Orsay 2007-2008, L3 M318. Equations différentielles

Fiche de TD n^o 3.

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle scalaire suivante :

$$(E) \qquad t\,y''(t) - (t+4)\,y'(t) + 2\,y(t) = 0.$$

1) Soit P une fonction polynôme réelle de degré p dont le coefficient de plus haut degré est 1.

1-a) Montrer que si P est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors $p = 2$.

1-b) Déterminer P telle que P soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $\Phi(t) = e^t P(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que Φ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3-a) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ (justifier votre réponse)? Donner une base de solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

3-b) Donner une base de solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$.

3-c) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. La famille (P, Φ) forme-t-elle une base de solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

4) Soit $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. 4-a) On suppose que $y_0 = 2y_1$. Existe-t-il des solutions y de (E) sur $\mathbb{R}$ telles que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$? Si oui combien ?

4-b) Que se passe-t-il si $y_0 \neq 2y_1$. ?

Exercice. Bases de solutions et exponentielle de matrice.

On considre l'EDO $X' = AX$ avec A matrice carre relle constante d'ordre n.

On note $E_1, \dots, E_n$ les vecteurs colonne de la base canonique.

1) Montrer que les colonnes de e^{tA} forment une base de solution $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ de (E).

2) Soit $(U_1(t), \dots, U_n(t))$ une base de solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $P(t)$ la matrice de passage de la base canonique $(E_1, \dots, E_n)$ vers la base $(U_1(t), \dots, U_n(t))$. Montrer que $e^{tA} = P(t)[P(0)]^{-1}$. Calculer l'inverse de $P(t)$ en fonction de $P(-t)$ et de $P(0)$.

Exercice. Calcul de l'exponentielle de matrice via Cayley-Hamilton.

Soit A une matrice relle carre de taille n, satisfaisant $A^{m+1} = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$.

1) Montrer que e^{tA} est combinaison linaire de $I_n, \dots, A^m$.

2) On suppose $I_n, \dots, A^m$ indpendantes entre elles et on crit $e^{tA} = \alpha_0(t) I_0 + \alpha_1(t) A + \cdots + \alpha_m(t) A^m$.

2-a) Justifier que les α_i sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

2-b) Dterminer le systme diffrentiel linaire homogne du premier ordre satisfait par $(\alpha_0(t), \dots, \alpha_m(t))$.

3) Application numrique. On suppose que $A^2 = bI_n + aA$. En discutant suivant les solutions de $\lambda^2 = a\lambda + b$, calculer e^{tA} en fonction de I_n, A, a, b.

Exercice 2.

Soit a un nombre réel, on considère la matrice réelle suivante :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & a^2 - 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au système différentiel linéaire

$$(S) \quad X'(t) = M_a X(t).$$

0) Soit $X_0 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on note $t \mapsto X(t; X_0)$ la solution de (S) qui vérifie $X(0; X_0) = X_0$. Rappeler son expression.

1) Soit $P = \left\{ U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}); u_1 - u_3 = 0 \right\}$.

1-a) Vérifier que si $U \in P$ alors $M_a U \in P$.

1-b) En déduire que si $X_0 \in P$ alors $X(t; X_0) \in P$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1-c) Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que (V, W) est une base de P. Exprimer $M_a V$ et $M_a W$ dans cette base.

1-d) Si $X_0 \in P$, on pose $X(t; X_0) = \alpha(t)V + \beta(t)W$. Montrer que α est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(e) \quad x''(t) + 2x'(t) + (1 - a^2)\, x(t) = 0$$

et que $\alpha'(t) + \alpha(t) = \beta(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Vérifier que 1 est valeur propre de M_a. Déterminer un vecteur propre U de M_a pour la valeur propre 1. On cherchera U sous la forme $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justifier que (U, V, W) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3) On suppose $a = 0$.

3-a) Déterminer les solutions de (e).

3-b) On pose $X_0 = \gamma_0 U + \alpha_0 V + \beta_0 W$. Déterminer $X(t; X_0)$ en fonction de α_0, β_0 et γ_0.

4) On suppose $a = 2$.

4-a) Déterminer les solutions de (e).

4-b) On pose $X_0 = \gamma_0 U + \alpha_0 V + \beta_0 W$. Déterminer $X(t; X_0)$ en fonction de α_0, β_0 et γ_0.

Exercice 3 L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'équation différentielle linéaire $X'(t) = A.X(t)$ sur $\mathbb{R}$, et on note E l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ (identifié à l'espace des vecteurs colonnes à n lignes).

1) Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A.B = B.A$. Pour toute solution $X \in E$ on pose $Y = B.X$. Montrer qu'on a encore $Y \in E$.

2) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que pour tout $X \in E$ on a $P(A).X \in E$. Montrer que E est stable par l'application linéaire de dérivation $D : X \mapsto X'$, définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

3) Soit $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ les éléments de E tels que $E_i(0) = e_i$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Rappeler pourquoi $\mathcal{B}$ est une base de E et déterminer la matrice de $D_{|E}$ dans la base $\mathcal{B}$.

