Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes

Frédéric Paulin

Résumé: Nous étudions les propriétés asymptotiques des orbites d'un groupe de type fini agissant mesurablement sur un espace de probabilité. Nous montrons que si la mesure est ergodique, stationaire et non invariante, alors presque toute orbite est transiente. Si la mesure est stationaire, nous montrons que presque toute orbite possède 0,1,2 ou un ensemble de Cantor de bouts, et que presque toute orbite à deux bouts est à croissance linéaire.

Abstract: We study the asymptotic properties of orbits of a measurable action on a probability space of a finitely generated group. We prove that if the measure in ergodic, stationary and non invariant, then almost every orbit is transient. We prove that if the measure is stationary, then almost every orbits has 0,1,2 or a Cantor set of ends, and that almost every orbit with two ends has linear growth.

Keywords: Measurable group actions, measured equivalence relations, ends, growth, random walks

AMS codes: 28 D 15, 60 J 15

Introduction

Une relation d'équivalence mesurée discrète $(B, \mu, \mathcal{R})$ est un espace borélien standard B, une (classe de) mesure de probabilité μ, et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ à classes dénombrables, telle que le saturé d'un ensemble de mesure nulle est encore de mesure nulle. Nous renvoyons à [Moo, FM, CFW, HK] pour les références, motivations et applications (à la théorie des opérateurs et la théorie des feuilletages, par exemple).

Nous nous intéressons dans cet article aux relations d'équivalence mesurées discrètes $(B, \mu, \mathcal{R})$, munies d'une information supplémentaire : la donnée mesurable d'une structure de graphe (de valences uniformément bornées) sur chaque classe d'équivalence (voir aussi [Ada]). Le but de ce papier est d'étudier les propriétés asymptotiques de presque toutes les classes d'équivalences, en particulier du point de vue de la transience/récurrence, du nombre de bouts, de la croissance. (L'équivalence de Kakutani entre ces relations ne change pas les propriétés asymptotiques, voir section 1.3). Ces propriétés généralisent celles des marches aléatoires sur les groupes, pour lesquelles nous renvoyons au survol [Woe] et à ses réferences.

L'exemple fondamental est le suivant. Soit G un groupe de type fini. Fixons S un système fini de générateur. Soit (B, μ) un espace de probabilité, muni d'une action quasi-invariante de G (au sens que tout élément de G préserve les ensembles de mesure nulle).

Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur B "être dans la même orbite de G". Chaque orbite de G est naturellement l'ensemble des sommets d'un graphe, appelé *graphe de Cayley* de l'orbite : pour chaque générateur s de S et point x de l'orbite, il y a une arête (étiquetée s) entre x et sx.

Nous introduisons (voir section 1.6) un *opérateur laplacien* $\Delta : \mathbb{L}^\infty(\mu) \to \mathbb{L}^\infty(\mu)$ tel que $\Delta f(x)$ est la moyenne de f sur les sommets voisins de x dans le graphe de $\mathcal{R}(x)$, à laquelle est otée $f(x)$.

Cet opérateur est associé à la *marche aléatoire* sur $(B, \mu, \mathcal{R})$, qui consiste à choisir un point x au hasard dans B pour la loi μ, puis à se déplacer au hasard dans le graphe de la classe de x, avec à chaque instant équiprobabilité d'aller du sommet où l'on est à l'un des sommets voisins (voir section 1.5).

Inspiré par les travaux de L. Garnett [Gar] sur les feuilletages, nous définissons (voir section 2) une notion de *mesure harmonique*, plus générale que celle de mesure invariante : μ est harmonique si elle s'annule sur les laplaciens de fonctions.

Contrairement au cas des feuilletages, de telles mesures n'existent pas toujours. Leur existence implique certaines propriétés dynamiques de la relation d'équivalence mesurée (voir par exemple section 1.8).

Theorem A *Si μ est harmonique ergodique non invariante, alors presque toute orbite est transiente.*

Nous montrons (section 1.7) qu'une mesure est harmonique si et seulement si le décalage sur la marche aléatoire préserve la mesure. Si μ est ergodique et harmonique, nous montrons (section 2) que la probabilité moyenne que la marche aléatoire passe par un borélien A de B est précisément $\mu(A)$. Après reformulation des outils précédents en utilisant des chaînes de Markov, ceci devient un résultat bien connu (voir par exemple [Rev]), mais nous en donnons une preuve plus dynamique.

Si μ est harmonique, l'opérateur laplacien s'étend à $\mathbb{L}^2(B, \mu)$. Nous nous intéresserons (section 1.9) au *spectre* de l'opérateur laplacien, pour savoir quelles sont les propriétés des relations d'équivalences mesurées discrètes que l'on peut lire sur le spectre (voir aussi [Pau2].

Nous montrons par exemple (section 1.9) que le spectre de l'opérateur de diffusion $\Delta + \mathrm{id}$ est $[-1, 1]$ si $\mathcal{R}$ provient d'une transformation de (B, μ) préservant la mesure et ayant une mesure non nulle d'orbites infinies.

Inspiré par les travaux de E. Ghys [Ghy] sur les bouts des feuilles génériques des feuilletages, nous montrons les résultats suivants, qui sont des extensions des théorèmes sur les bouts des groupes de E. Hopf et J. Stallings [Sta] respectivement (voir section 3). Nous renvoyons à la section 3 pour la définition d'extension HNN de relations d'équivalence mesurées.

Theorem B *Si μ est harmonique, alors pour μ-presque tout x dans X, la classe d'équivalence de x possède $0, 1, 2$ ou un ensemble de Cantor de bouts.*

Theorem C *Un ensemble de mesure non nulle de classes d'équivalence possède au moins 3 bouts si et seulement si $\mathcal{R}$ est Kakutani équivalent à une extension HNN non triviale.*

Enfin, au point de vue de la croissance, nous obtenons le résultat suivant. Dans le cas où la mesure μ est invariante, et le graphe de Cayley de presque toute orbite est un arbre, ce résultat est du à G. Levitt [Lev2].

Theorem D *Si μ est harmonique, alors presque toute classe d'équivalence ayant deux bouts est à croissance linéaire.*

L'auteur remercie A. Fathi, E. Ghys, R. Grigorchuk, V. Kaimanovich, D. Piau et D. Gaboriau pour leur aide.

1 Définitions et exemples

Comme référence de base sur les relations d'équivalences mesurées discrètes, nous renvoyons à [Moo] (avec en particulier la relation avec la théorie des opérateurs), [HK] (avec en particulier la relation avec la théorie des feuilletages).

Pour les marches aléatoires, l'analyse harmonique discrète et la théorie du potentiel discrète, nous renvoyons à l'excellent survol de A. Woess [Woe], et à son impressionante bibliographie.

Sauf mention contraire, une mesure sera toujours positive, σ-additive et σ-finie. Une action est une action mesurable à gauche.

1.1 Relations d'équivalences mesurées discrètes

La définition ci-dessous est inspirée de celles de [Moo][HK][Ada]. Pour l'instant, seules les classes de mesures sont importantes, mais nous serons amené plus tard à privilégier certains représentants (voir section 1.7).

Rappelons qu'un espace borélien *standard* est un espace borélien isomorphe à la réunion disjointe de $[0,1]$ et d'une partie de $\mathbb{N}$, avec sa structure borélienne donnée par sa structure topologique usuelle, ou de manière équivalente, à n'importe quel espace topologique métrisable localement compact σ-compact.

Un *graphe standard* est un graphe dont les ensembles de sommets B et d'arêtes E sont des espaces boréliens standards, et tel que les applications origine $o : E \to B$, extrémité $t : E \to B$ et l'involution $e \mapsto \overline{e}$ sont mesurables. Dans tout cet article, les graphes seront de valence uniformément bornée par un entier N.

La principale propriété des espaces boréliens standards que nous utiliserons est la suivante.

Lemme 1.1 *Si X, Y sont des espaces boréliens, avec X standard, alors toute application $f : X \to Y$ mesurable, à fibres $f^{-1}(*)$ finies, admet une section mesurable $s : Y \to X$ (avec $f \circ s = id$).*

Preuve. Puisque X est isomorphe à la réunion de $[0,1]$ et d'une partie de $\mathbb{N} - \{0,1\}$, il suffit de prendre pour $s(x)$ le premier point de $f^{-1}(x)$ (pour l'ordre évident sur X, où tout élément de $[0,1]$ est plus petit que tout élément de $\mathbb{N}$.). $\square$

Soit (B, E) un graphe standard. Notons ν^x la mesure de comptage sur l'ensemble fini $o^{-1}(\{x\})$ pour $x \in B$. Si μ est une mesure sur B, alors nous définissons une mesure ν sur

E en posant

$$\nu = \int_B \nu^x \, d\mu(x).$$

En particulier, $o_*\nu = \mu$ et $(\nu^x)_{x\in B}$ est la famille de mesures sur E obtenue par désintégration de la mesure ν par la projection $o : E \to B$ (voir [Moo]). Notons $\overline{\nu}$ la mesure sur E image directe de ν par $e \mapsto \overline{e}$.

Définition 1.2 *Une relation d'équivalence mesurée graphée est un triplet (B, μ, E), avec (B, E) un graphe standard et μ une mesure sur B, tel que $\overline{\nu}$ et ν sont dans la même classe de mesures.*

Bien sûr, comme $t(\overline{e}) = o(e)$, $t_*\nu$ et $\mu = o_*\nu$ sont alors dans la même classe de mesures.

Nous noterons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur B engendrée par $o(e) \sim t(e)$ pour $e \in E$. En d'autres mots, une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ est l'ensemble des sommets d'une composante connexe du graphe (B, E).

Il est immédiat de voir que $(B, \mu, \mathcal{R})$ est une relation d'équivalence mesurée discrète au sens de l'introduction.

La classe d'équivalence $\mathcal{R}(x)$ d'un point x de B est appelée l'*orbite* de x. Elle est munie d'un point base privilégié, le point x. Le sous-graphe de (B, E) dont elle est l'ensemble des sommets est appelé le *graphe de Cayley* de l'orbite de x, et encore noté $\mathcal{R}(x)$ par abus. Il est de valence uniformément bornée (par N). Chaque graphe $\mathcal{R}(x)$ est munie d'une métrique $d = d_{\mathcal{R}(x)}$, la distance entre deux sommets étant le nombre minimum d'arêtes d'un chemin d'arêtes consécutives entre ces deux sommets.

La relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) est dite *invariante* si tout isomorphisme mesurable $f : A \to A'$, avec A, A' boréliens de B, tel que $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x)\mathcal{R}f(y)$, envoie la restriction de μ à A sur la restriction de μ à A'.

Si A est une partie de B, le *saturé* de A est la réunion des orbites des points de A. Si la mesure μ est de probabilité, la relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) est *ergodique* si toute partie mesurable saturée est de mesure 0 ou 1.

L'hypothèse que ν et $\overline{\nu}$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre montrent que le terme “presque toute orbite” est bien défini: le saturé d'un ensemble de mesure nulle est encore de mesure nulle.

1.2 Relation d'équivalence mesurée graphée associée à un pseudogroupe mesuré de type fini

Un *pseudogroupe mesuré de type fini* est la donnée de (B, μ) un espace borélien standard mesuré, $(A_i)_{i=1\cdots k}, (B_i)_{i=1\cdots k}$ deux familles finies de boréliens, et $\varphi_i : A_i \to B_i$ des bijections mesurables quasi-invariantes.

Notons E l'ensemble des triplets de la forme ou bien $(i, x, \varphi_i(x))$ avec x dans A_i, ou bien $(-i, y, \varphi_i^{-1}(y))$ avec y dans B_i. Les applications o, t sont respectivement les deuxièmes et troisièmes projections. L'involution de E est définie par $(i, x, \varphi_i(x)) \mapsto (-i, \varphi_i(x), x)$.

Alors (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée. Elle est invariante si et seulement si les φ_i préservent la mesure. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par (B, μ, E) est précisément la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ s'il existe i avec $x \in A_i$ et $y = \varphi_i(x)$.

Les A_i, B_i seront appelés les *bases*. Si $n : B \to \mathbb{N}$ est l'application qui à x associe le nombre de bases auxquelles x appartient, alors $n(x)$ est la valence de x dans le graphe de Cayley de son orbite. Notons que $n(x)$ est borné par $2k$.

Action quasi-invariante de groupe.

Soit G un groupe de type fini, muni d'une partie génératrice finie fixée $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$, agissant de manière quasi-invariante sur l'espace mesuré (B, μ). Posons $A_i = B_i = B$ et $\varphi_i : x \mapsto s_i x$ pour $i = 1 \cdots k$. Alors la relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) définie ci-dessus est l'exemple fondamental évoqué dans l'introduction. Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont précisément les orbites de G.

Notons que l'orbite d'un point x s'identifie avec l'espace des classes à droite de G modulo le stabilisateur de x. Le graphe de Cayley de l'orbite de x est le quotient du graphe de Cayley à gauche de G pour S (où contrairement à d'habitude, on met une arête entre h et sh pour s dans S, de sorte que G agisse maintenant sur la droite), par l'action à droite de G_x. En particulier, si l'action est (presque) libre, (presque) tous les graphes de Cayley des orbites sont isomorphes au graphe de Cayley de G (les graphes de Cayley à droite et à gauche d'un groupe sont isomorphes par $g \mapsto g^{-1}$).

Par exemple, un groupe kleinien (i.e. un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$), de type fini, agit de manière quasi-invariante et presque libre sur son ensemble limite, muni de la mesure de Patterson-Sullivan (voir [Nic]). Ses orbites sont donc presque toutes isomorphes au graphe de Cayley du groupe.

