Université Paris-Sud XI

UNIVERSITÉ PARIS SUD

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

MATHEMATIQUES RENFORCÉES POUR LA FILIERE BIOLOGIE

Fascicule d'exercices

Amaury Freslon

Département de Mathématiques d'Orsay

2015–2016

À propos de ce document

Ce document contient les feuilles d'exercices utilisée pour les TD du cours MATH 195 intitulé *Mathématiques renforcées pour la filière biologie* de l'Université Paris-Sud pour l'année 2015-2016. Il s'agit d'un cours optionnel destiné à fournir aux étudiants biologistes de première année de licence des outils mathématiques plus élaborés que ceux vus dans le tronc commun. Ce cours a également vocation à leur donner une première préparation aux concours d'entrée aux grandes écoles qu'ils sont susceptibles de passer en deuxième année de licence. Chaque section correspond à une feuille distribuée en TD et traitée sur une ou deux séances de trois heures. Les feuilles d'exercices ont toutefois été légèrement remaniées après les séances de TD, pour clarifier un énoncé ou modifier un exercice qui s'était avéré trop difficile.

Table des matières

1. Ensembles et logique, applications et dénombrement

1.1. Résolution d'équations. —

Exercice 1.1.1. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x-1| = 2x-5$.
2. $|3-2x| = 3$.
3. $|2x+3| = |x-1|$.
4. $|2x+3+|x-1|| = 3$.
5. $-2x^2+13|x|-18=0$.

Exercice 1.1.2. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+7} = 5-x$.
2. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1} = 5$.
3. $\sqrt{5-x^2} = x-3$.
4. $\sqrt{x^2-7} = \sqrt{1-x^2}$.
5. $\sqrt{-3x^2-4x-1} = -x$.

Exercice 1.1.3. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln[(x+2)(x-2)] = \ln(2x+11)$.
2. $\ln(x+2)+\ln(x-2) = \ln(2x+11)$.

Exercice 1.1.4. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2e^{-x}-6e^{x}=1$.

1.2. Dénombrement. —

Exercice 1.2.1. — On tire successivement deux cartes sans remise d'un jeu de trente-deux cartes.

1. Quelle est le nombre N de possibilités d'obtenir deux rois successivement ?
2. Après avoir remis les deux cartes précédentes dans le paquet, on tire maintenant quatre cartes sans remise. Quel est le nombre M de possibilités d'obtenir les quatre rois ?

Exercice 1.2.2. — Un groupe de trente-deux personnes se retrouve et chacune serre la main de toutes les autres personnes présentes. Combien de poignées de main sont échangées au total ?

Exercice 1.2.3. — Quatre personnes A, B, C et D se retrouvent au restaurant autour d'une table carrée. Quel est le nombre N de dispositions possibles de ces quatre personnes autour de la table si l'on considère uniquement les positions relatives des personnes les unes par rapport aux autres ?

Exercice 1.2.4. — Un club de trente-deux personnes doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Quel est le nombre N de bureaux possibles ?

Exercice 1.2.5. — Un club de trente-deux membres (dix-huit hommes et quatorze femmes) doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un vice-président nécessairement de sexe opposé à celui du président, d'un secrétaire et d'un gardien nécessairement de sexe masculin. Quel est le nombre N de bureaux possibles ?

Exercice 1.2.6. — On veut ranger sur une étagère sept romans : *Les Misérables*, *Notre-Dame de Paris*, *Le colonel Chabert*, *La peau de chagrin*, *L'étranger*, *La peste* et *La chute*. Quel est le nombre N de façons de les ranger en les gardant groupés par auteur (1) ?

Exercice 1.2.7. — Calculer le nombre d'anagrammes des mots suivants :

1. Cheval.
2. Mouton.
3. Mississippi.

---

1. Les deux premiers livres sont de Victor HUGO, les deux suivants d'Honoré de BALZAC et les trois derniers d'Albert CAMUS.

1.3. Raisonnement par récurrence. —

Exercice 1.3.1. — Démontrer par récurrence les énoncés suivants :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 1.3.2. — Démontrer par récurrence les énoncés suivants :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 1.3.3. — Démontrer par récurrence les énoncés suivants :

1. Pour tout $n \geqslant 0$, $2^n > n$.
2. Pour tout $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.

1.4. Ensembles finis. —

Exercice 1.4.1. — Montrer que quels que soient trois ensembles finis A, B et C on a l'égalité

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C)\\ &\quad - [\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(C \cap A)]\\ &\quad + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Exercice 1.4.2. — Soit E_n un ensemble fini de cardinal n. Montrer que le nombre de couples (A, B) de sous-ensembles de E_n tels que $A \subset B \subset E_n$ est égal à 3^n.

