqslant 0$ pour $t\in[0,t_0]$ et $x'(t)\geqslant 0$ pour $[t_0,\pi/4]$. Ainsi, x est décroissante sur $[0,t_0]$ puis croissante sur $[t_0,\pi/4]$. Nous pouvons maitenant étudier y :

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & -2\sin^2(t)\cos(t)+\cos^3(t)-\sin^3(t)+2\sin(t)\cos^2(t) \\ & = & 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t)-\sin(t))+(\cos^3(t)-\sin^3(t)) \\ & = & 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t)-\sin(t))+(\cos(t)-\sin(t))(\cos^2(t)+\sin(t)\cos(t)+\sin^2(t)) \\ & = & 2\sin(t)\cos(t)(\cos(t)-\sin(t))+(\cos(t)-\sin(t))(1+\sin(t)\cos(t)) \\ & = & 2(\cos(t)-\sin(t))(1+3\sin(t)\cos(t)) \\ & = & 2(\cos(t)-\sin(t))\left(1+\dfrac{3}{2}\sin(2t)\right). \end{array}$$

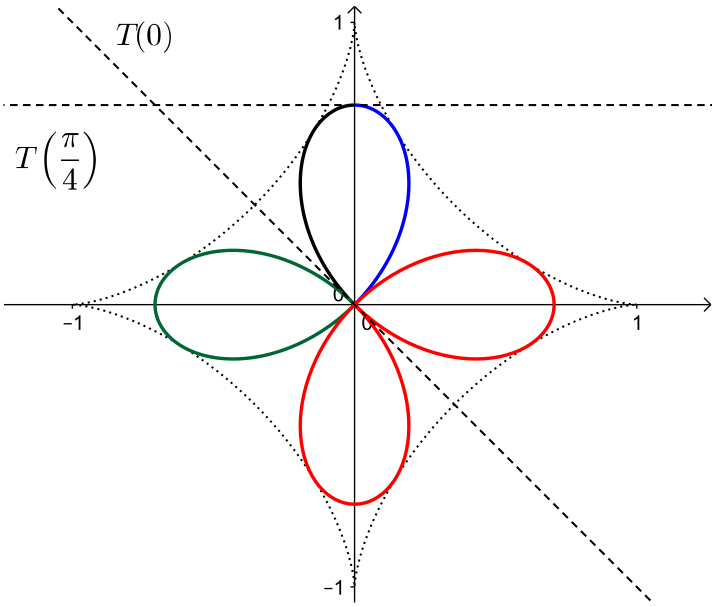
Sur l'intervalle $[0, \pi/4]$, on a $y'(t) \geqslant 0$. Ainsi, y est toujours croissante. Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En $t = \pi/4$ on a

$$\overrightarrow{\gamma}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

En $t = 0$ on a

$$\overrightarrow{\gamma}'(0) = (-2, 2).$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à $[0, \pi/4]$ est en noir. La partie correspondant à $[\pi/4, \pi/2]$, en bleu, est obtenue par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. La partie correspondant à $[\pi/2, \pi]$, en vert, est obtenue par réflexion par rapport à la second bissectrice des axes. Le reste de la courbe, en rouge, est obtenu par rélfexion par rapport à la première bissectrice des axes.



2. Études de courbes en coordonnées polaires

***Exercice 2.1.* —** L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- La fonction ρ est 2π-périodique, il suffit donc de faire l'étude sur $[-\pi, \pi]$.
- On a $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, et $\vec{u}_{-\theta} = \sigma_x(\vec{u}_\theta)$ où σ_x désigne la réflexion par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit que $\gamma(-t) = \sigma_x(\gamma(t)$ et qu'il suffit donc de faire l'étude sur $[0, \pi]$.

De plus, $|\rho(\theta)| \leqslant 3$ et il n'y a pas conséquent pas de branche infinie. Nous pouvons maintenant étudier la fonction ρ :