Si G est de présentation finie, on peut aussi définir le 2-complexe de Cayley de l'orbite d'un point x, isomorphe au quotient du 2-complexe de Cayley à gauche de G par l'action à droite de G_x (voir [Pau1], section 5.10 pour des questions de comportement asymptotique générique "d'ordre supérieur").

Voici un exemple classique important.

Exemple : Soit G un groupe de type fini et E un espace dénombrable sur lequel agit G. Considérons l'espace compact (pour la topologie produit de la topologie discrète) $B = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^E$, muni de la mesure de probabilité produit $\mu = P^E$, où P est l'équiprobabilité sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors G agit sur B en permutant les coordonnées, et l'action préserve la mesure μ.

Par exemple, si $E = G$ et G agit sur lui-même par translation à gauche, alors l'action de G sur B est presque libre, et presque toute orbite s'identifie avec le graphe de Cayley de G (une fois choisi un système de générateurs).

En particulier, si nous savons répondre aux questions de comportement asymptotique générique des orbites (croissance, transience/recurrence, bouts ...) d'une relation d'équivalence mesurée graphée, nous savons aussi répondre aux questions analogues concernant le groupe G lui-même.

Si H est un sous-groupe de G, et si $E = G/H$ avec l'action par translation à gauche de G sur ses classes à droites par H, alors il est facile de montrer que si un sous-groupe H' de G est stabilisateur d'un ensemble de mesure non nulle de points de B, alors H' contient le *cœur* $N_H = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ de H avec indice fini. En particulier, comme N_H est distingué dans G, les orbites de G sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{G/H}$ sont quasi-isométriques au groupe G/N_H, donc ont les mêmes propriétés "asymptotiques" que G/N_H.

Voici quelques autres exemples de pseudogroupes mesurés de type fini qu'il est bon garder en tête.

- Feuilletages absolument continus. Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage d'une variété compacte M, on prend B une transversale rencontrant toute feuille, munie d'une mesure borélienne $|mu$ quasi-invarainte par holonomie le long des feuilles, A_i, B_i des ouverts de B, et $\varphi_i : A_i \to B_i$ des holonomies de long de feuilles de $\mathcal{F}$, qui engendrent le pseudogroupe d'holonomie, au sens de A. Haefliger [Hae1], voir aussi [Hae2][Sal]. La relation d'équivalence mesurée graphée associée est invariante si et seulement si la mesure μ est invariante par holonomie le long de $\mathcal{F}$.

- Systèmes d'isométries de $\mathbb{R}$. On prend B une union disjointe d'intervalles compacts de $\mathbb{R}$, avec μ la mesure de Lebesgue sur B. On prend $(A_i)_{i=1\cdots k}, (B_i)_{i=1\cdots k}$ deux familles finies d'intervalles fermés de B, et $\varphi_i : A_i \to B_i$ des isométries. La relation d'équivalence mesurée graphée associée est invariante. L'étude dynamique de ces systèmes d'isométries a été lancée par G. Levitt [Lev1]. Des systèmes d'isométries de $\mathbb{R}$ ont été introduits par E. Rips dans l'étude des actions de groupes sur les arbres réels, voir [GLP1][GLP2].

- Systèmes affines de $\mathbb{R}$. On prend B, μ, A_i, B_i comme ci-dessus, mais cette fois, les $\varphi_i : A_i \to B_i$ sont des homéomorphismes affines. Voir par exemple les travaux de [Lio]. La mesure de Lebesgue n'est pas invariante, sauf dans le cas précédent.

- Applications monotones par morceaux de l'intervalle. Si $f : B \to B$ est une application C^1 par morceaux d'un intervalle compact B dans lui-même, qui est strictement monotone par morceaux, si μ est la mesure de Lebesgue de B, on prend A_i des intervalles fermés de I, d'intérieurs disjoints, et de réunion B, sur lesquels f est un homéomorphisme sur leur image, et $\varphi_i : A_i \to B_i = f(A_i)$ les restrictions de f. La principale caractéristique ici est qu'il est possible d'orienter les graphes de Cayley des orbites (dans la direction de f). Voir par exemple [MT][CE].

En fait, toute relation d'équivalence mesurée graphée provient d'un pseudogroupe mesurable de type fini.

Proposition 1.3 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée. Il existe un pseudogroupe mesuré de type fini $\mathcal{P} = \{\varphi_i : A_i \to B_i\}_{i=1\to k}$ sur (B, μ) tel que les graphes de Cayley de l'orbite de tout point, pour (B, μ, E) et pour $\mathcal{P}$, coïncident.*

Preuve. Par le lemme 1.1, il est possible de numéroter de manière mesurable les arêtes d'origines x de 1 à $n_x \leq N$. Pour $i = 1 \cdots k$, posons alors A_i l'ensemble des x tels que $n_x \leq i$. Pour $x \in A_i$, posons $\varphi_i(x) = t(e_i(x))$ où $e_i(x)$ est la i-ème arête issue de x, et B_i l'image de φ_i. Le problème est que φ_i ainsi définie n'est pas injective. Mais la préimage des points par φ_i est de cardinal au plus N. Toujours par le lemme 1.1, il est possible d'écrire A_i comme réunion disjointe de boréliens $A_{i,1}, \cdots A_{i,n_i}$ avec $n_i \leq N$ de sorte que la restriction de φ_i à $A_{i,j}$ soit injective pour tout $j = 1 \cdots n_i$. On note alors $\mathcal{P}$ l'ensemble fini de toutes ces restrictions.

Il est clair que $\mathcal{P}$ quasi-préserve la mesure, et que les graphes de Cayley sont les mêmes. $\square$

Mais le langage des relations d'équivalence mesurées graphées permet de s'affranchir du choix d'un tel pseudogroupe.

1.3 Equivalence de Kakutani

La définition suivante est adaptée de celle de S. Kakutani [Kak], voir aussi [ORW][HK].

Définition 1.4 *Soient $(B,\mu,E),(B',\mu',E')$ deux relations d'équivalence mesurées graphées. On dit que (B',μ',E') est un facteur de (B,μ,E) s'il existe une application mesurable $\phi : B \to B'$ telle que*

1. *l'image réciproque d'un borélien de mesure nulle est de mesure nulle,*
2. *les images de deux points de la même orbite sont dans la même orbite,*
3. *il existe des constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 0$ telles que pour μ-presque tout x et pour tous y,z dans $\mathcal{R}(x)$,*

$$\frac{1}{c_1} d_{\mathcal{R}(x)}(y,z) - c_2 \leq d_{\mathcal{R}'(\phi(x))}(\phi(y),\phi(z)) \leq c_1 d_{\mathcal{R}(x)}(y,z) + c_2.$$

On dit que $(B,\mu,E),(B',\mu',E')$ sont équivalents au sens de Kakutani s'ils le sont pour la relation d'équivalence engendrée par la relation "être facteur de".

Par exemple, deux systèmes de transversales complets (i.e. les transversales rencontrent toutes les orbites et les holonomies engendrent le pseudo-groupe d'holonomie) d'un feuilletage sont équivaleents au sens de Kakutani (voir [Hae1, Hae2, Sal]).

Il est démontré dans [GLP2] que deux systèmes d'isométries de $\mathbb{R}$ ayant les mêmes orbites (ensemblistement) sont éuivalents au sens de Kakutani.

1.4 Noyaux de transitions pour une relation d'équivalence mesurée graphée

Définition 1.5 *Un noyau de transition pour une relation d'équivalence mesurée graphée (B,μ,E) est une fonction mesurable $p : E \to]0,1]$ telle que, pour μ-presque tout x dnas B, la restriction de p au graphe de l'orbite de x soit markovienne, i.e.*

$$\sum_{\{e\in E \,:\, o(e)=x\}} p(e) = 1 \ .$$

(Notons que supposer que $p(e) \neq 0$ n'est pas une restriction importante, car cela signifie que la probabilité d'emprunter l'arête e, au cours de la marche aléatoire décrite ci-dessous, est nulle.)

Example : L'exemple fondamental est celui d'un noyau de transition *réversible*, i.e. associé à un système de *conductances* c ou de *résistances* $\frac{1}{c}$, où $c : E \to]0,+\infty[$ est une fonction mesurable, invariante par l'involution (i.e. $c(e) = c(\overline{e})$). On pose

$$\pi(x) = \sum_{\{e'\in E \,/\, o(e')=x\}} c(e') \qquad \text{et} \qquad p(e) = \frac{c(e)}{\pi(o(e))}.$$

Comme cas particulier, le *noyau de transition simple* est défini par le système de conductances constant (disons 1). Par exemple, si (B,μ,E) vient d'une action quasi-invariante d'un groupe G muni d'une partie génératrice finie S sur (B,μ), alors le noyau de transition simple est $p(e) = \frac{1}{|S|}$.

Correspondant à un choix de noyau de transition p, il existe un choix naturel de mesure sur E dans la classe de la mesure ν définie section 1.1, que nous noterons encore ν dans la suite de cet article : si $g : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, nous posons

$$\nu(g) = \int_{x\in B} \sum_{\{e\in E, o(e)=x\}} p(e)g(e)d\mu(x).$$

Notons que si $f : B \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\int_E f \circ o \; d\nu = \int_B f \; d\mu.$$

1.5 Marches aléatoires sur une relation d'équivalence mesurée graphée

Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ de probabilité, et soit p un noyau de transition. La marche aléatoire sur (B, μ, E) consiste à choisir un point de B au hasard, puis à marcher au hasard dans l'orbite de ce point, en empruntant l'arête e avec probabilité $p(e)$.

Ceci se modélise de la façon suivante. La *marche aléatoire* sur l'orbite de x (pointée en x) est l'espace de probabilité

$$(\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_x^{\mathbb{N}}, P_x)$$

suivant. L'ensemble $\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}$ est celui des suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec Z_n dans $\mathcal{R}(x)$. La σ-algèbre $\mathcal{B}_x^{\mathbb{N}}$ est celle engendrée par les cylindres discrets $\{Z \in \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}} \,/\, Z_0 = x_0, Z_1 = x_1, \cdots, Z_n = x_n\}$ avec x_i dans $\mathcal{R}(x)$. La probabilité P_x est définie par

$$P_x(Z_0 = x_0, Z_1 = x_1, \cdots, Z_n = x_n) = \delta_{x_0}^x q(x_0, x_1) \cdots q(x_{n-1}, x_n)$$

avec $q(x, y)$ la somme des $p(e)$ pour e arête de x à y, et $\delta_{x_0}^x = 1$ si $x_0 = x$, et 0 sinon.

Considérons par exemple le cas d'une relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) venant d'une action quasi-invariante d'un groupe G, muni d'une partie génératrice finie S, sur (B, μ), pour le noyau de transition simple. La probabilité d'être au point x_{n+1} à l'instant $n + 1$, sachant qu'à l'instant précédent, on est au point x_n, est la proportion d'arêtes issues de x_n arrivant en x_{n+1} :

$$P_x(Z_{n+1} = x_{n+1} | Z_n = x_n) = \frac{n(x_n, x_{n+1})}{|S|}$$

avec $n(x, y)$ le nombre d'éléments s de S tel que $y = sx$.

Une orbite est dite *récurrente* si, en marchant au hasard dans le graphe de Cayley de l'orbite, on revient presque sûrement au point de départ :

$$P_x(\exists n > 0 \,/\, Z_n = x) = 1.$$

Une orbite est dite *transiente* sinon, i.e. si presque sûrement, la marche aléatoire part à l'infini (i.e. sort de tout compact) dans le graphe de Cayley de l'orbite.

La *marche aléatoire* sur la relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) est l'espace de probabilité

$$(\Omega, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, P)$$

suivant. L'ensemble Ω est celui des suites $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B telles que pour tout n, Z_n et Z_{n+1} sont dans la même orbite. La σ-algèbre $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ est celle engendrée par les cylindres de $B^{\mathbb{N}}$, i.e. les parties de la forme $C = \{Z \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \,/\, Z_0 \in A_0, Z_1 \in A_1, \cdots, Z_n \in A_n\}$, avec A_i borélien de B. La probabilité P sur $(\mathcal{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}})$ est alors définie par la moyenne pour μ des marches aléatoires sur les graphes de Cayley des orbites :

$$P(C) = \int_{x\in B} P_x(C \cap \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}})\, d\mu(x),$$

pour C évènement cylindrique, en remarquant que $C \cap \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}$ est bien dans $\mathcal{B}_x^{\mathbb{N}}$. Le fait que les mesures de probabilité P_x et P soient bien définies découle d'un théorème classique de Kolmogorov (voir par exemple [CFS, Man]).

Si le noyau de transition p est simple, la marche aléatoire est dite *simple*.

En particulier, $P(\{\exists n > 0, Z_n = Z_0\}) = 1$ équivaut au fait que presque toute orbite est récurrente, et $P(\{\exists n > 0, Z_n = Z_0\}) = 0$ équivaut au fait que presque toute orbite est transiente.

Remarque. Avec la terminologie par exemple de [Rev], la suite de variables aléatoires $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, P)$ à valeurs dans B est une chaîne de Markov d'espace des états $(B, \mathcal{B})$, de probabilité de transition positif, markovien, discret $N : B \times \mathcal{B} \to [0, +\infty[$ défini par $N(x, A) = \sum_{\{e\in E\,/\,t(e)\in A\}} p(e)$, de mesure initiale μ. Réciproquement, à toute chaîne de Markov d'espace des états $(B, \mathcal{B})$, de probabilité de transition N positif, markovien, <u>discret</u> (avec pour tout $x \in B$, le cardinal de l'ensemble des y de B tels que $N(x, y) \neq 0$ uniformément borné), de mesure initiale μ, est naturellement associée une relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E), avec $E \subset B \times B$ l'ensemble des (x, y) tels que $N(x, y) \neq 0$, et un noyau de transition p avec $p((x, y)) = N(x, y)$ (voir Prop. 2.4 [Rev]).

