Fiche de TD numéro 1. Intégrales.

1. Intégrales de certaines fonctions usuelles d'une variable (rappels).

Exercice 1 : Intégrale et aire sous la courbe représentative.

Soit a, b des réels positifs. Interpréter géométriquement le résultat des intégrales suivantes :

(a) $\int_0^a bx dx$.

(b) $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Exercice 2 : Polynôme fois exponentielle.

1) Soit $P(x)$ un polynôme. Pour a, b des constantes réelles, dériver les fonctions $x \mapsto P(x)\exp(ax)$, $x \mapsto P(x)\cos(bx)$, $x \mapsto P(x)\sin(bx)$ et $x \mapsto P(x)\exp(ax)\cos(bx)$.

Vérifier vos calculs en dérivant $P(x)\exp((a+ib)x)$ (avec a, b réels et i le nombre complexe correspondant à $(0,1)$).

2) En utilisant la question précédente calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\exp(x)dx, \int_{-1}^1 (x^2+x+1)\exp(-x)dx, \int_0^\pi (x+1)\cos^3(2x)dx, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (x^2-3x+2)\exp(-2x)\sin^4(x)dx$$

Exercice 3 : Changements de variable.

1) Dériver $f \circ g$.

2) Calculer les intégrales suivantes à l'aide de changement de variable.

(a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{t\log t} dt$.

(b) $\int_0^1 \frac{e^{3x}-2e^x}{e^x+2} dx$

(c) $\int_{-1}^{+1} t^2\sqrt{1-t^2} dt$.

Exercice 4 :

1) Dériver $\arccos, \arcsin, \arctan$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition.

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

Exercice 5 : Intégrale de fractions rationnelles.

1) Dériver la fonction puissance $x \mapsto x^a$ $(a, x \in \mathbb{R}, x > 0)$.

2) Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$.

(b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+1}$.

(c) $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+1)}$.

(d) $f(x) = \frac{x+4}{(x^2+5)(x-1)}$.

Exercice 6 : Fractions rationnelles trigonométriques.
Évaluer en posant $x = \tan \frac{t}{2}$.
(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t} dt$.
(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan t + \sin t} dt$.

2. Intégrales multiples.

Exercice 7 : Fubini.
(a) Comparer et calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 \big(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dx \big) dy$ et $\int_0^1 \big(\int_x^1 \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dy \big) dx$. Donner aussi la valeur de $\int_0^1 \big(\int_0^x \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dy \big) dx$.
(b) Calculer $\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ et $\int_{[1,2]\times[1,2]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$.
(c) Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x, 0 \le y, x+y \le 1\}$. Evaluer $\int_T a^x b^y \; dxdy$ pour a, b réels > 0, avec $a \neq b$, et $a \neq 1, b \neq 1$.

Exercice 8 : Symétries dans une intégrale.
Soit $R_a = [-a,a] \times [-a,a] \subset \mathbb{R}^2$ le carré fermé de sommets $(a,a), (-a,a), (-a,-a), (a,-a)$ et soit $f : R_a \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
(a) Montrer que $\int_{R_a} f(x,-y) dxdy = \int_{R_a} f(x,y) dxdy$ (on pourra par exemple appliquer Fubini). Montrer de même que $\int_{R_a} f(-x,y) dxdy = \int_{R_a} f(x,y) dxdy$ puis que $\int_{R_a} f(-x,-y) dxdy = \int_{R_a} f(x,y) dxdy$.
(b) Supposons que f est impaire, c'est à dire que pour tout $(x,y) \in R_a$ on a $f(-x,-y) = -f(x,y)$. Que dire alors de $\int_{R_a} f(x,y) dxdy$?

Exercice 9 : Quelques intégrales doubles.
(a) Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \le y \le 2 - x^2\}$.
(b) Calculer $\int_D (x + \sin y) dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \le x \le 1, -1 - x^2 \le y \le 1 + x^2\}$.
(c) Calculer $\int_D \frac{xy^2}{1+x^2} dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.
(d) Calculer $\int_D (1 - x - y) dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x, 0 \le y, x+y \le 1\}$.
(e) Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer $I_\varepsilon = \int_{D_\varepsilon} \exp(y/x) dxdy$ où $D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le y \le x, \varepsilon \le x \le 1\}$. Que vaut $\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon$?

Exercice 10 : Deux méthodes.
Évaluer directement puis à l'aide de coordonnées polaires $\int_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \le x \le \sqrt{3}, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\}$.

Exercice 11 : Estimations d'intégrales.
(1) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier fermé borné. On suppose que $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, avec D_1, D_2, D_3 des domaines réguliers, et chaque intersection $D_1 \cap D_2$ et $D_2 \cap D_3$ est une courbe régulière.
On suppose qu'il existe des nombres réels $a, b > 0$ tels que $-a \le f(x,y) \le 0$ pour $(x,y) \in D_1$, $0 \le f(x,y)$ pour $(x,y) \in D_2$, et $b \le f(x,y)$ pour $(x,y) \in D_3$. En déduire une minoration de $\int_D f(x,y) dxdy$.
Application numérique : sans calculer l'intégrale, montrer que $\int_{[0,2]\times[0,2]} xy \sin(\frac{x+y-1}{2}) dxdy$ est strictement positive.

(On pourra étudier la fonction $xy\sin(\frac{x+y-1}{2})$ sur $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, x+y \geq 1$ et $(x \leq 1$ ou $y \leq 1)\}$ et $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.)

(2-a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. On suppose qu'il existe des constantes réelles $a, k > 0$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \leq \frac{k}{(1+x^2+y^2)^a}.$$

Majorer $I_R = \int_{D_R} f(x,y)dxdy$, où D_R est le disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq R^2\}$. En déduire une condition sur la constante a assurant que $\lim_{R\to+\infty} I_R$ existe.

(2-b) Reprendre une étude analogue dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 : Coordonnées polaires.

(a) Calculer $\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq R^2\}$.

(b) Calculer $\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x, y \leq x\}$.

(c) Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(d) Calculer $\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2-2y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 13 : Volumes.

(a) Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangulaire de longueur ℓ et de largeur L.

(b) Quel est le volume de $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, -1 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$?

Exercice 14 : Coordonnées sphériques.

Utiliser un changement de variable pour calculer l'intégrale de f sur le domaine D avec

(a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et $f(x,y,z) = xyz$.

(b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ et $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 : Centre d'inertie.

Évaluer le centre d'inertie (ou de gravité) des domaines D suivants :

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$.

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, |y| \geq ax\}$ où a est un réel > 0.

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 9, (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$.

Exercice 16 : Potentiel électrique.

Soit R un réel > 0, soit $B(0,R)$ la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon R et soit $S(O,R)$ la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon R. Ainsi $B(0,R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$, et $S(0,R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = R^2\}$.

Si $a > R$, l'intégrale qui détermine le potentiel électrique engendré au point $(0,0,a)$ par la sphère $S(0,R)$ chargée uniformément par une densité ρ est :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}dxdydz$$

Évaluer V.