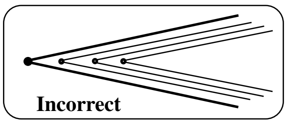
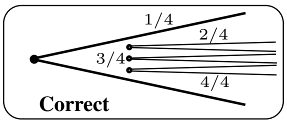
Restitution des copies :





Devoir 2 à la maison
À rendre le jeudi 10 mars 2016

Encadrer les réponses correctes

Deux exercices (au moins) sont déjà corrigés

dans les notes de cours transmises par courriel

que l'on pourra donc étudier pour réussir cette épreuve

Exercice 1. Soit un nombre réel fixé $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On se donne deux valeurs initiales $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 \in \mathbb{R}$, et on se propose d'étudier la suite numérique $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$u_{n+2} \,=\, 2\,a\,u_{n+1} - a^2\,u_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

L'objectif de cet exercice est d'établir la formule générale :

$$u_n \,=\, \big(\alpha + \beta\,n\big)\,a^n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0),$$

où α et β sont des constantes appropriées.

(a) Montrer que le polynôme caractéristique associé $X^2 - 2a\,X + a^2$ admet la racine double a.

(b) Montrer que les deux constantes :

$$\alpha \,:=\, u_0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \beta \,:=\, -\,u_0 + \frac{u_1}{a}$$

satisfont bien :

$$\begin{aligned} u_0 \,&=\, (\alpha + 0) \cdot a^0, \\ u_1 \,&=\, (\alpha + \beta \cdot 1) \cdot a^1. \end{aligned}$$

(c) Vérifier par un calcul direct que la solution :

$$u_n \,=\, \bigg(u_0 + \Big(-\,u_0 + \frac{u_1}{a}\Big)\,n\bigg)\,a^n,$$

satisfait effectivement la relation de récurrence $u_{n+2} = 2a\,u_{n+1} - a^2\,u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

(d) Conclure.

Exercice 2. Soient maintenant *deux* nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$. On se donne à nouveau deux valeurs initiales $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 \in \mathbb{R}$, et on se propose d'étudier la suite numérique u_n définie par la nouvelle relation de récurrence linéaire d'ordre deux plus générale :

$$u_{n+2} \,=\, a\,u_{n+1} + b\,u_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

On suppose enfin que :

$$a^2 + 4\,b \,\neq\, 0.$$

(a) Montrer par un calcul direct que :

$$\lambda \,:=\, \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\,b}}{2} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lambda \,:=\, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\,b}}{2}$$

sont racines du polynôme caractéristique $X^2 - a\,X - b$, et justifier que $\lambda \neq \mu$.

(b) Montrer que les deux constantes :

$$\alpha \,:=\, \frac{u_0\,\mu - u_1}{\mu - \lambda} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \beta \,:=\, \frac{u_1 - \lambda\,u_0}{\mu - \lambda}$$

satisfont :

$$\begin{aligned} u_0 \,&=\, \alpha + \beta, \\ u_1 \,&=\, \alpha\,\lambda + \beta\,\mu. \end{aligned}$$

(c) En développant $(X - \lambda)(X - \mu)$, montrer que :

$$a \,=\, \lambda + \mu \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad b \,=\, -\,\lambda\,\mu.$$

(d) Montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\mu \neq 0$.

(e) On introduit la nouvelle suite $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ définie en fonction de $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ par :

$$v_n \,:=\, \frac{u_n}{\lambda^n} \qquad (\forall\, n \geqslant 0),$$

Montrer que :

$$v_{n+2} - v_{n+1} \,=\, \frac{\mu}{\lambda}\big(v_{n+1} - v_n\big) \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

(f) Pour tout entier $n \geqslant 0$, montrer que :

$$v_n - v_{n-1} \,=\, (v_1 - v_0)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}.$$

(g) En utilisant :

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n-1} \,&=\, (v_1 - v_0)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1},\\
v_{n-1} - v_{n-2} \,&=\, (v_1 - v_0)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_2 - v_1 \,&=\, (v_1 - v_0)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1},\\
v_1 - v_0 \,&=\, (v_1 - v_0)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{0},
\end{aligned}$$

montrer que :

$$v_n \,=\, v_0 + (v_1 - v_0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k} \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

(h) Montrer que :

$$v_n \,=\, v_0 + (v_1 - v_0)\left(\frac{(\frac{\mu}{\lambda})^n - 1}{(\frac{\mu}{\lambda}) - 1}\right) \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

(i) Montrer que :

$$u_n \,=\, v_0\,\lambda^n + (v_1 - v_0)\left(\frac{\mu^n - \lambda^n}{\frac{\mu}{\lambda} - 1}\right) \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

(j) Montrer que :

$$u_n \,=\, \alpha\,\lambda^n + \beta\,\mu^n \qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Exercice 3. On admettra que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout nombre réel $x > -1$.

(a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer les deux inégalités :

$$\ln(n+1) - \ln(n) \,\leqslant\, \frac{1}{n} \,\leqslant\, \ln(n) - \ln(n-1).$$

(b) Montrer que l'on a pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \,=\, \ln\left(\frac{2\,n+1}{n+1}\right).$$

(c) Montrer que l'on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\big(\ln(k) - \ln(k-1)\big) \,=\, \ln\left(\frac{2\,n}{n}\right).$$

(d) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer les deux inégalités :

$$\ln\left(\frac{2\,n+1}{n+1}\right) \,\leqslant\, \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \,\leqslant\, \ln\left(\frac{2\,n}{n}\right).$$

(e) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \,=\, \ln(2).$$