1.6 Opérateur laplacien d'une relation d'équivalence mesurée graphée

Définition 1.6 *Si p est un noyau de transition d'une relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E), l'opérateur de diffusion $D : \mathbb{L}^\infty(\mu) \to \mathbb{L}^\infty(\mu)$ est défini par*

$$Df(x) = \sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e) f(t(e))$$

Le fait que l'image par D d'une fonction presque partout nulle est encore presque partout nulle vient du fait que la mesure μ est quasi-invariante. Pour une relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) venant d'une action quasi-invariante d'un groupe G, muni d'une partie génératrice finie S, sur (B, μ), pour le noyau de transition simple, l'opérateur de diffusion est tout simplement

$$Df(x) = \frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} f(sx).$$

L'opérateur de diffusion vérifie les propriétés suivantes des opérateurs de Markov (voir par exemple [Rev][Kai]) :

1. D est linéaire continu, avec $||D||_\infty \leq 1$,

2. D préserve les fonctions constantes,

3. D est positif, i.e. préserve le cône des fonctions positives,

4. si f_i est une suite croissante de fonctions positives, alors $D(\lim f_i) = \lim D(f_i)$.

Pour p dans $[1, +\infty[$, si la restriction de D à $\mathbb{L}^\infty(\mu) \cap \mathbb{L}^p(\mu)$ (qui est dense dans $\mathbb{L}^p(\mu)$ car μ est σ-finie) admet une extension continue à $\mathbb{L}^p(\mu)$, nous dirons que l'opérateur de diffusion D est $\mathbb{L}^p(\mu)$*-extensible*. Nous serons particulièrement intéressés par les cas $p = 1, 2$.

Par exemple, si (B, μ, E) est associé à un pseudogroupe mesuré de type fini, dont les générateurs φ_i ont leur dérivée de Radon-Nykodim $\frac{d(\varphi_i)_*\mu}{d\mu}$ par rapport à μ dans $\mathbb{L}^\infty(\mu|_{B_i})$, ainsi que leurs inverses, alors l'opérateur de diffusion D est $\mathbb{L}^p(\mu)$-extensible pour tout p.

Notons que D agit aussi linéairement sur l'espace des mesures positives sur B, par dualité :

$$D^* m(A) = m(D(\chi_A))$$

avec A borélien de B, et χ_A la fonction caractéristique de A, en remarquant que $D(\chi_A)$ est mesurable bornée. Les propriétés (2), (3), (4) montrent que $D^* m$ est bien une mesure, bornée ou de probabilité si m l'est.

Définition 1.7 *Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée et p un noyau de transition, alors le laplacien est l'opérateur Δ linéaire continu de $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ défini par*

$$\Delta = D - \mathrm{id}.$$

Notons que l'opérateur de diffusion et le laplacien envoient n'importe quelle fonction mesurable de B dans $\mathbb{C}$ sur une fonction mesurable de B dans $\mathbb{C}$.

Une fonction mesurable de B dans $\mathbb{C}$ est dite *harmonique* si son laplacien est nul presque partout, ce qui équivaut à dire qu'elle est fixe par l'opérateur de diffusion (modulo ensembles de mesure nulle).

En particulier, toute fonction presque partout constante est harmonique, par la propriété (2) des opérateurs de diffusion.

Nous rappelons ci-dessous, pour utilisation future, trois propriétés bien connues (voir par exemple [Dod]) du laplacien sur chaque orbite, le principe du maximum, l'inégalité de Harnack et la formule de Green.

Lemme 1.8 *(Principe du maximum) Si f dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ est réelle, superharmonique (i.e. $\Delta f \geq 0$), si $f \leq c$ et $f(x) = c$, alors f est constante sur l'orbite de x.*

Preuve. Puisque $c = f(x) \leq \sum_{\{e \in E \,/\, o(e) = x\}} p(e) f(t(e)) \leq \sum_{\{e \in E \,/\, o(e) = x\}} p(e) c = c$, on doit avoir $f(t(e)) = c$ pour tout e dans E tel que $o(e) = x$. Par connexité de $\mathcal{R}(x)$, le résultat en découle. □

Lemme 1.9 *(Inégalité de Harnack) Si f dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ est réelle, sousharmonique (i.e. $\Delta f \leq 0$) et positive, si le noyau de transition est minoré par une constante strictement positive, alors f croit au plus exponentiellement sur chaque orbite.*

Preuve. Si $\alpha p(e) \geq 1$, comme $f(o(e)) \geq \sum_{\{e' \in E \,/\, o(e') = o(e)\}} p(e') f(t(e')) \geq \alpha^{-1} f(t(e))$, si x et y sont deux points d'une même orbite à distance $d(x, y)$, alors $f(x) \leq \alpha^{d(x,y)} f(y)$. □

Lemme 1.10 *(Formule de Green) Si P est une partie finie d'un graphe d'ensemble de sommets S et d'arêtes A, notons $\partial P = \{e \in A \,/\, o(e) \in P, t(e) \notin P\}$. Soit $c : A \to]0, +\infty[$ une fonction strictement positive, invariante par changement d'orientation. Posons $r(e) = \frac{1}{c(e)}$, $\pi(x) = \sum_{\{e \in A \,/\, o(e)=x\}} c(e)$ et $p(e) = \frac{c(e)}{\pi(o(e))}$. Pour toute fonction $f : S \to \mathbb{C}$, si $df(e) = \frac{f(t(e)) - f(o(e))}{r(e)}$ et $\Delta f(x) = \sum_{\{e \in A \,/\, o(e)=x\}} p(e) f(t(e)) - f(x)$, on a*

$$\sum_{x \in P} \pi(x) \Delta f(x) = \sum_{e \in \partial P} df(e).$$

Preuve. Pour toutes fonctions f, g (respectivement ϕ, ψ) de S (respectivement A) dans $\mathbb{C}$ dont l'une des deux est à support fini, on pose

$$< f, g >= \sum_{x \in S} \pi(x) f(x) \overline{g(x)} \quad \text{et} \quad < \phi, \psi >= \frac{1}{2} \sum_{e \in A} r(e) \phi(e) \overline{\psi(e)}.$$

Montrons que

$$< -\Delta f, g > = < df, dg > .$$

Rappelons que $c(e) = c(\overline{e})$. Posons

$$c(x, y) = c(y, x) = \sum_{\{e \in A \,/\, o(e)=x, t(e)=y\}} c(e) = \pi(x) \sum_{\{e \in A \,/\, o(e)=x, t(e)=y\}} p(e).$$

Nous pouvons supposer que le graphe est fini. Alors

$$\begin{aligned}
2 < df, dg > &= \textstyle\sum_{x,y \in S} c(x,y)[f(y) - f(x)][\overline{g(y) - g(x)}] \\
&= \textstyle\sum_{x,y \in S} c(x,y)[f(y)\overline{g(y)} + f(x)\overline{g(x)}] - c(x,y)[f(y)\overline{g(x)} + f(x)\overline{g(y)}] \\
&= \textstyle 2\sum_{x,y \in S} c(x,y) f(x) \overline{g(x)} - 2\sum_{x,y \in S} c(x,y) f(y) \overline{g(x)} \\
&= \textstyle 2\sum_{x \in S} \left(\sum_{y \in V} c(x,y)[f(x) - f(y)] \right) \overline{g(x)}
\end{aligned}$$

L'affirmation en découle.

Maintenant, si χ_P est la fonction caractéristique de P, alors

$$r(e) d(\chi_P)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{e} \in \partial P \\ -1 & \text{si } e \in \partial P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le résultat découle alors de

$$-\sum_{x \in P} \pi(x) \Delta f(x) =< -\Delta f, \chi_P >=< df, d(\chi_P) >= \frac{1}{2} \sum_{\overline{e} \in \partial P} df(e) + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial P} -df(e).$$

□

1.7 Mesures harmoniques

Définition 1.11 *Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée et p un noyau de transition, une mesure m sur B est dite harmonique (et aussi stationnaire ou invariante [Rev] page 60) si elle est quasi-invariante par $\mathcal{R}$ et si*

$$D^* m = m.$$

Une mesure quasi-invariante m est harmonique si et seulement si pour toute fonction mesurable bornée $f : B \to \mathbb{R}$, on a $\int_B (\Delta f)\, dm = 0$. La mesure μ elle-même est harmonique si et seulement si pour tout f, avec ν définie en section 1.4,

$$\int_E f \circ t \, d\nu = \int_E f \circ o \, d\nu.$$

Pour une relation d'équivalence mesurée graphée (B, μ, E) venant d'une action quasi-invariante d'un groupe G, muni d'une partie génératrice finie S, sur (B, μ), pour le noyau de transition simple, μ est harmonique si et seulement si

$$\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \frac{ds_* \mu}{d\mu} \equiv 1.$$

Si m est absolument continue par rapport à μ, de dérivée de Radon-Nykodim dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et si μ est invariante, alors m est harmonique si et seulement si, pour presque tout y dans B,

$$\sum_{\{e \in E \,/\, t(e) = y\}} \frac{dm}{d\mu}(o(e)) p(e) = \frac{dm}{d\mu}(y).$$

Le problème de l'existence de mesures harmoniques (non nulles) est crucial, voir [Gar, Ghy, Fri]. Dans la plupart des résultats qui suivent, ce sera une hypothèse de base. Nous sommes donc intéressés par trouver de nombreux cas d'existence.

Si B est un espace topologique compact, et si l'opérateur de diffusion définit un opérateur continu de $\mathrm{C}^0(B)$ dans $\mathrm{C}^0(B)$, alors des mesures harmoniques existent toujours (voir par exemple [Fri, Gar]).

Définition 1.12 *Nous dirons que la mesure μ est complètement invariante si $\bar{\nu} = \nu$.*

Il est clair que si μ est complètement invariante, alors μ est harmonique. La réciproque n'est pas vraie en général.

Si le noyau de transition est réversible, de fonction π dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$, et si μ est invariante non nulle, alors il existe une mesure $m = m_\mu$ complètement invariante (donc harmonique), non nulle, (finie si μ est finie) dans la même classe que μ. En effet, on pose $dm = \pi d\mu$. Comme π est strictement positive, m est quasi-invariante, et l'on vérifie que pour presque tout y dans B

$$\sum_{\{e \in E \,/\, t(e) = y\}} \pi(o(e)) p(e) = \sum_{\{e \in E \,/\, o(\overline{e}) = y\}} \pi(y) p(\overline{e}) = \pi(y).$$

Par exemple, si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée qui est invariante, associée à un pseudogroupe mesuré de type fini, et $n : B \to \mathbb{N}$ la fonction nombre de bases auxquelles appartient un point, alors

$$dm(x) = n(x) d\mu(x)$$

est une mesure harmonique pour le noyau de transition simple. Notons que si tout point de B appartient à au moins une base, alors m et μ ont exactement les mêmes ensembles de mesures nulles.

Dans le cas d'une action de groupe de type fini préservant la mesure, la fonction n ci-dessus est constante, et la mesure invariante μ est elle-même harmonique

Si (B, μ, E) provient d'un système affine de $\mathbb{R}$, il existe un choix naturel de noyau de transition. Intuitivement, si un générateur φ_i a une grande dérivée, alors la mesure de Lebesgue de l'image est grande par rapport à celle du domaine, donc il est facile d'aller dans cette direction.

Pour tous e dans E, notons $c(e)$ la dérivée du générateur (ou de son inverse) correspondant à e. Notons p le noyau de transition de (B, μ, E) donné par

$$p(e) = c(e) / \sum_{\{e' \in E\}} c(e') \ .$$

Nous dirons que (B, μ, E) est *centrée* si $\sum_{\{e \in E \ / \ o(e)=x\}} (c(e) - 1) = 0$ pour presque tout x dans B.

Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée associée à un système affine de $\mathbb{R}$, si (B, μ, E) est centrée, alors $dm(x) = n(x) d\mu(x)$ est une mesure harmonique pour ce noyau de transition, comme le montre un petit calcul.

Notons que si μ est harmonique, alors D est $\mathbb{L}^1(\mu)$-extensible. En effet, si $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ est positive, puisque μ est σ-finie, il existe une suite croissante de fonctions positives f_n dans $\mathbb{L}^1(\mu) \cap \mathbb{L}^\infty(\mu)$ qui tendent vers f dans $\mathbb{L}^1(\mu)$. Montrons que Df_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^1(\mu)$. Or si $n \geq p$, on a $\int |Df_n - Df_p| \, d\mu = \int D(f_n - f_p) \, d\mu = \int f_n - f_p \, d\mu = \int |f_n - f_p| \, d\mu$. Donc Df_n converge vers une fonction Df dans $\mathbb{L}^1(\mu)$, qui vérifie les bonnes propriétés. En décomposant $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ en somme d'une fonction positive et d'une fonction négative, le résultat s'en déduit.

Donnons un critère d'harmonicité de la mesure en fonction du comportement de la marche aléatoire sur (B, μ, E).