$$\rho'(\theta) = -2\sin(\theta).$$

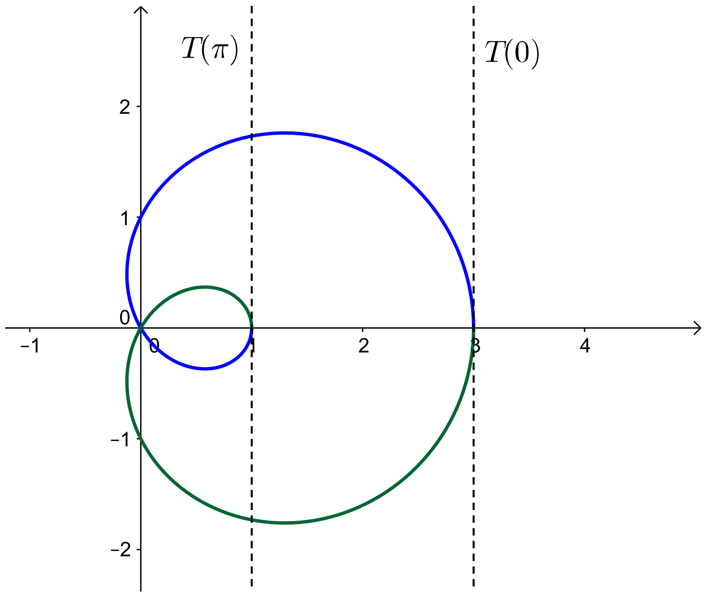
Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $\rho'(\theta) \leqslant 0$. Ainsi, ρ est toujours décroissante. De plus, ρ s'annule en $\theta = 2\pi/3$. On a donc $\rho(\theta) \geqslant 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi/3]$ et $\rho(\theta) \leqslant 0$ pour $\theta \in [2\pi/3, \pi]$. Pour nous aider à tracer la courbe, étudions les tangentes aux extrémités. En $t = \pi$ on a, avec les notations du cours,

$$\overrightarrow{\gamma}'(\pi) = \rho'(\pi)\vec{u}_\pi + \rho(\pi)\vec{v}_\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En $t = 0$ on a

$$\overrightarrow{\gamma}'(0) = \rho'(0)\vec{u}_0 + \rho(0)\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe. La partie correspondant à $[0, \pi]$ est en bleu. Le reste de la courbe, en vert, est obtenu par réflexion par rapport à l'axe des abscisses.



***Exercice 2.2* (Eadem mutata resurgo). —** **1.** Calculons les dérivées de γ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\gamma}'(\theta) &= \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta \\ &= a\ln(b)b^\theta \vec{u}_\theta + ab^\theta \vec{v}_\theta\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\gamma}''(\theta) &= a\ln(b)^2 b^\theta \vec{u}_\theta + a\ln(b)b^\theta \vec{v}_\theta + a\ln(b)b^\theta \vec{v}_\theta - ab^\theta \vec{u}_\theta \\ &= ab^\theta(\ln(b)^2-1)\vec{u}_\theta + 2a\ln(b)b^\theta \vec{v}_\theta.\end{aligned}$$

Pour montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre, il suffit de vérifier que leur déterminant est non nul :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{\gamma}'(\theta), \overrightarrow{\gamma}''(\theta)) &= 2a^2\ln(b)^2 b^{2\theta} - a^2 b^{2\theta}(\ln(b)^2-1) \\ &= a^2\ln(b)^2 b^{2\theta} + a^2 b^{2\theta} \\ &= a^2 b^{2\theta}(\ln(b)^2+1) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

2. Soit α l'angle entre la tangente au point $M = \gamma(t)$ et la droite (OM). Un calcul immédiat montre que $\|\gamma'(\theta)\| = ab^\theta\sqrt{1+\ln(b)^2}$. Comme (OM) est dirigée par $\vec{u}_\theta$, on a alors

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\langle \overrightarrow{\gamma}'(t), \vec{u}_\theta \rangle}{\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|} \\ &= \frac{a\ln(b)b^\theta}{ab^\theta\sqrt{1+\ln(b)^2}} \\ &= \frac{\ln(b)}{\sqrt{1+\ln(b)^2}}.\end{aligned}$$

On remarque que cet angle ne dépend pas du point M.

3. D'après le cours, pour $M=\gamma(t)$,

$$\begin{aligned}
\ell(M) &= \int_{-\infty}^{t} \|\overrightarrow{\gamma}'(\theta)\| d\theta \\
&= \int_{-\infty}^{t} ab^{\theta}\sqrt{1+\ln(b)^2}d\theta \\
&= a\sqrt{1+\ln(b)^2}\left[\frac{b^{\theta}}{\ln(b)}\right]_{-\infty}^{t} \\
&= ab^{\theta}\sqrt{1+\frac{1}{\ln(b)^2}} \\
&= OM\sqrt{1+\frac{1}{\ln(b)^2}}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\ell(M)/OM$ ne dépend pas du point M.

