TD II – Corrigé

1. Définitions des coniques

***Exercice 1.1* (Foyer et directrice). —** **1**. L'excentricité de $\mathscr{C}$ est strictement inférieure à 1, c'est donc une ellipse.

2. L'axe focal est orthogonal à $\mathcal{D}$, donc a pour équation $y = \alpha$ pour un certain réel α. De plus, F appartient à l'axe focal. Son équation est donc $y = -1$. Dans le repère focal, les coordonnées du centre sont

$$\left(\frac{-de^2}{1-e^2}, 0\right)$$

où d est la distance de F à l'axe focal, c'est-à-dire $d = 4$. L'abscisse du centre dans le repère focal est donc $-1/2$. Pour en déduire ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, il suffit d'ajouter celles de F, ce qui donne

$$C : \left(\frac{1}{2}, -1\right).$$

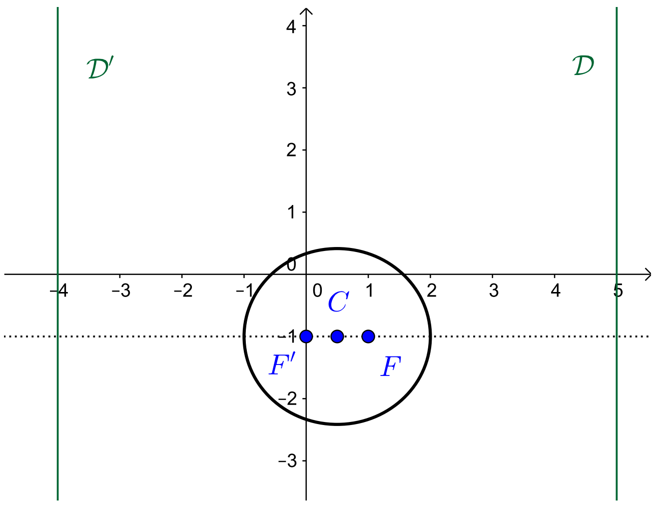
3. La second directrice s'obtient par symétrie par rapport à C et a donc pour équation $x = -4$. De même, F' a pour coordonnées $(0, -1)$.

4. La conique $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M tels que

$$MF^2 = e^2 d(M, \mathcal{D})^2.$$

Dans le repère $\mathcal{R}$, cette égalité s'écrit

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{9}(x-1-4)^2 = \frac{1}{9}(x-5)^2.$$



***Exercice 1.2* (Équation polaire). —** **1**. On a

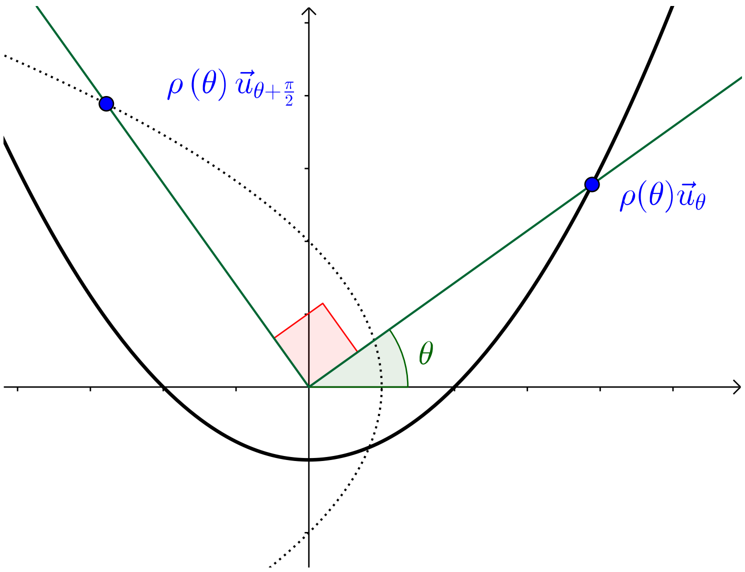
$$\rho(\theta) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta)}.$$

Il s'agit donc d'une ellipse d'excentricité 1/2 et de paramètre 1/2.