Proposition 1.13 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ une mesure de probabilité. Soit $S : \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ le décalage défini par $S(Z)_n = Z_{n+1}$. Alors μ est harmonique si et seulement si la mesure de probabilité P sur $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ est invariante par le décalage.*

Preuve. Soit A un borélien de B, de fonction caractéristique χ_A, et $C_A = \{Z \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \ / \ Z_0 \in A\}$. Notons que $S^{-1}(C_A) = \{Z \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \ / \ Z_1 \in A\}$. Alors

$$\int \chi_A \, d\mu = \mu(A) = P(C_A)$$

et

$$P(S^{-1}(C_A)) = \int P_x(S^{-1}(C_A) \cap \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}) \, d\mu(x)$$

$$= \int \sum_{\{e \in E \ / \ o(e)=x\}} p(e) P_{t(e)}(S^{-1}(C_A) \cap \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}) \, d\mu(x).$$

Or $P_{t(e)}(S^{-1}(C_A) \cap \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}) = \chi_A(t(e))$, donc

$$P(S^{-1}(C_A)) = \int D(\chi_A)(x) \, d\mu(x).$$

Le résultat en découle. $\square$

1.8 Sur la récurrence/transience de presque toute orbite

Par exemple, posons pour tout x dans B,

$$f_x(n) = \inf_{\{A \subset \mathcal{R}(x) \,/\, \mathrm{Card}\, A = n \text{ et } x \in A\}} \mathrm{Card}\,(\partial A)$$

où $\partial A = \{e \in E \,/\, o(e) \in A, t(e) \notin A\}$. En posant $a_n = \int_B \frac{1}{f_x(n)^2}$, il découle du théorème de Fubini et des travaux de Thomassen [Tho] que si $\sum a_n$ converge, alors presque toute orbite est transiente.

Proposition 1.14 *Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ invariante finie, si presque toute orbite est un arbre, si $\mathcal{R}$ est moyennable (au sens de Zimmer, voir par exemple [CFW]), alors presque toute orbite est récurrente.*

Preuve. Par le théorème principal de [Ada], presque toute orbite possède alors $0, 1$ ou 2 bouts. Mais la marche aléatoire sur un arbre ayant un nombre fini de bouts est forcément récurrente (voir par exemple [BP], Proposition 6, page 563). □

Notons qu'un système d'isométries de $\mathbb{R}$, n'ayant pas de composante homogène (au sens de [GLP1]), a toutes ses orbites récurrentes. En effet, il découle des travaux de [Gab] que toute orbite d'un tel système d'isométries est quasi-isométrique à un arbre possédant un nombre fini de bouts.

Donnons un critère de transience des orbites, inspiré des travaux de L. Garnett [Gar] et E. Ghys [Ghy], dont découle le théorème A de l'introduction.

Théorème 1.15 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, p un noyau de transition, avec μ harmonique ergodique non complètement invariante. Alors presque toute orbite est transiente.*

Preuve. Une marche aléatoire sur un graphe est récurrente si et seulement si toute fonction superharmonique positive est constante (voir par exemple [Woe]). Il suffit donc de montrer que presque toute orbite possède une fonction harmonique positive non constante.

Pour tout x dans B et y dans l'orbite de x, posons

$$h_x(y) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d\overline{\nu}}{d\nu}(e_i) > 0$$

avec $(e_1, ..., e_n)$ un chemin d'arêtes de x à y (i.e. $o(e_1) = x, t(e_n) = y$ et $t(e_i) = o(e_{i+1})$). Par convention usuelle, $h_x(x) = 1$.

Lemme 1.16 *Pour presque tout x dans B, $h_x(y)$ ne dépend pas du chemin d'arêtes de x à y choisi.*

Preuve. La fonction $\Delta(x, y) = h_y(x)$ n'est pas autrechose que la dérivée de Radon-Nykodym de la relation d'équivalence mesurée sous-jacente, et ce lemme est précisément la propriété de cocycle de Δ (voir par exemple [Moo, page 192]). □

Montrons tout d'abord que h_x est harmonique en x pour presque tout x. Pour toute fonction f mesurable, on a

$$\int_B Dfd\mu = \int_E f\circ t\; d\nu = \int_E f\circ o\;\frac{d\bar\nu}{d\nu}d\nu = \int_B \sum_{\{e/o(e)=x\}} p(e)f\circ o(e)\;\frac{d\bar\nu}{d\nu}(e)\; d\mu =$$

$$= \int_B f(x) \sum_{\{e/o(e)=x\}} p(e)f\circ o(e)\; h_x(t(e))\; d\mu = \int_B f(x)Dh_x(x)d\mu.$$

Puisque μ est harmonique, on a donc $\int_B fd\mu = \int_B f(x)Dh_x(x)d\mu$ pour tout f, on a donc $Dh_x(x)=1=h_x(x)$ pour presque tout x, ce qui montre notre assertion.

Par dénombrabilité, pour presque tout x, on a $Dh_y(y)=h_y(y)=1$ pour tout y dans l'orbite de x. Notons que si $(e_1,\cdots,e_n)$ est un chemin d'arêtes de x à y, et si e est une arête d'origine y est d'extrémité z, alors $(e_1,\cdots,e_n,e)$ est un chemin d'arêtes de x à z et $h_x(z)=h_x(y)h_y(z)$ par le lemme précédent. Donc pour presque tout x et tout y dans l'orbite de x,

$$Dh_x(y) = \sum_{\{e/o(e)=y\}} p(e)h_x(t(e)) = \sum_{\{e/o(e)=y\}} p(e)h_y(t(e))h_x(y) = h_x(y)$$

et h_x est harmonique pour presque tout x.

Si l'ensemble des x tels que h_x est constante sur l'orbite de x est de mesure non nulle, alors par ergodicité, h_x est constante sur presque toute orbite, cette constante ne pouvant valoir que 1 car $h_x(x)=1$. Ceci signifie précisément que μ est complètement invariante. $\square$

1.9 Quelques remarques sur la théorie spectrale du laplacien

Soit (B,μ,E) une relation d'équivalence mesurée graphée, et p un noyau de transition. Nous supposerons que μ est <u>harmonique</u>.

Notons $\mathcal{M}(A,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions mesurables d'un espace borélien A à valeurs dans $\mathbb{C}$. Posons $d:\mathcal{M}(B,\mathbb{C})\to\mathcal{M}(E,\mathbb{C})$ et $\delta:\mathcal{M}(E,\mathbb{C})\to\mathcal{M}(B,\mathbb{C})$ les opérateurs linéaires définis par

$$df : e\mapsto f(t(e))-f(o(e))$$

et

$$\delta\phi : x\mapsto \sum_{\{e\in E\;/\;o(e)=x\}} p(e)\phi(e).$$

Notons que le laplacien est alors défini par $f\mapsto\Delta f=\delta df$.

Avec les identifications usuelles de fonctions modulo celles nulles en dehors d'un ensemble de mesure nulle, les espaces $\mathbb{L}^2(B,\mu)$ et $\mathbb{L}^2(E,\nu)$ sont des espaces de Hilbert complexes, dont nous noterons $\langle f,g\rangle$ et $\langle\phi,\psi\rangle$ les produits scalaires.

Proposition 1.17 *Les opérateurs $d:\mathbb{L}^2(B,\mu)\to\mathbb{L}^2(E,\nu)$, $\delta:\mathbb{L}^2(E,\nu)\to\mathbb{L}^2(B,\mu)$, $D,\Delta:\mathbb{L}^2(B,\mu)\to\mathbb{L}^2(B,\mu)$ sont linéaires continus, avec*

$$||df||_2\le 2||f||_2,\; ||\delta\phi||_2\le\sqrt{2}||\phi||_2,\; |||D|||\le\sqrt{2} \text{ et } |||\Delta|||\le 1+\sqrt{2}$$

et de plus

$$2\mathrm{Re}\,\langle -\Delta f, f\rangle = \langle df, df\rangle.$$

Si μ est complètement invariante, alors Δ est auto-adjoint, de spectre contenu dans $[-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ et ses valeurs propres dans $[0, 1+\sqrt{2}]$.

Preuve. Notons tout d'abord que puisque μ est harmonique, l'opérateur de diffusion D est $\mathbb{L}^1(\mu)$-extensible. Donc si f, g sont dans $\mathbb{L}^2(B,\mu)$, alors $f\overline{g}$ est dans $\mathbb{L}^1(\mu)$ et

$$\int f\overline{g}\, d\mu = \int D(f\overline{g})\, d\mu = \int \left(\sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e) f(t(e))\overline{g(t(e))} \right) d\mu(x).$$

La première inégalité découle alors de

$$||df||_2^2 = \int \left(\sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)|f(t(e)) - f(o(e))|^2 \right) d\mu(x)$$

$$\leq 2\int \left(\sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)[|f|^2(t(e)) + |f|^2(x)] \right) d\mu(x) = 4||f||_2^2.$$

Les autres inégalités découlent de

$$\left| \sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)\phi(e) \right|^2 \leq 2 \sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)^2|\phi(e)|^2 \leq 2 \sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)|\phi(e)|^2.$$

L'égalité vient de

$$\langle df, dg\rangle = \int \left(\sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)[f(t(e)) - f(o(e))]\overline{[g(t(e)) - g(o(e))]} \right) d\mu(x)$$

$$= \int (D(f\overline{g}) + f\overline{g} - fD\overline{g} - \overline{g}Df)\ d\mu(x) = \langle f, -\Delta g\rangle + \langle -\Delta f, g\rangle.$$

Si μ est complètement invariante, alors

$$\int_B fD\overline{g}\, d\mu = \int_B \sum_{\{e\in E\,/\,o(e)=x\}} p(e)f(x)\overline{g}(t(e))\, d\mu(x) = \int_E f\circ o\,\overline{g}\circ t\, d\nu = \int_E f\circ t\,\overline{g}\circ o\, d\nu$$

par changement de variable $e \mapsto \overline{e}$, donc

$$\int_B fD\overline{g}\, d\mu = \int_B Df\overline{g}\, d\mu$$

ce qui montre que D et Δ sont auto-adjoints. Voir Theorem 4 page 212 et Theorem 1 (i) page 319 de [Yos] pour l'affirmation finale. □

Il découle aussi de l'égalité $2\mathrm{Re}\,\langle -\Delta f, f\rangle = \langle df, df\rangle$ qu'une fonction harmonique dans $\mathbb{L}^2(B)$ est constante sur presque toute orbite, ce qui redémontre l'analogue $\mathbb{L}^2$ de la proposition 2.1.

Un petit calcul immédiat montre que si la relation d'équivalence mesurée graphée vient d'une action préservant la mesure d'un groupe muni d'une partie génératrice finie, alors l'opérateur de diffusion $D : \mathbb{L}^2(B,\mu) \to \mathbb{L}^2(B,\mu)$ est auto-adjoint borné, de norme inférieure à 1, donc de spectre contenu dans $[-1,1]$.

Proposition 1.18 *Soit $T : (B,\mu) \to (B,\mu)$ une bijection préservant la mesure de probabilité μ, supposée apériodique (i.e. dont les points périodiques forment un ensemble de mesure nulle). Alors le spectre de l'opérateur de diffusion $D : \mathbb{L}^2(B,\mu) \to \mathbb{L}^2(B,\mu)$ défini par*

$$Df : x \to \frac{1}{2}(f \circ T + f \circ (T^{-1}))$$

est égal à $[-1,+1]$.

Preuve. D'après le lemme de Kakutani-Rokhlin (voir par exemple [Pet] page 48), pour tout $\epsilon > 0$ et n entier non nul, il existe un borélien A de B tel que $A, T(A), \cdots, T^{n-1}(A)$ sont deux à deux disjoints et recouvrent B à un ensemble de mesure ϵ près. En particulier, $T^n(A)$ et A coïncident à un ensemble de mesure 2ϵ près.

Notons encore $T : \mathbb{L}^2(B,\mu) \to \mathbb{L}^2(B,\mu)$ l'opérateur unitaire défini par $Tf = f \circ T$, de sorte que $D = \frac{1}{2}(T + T^*)$ avec T^* l'adjoint de T.

Posons $\lambda = e^{\frac{2i\pi p}{n}}$ une racine n-ième de l'unité. Considérons $f = f_\epsilon$ la fonction valant λ^k sur $T^k(A)$ pour $k = 0, \cdots, n-1$. Notons que $|f|$ est borné par 1. Alors

$$||Tf - \lambda f||_2^2 \leq 4\epsilon + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T^k(A)} |Tf - \lambda f|^2 \, d\mu = 4\epsilon + \int_{T^{n-1}(A)} |Tf - \lambda f|^2 \, d\mu \leq 6\epsilon$$

car Tf vaut λ^{k+1} sur $T^k(A)$ si $k \neq n-1$. De plus, par symétrie,

$$||Df - (\mathrm{Re}\lambda)f||_2 \leq \frac{1}{2}(||Tf - \lambda f||_2 + ||T^*f - \lambda^{-1}f||_2) \leq \sqrt{6\epsilon}.$$

Si $D - (\mathrm{Re}\lambda)\,\mathrm{id}$ est inversible, d'inverse continu, alors puisque $Df_\epsilon - (\mathrm{Re}\lambda)f_\epsilon$ tend vers 0, on en déduit que f_ϵ tend vers 0, ce qui est impossible car $||f_\epsilon||_2$ tend vers 1. Le résultat en découle, car les parties réelles de racines de l'unité sont dense dans $[-1,1]$ et car le spectre est fermé. □

Proposition 1.19 *Soit μ la mesure de Lebesgue du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Considérons une famille finie de rotations $T_{\alpha_i} : (\mathbb{T}^n,\mu) \to (\mathbb{T}^n,\mu)$ d'angles $\alpha_i \in \mathbb{T}^n$, pour $i = 1 \cdots m$. Si les cœfficients des α_i sont rationnellement indépendants, alors le spectre de l'opérateur de diffusion $D : \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n,\mu) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n,\mu)$ défini par*

$$Df : x \to \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(f \circ T_{\alpha_i} + f \circ T_{-\alpha_i})$$

est égal à $[-1,+1]$.