Exercice 1.4.3. — Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Soit E_n un ensemble fini de cardinal n et soit F_k un ensemble fini de cardinal k.

1. Montrer que le nombre d'injections de F_k dans E_n est égal à $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
2. Soit F_n un ensemble de même cardinal n que E_n. Déduire de ce qui précède le nombre de bijections de F_n dans E_n.

Exercice 1.4.4. — Soit $A \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 45 et soit $B \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 55. Décrire explicitement l'ensemble $A \cap B$.

2. Nombres complexes

2.1. Forme algébrique, forme trigonométrique. —

Exercice 2.1.1. — Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

Exercice 2.1.2. — Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+3i \quad ; \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i \quad ; \quad z_3 = -\frac{4}{3}i \quad ; \quad z_4 = -2 \quad ; \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$$

Exercice 2.1.3. — Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$.

Exercice 2.1.4. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ qui n'est pas un multiple de π. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)} \quad ; \quad z_2 = \frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(2\theta)}-i\sqrt{1-\sin(2\theta)}} \quad ; \quad z_3 = \frac{1-i\tan(\theta)}{1+i\tan(\theta)}$$

2.2. Racines n-ièmes. —

Exercice 2.2.1. — Ecrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i \quad ; \quad z_2 = 3+4i \quad ; \quad z_3 = -2+2i\sqrt{3} \quad ; \quad z_4 = \frac{1+i}{1-i}$$

Exercice 2.2.2. — Soit $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de z.
2. Écrire z sous forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 2.2.3. — Sachant que $(2+4i)^6 = 7488+2816i$, calculer les racines sixièmes de $7488+2816i$.

Exercice 2.2.4. — Calculer les racines cinquièmes de $\dfrac{1+i}{1-i}$.

2.3. Équations du second degré. —

Exercice 2.3.1. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$
3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$
4. $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$
5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$
6. $4z^2-2z+1=0$
7. $z^4+10z^2+169=0$
8. $z^4+2z^2+4=0$

Exercice 2.3.2. — On pose $z_1=-i$ et $z_2=1+i$.

1. Calculer les racines n-ièmes de z_1 et de z_2.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-z+1-i=0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

2.4. Nombres complexes et géométrie. —

Exercice 2.4.1. — Soient A et B les points du plan d'affixes respectives $1-i$ et $-2-2i$.

1. Calculer l'affixe du milieu I de $[AB]$.
2. Calculer la longueur du segment AB.
3. Soit C le point d'affixe $10+2i$, calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. En déduire que A, B et C sont alignés.

Exercice 2.4.2. — Soit A un point du plan complexe d'affixe $\alpha = a+ib$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z|^2 = \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$.
2. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\dfrac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz et i soient alignés.
4. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz et i forment un triangle équilatéral.
5. Soit $z = a+ib$, écrire $\dfrac{z-1}{z+1}$ sous la forme $A+iB$ avec A et B réels.
6. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que
$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

3. Suites

3.1. Généralités sur les suites. —

Exercice 3.1.1. — Pour chacune des suites suivantes, déterminer ses variations.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n^2 - n + 1$
3. $u_n = (nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec q un réel strictement positif.
4. $u_n = \left(\dfrac{q^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec q un réel strictement positif.

Exercice 3.1.2. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 2 telle que $u_5 = 7$. Calculer u_{25}.

Exercice 3.1.3. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_5 = 7$. Trouver un entier n tel que $u_n \geqslant 100$.

3.2. Suites arithmético-géométriques. —

Exercice 3.2.1. — Au premier janvier 2016, une entreprise compte 1500 employés. Lors de chaque année à venir, 10% des employés partiront à la retraite. Pour compenser cette diminution, l'entreprise décide d'embaucher 100 nouveaux employés par an. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'employés à l'année $2015 + n$.

1. Donner une relation de récurrence satisfaite par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout entier naturel n on pose $v_n = u_n - 1000$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Étudier le sens de variation de u_n et calculer sa limite.
5. Au premier janvier 2016, l'entreprise compte un sur-effectif de 300 employés. À partir de quelle année ce sur-effectif sera-t-il résorbé ?

Exercice 3.2.2. — Un grand-père prévoyant dépose à la naissance de sa petite-fille la somme de 1000 euros sur un compte d'épargne à 5%. Puis tous les ans, le jour de son anniversaire, il verse la somme de 150 euros sur son compte.

1. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme sur le compte au lendemain du n-ième anniversaire de la petite fille. Donner une relation de récurrence satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Combien la petite-fille aura-t-elle à disposition le jour de ses 18 ans ?
3. Combien ce placement aura-t-il rapporté ?

3.3. Suites à récurrence linéaire d'ordre 2. —

Exercice 3.3.1. — Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Montrer que λ est racine du polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - aX - b$.

Exercice 3.3.2. — Déterminer l'expression en fonction de n du terme général des suites à récurrence linéaire d'ordre 2 suivantes :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

***Exercice 3.3.3* (Suite de Fibonacci)**. — On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
3. Montrer que pour tout entier $n > 0$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

3.4. Limite d'une suite. —

Exercice 3.4.1. — Déterminer si les suites suivantes convergent et si oui donner leur limite.

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

2. $u_n = (-1)^n$

3. $u_n = \sqrt{\dfrac{(n+1)^2}{3n+1} - \dfrac{(n-1)^2}{3n+1}}$

4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{5n^2+4}\right)$

Exercice 3.4.2. — Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$, soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = n^p z^n.$$

1. On suppose dans cette question que z est un nombre réel tel que $0 < z < 1$. Montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à 0.

3. On suppose maintenant z quelconque, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 3.4.3. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_1 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{2}.$$

1. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 3.4.4. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \,]-1, +\infty[& \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} & \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $]-1, +\infty[$.

3. Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quelle que soit la valeur de u_0.

4. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. Fonctions de plusieurs variables

4.1. Continuité et dérivées partielles premières. —

Exercice 4.1.1. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont continues en 0.
2. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 4.1.2. — Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé leur domaine de définition :

1. $f(x,y) = 3x^5y^3 - xy^2 + 4y + 1$
2. $g(x,y) = (x^4 - y^3)^5$
3. $h(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$
4. $F(x,y,z) = 3x^4z + x^2y^3$

Exercice 4.1.3. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Claculer $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}$.

Exercice 4.1.4. — Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 3y^2.$$

Exercice 4.1.5. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

1. On pose, pour $r, \theta \in \mathbb{R}$, $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = 0$.
2. En déduire l'expression générale de F, puis celle de f.

4.2. Dérivées partielles secondes. —

Exercice 4.2.1. — Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

1. On pose $F(u,v) = f(u,uv)$. Calculer les dérivées partielles secondes de F.
2. Montrer que f vérifie l'Équation (1) si et seulement si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (1).

Exercice 4.2.2. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

4.3. Extrema. —

Exercice 4.3.1. — Trouver les points critiques des fonctions suivantes et dire s'il s'agit d'extrema.

1. $f(x, y) = x^4 + y^4$
2. $g(x, y) = x^4 - y^4$
3. $h(x, y) = x^4$

Exercice 4.3.2. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xye^{x^2+y^2}.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Trouver les points critiques de f.
3. Pour chaque point critique, dire si c'est un extremum local.

Exercice 4.3.3. — On fixe un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on note $A(\theta)$ le point du plan de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. On admet que la distance entre les points $A(x)$ et $A(y)$ est égale à $\left|\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\right|$.

1. Pour $0 < \theta < \theta' < 2\pi$, déterminer le périmètre du triangle $A(0)A(\theta)A(\theta')$. On notera $f(\theta, \theta')$ ce nombre.
2. Trouver les points critiques de f.
3. On admet que f possède un maximum global, quelle est sa valeur ?
4. Parmi tous les triangles inscrits dans un cercle donné, quels sont ceux de périmètre maximal ? Quelle est la valeur de ce périmètre ?

5. Intégrales généralisées

5.1. Utilisation de primitives. —

Exercice 5.1.1. — En utilisant une primitive, déterminer pour chacune des intégrales suivantes si elle converge et calculer sa valeur le cas échéant.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(t)}dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$

***Exercice 5.1.2* (Critère de Riemann).** — Soit α un nombre réel différent de 1.

1. Donner une primitive de la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$.
2. En déduire en fonction de α la nature et la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^{-\alpha}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}dt$.
3. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$.

Exercice 5.1.3. — Pour chacune des intégrales suivantes, donner une primitive de l'intégrande et en déduire la valeur de l'intégrale.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan(t)}}{1+t^2}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}dt$

5.2. Intégration par parties. —

Exercice 5.2.1. — Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\ln(t))dt$

Exercice 5.2.2. — Le but de cet exercice est de claculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)^n dt$.

1. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)^n dt$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.
2. Montrer par récurrence que $I_n = (-1)^n n!$.