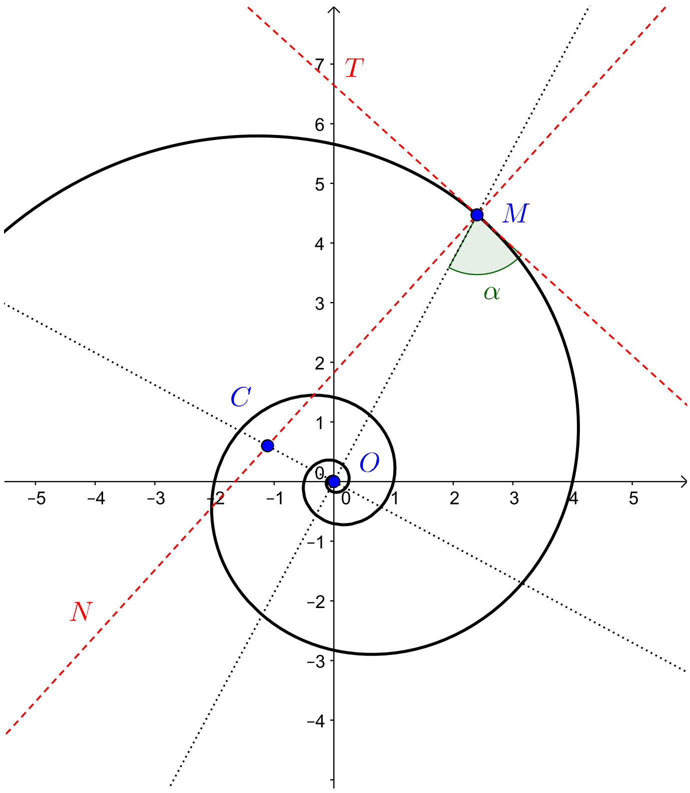
4. Il suffit d'appliquer la formule du cours :

$$\begin{aligned}
c(t) &= \frac{\det\left(\overrightarrow{\gamma}'(t),\overrightarrow{\gamma}''(t)\right)}{\|\gamma'(t)\|^3} \\
&= \frac{\left(ab^{\theta}\right)^2(\ln(b)^2+1)}{\left(ab^{\theta}\sqrt{1+\ln(b)^2}\right)^3} \\
&= \frac{1}{OM}\frac{1}{\sqrt{1+\ln(b)^2}} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{OM}
\end{aligned}$$

5. On remarque que le rayon de courbure au point $M=\gamma(t)$ est égal à

$$R=\frac{OM}{\sin(\alpha)}.$$

Si C désigne le centre de courbure, on a donc $OM = CM\sin(\alpha) = CM\cos(\pi/2-\alpha)$. Il s'ensuit que le triangle OCM est rectangle en O. Pour trouver C, il suffit donc de tracer la normale à la courbe au point M et la perpendiculaire à OM passant par O. Ces deux droites s'intersectent au centre de courbure.