Preuve. (voir [CV]) Montrons qu'en fait les valeurs propres de D sont denses dans $[-1,1]$. Comme les valeurs propres appartiennent au spectre, et que le spectre est fermé, cela montrera le résultat.

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Pour tout N dans $\mathbb{Z}^m$, posons $e_N(x) = e^{2i\pi\langle N,x\rangle}$, qui est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n, \mu)$. Il est facile de voir que e_N est vecteur propre de D associé à la valeur propre

$$\lambda_N = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \cos(2\pi\langle N, \alpha_i\rangle)$$

Comme les α_i sont rationnellement indépendants, les λ_N prennent des valeurs denses dans $[-1, 1]$. □

Remarque. Supposons que μ est une mesure de probabilité. Les constantes sont alors dans $\mathbb{L}^2(B, \mu)$, et le fait que μ soit harmonique signifie que les laplaciens sont orthogonaux aux constantes :

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(B, \mu), \quad \langle \Delta f, 1\rangle = 0.$$

En particulier, 0 est valeur propre du laplacien agissant sur $\mathbb{L}^2(B, \mu)$. Il découle de la proposition 1.17 que sa multiplicité est 1, les seuls vecteurs propres associés étant les constantes.

2 Théorèmes ergodiques et temps de visites statistiques

Dans cette section, nous remontrons les théorèmes ergodiques classiques pour les chaînes de Markov (de probabilité de transition discrète) de mesure initiale stationnaire finie (voir par exemple [Rev] chap. 4), en nous inspirant de l'approche directe de L. Garnett pour les feuilletages [Gar].

Théorème 2.1 *Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ harmonique, et f une fonction harmonique dans $\mathbb{L}^1(\mu)$, alors f est constante sur presque toute orbite.*

Preuve. Si $c \geq 0$, on pose $g_c = \min\{f, c\}$. Puisque D préserve les constantes et la positivité, on a $Dg_c \leq \min\{Df, c\} = g_c$. Comme $c \geq 0$, on a $|g_c| \leq |f|$, donc la fonction g_c est dans $\mathbb{L}^1(\mu)$. Puisque μ est harmonique, $\int g_c \, d\mu = \int Dg_c \, d\mu$. Comme $Dg_c \leq g_c$, on en déduit que $Dg_c = g_c$ presque partout. Puisque μ est quasi-invariante, il existe une partie Z_c de B saturée de mesure totale telle que pour tout x dans Z_c, $Dg_c(x) = g_c(x)$.

Pour tout x dans Z_c, si $f \geq c$ en l'un des points de $\mathcal{R}(x)$, alors, par le principe du maximum 1.8, la fonction $g_c \leq c$ atteignant son maximum en l'un des points de $\mathcal{R}(x)$ est constante sur $\mathcal{R}(x)$. Donc $f \geq c$ est une propriété saturée pour les orbites dans Z_c.

Si Z est l'intersection des Z_c pour tous les rationels c (en appliquant la même analyse en remplaçant f par $-f$), alors f est constante sur toute orbite dans Z. En effet, si f prend deux valeurs distinctes a, b sur une orbite, disons avec $0 < a < b$, on a une contradiction en considérant un rationel compris entre a et b. □

Si f est dans $\mathbb{L}^2(\mu)$, nous donnons une autre démonstration de ce fait dans la section 1.9. Comme cas particulier, si μ est harmonique finie, si f est harmonique et dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$, alors f est constante sur presque toute orbite.

Corollaire 2.2 *Une mesure harmonique finie μ est ergodique si et seulement si toute fonction harmonique dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ est constante presque partout.*

Preuve. Soit Z un ensemble saturé de mesure totale sur lequel f est constante sur chaque orbite. Pour tout c, l'ensemble des x dans Z tels que $f(x) \geq c$ est saturé, et mesurable, donc de mesure nulle ou totale. Si f n'est pas constante presque partout dans Z, il existe $a < b$ tels que $\{f \leq a\}$ et $\{f \geq b\}$ soient de mesure non nulle, d'où une contradiction. □

Une première version du théorème suivant est due à E. Hopf (1954), voir [Yos] page 389 et [Gar].

Théorème 2.3 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ harmonique finie. Pour tout f dans $\mathbb{L}^1(\mu)$, il existe $\tilde{f}$ dans $\mathbb{L}^1(\mu)$ tel que*

1. *pour μ-presque tout x dans B,*
$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} D^k f(x)$$
2. *$\int_B \tilde{f}\, d\mu = \int_B f\, d\mu$*
3. *$\tilde{f}$ est harmonique.*

De plus, si μ est ergodique, alors $\tilde{f}(x) = \int_B f\, d\mu$ pour μ-presque tout x dans B.

Preuve. Voir le théorème 6 de [Yos] page 388, dont les hypothèses sont satisfaites. La dernière assertion découle du théorème 2.1. □

Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ harmonique finie, si $D : \mathbb{L}^1(\mu) \to \mathbb{L}^1(\mu)$ est l'extension de l'opérateur de diffusion définie section 1.7, alors D est une contraction positive, i.e. Df est positive si f l'est, et

$$||Df||_1 = \int_B |Df|\, d\mu \leq \int_B D|f|\, d\mu = \int_B |f|\, d\mu = ||f||_1.$$

Le théorème 2.3 implique que D est *conservatif* (voir par exemple [Pet] page 125), i.e. pour toute fonction f dans $\mathbb{L}^1(\mu)$ positive ou nulle, la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} D^i(f)$ prend seulement les valeurs 0 ou $+\infty$ presque partout.

Rappelons que si μ est une mesure sur un espace borélien B, le dual topologique $\mathbb{L}^1(\mu)'$ de $\mathbb{L}^1(\mu)$ s'identifie avec l'espace des mesures absolument continues par rapport à μ, de dérivées de Radon-Nikodym dans $\mathbb{L}^\infty(\mu)$. Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée, l'ensemble des mesures de probabilité harmoniques dans la classe de μ forme un convexe $C_{\mathcal{R}}$ (éventuellement vide) de $\mathbb{L}^1(\mu)'$. Si l'opérateur de diffusion est $\mathbb{L}^1(\mu)$-extensible, alors ce convexe, étant l'ensemble des points fixes du dual de D, est fermé, donc faiblement compact.

Lemme 2.4 *Si u, v sont deux mesures de probabilité, avec u quasi-invariante par $\mathcal{R}$, alors $v = v_1 + v_2$ est somme de deux mesures de support deux parties saturées disjointes de B, avec v_1 singulière par rapport à u et v_2 absolument continue par rapport à u. De plus, si v est harmonique, alors v_1 et v_2 le sont aussi.*

Preuve. Par le théorème de décomposition de Lebesgue (voir [Rud]), il existe une partie A de B mesurable de u-mesure nulle, telle que la restriction de v au complémentaire de A est absolument continue par rapport à u. Notons A' le saturé de A par $\mathcal{R}$, qui est encore de u-mesure nulle. Notons v_1 la restriction de v à A' et v_2 la restriction de v au complémentaire de A'.

On a bien $v = v_1 + v_2$, et v_1 est singulière par rapport à u. Montrons que v_2 est absolument continue par rapport à u. Soit C un borélien de B de u-mesure nulle. On sait que $v(C \cap (B - A)) = 0$ par définition de A. Or $C \cap (B - A')$ est contenu dans $C \cap (B - A)$. On a donc $v(C \cap (B - A')) = 0$, ce qui montre le résultat.

De plus, si χ_A est la fonction caractéristique d'un borélien saturé A, alors

$$\Delta(\chi_A f) = \chi_A \Delta f.$$

Ceci implique que v_1 et v_2 sont harmoniques si v l'est. $\square$

Proposition 2.5 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, et m une mesure de probabilité dans la classe de μ, qui est harmonique. Alors m est ergodique si et seulement si m est un point extrémal du convexe $C_{\mathcal{R}}$ des mesures harmoniques de probabilités dans la classe de μ.*

Preuve. Supposons m dans $C_{\mathcal{R}}$ non ergodique. Alors B se décompose en deux boréliens saturés de m-mesure non nulle. Comme la restriction d'une mesure harmonique à un borélien saturé est encore harmonique, m est combinaison barycentrique de deux éléments de $C_{\mathcal{R}}$, donc m n'est pas extrémal.

Réciproquement, supposons m ergodique et, par l'absurde, $m = tu + (1-t)v$ avec u, v dans $C_{\mathcal{R}}$ et $t \in]0, 1[$. Alors par le lemme 2.4, u est la somme de deux mesures harmoniques u_1, u_2, de support deux parties saturées disjointes de B, avec u_1 singulière par rapport à v et u_2 absolument continue par rapport à v. Puisque $t \neq 1$, l'ergodicité de m entraîne que u_1 est nulle. Donc u est absolument continue par rapport à v. De même, on montre que v est absolument continue par rapport à u. Donc m et u ont les mêmes ensembles de mesure nulle. Par le théorème 2.3, $\tilde{f}(x) = \int_B f\, d\mu$ pour m presque tout x par ergodicité de m et $\int_B \tilde{f}\, d\mu = \int_B f\, d\mu$ par harmonicité de μ. Donc les mesures m et u sont égales, ce qui donne une contradiction. $\square$

En particulier, dès qu'il existe une mesure harmonique, il existe une mesure harmonique ergodique.

Théorème 2.6 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ harmonique finie. Pour tout f dans $\mathbb{L}^1(\mu)$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(Z_n)$$

existe pour μ-presque tout x dans B et P-presque toute marche aléatoire Z dans $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ partant de x. Cette limite est constante sur les orbites et vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} D^k f(x)$.

Preuve. Voir [Jac]. $\square$

Corollaire 2.7 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ harmonique ergodique. Alors le nombre moyen de fois que la marche aléatoire passe dans une partie mesurable A de B est $\mu(A)$.* $\square$

3 Sur les bouts des orbites

Cette section est inspirée des travaux de E. Ghys sur les feuilletages [Ghy]. L'*espace des bouts* d'un espace topologique localement compact Y est la limite projective, sur les parties compactes K de Y, (pour l'inclusion), de l'espace fini discret des composantes connexes du complémentaire de K de Y. C'est un espace topologique métrisable compact totalement discontinu. Rappelons le *théorème de Hopf* qui dit que l'espace des bouts d'un groupe (i.e. d'un de ses graphes de Cayley quelconque) est vide, réduit à un ou deux points, ou un ensemble de Cantor. Le théorème suivant dit que cette propriété reste génériquement vraie pour les graphes de Cayley des orbites.

Remarquons tout d'abord que l'équivalence de Kakutani préserve les nombres de bouts des orbites (voir par exemple [Gab]).

Théorème 3.1 *Si (B, μ, E) est une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ finie et harmonique pour un noyau de transition réversible, de système de conductances majoré, alors pour μ-presque tout x dans X, l'orbite de x possède* $0, 1, 2$ *ou un ensemble de Cantor de bouts.*

Remarque. a) Bien sûr, si μ est de plus ergodique, alors le nombre de bouts des orbites est presque partout le même.

b) Notons que ce théorème redémontre le théorème de Hopf ! En effet, par l'exemple de la sous-section 1.2, tout groupe de type fini agit sur un espace mesuré en préservant la mesure, de sorte que (presque toute) orbite possède pour graphe de Cayley le graphe de Cayley du groupe.

c) Plus généralement, si la relation d'équivalence mesurée graphée vient d'une action d'un groupe G muni d'une partie génératrice finie, avec le noyau de transition simple, alors le théorème ci-dessus dit les quotients des graphes de Cayley par les stabilisateurs de points ont presque tous $0, 1, 2$ ou un ensemble de Cantor de bouts. Notons par contre que si G est un groupe de type fini, H un sous-groupe, et X un graphe de Cayley de G, alors le nombre de bouts de X/H peut prendre en général n'importe quelle valeur (finie) (voir [Sco] page 186) : si S est une surface compacte sans bord, et si S' est une sous-surface compacte à bord, telle que $\pi_1 S'$ s'injecte dans $\pi_1 S$, alors le nombre de bouts du quotient du revêtement universel de S par $\pi_1 S'$ est égal au nombre de composantes connexes du bord de S', donc peut prendre toutes les valeurs (finies).

d) S. Adams [Ada] a montré que si $(B, \mu, \mathcal{R})$ est moyennable, si μ est invariante, si le graphe de presque toute orbite est un arbre, alors l'orbite de μ-presque tout point possède $0, 1$ ou 2 bouts. Dans le cadre des systèmes d'isométries de $\mathbb{R}$, D. Gaboriau [Gab] a montré que sauf au plus un nombre fini d'entre elles, les orbites ont $0, 1$ ou 2 bouts.

Preuve. L'étape principale de la preuve est, comme dans [Ghy], la suivante. Elle doit être pensée comme une propriété forte de récurrence des orbites : tout voisinage de bout de presque toute orbite est récurrent.

Proposition 3.2 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ finie et harmonique pour un noyau de transition p réversible, de système de conductances majoré. Soit A un borélien de B. Alors pour μ-presque tout x dans A, ou bien A ne rencontre pas l'orbite de x, ou bien A rencontre tout voisinage de bout de l'orbite de x.*

Comme me l'a fait remarquer D. Gaboriau, l'analogue topologique de ce résultat est évident pour un système d'isométries de $\mathbb{R}$: tout voisinage d'un bout d'une orbite régulière est dense dans sa composante minimale (avec la terminologie de [GLP1]). Nous pouvons même remplacer "μ-presque tout" par "sauf pour un nombre fini d'orbites".

Preuve. Il s'agit d'une adaptation de la preuve de la proposition analogue (dite "fondamentale") de [Ghy]. Nous pouvons supposer que A est de mesure non nulle.