Exercice 5.2.3. — **1**. Montre que $\dfrac{\sin(t)}{t} \to 1$ quand $t \to 0$.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt.$$

En déduire que l'intégrale converge.

3. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

5.3. Comparaison d'intégrales. —

Exercice 5.3.1. — Déterminer la nature des intégrales suivantes en les comparant à des intégrales connues.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{t} dt$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$

Exercice 5.3.2 **(Intégrales de Bertrand)**. — Le but de cet exercice est d'étudier, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale

$$I_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^\beta}{t^\alpha} dt.$$

1. Pour $\alpha = 1$, donner les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$ et on pose $h = (\alpha - 1)/2$. En utilisant l'égalité

$$\frac{\ln(t)^\beta}{t^\alpha} = \frac{\ln(t)^\beta}{t^h} \frac{1}{t^{1+h}}$$

montrer que $I_{\alpha,\beta}$ converge.

3. On suppose enfin $\alpha < 1$. En posant $h = (1-\alpha)/2$, déterminer la nature de $I_{\alpha,\beta}$.

6. Probabilités

6.1. Espaces probabilisés. —

Exercice 6.1.1. — Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et soit B un événement quelconque.

1. Exprimer $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right)$ en fonction des nombres $P(B \cap A_i)$.

2. Comparer B et $\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)$.

3. En déduire que $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.

Exercice 6.1.2. — Un livre contient quatre erreurs notées A, B, C et D. À chaque relecture, chaque erreur à une chance sur trois d'être corrigée, indépendamment des autres. On suppose de plus que chaque relecture est indépendante.

1. Soit A_n l'événement « L'erreur A est corrigée à la n-ième relecture ». Calculer $P(A_n)$.
2. Soit A'_n l'événement « L'erreur A est corrigée au plus tard à la n-ième relecture ». Calculer $P(A'_n)$.
3. Combien faut-il au minimum de relectures pour que la probabilité qu'il n'y ait plus aucune faute soit supérieure à $0,9$?

Exercice 6.1.3. — On lance indépendamment deux dés équilibrés. Si la somme des deux dés est égale à 5 ou à 7, on s'arrête. Sinon, on relance les deux dés.

1. Soit E_n l'événement « on obtient 5 au n-ième lancer et on n'a obtenu ni 5 ni 7 aux lancers précédents ». Calculer $P(E_n)$.
2. Quelle est la probabilité qu'on s'arrête sur un total de 5 ?
3. Quelle est la probabilité qu'on s'arrête sur un total de 7 ?
4. Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 6.1.4. — On rappelle la formule du crible de Poincaré : si $(A_1, \dots, A_n)$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\right).$$

1. Écrire cette formule pour $n = 4$.

Soient r et n deux entiers strictement positifs. On place r boules numérotées au hasard dans n cases numérotées.

2. Soit A_i l'événement « la case i est vide ». Calculer $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ pour $i_1 < \cdots < i_k$.
3. Soit E l'événement « aucune case n'est vide ». Exprimer $\overline{E}$ en fonction des événements A_i.
4. En utilisant la formule du crible de Poincaré, montrer que

$$P(\overline{E}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{r}.$$

5. Quelle est la probabilité qu'aucune case ne soit vide ?

6.2. Probabilités conditionnelles. —

Exercice 6.2.1. — Une pochette contient deux dés. L'un est équilibré et l'autre donne 6 avec probabilité $1/2$ et les autres nombres avec égale probabilité. On prend l'un des deux dés au hasard et on le lance.

1. On obtient 6, quelle est la probabilité d'avoir pris le dé équilibré ?
2. Même question si on obtient 5.

Exercice 6.2.2. — Deux joueurs A et B effectuent indépendamment un tir au but. La probabilité que A marque est égale à $0,8$ et la probabilité que B marque est égale à $0,4$.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement un des deux joueurs marque ?
2. On suppose qu'exactement un des deux joueurs a marqué, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse de B ?

Exercice 6.2.3. — Dans une population Ω, deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20% de la population. On suppose que la proportion d'individus ayant les deux maladies est négligeable. Pour dépister ces maladies, on met au point un test qui réagit positivement sur 90% des malades de M_1, 70% des malades de M_2 et 10% des individus n'ayant aucune des deux maladies.

1. Quand on choisit au hasard un individu dans Ω, quelle est la probabilité que le test soit positif ?
2. En supposant que le test soit positif, quelle est la probabilité que l'individu ait la maladie M_1 ? Même question avec la maladie M_2.
3. En supposant que le test soit positif, quelle est la probabilité que l'individu n'ait aucune des deux maladies.