4) Pour $\tau \in \mathbb{R}$ on note T_τ l'application qui à $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ associe $t \mapsto X(t + \tau)$. Vérifier que T_τ est linéaire et commute avec D, i.e. $T_\tau \circ D = D \circ T_\tau$. Montrer que T_τ préserve E.

5) Réciproquement soit E un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ stable par D, par T_τ et tel que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique $X \in E$ tel que $X(0) = X_0$.

5-a) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique suite $(E_1, \ldots, E_n)$ d'éléments de E tels que $E_i(0) = e_i$, et que cette suite est une base de E.

5-b) Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que E est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle: $\forall \tau \in \mathbb{R}, X'(\tau) = A.X(\tau)$.

Exercice 4 Zéros d'une solution d'une équation différentielle scalaire du deuxième ordre.

Soient a et b continues de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) $x''+ax'+bx=0$.

a) Montrer que si φ est une solution non nulle de (E) sur I, alors les zéros de φ sont simples et isolés. Que peut-on dire du nombre de zéros de φ dans $[\alpha,\beta]\subset I$? (Rappels. Un *zéro* d'une fonction $\varphi : I\to\mathbb{R}$ est un réel $t\in I$ tel que $\varphi(t)=0$. Un zéro t de φ dérivable est *simple* si $\varphi'(t)\neq 0$. Un zéro t de φ est *isolé* - dans l'ensemble des zéros de φ - s'il existe $\varepsilon>0$ tel que si $t'\in I$, $|t-t'|<\varepsilon$ et $\varphi(t')=0$ alors $t'=t$.)

b) Soit (φ_1,φ_2) une base de solutions de (E) définies sur I.
   i) Montrer que φ_1,φ_2 n'ont pas de zéro commun.
   ii) Soient $t_1<t_2$ deux zéros consécutifs de φ_1. Montrer que $\varphi_1'(t_1)\varphi_1'(t_2)<0$.
   iii) En utilisant le wronskien associé à φ_1 et φ_2, montrer que φ_2 a un zéro dans $]t_1,t_2[$ et un seul.

Exercice 5 Equations dont toutes les solutions ont une trajectoire circulaire.

a) Supposons que $A=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$ (avec $a\in\mathbb{R}$). Calculer e^A. Montrer que e^A est orthogonale.

b) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique. Pour $A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ on considère l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $X'=AX$ (E). Montrer que A est antisymétrique ssi toute solution X de (E) vérifie : $\|X(t)\|=$ constante [pour la réciproque on pourra utiliser la formule de dérivation du produit scalaire: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}<U(t),V(t)>=<U'(t),V(t)>+<U(t),V'(t)>$]

c) Reprendre la question b) en dimension d. Que dire de l'exponentielle d'une matrice anti-symétrique $d\times d$?

d) Reprendre le résultat de la question b) lorsque (E) n'est plus à coefficients constants : $X'(t)=A(t)X(t)$ $(A:\mathbb{R}\to\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ continue).

Exercice 5bis

On considère une équation différentielle linéaire $X'(t)=A(t)X(t)$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un $\varepsilon>0$ tel que pour tout réel $t\in\mathbb{R}$, la plus grande valeur propre de la matrice symétrique $A(t)+A(t)^{\mathrm{T}}$ est $\leq -\varepsilon$.

a) Dériver $\|X(t)\|^2$. En déduire que $X(t)$ tend vers 0 quand $t\to+\infty$ (on pourra appliquer Gronwall).

b) Que dire si on a seulement $\varepsilon\geq 0$?

Exercice 6 Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= x-y-(2+\rho)z\\ y' &= x-y-(2+3\rho)z\\ z' &= y+(3+\rho)z\end{cases}$$

où ρ est un paramètre réel. On traitera séparément les cas $\rho=1,2$ On déterminera explicitement l'unique solution X_0 qui au temps $t=0$ passe par $(1,0,0)$.

Exercice 7 Résolution d'équations avec second membre.

Intégrer les systèmes différentiels suivants. On demande les solutions *à valeur réelles*. On commencera par donner une base de solutions du systme linaire associ.

a) $\begin{cases} x' &= 4x + 2y + \mathrm{e}^t \\ y' &= -x + y + t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' &= 2x + y - z + 1 \\ y' &= y + z + t \\ z' &= x + z + t^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' &= 3x + 2y + 3z + t \\ y' &= x + 4y + 3z + \cos t \\ z' &= -x - 2y - z \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' &= 2x - y + 2z - \cosh t \\ y' &= x + 2y + \sinh t \\ z' &= -x + y - z + \cosh t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' &= x - y - 6z + t^2 \\ y' &= x - y - 2z \\ z' &= y + z + t \sin t \end{cases}$