Pour Z dans $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ et d dans $\mathbb{N}-\{0\}$, posons $R_{d,A}(Z)=\inf\{k\in\mathbb{N}\,/\,k\geq d,\ Z_k\in A\}$ le premier instant de passage dans A après l'instant d. (Celui-ci peut valoir $+\infty$.)

Lemme 3.3 *Pour μ-presque tout x dans A, la variable aléatoire $R_{d,A}$ de $(\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}},P_x)$ dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ est d'espérance mathématique finie.*

Preuve. Rappelons le lemme de récurrence suivant, dû à Kac (voir [Pet] page 46, en utilisant le théorème de décomposition ergodique (voir [Man] page 127) et le fait que X est standard). Si F est une transformation mesurable d'un espace de probabilité $(X,\mathcal{A},m)$ préservant m, si U est un élément de $\mathcal{A}$, si d est dans $\mathbb{N}-\{0\}$, si $T_{d,U}:U\to\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ est définie par $T_{d,U}(x)=\inf\{k\in\mathbb{N}\,/\,k\geq d,\ F^k(x)\in U\}$, alors

$$\int_U T_{d,U}\,dm<+\infty.$$

Appliquons ceci à $X=\mathcal{R}^{\mathbb{N}}, F=S$ le décalage, $m=P$ et $U=\{Z\in\mathcal{R}^{\mathbb{N}}\,/\,Z_0\in A\}$. Il vient, d'après la proposition 1.13,

$$\int_U T_{d,U}\,dm=\int_A(\int_{\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}}R_{d,A}(Z)\,dP_x(Z))\,d\mu(x)<+\infty.$$

Le résultat découle alors du théorème de Fubini. □

Pour tout x_0 dans B, pour toute partie finie K de l'orbite de x_0, pour tout x dans une composante connexe non bornée C de l'orbite de x_0 privée de K, pour tout Z dans $\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}$, posons

$$r_K(Z)=\inf\{n\in\mathbb{N}\,/\,Z_n\in K\}\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\},$$

qui est le premier temps de passage dans K de la marche aléatoire issue de x. Notons que $r_K(Z)\geq 1$ par hypothèse.

Lemme 3.4 *La variable aléatoire $r_K:(\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}},P_x)\to\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ est d'espérance mathématique infinie pour tout x dans C.*

Preuve. Considérons la fonction

$$f(x)=\int_{\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}}r_K\,dP_x\ \in[1,+\infty],$$

espérance du temps de premier passage dans K.

Notons $V(K)$ l'ensemble des points de l'orbite de x_0 à distance inférieure ou égale à 1 de K. Il est bien connu que le laplacien de f vaut -1 sur $\mathcal{R}(x_0)-V(K)$. En effet,

$$f(x)=\sum_{y\in\mathcal{R}(x)}\int_{\{Z\in\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}\,/\,Z_1=y\}}r_K(Z)\,dP_x(Z)$$

$$= \sum_{\{e\in E \,/\, o(e)=x\}} \int_{Z'\in\mathcal{R}(t(e))^{\mathbb{N}}} (r_K(Z')+1)p(e)\,dP_{t(e)}(Z') = Df(x)+1.$$

En particulier, f est sous-harmonique sur toute composante connexe C de $\mathcal{R}(x_0) - V(K)$, donc finie sur tout C si finie en un point de C par le principe du maximum.

Considérons C une composante connexe de $\mathcal{R}(x_0) - V(K)$, et supposons que f soit finie sur C. Il s'agit de montrer que C est finie.

Montrons tout d'abord que la restriction de f à C est propre. Par récurrence sur $n \geq 1$, montrons que si la distance de x à K est supérieure ou égale à n, alors $f(x) \geq n$.

Nous avons vu que $f(x) \geq 1$ pour tout x dans C. Supposons alors x à distance de K supérieure ou égale à $n > 1$. Rappelons que

$$f(x) = 1 + Df(x) = 1 + \sum_{\{e\in E \,/\, o(e)=x\}} p(e)f(t(e))$$

et que $t(e)$ est à distance de K supérieure ou égale à $n-1$ si $o(e) = x$. On en déduit que

$$f(x) \geq 1 + \sum_{\{e\in E \,/\, o(e)=x\}} p(e)(n-1) = n\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Notons $V_n(K)$ l'ensemble fini des points x de C tels que $f(x) \leq n$. Supposons n assez grand pour que tous les points de C (en nombre fini) à distance inférieure ou égale à 3 de K soient dans $V_n(K)$.

Par hypothèse, le système de conductances est à valeurs dans $]0, M]$, et rappelons que la valence des sommets des orbites est majorée par N.

Appliquons le lemme 1.10 à l'orbite de x_0, en notant que $\pi(x) \geq \frac{1}{NM}$. Il vient donc

$$\text{Card } V_n(K) \leq NM \sum_{x\in V_n(K)} \pi(x) = NM \sum_{x\in V_n(K)} \pi(x)(-\Delta f(x)) = NM \sum_{e\in\partial V_n(K)} -df(e).$$

Comme $\partial V_n(K) = F \cup E_n$, avec F les arêtes d'origine dans C et d'extrémité dans $V(K)$ et E_n des arêtes d'origine x et d'extrémité y avec $f(y) > f(x)$, il vient donc

$$\text{Card } V_n(K) \leq -NM \sum_{e\in F} df(e).$$

Ceci est valable pour tout n suffisamment grand et C est la réunion croissante des $V_n(K)$, donc le cardinal de C est bien borné. □

La fin de la preuve de la proposition 3.2 est la suivante.

Soit A un borélien de B et x un point de A. Soit U une composante connexe infinie du complémentaire d'une partie finie de l'orbite de x. Supposons que U ne rencontre pas A.

Notons K l'ensemble des points de U joints par au moins une arête à $\mathcal{R}(x)-U$. Notons $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ la distance de x à U, atteinte en un point de K. Posons

$$J = \{Z \in \mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}} \,/\, Z_d \in U\}$$

l'ensemble des marches aléatoires issues de x qui sont dans U à l'instant d.

Notons que $P_x(J)$ est non nulle, par le choix de d. Pour Z dans J,

$$R_{d,A}(Z) = \inf\{k \in \mathbb{N} / \, k \geq d, \; Z_k \in A\} \geq d + \inf\{k \in \mathbb{N} / \, Z_{k+d} \in K\}.$$

Notons ν_x la mesure de probabilité sur $\mathcal{R}(x)$, image de P_x par l'application $Z \mapsto Z(d)$. On a $\nu_x(U) = P_x(J) > 0$. Par intégration,

$$\int_{\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}} R_{d,A} \, dP_x \geq \int_J R_{d,A} \, dP_x \geq \int_U \left(\int_J (d + r_K) \, dP_y \right) \, d\nu_x(y).$$

D'après le lemme 3.4, pour y dans V à distance au moins 2 de K, on a

$$\int_J r_K \, dP_y = \infty.$$

Donc

$$\int_{\mathcal{R}(x)^{\mathbb{N}}} R_{d,A} \, dP_x = +\infty.$$

D'après le lemme 3.3, ceci n'est possible que si x appartient à un ensemble de μ-mesure nulle.

Donc pour μ-presque tout x dans A, l'intersection $\mathcal{R}(x) \cap A$ rencontre tout voisinage de bout de $\mathcal{R}(x)$. Pour chaque entier n, notons $A(n)$ le borélien de B des points à distance (dans leurs orbites) inférieure ou égale à n de B. Il est clair que si $\mathcal{R}(x) \cap A(n)$ rencontre tout voisinage de bout de $\mathcal{R}(x)$, il en est de même de $\mathcal{R}(x) \cap A$. En appliquant ce qui précède en remplaçant A par $A(n)$, on obtient que pour μ-presque tout x dans $A(n)$, l'intersection $\mathcal{R}(x) \cap A$ rencontre tout voisinage de bout de $\mathcal{R}(x)$. Comme la réunion des $A(n)$ est l'ensemble des x de B tels que l'orbite de x rencontre A, on en déduit que pour μ-presque tout point x du saturé de A, l'intersection $\mathcal{R}(x) \cap A$ rencontre tout voisinage de bout de $\mathcal{R}(x)$. □

Le reste de la preuve du théorème est mot-à-mot celle de [Ghy] pages 29-30-31. Nous la reproduisons par souci de complétude.

Soit Π un graphe connexe localement fini. Fixons un entier k. Soit $\Sigma \subset \Pi$ un sous-graphe connexe ayant au plus k sommets. Soit $\omega(\Pi, \Sigma)$ la réunion des composantes connexes de $\Pi - \Sigma$ dont l'adhérence dans π possède exactement un bout. Soit $\omega_k(\Pi, \Sigma)$ l'ensemble des points de $\omega(\Pi, \Sigma)$ à distance supérieure ou égale à k de Σ. Notons $\omega_k(\Pi)$ la réunion des $\omega_k(\Pi, \Sigma)$ lorsque Σ décrit tous les sous-graphes connexes ayant au plus k sommets. Il faut y penser comme au "voisinage de l'ensemble des bouts isolés de de base de cardinal inférieur à k". Enfin, on note $\mathcal{B}_k(\Pi)$ le complémentaire de $\omega_k(\Pi)$ dans Π.

Lemme 3.5 *(E. Ghys [Ghy]) Soit Π un graphe connexe localement fini.*

1. *si l'ensemble des bouts de Π n'est ni vide ni un ensemble de Cantor, alors $\mathcal{B}_k(\Pi)$ est différent de Π et ne rencontre pas tout voisinage de bout, si k est assez grand.*

2. *si Π possède au moins trois bouts, alors $\mathcal{B}_k(\Pi)$ est non vide pour k assez grand.*

Preuve. (E. Ghys [Ghy]) (1) L'ensemble des bouts de Π est un espace métrisable compact totalement discontinu. Un tel espace qui n'est ni vide ni un ensemble de Cantor, possède au moins un point isolé. Il existe donc un sous-graphe fini connexe Σ dans Π tel que l'adhérence de l'une des composantes connexes de $\Pi - \Sigma$ possède exactement un bout. Il en résulte que $\omega_k(\Pi, \Sigma)$ est non vide, donc que $\mathcal{B}_k(\Pi)$ est différent de Π dès que k est supérieur au nombre de sommets de Σ. Bien évidemment, $\mathcal{B}_k(\Pi)$ ne rencontre pas un voisinage suffisamment petit d'un bout isolé.

(2) Par hypothèse, il existe un sous-graphe connexe fini K de Π tel que $\Pi - K$ ait au moins trois composantes connexes infinies. Montrons que si k est strictement supérieur au diamètre de K, alors K est contenu dans $\mathcal{B}_k(\Pi)$, ce qui implique le résultat, car K est non vide.

Soient $V_1, V_2, \cdots, V_n$ ($n \geq 3$) les composantes connexes infinies de $\Pi - K$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\Sigma \subset \Pi$ connexe, possédant moins de k sommets, tel que $\omega_k(\Pi, \Sigma)$ contienne un point x de K. Par définition, il existe une composante connexe X de $\Pi - \Sigma$, dont l'adhérence a un bout, telle que x soit d'une part dans X, et d'autre part, à distance supérieure à k de Σ. Puisque k est supposé strictement supérieur au diamètre de K, on en déduit que K est tout entier contenu dans X, et que Σ et K sont disjoints. Puisque Π possède au moins trois bouts, Σ ne peut être contenu dans une composante finie de $\Pi - K$. Ainsi Σ est contenu dans l'un des V_i, disons V_1. Notons que, par connexité de K, la réunion $V_2 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_n \cup K$ est un connexe qui ne rencontre pas Σ, mais contient le point x de X. Par conséquent, cette union est contenue dans X. Mais ceci est la contradiction cherchée, puisque ceci implique que $X - K$ possède au moins deux composantes connexes infinies (V_2 et V_3), et donc que l'adhérence de X possède au moins deux bouts, alors qu'elle n'en possède qu'un. $\square$

Lemme 3.6 *(E. Ghys [Ghy]) Pour tout entier k, la réunion $\mathcal{B}_k$ des $\mathcal{B}_k(\mathcal{R}(x))$ où x parcourt B est un borélien de B.*

Preuve. Voir [Ghy] section 6. $\square$

D'après le lemme 3.5, si, pour tout k, la partie $\mathcal{B}_k(\mathcal{R}(x))$ de $\mathcal{R}(x)$ est vide ou ne rencontre pas tout voisinage de bout de $\mathcal{R}(x)$, alors $\mathcal{R}(x)$ possède $0, 1$ ou 2 bouts ou un ensemble de Cantor de bouts.

En appliquant la proposition 3.2 au borélien $\mathcal{B}_k$ défini dans le lemme 3.6 ci-dessus, on en déduit que pour μ-presque tout x dans B, la partie $\mathcal{B}_k(\mathcal{R}(x))$ de $\mathcal{R}(x)$ est vide ou ne rencontre pas tout voisinage de bout de $\mathcal{R}(x)$. Pour μ-presque tout x, cette propriété est vérifiée pour tout k. Le théorème en découle. $\square$

De même que le théorème de Stallings [Sta] précise la structure du groupe dans le cas de $0, 2$ ou une infinité de bouts (le groupe est respectivement fini, virtuellement infini cyclique, ou se décomposant (en produit libre ou amalgamé) au dessus d'un groupe fini – sauf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ –), nous avons une description assez précise (modulo équivalence) des composantes ergodiques dont les orbites ont $0, 2$ ou une infinité de bouts. La situation typique avec deux bouts est la suivante. Soient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, X_0), (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, X_1)$ deux actions (quasi-invariantes) presques libres (sur des espaces de probabilités). A la réunion disjointe de ces deux actions, on rajoute une bijection bimesurable $\varphi : X_1 \to X_2$ préservant les ensembles de mesures nulles ainsi que son inverse, telle qu'il n'existe presque pas de cycle de longueur 4 dans les nouvelles orbites, avec sommets x_0, g_0x_0, x_1, g_1x_1 avec $x_i \in X_i$ et $g_i \in G_i$ et $\varphi(x_0) = x_1, \varphi(g_0x_0) = g_1x_1$.