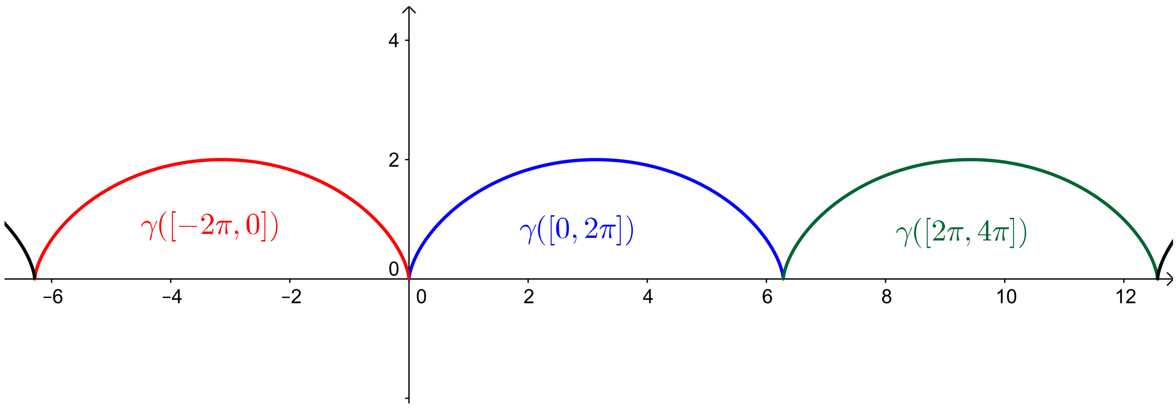


3. Exercices complémentaires

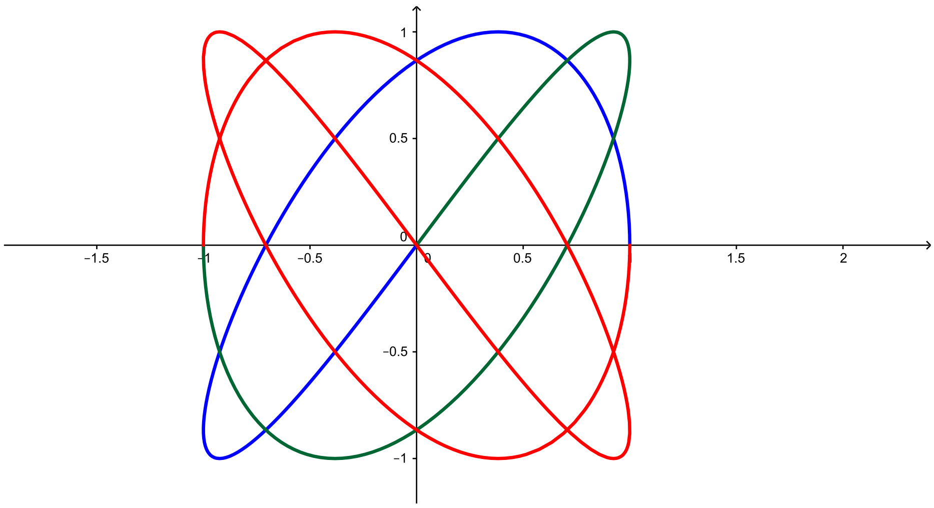
Cette section contient quelques indications pour les exercices complémentaires.

***Exercice 3.1* (Courbes cartésiennes). —** Voici les tracés des courbes.

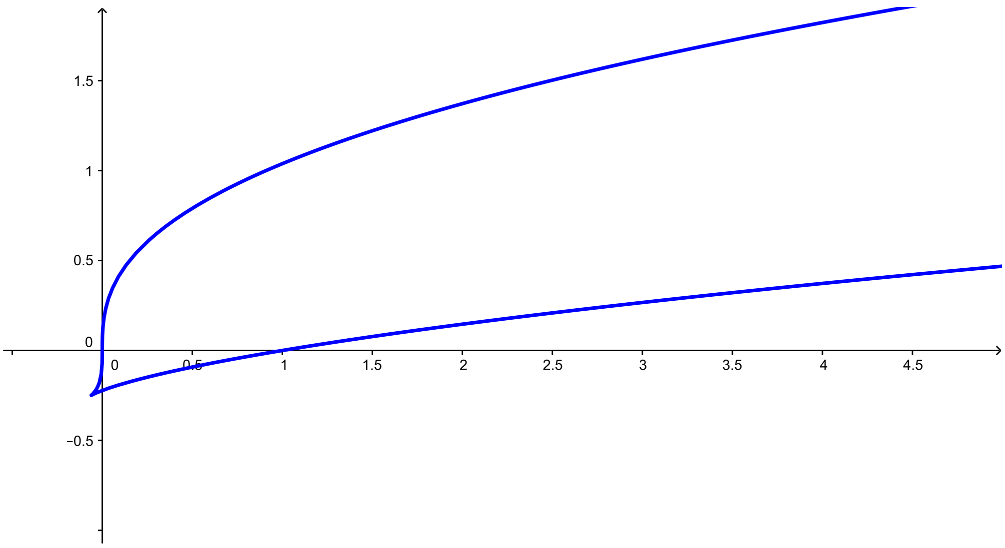
1. La *cycloïde* : $x(t) = t - \sin(t)$ et $y(t) = 1 - \cos(t)$.