2. On a

$$\begin{aligned}\rho(\theta)\vec{u}_\theta &= \frac{1}{1-\sin(\theta)}\vec{u}_\theta \\ &= \frac{1}{1+\cos(\theta+\pi/2)}\vec{u}_\theta \\ &= \frac{1}{1+\cos(\theta+\pi/2)} f(\vec{u}_{\theta+\pi/2})\end{aligned}$$

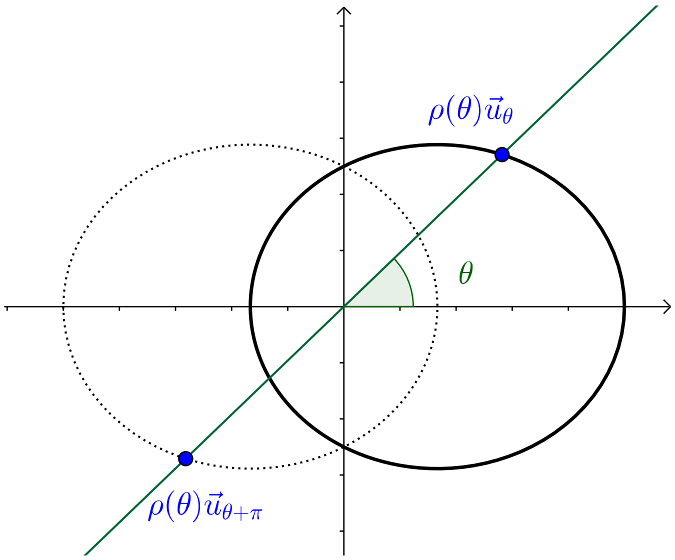
où f est la rotation vectorielle d'angle $-\pi/2$. Il s'agit donc d'une parabole de paramètre 1.



3. On a

$$\begin{aligned}\rho(\theta)\vec{u}_\theta &= \frac{1}{2-\cos(\theta)}\vec{u}_\theta \\ &= \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}\cos(\theta)}\vec{u}_\theta \\ &= \frac{1/2}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta+\pi)}\vec{u}_\theta \\ &= \frac{1/2}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta+\pi)} g\left(\vec{u}_{\theta+\pi}\right)\end{aligned}$$

où g est la rotation vectorielle d'angle $-\pi$, c'est-à-dire la symétrie par rapport à l'origine. Il s'agit donc d'une ellipse d'excentricité 1/2 et de paramètre 1/2.



Exercice 1.3 **(Équation polynomiale).** — **1.** Posons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= a(x^3 - y^3) + b(x^2 - y^2) + c(x - y) \\ &= a(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{b}{a}(x+y) + \frac{c}{a}\right) \\ &= a(x-y)Q(x,y). \end{aligned}$$

On a donc $P(x) = P(y)$ si et seulement si $x = y$ ou $Q(x, y) = 0$. Ainsi, l'ensemble des points tels que $P(x) = P(y)$ est la réunion de la droite d'équation $x = y$ et de la courbe du second degré d'équation $Q(x, y) = 0$.

2. Calculons le discriminant de l'équation $Q(x, y) = 0$:

$$\Delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

donc si la courbe est non-dégénérée c'est une ellipse. De plus, sa trace est égale à $T = 1 + 1 = 2$. Le polynôme caractéristique s'écrit donc

$$X^2 - 2X + 3 = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right).$$

On en déduit que $a^2 = 2$ et $b^2 = 2/3$. L'excentricité est alors donnée par

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et le paramètre par

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2. Études géométriques de coniques

Exercice 2.1. — **1.** D'après le cours, une paramétrisation cartésienne de $\mathscr{C}$ est donnée par l'arc paramétré $\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t)).$$

2. Calculons les dérivées de γ :

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\gamma}''(t) = \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t)) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det\left(\overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{\gamma}''(t)\right) = ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t) = ab.$$

On en déduit l'expression de la courbure au point de paramètre t :

$$c(t) = \frac{\det\left(\overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{\gamma}''(t)\right)}{\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right)^{3/2}}.$$

3. Il est clair que $f(t) = \left(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right)^{3/2}$ varie entre a^3 et b^3. La courbure est maximale quand f est minimale, c'est-à-dire $f(t) = b^3$. On a alors

$$c(t) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}.$$

Cette valeur est atteinte pour $\sin(t) = 0$, donc $t \in \{0, \pi\}$. La courbure est minimale quand f est maximale, c'est-à-dire $f(t) = a^3$. On a alors