Exercice 6.2.4. — On dispose d'un dé équilibré et d'une urne contenant une boule blanche. On lance le dé. Si le résultat est différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Si le résultat est 6, on retire une boule au hasard de l'urne et on s'arrête.

1. Soit A_k l'événement $\ll$ 6 apparaît pour la première fois au k-ième lancer $\gg$. Calculer $P(A_k)$ et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 1$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 6 *au plus tard* au troisième lancer ? Et *au plus tard* au quatrième lancer ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 6 *après* le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu *au plus tard* au $2k$-ième lancer ?
4. Soit B l'événement $\ll$ on a tiré la boule blanche $\gg$. Calculer $P(B \cap A_k)$.
5. Montrer que pour tout $n > 0$ et $0 \leqslant x < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

6. Calculer $P(B)$.

7. Variables aléatoires

7.1. Variables aléatoires discrètes. —

Exercice 7.1.1. — On lance un dé parfaitement équilibré et on définit une variable aléatoire X égale au chiffre apparaissant sur le dessus du dé. Calculer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 7.1.2. — On lance une pièce de monnaie biaisée : la probabilité de tomber sur *face* est égale à $3/4$. On note X_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si on tombe sur *face* et 0 sinon.

1. Calculer la loi de X_1, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On effectue n lancers indépendants de la pièce précédente et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de *face* obtenus. Calculer la loi de Y.
3. Soit X_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième lancer donne *face* et 0 sinon. Exprimer Y en fonction des X_k.
4. En déduire l'espérance de Y.
5. En utilisant le fait que les variables aléatoires X_k sont indépendantes, calculer la variance de Y.

Exercice 7.1.3. — On considère une urne contenant des boules blanches et noires indiscernables au toucher. La proportion de boules blanches est égale à p et on pose $q = 1 - p$. On effectue des tirages indépendants avec remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche pour la première fois. Calculer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance. On pourra utiliser les égalités

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Exercice 7.1.4. — On considère une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^*$ suivant une *loi de Poisson* de paramètre λ, c'est-à-dire telle que

$$P([X = k]) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7.1.5. — Soit $0 < q < 1$ et soit X une variable aléatoire telle que

$$P([X = n]) = q \times P([X \geqslant n]).$$

1. Comparer $P([X \geqslant n])$ avec $P([X = n])$ et $P([X \geqslant n + 1])$.
2. Montrer que $P([X = n + 1]) = (1 - q) \times P([X = n])$.
3. En déduire que X suit la loi géométrique de raison $p = 1 - q$.

Exercice 7.1.6. — Un sauteur tente de franchir des barres de hauteurs croissantes notées $1, 2, \ldots, n$. Tous les sauts sont indépendants et pour franchir une barre, il doit avoir franchi les précédentes. De plus, la probabilité de passer la barre n est égale à $1/n$.

1. On note A_n l'événement « Le sauteur a franchi la barre n ». Calculer $P(A_n)$.
2. On note A l'événément « Le sauteur a franchi toutes les barres ». Justifier que $P(A) \leqslant P(A_n)$ pour tout n. En déduire $P(A)$.
3. On note X la variable aléatoire égale à la hauteur de la dernière barre franchie. Calculer la loi de X.
4. Calculer l'espérance de $X + 1$. En déduire l'espérance de X.
5. Calculer l'espérance de $(X - 1)(X + 1)$. En déduire la variance de X.

7.2. Variables aléatoires continues. —

Exercice 7.2.1. — Soit $a > 0$ et soit g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(t) = \dfrac{a}{\sqrt{t-1}}$ pour $t \in]1, 2]$ et $g_a(t) = 0$ pour $t \notin]1, 2]$.

1. Montrer qu'il existe un unique a tel que g_a soit une densité de probabilité et calculer cette valeur.
2. Calculer l'espérance de g_a.

Exercice 7.2.2. — Calculer, pour chacune des variables aléatoires continues suivantes, son espérance et sa variance.

1. **Loi uniforme :** Soient $a < b$ des réels et soit X la variable aléatoire dont la densité f est égale à $\dfrac{1}{b-a}$ pour $x \in [a, b]$ et 0 en dehors.
2. **Loi exponentielle :** Soit $\lambda > 0$ un réel et soit X la variable aléatoire dont la densité est égale à $\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \in [0, +\infty[$ et 0 en dehors.
3. **Loi normale :** Soit $\sigma > 0$ et soit X la variable aléatoire dont la densité est égale à $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.
   On admettra que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Exercice 7.2.3. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{2} e^{-|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de f.