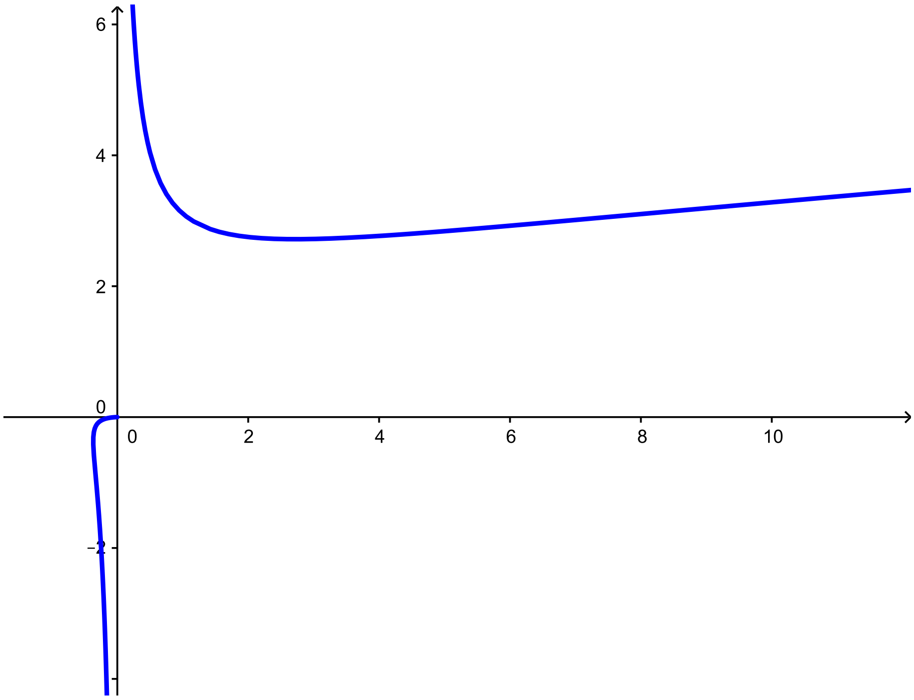
2. La *courbe de Lissajous* : $x(t) = \cos(3t)$ et $y(t) = \sin(4t)$.



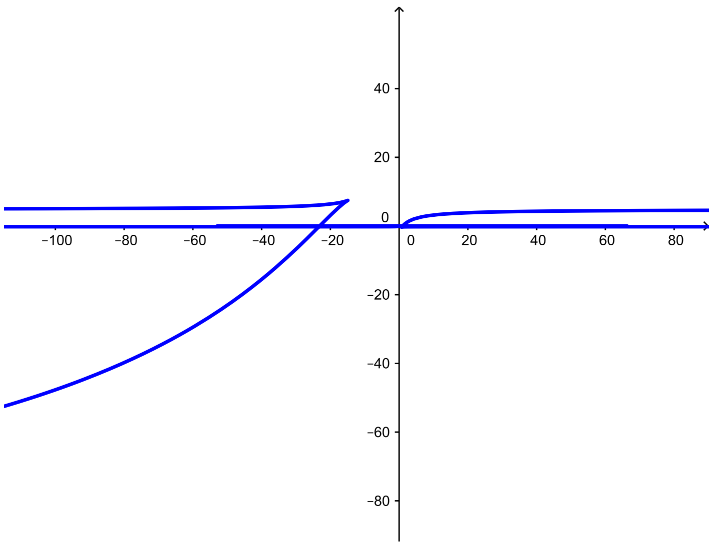
3. $x(t) = 3t^4 - 2t^3$ et $y(t) = t^2 - t$.



4. $x(t) = te^t$ et $y(t) = \dfrac{e^t}{t}$.