La définition suivante doit être considérée comme l'analogue mesurable des extension HNN et produit amalgamé de groupes.

Définition 3.7 *Soient $R = (B, \mu, E)$ et $R' = (B, \mu, E')$ deux relations d'équivalence mesurées graphées. Nous dirons que R' est une extension HNN de R s'il existe deux boréliens disjoints X^+, X^- dans B et $\phi : X^+ \to X^-$ une bijection mesurable quasi-invariante telle que E' est la réunion disjointe de E et de l'ensemble des $(x, \phi^{\pm 1}(x))$ avec x dans $X^{\pm 1}$ (avec les applications ${}^{-'}, o', t'$ évidentes), tels que*

1. *la mesure de X^+ pour μ est strictement positive,*
2. *Toute arête dans $E' - E$ disconnecte l'orbite pour $\mathcal{R}'$ à laquelle elle appartient,*
3. *pour μ-presque tout x de $X^{\pm 1}$, l'orbite de x par $\mathcal{R}_{|X^{\pm 1}}$ n'est pas réduite à x.*

Remarquons que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, $o'(E') \subset o(E)$ et $t'(E') \subset t(E)$. La condition (1) équivaut à $\mu(X^-) > 0$. La dernière condition est destinée à éliminer des cas triviaux, comme le suivant : à la réunion disjointe d'un espace mesuré (B', μ') où toutes les orbites sont réduites à un point, et d'un pseudogroupe mesuré $(B, \mu, \{\varphi_i\}_{i=1\cdots n})$, rajoutons un isomorphisme mesurable φ_{n+1} de B' sur un borélien de mesure non nulle de B. Le pseudogroupe mesuré obtenu vérifie les conditions (1) et (2), mais pas la dernière.

De manière analogue aux sommes amalgamées de groupes ($(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'a que deux bouts, mais $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en a une infinité), nous dirons qu'une extension HNN est *non triviale* si la condition suivante est aussi satisfaite :

(4) pour $\epsilon = +$ ou bien $\epsilon = -$, pour μ-presque tout x de X^ϵ, l'orbite de x par $\mathcal{R}_{|X^\epsilon}$ contient au moins trois points.

Théorème 3.8 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée, avec μ finie et harmonique pour un noyau de transition p réversible, de système de conductances majoré. Un ensemble de mesure non nulle d'orbites possède au moins deux (respectivement trois) bouts si et seulement si (B, μ, E) est Kakutani équivalent à une extension HNN (respectivement extension HNN non triviale).*

De plus, nous avons une description précise des relations d'équivalence mesurées graphées (B, μ, E) ergodiques dont presque toute orbite possède exactement deux bouts : c'est le cas si et seulement si (B, μ, E) est Kakutani équivalent à une extension HNN d'une relation d'équivalence mesurée graphée (B', μ', E') dont les orbites sont presque toutes finies, et rencontrent presque toutes les parties X^+ et X^- en exactement deux points.

Preuve. Supposons tout d'abord que (B, μ, E) est Kakutani équivalent à une extension HNN (respectivement extension HNN non triviale) (B', μ', E'). Par invariance du nombre de bouts, il suffit de montrer que (B', μ', E') possède un ensemble de mesure non nulle d'orbites à au moins deux (respectivement trois) bouts.

Appelons nouvelle arête toute arête de $E' - E$. Par hypothèse, pour presque tout x dans X^+, le graphe $\mathcal{R}'(x)$ contient au moins une nouvelle arête, et chacune d'entre elles disconnecte $\mathcal{R}'(x)$ si on l'enlève. Les sommets d'une composante connexe du complémentaire d'une nouvelle arête forment une orbite de $\mathcal{R}$. Si l'on contracte dans $\mathcal{R}'(x)$ chacune de ces composantes connexes en un point, on obtient donc un arbre $Ar(x)$. Par l'hypothèse (3) (respectivement (4)), pour presque tout x dans X^+, la valence de tous les sommets (respectivement tous les sommets à distance paire de x) de $Ar(x)$ est au moins 2 (respectivement 3). Comme un bout d'un arbre est un chemin infini sans aller retour partant d'un point base, on en déduit donc que pour presque tout x dans X^+, l'arbre $Ar(x)$ possède au moins deux (respect'ensemble des points x tels que le complémentaire de $\Gamma \cdot x$ dans $\mathcal{R}(x)$ n'ait pas de composantes connexes finies et ait au moins deux (respectivement trois) bouts. Le résultat s'en déduit, car le nombre de bouts de $Ar(x)$ minore celui de $\mathcal{R}'(x)$.

Pour la réciproque, comme dans [Ghy], le lemme clef est le suivant.

Lemme 3.9 *Supposons que (B, μ, E) soit une relation d'équivalence mesurée graphée, dont presque toute orbite possède au moins deux (respectivement trois) bouts. Alors il existe un borélien A dans B, un graphe fini connexe pointé $\mathcal{G}$ et une injection mesurable $\pi : A \times \mathcal{G}^{(0)} \to B$ envoyant $(x, *)$ sur x, tels que*

- $\mu(A) > 0$,
- *pour tout x dans A, l'application π induit un isomorphisme de $\{x\} \times \mathcal{G}$ sur un sous-graphe $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{R}(x)$,*
- *pour tout x dans A, l'espace $\mathcal{R}(x) - \mathcal{G}_x$ n'a pas de composnate connexe finie et possède au moins deux (respectivement trois) composantes connexes non bornées,*
- *pour tout x, y dans A tels que $x\mathcal{R}y$, la distance dans $\mathcal{R}(x)$ entre $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{G}_y$ est au moins 2.*

Preuve. D'après [FM, Theorem 1, page 291], il existe un groupe G dénombrable d'automorphismes de B, quasi-préservant la mesure μ, dont les orbites sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. Dans le graphe $\mathcal{R}(x)$, étiquetons chaque arête d'un sommet y à un sommet z par un élément de G qui envoie y sur z. Il peut y avoir une infinité d'éléments de G envoyant un point donné sur un autre. Pour fixer des choix mesurables, numérotons $g_0 = e, g_1, g_2, \cdots$ les éléments de G. Etiquetons alors toutes les arêtes (en nombre fini) allant de x vers y par g_i où i est le plus petit indice tel que $g_i x = y$. L'application $p : E \to G$ ainsi définie est mesurable. En effet, posons $\Omega_0 = B$ et pour $i \geq 1$

$$\Omega_i = \{x \in B \,/\, \forall j < i,\ g_i x \neq g_j x\}.$$

Les Ω_i sont des boréliens. De plus,

$$p^{-1}(g_i) = \{e \in E \,/\, t(e) = g_i o(e) \ \text{ et } \ o(e) \in \Omega_i\}$$

ce qui montre la mesurabilité de p. Notons que p n'est pas forcément invariante par $e \mapsto \overline{e}$, mais cela n'a pas d'importance.

Soit Γ un graphe fini connexe, muni d'un point base $*$, et dont chaque arête porte pour étiquette un élément de G.

Notons B_Γ la partie de B formé des points x ayant les propriétés suivantes. Pour tout chemin de Γ issu du point base, la suite des étiquettes $(g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_k})$ est telle qu'il existe un chemin issu de x dans le graphe $\mathcal{R}(x)$ dont la suite des étiquettes est la même. Notons que ce chemin dans $\mathcal{R}(x)$ est alors unique. De plus, pour tous chemins c, c' de Γ issus du point base, de suites des étiquettes respectivement $(g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_k})$ et $(g_{i'_1}, g_{i'_2}, \cdots, g_{i'_{k'}})$, nous demandons que c, c' aient même extrémité si et seulement si $g_{i_k} \cdots g_{i_2} g_{i_1} x = g_{i'_{k'}} \cdots g_{i'_2} g_{i'_1} x$.

Soit x dans B_Γ. Pour tout sommet γ de Γ, on peut naturellement définir un point $\gamma \cdot x$ de B, de la façon suivante. On joint $*$ à γ par un chemin étiqueté $(g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_k})$ et on pose $\gamma \cdot x = g_{i_k} \cdots g_{i_2} g_{i_1} x$. La définition de B_Γ montre que $\gamma \cdot x$ est bien défini. Nous noterons $\Gamma \cdot x$ l'ensemble des $\gamma \cdot x$ où γ parcourt les sommets de Γ.

Soit B'_Γ l'ensemble des points x tels que le complémentaire de $\Gamma \cdot x$ dans $\mathcal{R}(x)$ n'ait pas de composantes connexes finies et ait au moins deux (respectivement trois) composantes connexes. C'est un borélien.

Puisqu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de graphes finis étiquetés par G, on en déduit qu'il existe Γ_0 tel que B'_{Γ_0} soit de mesure non nulle. Le problème est maintenant de trouver des x en mesure non nulle tels que les $\mathcal{G}_x = \Gamma_0 \cdot x$ soient deux à deux disjoints.

Puisque B est standard, nous pouvons supposer que B est un espace topologique métrisable localement compact, σ-compact. Notons $\Gamma_0 \cdot B'_{\Gamma_0}$ la réunion des $\Gamma_0 \cdot x$ pour x dans B'_{Γ_0}. Par le théorème de Lusin, nous pouvons supposer que les produits d'au plus diam Γ_0 étiquettes de Γ_0 sont continues sur un ensemble A_0 de mesure arbitrairement gros dans $\Gamma_0 \cdot B'_{\Gamma_0}$. Prenons x un point de densité dans cet ensemble, et U un petit voisinage de x, de sorte que $\Gamma \cdot y$ est défini pour tout y dans $A = U \cap A_0$. Notons que A est de mesure non nulle. Si U est assez petit, l'application naturelle $A \times \Gamma_0 \to \Gamma_0 \cdot A$ est injective et la dernière condition du lemme est vérifiée. $\square$

Maintenant, quitte à se restreindre au borélien saturé des points de B dont l'orbite possède au moins 2 (respectivement 3) bouts, nous pouvons supposer que les hypothèses du lemme 3.9 sont satisfaites. Avec les notations de ce lemme, notons (B_0, μ_0) l'espace mesuré, réunion disjointe de (B, μ) privé des sommets intérieurs des $\mathcal{G}_x$, et de $(A \times \mathcal{G}^{(0)}, \mu_{|A} \times m)$, où m est la mesure de comptage sur les sommets $\mathcal{G}^{(0)}$ de $\mathcal{G}$. Notons (B_0, μ_0, E_0) la relation d'équivalence mesurée graphée dont les orbites sont les suivantes. Pour $(x, \gamma) \in A \times \mathcal{G}^{(0)}$, posons $\mathcal{R}_0(x, \gamma) = x \times \mathcal{G}$. Si $x \in B - \cup_{u \in A} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_u$, alors $\mathcal{R}_0(x)$ est l'adhérence de la composante connexe de $\mathcal{R}(x) - \bigcup_{y \in \mathcal{R}(x) \cap A} \mathcal{G}_y$ contenant x. Notons $\widehat{\mathcal{G}}$ le graphe quotient de $\mathcal{G}$, où l'on identifie deux sommets s'ils sont dans le bord de la même composante connexe du complémentaire de $\overset{\circ}{\mathcal{G}}_x$ (ce qui ne dépend pas de x, quitte à réduire A). De même, dans (B, μ) privé des sommets intérieurs de l'un des $\mathcal{G}_x$, identifions deux points s'ils sont dans le bord de la même composante connexe (infinie) du complémentaire de $\overset{\circ}{\mathcal{G}}_x$. Nous obtenons ainsi une relation d'équivalence mesurée $\sim$ sur (B_0, μ_0), dont les classes sont finies. Donc le quotient (B', μ') est encore standard, et E_0 induit par passage au quotient une relation d'équivalence mesurée graphée (B', μ', E'), dont on note $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence.

Notons $\partial \widehat{\mathcal{G}}^{(0)}$ le complémentaire dans l'ensemble des sommets de $\widehat{\mathcal{G}}$ des points qui correspondent à $\overset{\circ}{\mathcal{G}}_x$. Posons $\phi : A \times \partial \widehat{\mathcal{G}}^{(0)} \to B'$ l'isomorphisme sur son image induit par l'application π donnée par le lemme 3.9.

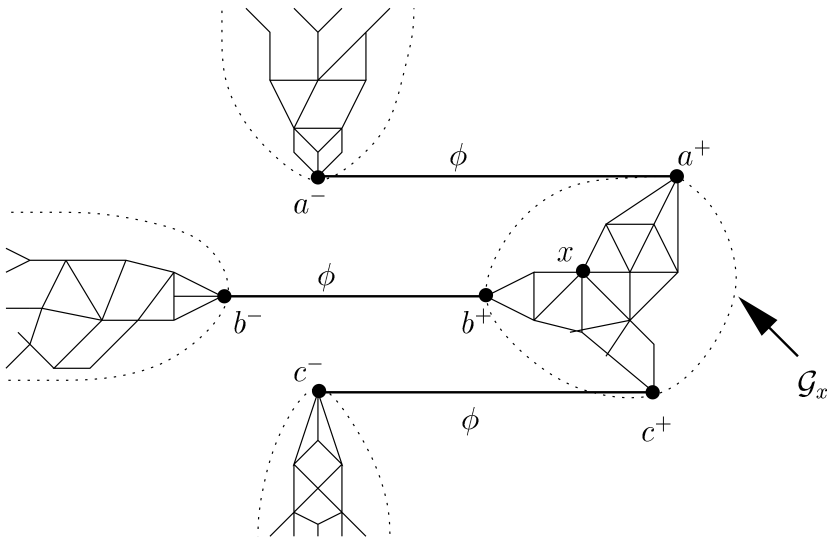

Figure 1 : Extension HNN de $\mathcal{R}'$ par ϕ.