$$c(t) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}.$$

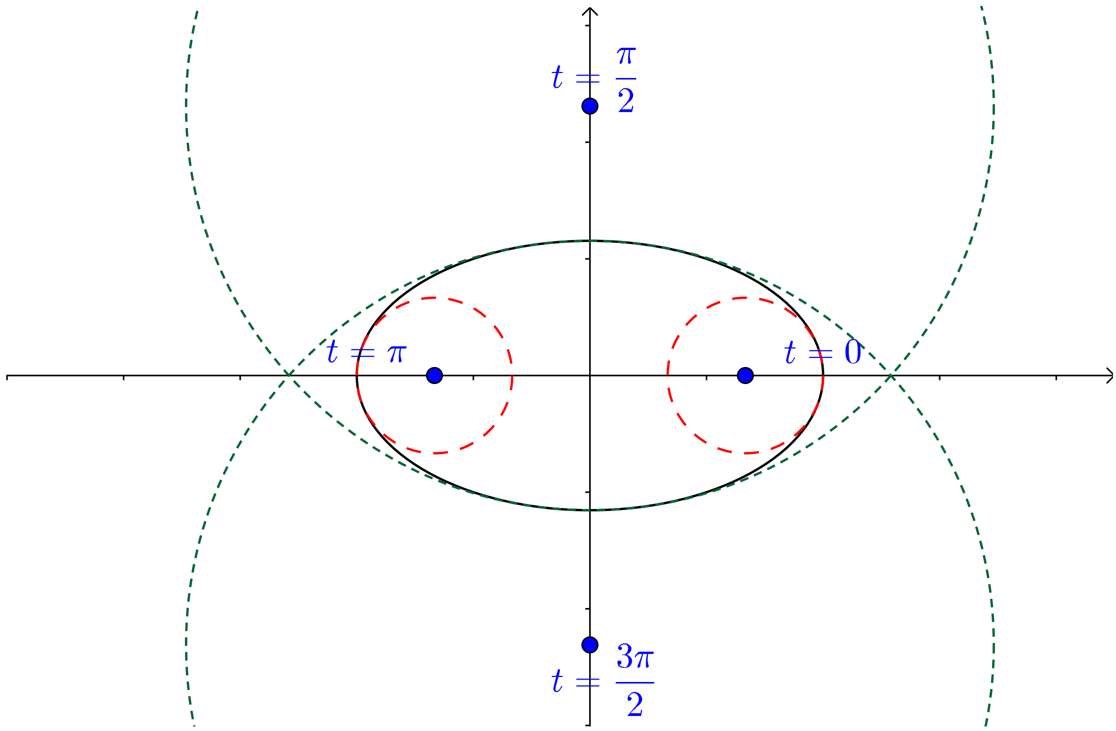
Cette valeur est atteinte pour $\cos(t) = 0$, donc $t \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Il nous faut maintenant calculer les vecteurs normaux pour ces quatre paramètres. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\gamma}'(0) & = & (0,b) \\ \overrightarrow{\gamma}'(\pi) & = & (0,-b) \\ \overrightarrow{\gamma}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & = & (a,0) \\ \overrightarrow{\gamma}'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) & = & (-a,0) \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{N}(0) & = & (-1,0) \\ \overrightarrow{N}(\pi) & = & (1,0) \\ \overrightarrow{N}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & = & (0,1) \\ \overrightarrow{N}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) & = & (0,-1) \end{array}\right.$$

dont on déduit les coordonnées des centres de courbure en translatant le point de $c(t)^{-1}\overrightarrow{N}(t)$:

$$\begin{array}{rcl} t = 0 & : & \left(a - \dfrac{b^2}{a}, 0\right) \\ t = \dfrac{\pi}{2} & : & \left(0, b - \dfrac{a^2}{b}\right) \\ t = \pi & : & \left(-a + \dfrac{b^2}{a}, 0\right) \\ t = \dfrac{3\pi}{2} & : & \left(0, -b + \dfrac{a^2}{b}\right) \end{array}$$

Sur la figure ci-dessous où $a = 2$ et $b = 2/\sqrt{3}$, les points de plus fortes courbures ont leur cercle osculateur en rouge et les points de plus faible courbure ont leur cercle osculateur en vert.



Exercice 2.2. — **1**. D'après le cours, une paramétrisation cartésienne de $\mathscr{C}$ est donnée par l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = \left(-\frac{t^2}{2p}, t\right).$$

2. Le vecteur dérivé au point de paramètre t est

$$\overrightarrow{\gamma}'(t) = \left(-\frac{t}{p}, 1\right).$$

On en déduit une équation de la tangente au point $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{-t^2}{2p}\right) - \left(-\frac{t}{p}\right)(y-t) &= 0 \\ x + \frac{t}{p}y &= \frac{t^2}{2p}. \end{aligned}$$

3. Pour que les tangentes aux points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ soient orthogonales, il faut et il suffit que $\overrightarrow{\gamma}'(t_1)$ et $\overrightarrow{\gamma}'(t_2)$ soient orthogonaux. Calculons donc leur produit scalaire :

$$\langle \overrightarrow{\gamma}'(t_1), \overrightarrow{\gamma}'(t_2) \rangle = \frac{t_1 t_2}{p^2} + 1.$$