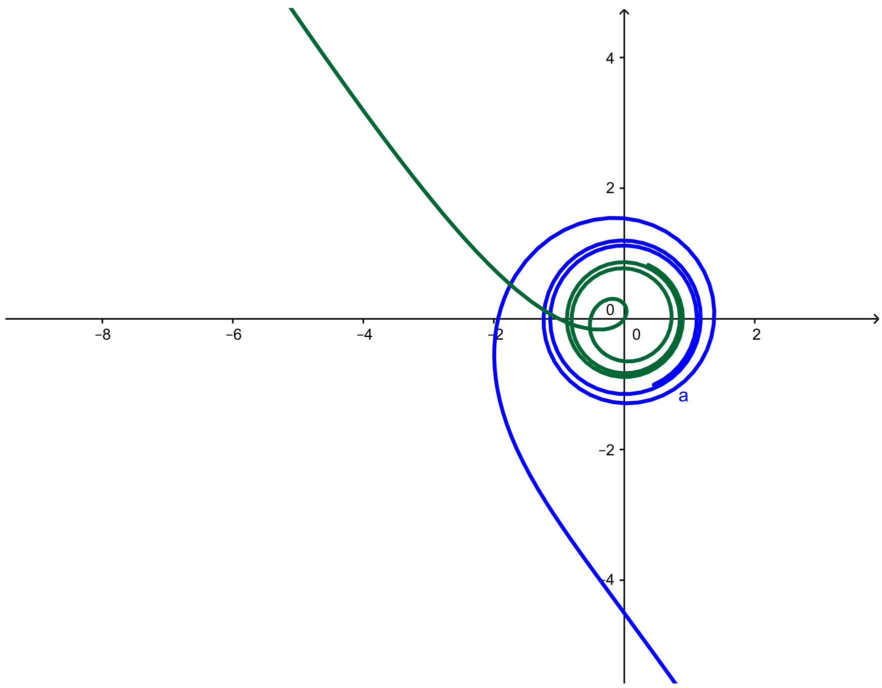


5. $x(t) = \dfrac{e^t}{\cos(t)}$ et $y(t) = e^t \sin(t)$.

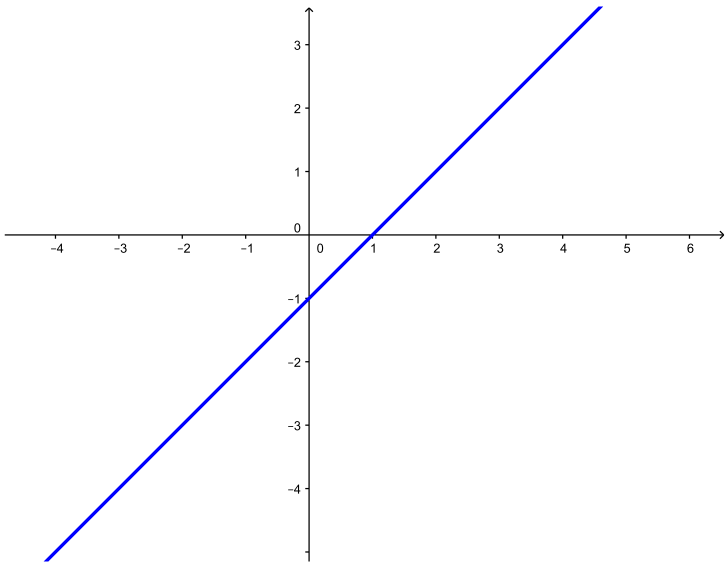


***Exercice 3.2* (Courbes polaires). —** Voici les tracés des courbes.

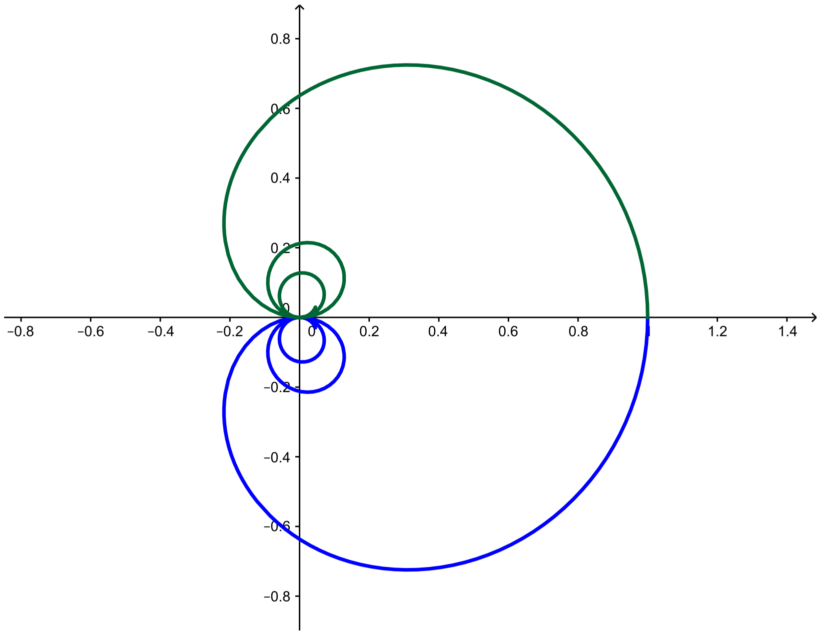
1. $\rho(\theta) = \dfrac{\theta - 1}{\theta + 1}$.