Il est alors facile de vérifier que (B, μ, E) est Kakutani équivalent à l'extension HNN de (B', μ', E') par ϕ (voir figure 1). En effet, les diamètres des écrasements sont uniformément bornés. Chaque arête étiquetée $\phi^{\pm}$ sépare son orbite par construction. Chaque orbite pour la restriction de $\mathcal{R}'$ à $A \times \widehat{\mathcal{G}}^{(0)}$ contient au moins 2 (respectivement 3) points, par la troisième propriété du lemme 3.9. Par harmonicité et la proposition 3.2, chaque orbite pour la restriction de $\mathcal{R}'$ à $\phi(A \times \widehat{\mathcal{G}}^{(0)})$ contient au moins deux points. $\square$

Corollaire 3.10 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée harmonique ergodique pour un noyau de transition p réversible, de système de conductances majoré. Alors (B, μ, E) est Kakutani équivalent à une extension HNN non triviale si et seulement si presque toute orbite possède un Cantor de bouts.* $\square$

Concernant les propriétés de croissance des orbites, nous avons le résultat suivant, généralisant [Lev2], Proposition 3.

Théorème 3.11 *Soit (B, μ, E) une relation d'équivalence mesurée graphée avec μ finie, harmonique pour un noyau de transition p réversible, de système de conductances minoré et majoré. Alors presque toute orbite à deux bouts est à croissance linéaire. De plus, si μ est ergodique, alors la restriction de μ au borélien saturé des orbites à deux bouts est complètement invariante.*

Preuve. Nous pouvons supposer que presque toute orbite possède deux bouts, et que μ est ergodique.

Par le lemme 3.9 et la proposition 3.2, presque toute orbite $\mathcal{R}(x)$ possède une suite de sous-graphes connexes $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, convergeant vers les deux bouts, qui séparent et qui sont de diamètre uniformément borné. Par des arguments analogues à ceux de D. Sullivan [Sul], $\mathcal{R}(x)$ ne porte aucune fonction superharmonique positive non constante, donc n'est pas transiente. Par le théorème 1.15, la mesure μ est donc complètement invariante. Puisque

μ est finie et le système de conductances borné par des constantes strictement positives, la mesure invariante associée est aussi finie.

Puisque l'équivalence de Kakutani préserve le type de quasi-isométrie des orbites, donc leur type de croissance, nous pouvons supposer que (B, μ, E) est extension HNN de (B, μ, E') par $\phi : X^- \to X^+$, avec les orbites de (B, μ, E') finies, rencontrant X^+ et X^- en exactement deux points (voir la remarque suivant l'énoncé du théorème 3.8).

Il faut toutefois vérifier que μ est toujours dans la classe d'une mesure finie invariante. Reprenons pour cela les notations de la preuve du théorème 3.8 suivant la preuve du lemme 3.9. Il est clair que la mesure de (B_0, μ_0, E_0) est bien dans la classe d'une mesure finie invariante. Maintenant, (B', μ', E') est obtenu à partir de (B_0, μ_0, E_0) par passage au quotient par une relation d'équivalence mesurée à classes finies. Puisque les espaces sont standards, il en découle que μ' est encore dans la classe d'une mesure finie invariante, qui est préservée par l'application ϕ, ce qui montre le résultat.

Nous supposons donc que μ est finie et invariante. Notons $T : X^- \to X^-$ l'application presque partout ainsi définie. Pour x dans X^-, $\phi(x)$ est dans la classe pour $\mathcal{R}'$ d'un unique autre point y_x de X^+, et $\phi^{-1}(y_x)$ est dans la classe pour $\mathcal{R}'$ d'un unique autre point de X^-, appelé $T(x)$. Il est clair que T est bijective et préserve μ.

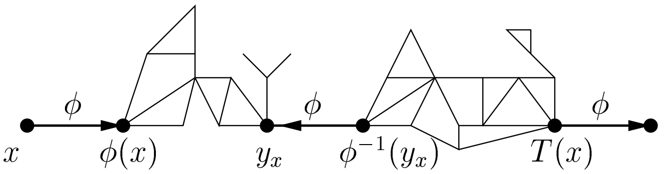

Figure 2 : Construction de T.

Notons $g : X^- \to \mathbb{N}$ l'application mesurable qui à x associe la somme $|\mathcal{R}'(\phi(x))| + |\mathcal{R}'(T(x))|$ des cardinaux des orbites de $\phi(x)$ et $T(x)$ pour $\mathcal{R}'$. Remarquons que g est intégrable, car μ est finie et l'intégrale de g sur X^- pour μ est précisément la μ-masse totale de B.

Par le théorème ergodique de Birkhoff,

$$S_n g(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k(x)$$

converge presque partout. Notons $\mathcal{B}(x, n)$ la boule de centre 0 et de rayon n dans le graphe de Cayley de l'orbite de x. Comme $\frac{1}{n}\mathrm{Card}\ \mathcal{B}(x, n) \leq S_n g(x)$, nous en déduisons que l'orbite $\mathcal{R}(x)$ est au plus à croissance linéaire pour presque tout x. Comme elle a deux bouts, elle est au moins à croissance linéaire, ce qui montre le résultat. $\square$

Remarquons en corollaire que si G est un groupe de type fini, S une partie génératrice finie, X_G le graphe de Cayley à gauche de G pour S, (B, μ) un espace de probabilité, munie d'une action quasi-invariante de G, avec μ harmonique, alors pour presque tout x dans B, le graphe X_S/G_x, quotient de X_S par le stabilisateur de x, est à croissance linéaire s'il possède exactement deux bouts.

Notons qu'il peut exister des graphes de la forme X_S/G_x, ayant deux bouts, et à croissance arbitraire (au plus exponentielle). Si par exemple G est le groupe libre à deux générateurs, S une partie génératrice standard, alors pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

à croissance inférieure à celle de G, il existe un sous-groupe H de G tel que X_S/H a exactement deux bouts et tel que la croissance de X_S/H est équivalente à f. (La relation d'équivalence usuelle pour les fonctions de croissance de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est $f \sim g$ s'il existe des constances $c > 0$ telles que $g(\frac{1}{c}n) \leq f(n) \geq g(cn)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.) Notons qu'il existe de même un sous-groupe H de G tel que X_S/H a un ensemble de Cantor de bouts, mais est à croissance arbitraire (au plus exponentielle), par exemple linéaire. Voici ci-dessous un exemple de graphe revêtant le bouquet de deux cercles, ayant deux bouts et à croissance exponentielle. Il est donc isomorphe à X_S/H avec $H \subset G$ son groupe fondamental, car X_S, l'arbre régulier de valence 4, est le revêtement universel du bouquet de deux cercles.

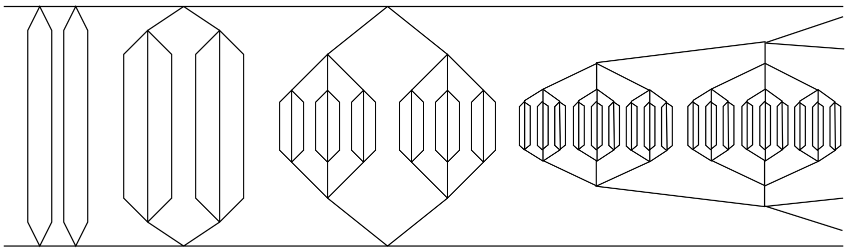

Figure 3 : Revêtement à deux bouts et croissance exponentielle.

References

[Ada] S. Adams, *Trees and amenable equivalence relations*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **10** (1990), 1-14.

[BP] I. Benjamini, Y. Peres, *Random walks on a tree and capacity in the interval*, Ann. Inst. Henri Poincaré **28** (1992), 557-592.

[CE] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as a dynamical system*, 4th printing, Birkäuser 1986.

[CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer Verlag 1982.

[CFW] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, Erg. Theo. Dyn. Syst. **1** (1981), 431-450.

[CV] Y. Colin de Verdière, *Distribution de points sur une sphère, d'après Lubotsky, Phillips, Sarnak*, Sém. Bourbaki **703**, Astérique **177-178**, Soc. Math. France (1989).

[Dod] J. Dodziuk, *Difference equations, isoperimetric inequalities and transience of certain random walks*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 787-794.

[FM] J. Feldman, C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 289-324.

[Fri] H. Frings, *Generalized entropy for foliations*, Thèse, Bielefeld (1991).

[Gab] D. Gaboriau, *Dynamique des systèmes d'isométries de $\mathbb{R}$: sur les bouts des orbites*, à paraître dans Inv. Math.

[GLP1] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin, *Pseudogroups of isometries of $\mathbb{R}$ and Rips' theorem on free actions on $\mathbb{R}$-trees*, Israel J. Math. **87** (1994), 403-428.

[GLP2] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin, *Pseudogroups of isometries of* $\mathbb{R}$ *and reconstruction of free actions on* $\mathbb{R}$*-trees*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **15** (1995), 633-652.

[Gar] L. Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and brownian motion*, J. Func. Anal. **51** (1992), 285-311.

[Ghy] E. Ghys, *Topologie des feuilles génériques*, Ann. Math. **141** (1995) 387-422.

[Gri1] R.I. Grigorchuk, *On the Burnside problem for periodic groups*, Fonc. Anal. Appl. **14** (1980), 41-43.

[Gri2] R.I. Grigorchuk, *On Milnor's problem of group growth*, Sov. Math. Dokl. **28** (1983), 23-26.

[GrKu] R.I. Grigorchuk, P.F. Kurchanov, *Some questions of group theory related to geometry*, in A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (eds.), "Algebra VII", Ency. Math. Scien. **58**, Springer Verlag 1993, pp. 167-232.

[Hae1] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, in "Structures transverses des feuilletages", Astérisque **116** , Soc. Math. Fran. (1984), 70-97.

[Hae2] A. Haefliger, *Pseudogroups of local isometries*, in "Proc. Vth Coll. in Differential Geometry", ed. L.A. Cordero, Research Notes in Math **131** , Pitman (1985), 174-197.

[HK] S. Hurder, A. Katok, *Ergodic theory and Weil measures for foliations*, Ann. Math. **126** (1987), 221-275.

[Jac] K. Jacobs, *Lecture notes on ergodic theory*, Univ. Aarhus Lect. Notes **1**,**2**, 1962-1963.

[Kak] S. Kakutani, *Induced measure preserving transformations*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 635-641.

[Kai] V. Kaimanovich, *An introduction to boundary theory of invariant Markov operators*, prépublication 1993.

[Lev1] G. Levitt, *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math. **113** (1993), 633-670.

[Lev2] G. Levitt, *On the cost of generating an equivalence relation*, Erg. Th. Dyn. Syst. **15** (1995) 1173-1181.

[Lio] I. Liousse, *Feuilletages affines de surfaces et actions affines sur les arbres réels*, Thèse, Univ. Toulouse (Fev. 1994).

[Man] R. Mane, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer Verlag 1987.

[Moo] C. Moore, *Ergodic theory and von Neumann algebras*, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. **28** (1982), 179-226.

[MT] J. Milnor, W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, p. 465-563 in "Dynamical Systems", J.C. Alexander (ed.), Lect Notes **1352**, Springer Verlag 1988.

[Nic] P. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, London Math. Soc. Lect. Not. Ser. **143**, Cambridge Univ. Press, 1989.

[ORW] D. Ornstein, D. Rudolf, B. Weiss, *Equivalence of measure preserving transformations*, Memoirs Amer. Math. Soc. **262**, Vol 37 (1982).

[Pau1] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d'habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).

[Pau2] F. Paulin, *Propriétés spectrales des algèbres de von Neumann produit croisés*, en préparation.

[Pet] K. Petersen, *Ergodic theory*, Camb. Univ. Press, 1983.

[Rev] D. Revuz, *Markov chains*, North Holland, 1984.

[Rud] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., Mc Graw-Hill (1990).

[Sal] E. Salem, *Riemannian foliations and pseudogroups of isometries*, appendix in "Riemannian Foliations", P. Molino, Progress in Math. **73** , Birkhäuser (1988), 265-296.

[Sco] P. Scott, *Ends of pairs of groups*, J. Pure Appl. Alg. **11** (1977) 179-198.

[Sma] D.R. Smart, *Fixed point theorems*, Camb. Tracts in Math. **66**, Camb. Univ. Press, 1974.

[Sta] J.R. Stallings, *Group theory and 3-dimensional manifolds*, Yale Monographs **4**, Yale Univ. Press, 1971.

[Sul] D. Sullivan, *Growth of positive harmonic functions and Kleinian group limit sets of zero planar measure and Hausdorff dimension two*, in N. Kuiper 60th Birthday vol., Lect. Notes. Maths. **384**, Springer-Verlag (1980), 127-144.

[Tho] C. Thomassen, *Isoperimetric inequalities and transient random walks on graphs*, Ann. Prob. **20** (1992), 1592-1600.

[Woe] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups – a survey on selected topics*, Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 1-60.

[Yos] K. Yosida, *Functional analysis*, 6th Ed., Springer Verlag, 1980.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 128 CNRS
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie, 69364 LYON CEDEX 07, FRANCE.
Nouvelle adresse :
Laboratoire de Topologie et Dynamique, URA D1169 CNRS
Bâtiment 425 (Mathématiques), Université Paris XI
91 405 ORSAY CEDEX, FRANCE
Frederic.Paulin@math.u-psud.fr