Les tangentes seront donc orthogonales si et seulement si

$$t_1 t_2 = -p^2.$$

4. Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 t_2 = -p^2$. Les tangentes aux points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ sont orthogonales et les coordonnées (x, y) de leur point d'intersection vérifient

$$\begin{cases} x + \dfrac{t_1}{p} y = \dfrac{t_1^2}{2p} \\ x + \dfrac{t_2}{p} y = \dfrac{t_2^2}{2p} \end{cases}$$

En multipliant la première équation par t_2 et la seconde par $-t_1$ et en additionnant on obtient

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)x &= \frac{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2}{2p} \\ &= \frac{t_1 t_2}{2p}(t_1 - t_2) \\ &= -\frac{p}{2}(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

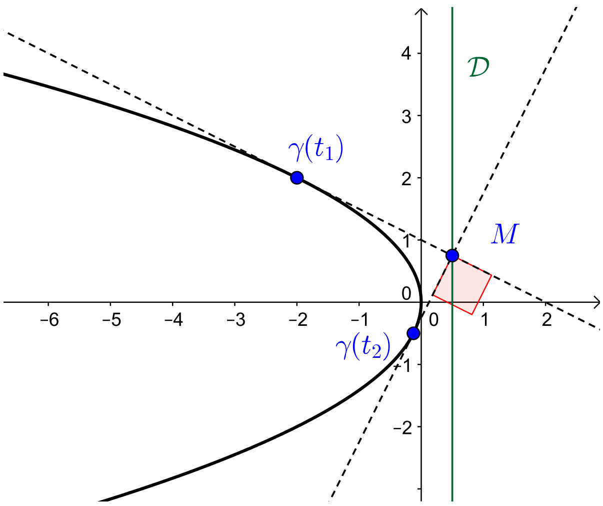
Il s'ensuit que $x = p/2$. Ainsi, la courbe orthoptique de la parabole est contenue dans la droite d'équation $x = p/2$ dans le repère au sommet, c'est-à-dire la directrice de $\mathscr{C}$. De plus,

$$y = \frac{-1}{2t_1} + \frac{t_1}{2p}.$$

Comme la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$t \mapsto \frac{-1}{2t} + \frac{t}{2p}$$

est surjective, la courbe orthoptique de $\mathscr{C}$ est la totalité de sa directrice.



Exercice 2.3. — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$. Pour $\lambda \notin \{a, b\}$, on note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1.$$

1. Il y a plusieurs cas à distinguer :
- Si $a < \lambda$ et $b < \lambda$, alors $\mathscr{C}_\lambda = \emptyset$.
- Si $a < \lambda$ et $b > \lambda$, alors $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole.
- Si $a > \lambda$ et $b > \lambda$, alors $\mathscr{C}_\lambda$ est une ellipse.

2. Dans le repère central, le foyer a pour coordonnées

$$\left(\frac{pe}{1 - e^2}, 0\right)$$

Commençons par mettre l'équation sous forme canonique. Si $b < \lambda$ et $a > \lambda$, on a

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

avec $A^2 = a - \lambda$ et $B^2 = \lambda - b$. Le foyer a donc pour abscisse

$$\frac{pe}{1-e^2} = \frac{B^2}{A} \frac{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}}}{-\frac{B^2}{A^2}} = -A\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}} = -\sqrt{A^2+B^2} = -\sqrt{a-b}.$$

Si $a > \lambda$ et $b > \lambda$, on a

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$$

avec $A^2 = a - \lambda$ et $B^2 = b - \lambda$. Le foyer a donc pour abscisse

$$\frac{pe}{1-e^2} = \frac{B^2}{A} \frac{\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}}{\frac{B^2}{A^2}} = A\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}} = \sqrt{A^2-B^2} = \sqrt{a-b}.$$

Les deux foyers étant symétriques par rapport au centre O de $\mathscr{C}_\lambda$, dans les deux cas ils ont pour coordonnées $(\pm\sqrt{a-b}, 0)$ dans $\mathcal{R}$.

3. D'après le cours, le vecteur $\overrightarrow{N}_\lambda(x_0, y_0)$ de coordonnées

$$\left(\frac{x_0}{a-\lambda}, \frac{y_0}{b-\lambda}\right)$$

est normal à $\mathscr{C}_\lambda$ au point de coordonnées (x_0, y_0).

4. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}_\lambda \cap \mathscr{C}_\mu$. On a

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1 = \frac{x^2}{a-\mu} + \frac{y^2}{b-\mu},$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2}{a-\lambda} - \frac{x^2}{a-\mu} + \frac{y^2}{b-\lambda} - \frac{y^2}{b-\mu} \\ &= \frac{x^2(\lambda-\mu)}{(a-\lambda)(a-\mu)} + \frac{y^2(\lambda-\mu)}{(b-\lambda)(b-\mu)} \\ &= (\lambda-\mu)\left(\frac{x^2}{(a-\lambda)(a-\mu)} + \frac{y^2}{(b-\lambda)(b-\mu)}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq \mu$, le terme entre parenthèses doit être nul. Or,

$$\left\langle \overrightarrow{N}_\lambda(x,y), \overrightarrow{N}_\mu(x,y) \right\rangle = \frac{x^2}{(a-\lambda)(a-\mu)} + \frac{y^2}{(b-\lambda)(b-\mu)},$$

donc les tangentes à $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}_\mu$ sont orthogonales au point d'intersection puisque leurs normales le sont.

3. Exercices complémentaires

Cette section contient quelques indications pour les exercices complémentaires.

Exercice 3.4 **(Champ de force centrale). —** **1**. Il suffit de dériver pour obtenir

$$\overrightarrow{\gamma}'(t) = \rho'(t)\vec{u}_{\theta(t)} + \rho(t)\theta'(t)\vec{v}_{\theta(t)}$$
$$\overrightarrow{\gamma}''(t) = \rho''(t)\vec{u}_{\theta(t)} + \rho'(t)\theta'(t)\vec{v}_{\theta(t)} + (\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t))\vec{v}_{\theta(t)} - \rho(t)\theta'(t)^2\vec{u}_{\theta(t)}.$$

2. Par hypothèse, $\overrightarrow{\gamma}''(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}_{\theta(t)}$. La composante selon $\vec{v}_{\theta(t)}$ doit donc être nulle, c'est-à-dire

$$2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t) = 0.$$

En multipliant par $\rho(t)$ les deux membres de cette équation, on obtient

$$2\rho(t)\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)^2\theta''(t) = 0$$

où l'on reconnaît la dérivée de $\rho(t)^2\theta'(t)$. Cette fonction ayant une dérivée nulle, elle est constante, d'où le résultat.

3. Il suffit de calculer $q' \circ \theta(t)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q' \circ \theta(t) &= \frac{-r' \circ \theta(t)}{r^2 \circ \theta(t)} \\ &= \frac{1}{\theta'(t)} \frac{-\theta'(t) r' \circ \theta(t)}{r^2 \circ \theta(t)} \\ &= \frac{1}{\theta'(t)} \frac{-(r \circ \theta)'(t)}{(r \circ \theta(t))^2} \\ &= \frac{1}{\theta'(t)} \frac{-\rho'(t)}{\rho(t)^2} \\ &= \frac{-\rho'(t)}{C}. \end{aligned}$$

4. En dérivant la première formule de Binet, on obtient

$$\overrightarrow{\gamma}''(t) = C\left(\theta'(t) q' \circ \theta(t) \vec{v}_{\theta(t)} - \theta'(t) q \circ \theta(t) \vec{u}_{\theta(t)} - \theta'(t) q'' \circ \theta(t) \vec{u}_{\theta(t)} + q' \circ \theta(t) \vec{v}_{\theta(t)}\right).$$

Par hypothèse, la composante sur $\vec{v}_{\theta(t)}$ est nulle, il suffit donc d'étudier la composante sur $\vec{u}_\theta$ qui après factorisation donne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma}''(t) &= -C\theta'(t)\left(q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)\right) \vec{u}_{\theta(t)} \\ &= -C^2 q \circ \theta(t)^2 \left(q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)\right) \vec{u}_{\theta(t)}. \end{aligned}$$

5. Remarquons que $d(O, \gamma(t))^{-2} = \rho(t)^{-2} = q \circ \theta(t)^2$. La second formule de Binet donne donc

$$-C^2 q \circ \theta(t)^2 \left(q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)\right) = -\mu q \circ \theta(t)^2.$$

Après simplification, on voit que la fonction q satisfait une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, à savoir

$$q'' + q = \frac{\mu}{C^2}.$$

Il existe donc deux constantes $A, \phi \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$q(t) = A\cos(t + \phi) + \frac{\mu}{C^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{q \circ \theta(t)} \\ &= \frac{1}{\mu/C^2 + A\cos(\theta(t) + \phi)} \\ &= \frac{C^2/\mu}{1 + A'\cos(\theta(t) + \phi)} \end{aligned}$$

où $A' = C^2 A/\mu$. On reconnaît l'équation polaire d'une conique, d'où le résultat.