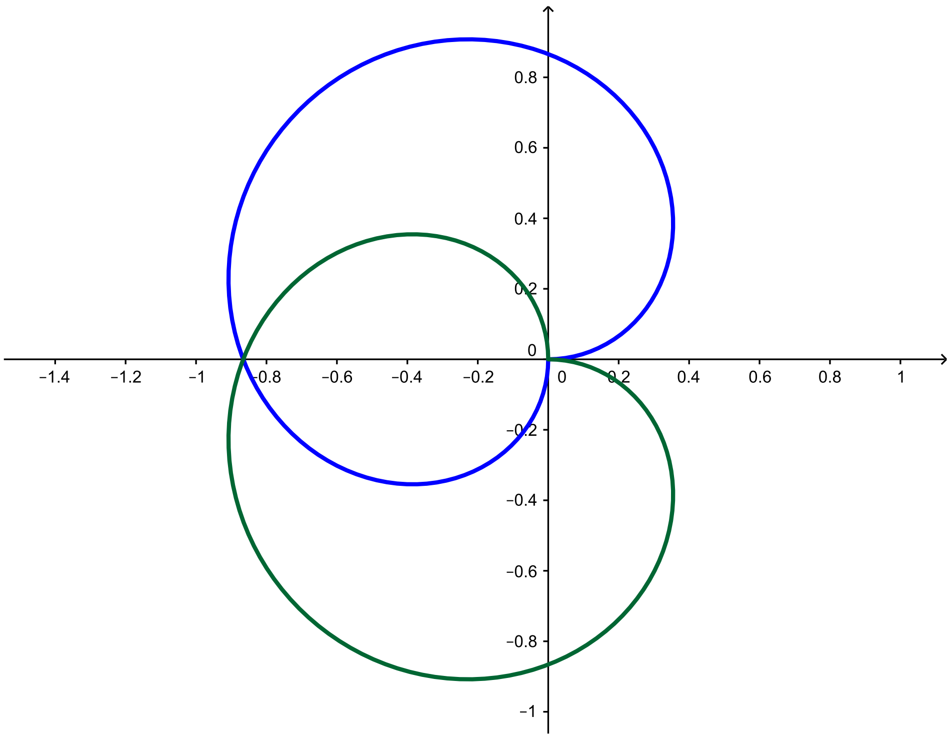
2. $\rho(\theta) = \dfrac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(2\theta)}$.



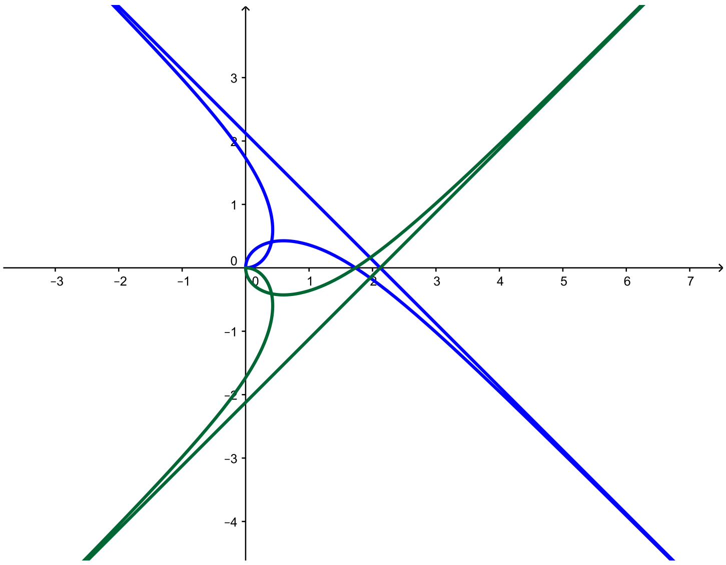
3. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$.



4. $\rho(\theta) = \sin\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.



5. $\rho(\theta) = \tan\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.



Exercice 3.3 **(Lemniscate de Bernoulli). —** Il faut étudier la courbe d'équation $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ sur $[0, \pi/4]$ puis faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir la courbe sur $[-\pi/4, 0]$. En faisant une symétrie par rapport à l'origine on obtient ensuite le support de la courbe d'équation $\rho = -\sqrt{\cos(2\theta)}$. La réunion des deux est la courbe cherchée.