Examen du 27 juin 06

Durée de l'épreuve: 3 heures. Une rédaction précise et soignée est attendue.

Tous documents et calculatrices sont interdits. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soit A une matrice carrée de taille 2 à coefficients réels. On considère le système différentiel du second ordre

$$(1) \qquad X''(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } X(t) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix}$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$, on écrira $Z = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ avec $U = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$
et $\|Z\|_2^2 = \|U\|_2^2 + \|V\|_2^2$.

1) Justifier que X est solution de (1) $X''(t) = A\,X(t), t \in \mathbb{R}$ si et seulement si Z est solution de (2) $Z'(t) = B\,Z(t), t \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on précisera le lien entre $Z(t)$ et $X(t)$.

On admet que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } B \text{ si et seulement si } \lambda^2 \text{ est valeur propre de } A.$$

2) On suppose que la matrice A a une valeur propre $\lambda_0 > 0$.
Le point d'équilibre $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$ est-il stable pour le système différentiel (3) $X'(t) = A\,X(t)$?
Le point d'équilibre $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$ est-il stable pour le système différentiel (2) $Z'(t) = B\,Z(t)$?

3) On suppose que la matrice A est symétrique et qu'il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que

$$-\beta\,\|U\|_2^2 \leqslant (A\,U, U) \leqslant -\alpha\,\|U\|_2^2 \quad \text{pour tout } U \in \mathbb{R}^2.$$

3.1) Que peut-on dire sur les valeurs propres de la matrice A ?

3.2) Le point d'équilibre $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$ est-il stable pour le système différentiel (3) $X'(t) = A\,X(t)$? localement asymptotiquement stable ?

3.3) Que peut-on dire sur les valeurs propres de la matrice B ?
Peut-on alors conclure à la stabilité du point d'équilibre $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$ pour le système différentiel (2) $Z'(t) = B\,Z(t)$?

3.4) Soit X une solution de (1). On pose $\Phi(t) = (X'(t), X'(t)) - (A\,X(t), X(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\Phi'(t), t \in \mathbb{R}$.
Le point d'équilibre $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$ est-il stable pour le système différentiel (2) $Z'(t) = B\,Z(t)$? localement asymptotiquement stable ?

Exercice 2

On admettra le résultat suivant :
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), d \geqslant 1$ telle que : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \ell \in \mathbb{R}^d$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = L \in \mathbb{R}^d$ alors $L = 0$.

On considère le système différentiel autonome du premier ordre :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{aligned} x'(t) &= -\,x(t)\,y(t), \\ y'(t) &= \frac{x^2(t) - y(t)}{1 + y(t)^2}. \end{aligned} \right.$$

1) Ecrire le système $(\mathcal{S})$ sous la forme $X'(t) = F(X(t))$ avec $X(t) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ et préciser la fonction F .

Soit $X_0 = (x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, on note $X(\cdot\,; X_0)$ la solution maximale du problème de Cauchy associé à $(\mathcal{S})$ et à la condition initiale $(0, X_0)$, elle est définie sur $J(X_0) =]T_*, T^*[$.

2) Déterminer les points d'équilibre du système différentiel $(\mathcal{S})$ et étudier leur stabilité.

3) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $E(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}\,y^4$.

3.1) Montrer que E est une fonction de Lyapunov associée à $\mathcal{O} = (0, 0)$ et au système $(\mathcal{S})$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.2) Montrer que $T^* = +\infty$.

3.3) Donner la définition de la propriété : " le point $\mathcal{O} = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable" puis établir cette propriété.

4) Si $X_0 \in \mathbb{R}^2$, l' orbite de X_0 est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $\mathit{Orbite}(X_0) =$ l'image de $X(\cdot; X_0) = \{X(t; X_0), t \in]T_*; +\infty[\}$.
Déterminer les orbites des points $\mathcal{O} = (0, 0)$, $A = (0, a)$ et $B = (0, -a)$ avec $a > 0$.

5) On introduit les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivants :
$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ et $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$.

5.1) Montrer que si $X_0 \in \Omega_1$ alors $X(t; X_0) \in \Omega_1$ pour tout $t \in]T_*, +\infty[$.

Que peut-on dire si $X_0 \in \Omega_2$?

5.2) On suppose que $X_0 \in \Omega_2$. On note $X(t; X_0) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ pour tout $t \in]T_*, +\infty[$.
Soit $\phi(t) = (-x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ pour tout $t \in]T_*, +\infty[$. Justifier que ϕ est une solution maximale de $(\mathcal{S})$. Peut-on préciser laquelle ?

Si pour tout $X_0 \in \Omega_1$, on connait l'allure de l'orbite de X_0, peut-on en déduire l'allure de l' orbite de X_0 lorsque $X_0 \in \Omega_2$?

6) On suppose que $X_0 = (x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in \Omega_{1,1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$. On note $X(t; X_0) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ pour tout $t \in]T_*, +\infty[$.

6.1) Montrer que $X(t; X_0) \in \Omega_{1,1}$ pour tout $t \in]T_*, 0]$ (On pourra raisonner par l'absurde)

6.2) Montrer que $0 \leqslant y'(t) \leqslant 1 + x_0^2$ pour tout $t \in]T_*, 0]$.

6.3) En déduire que :

$$T_* = -\infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} x(t) = \ell \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{et } \lim_{t \to -\infty} y(t) = -\infty.$$

6.4) Montrer que $\ell = 0$ (indication : raisonner par l'absurde).

7) On introduit les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivants : $\Omega_{1,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x^2 - y > 0\}$ et $\Omega_{1,3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, x^2 - y < 0\}$.

7.1) Sur une figure, représenter les ouverts Ω_1, $\Omega_{1,1}$, $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{1,3}$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Indiquer les points $\mathcal{O}$, A et B et leurs orbites (on précisera le sens de parcours des orbites).

De plus si $M = (x, y) \in \mathcal{P}$ puis si $M = (x, y)$ appartient aux axes de coordonnées représenter le vecteur $\overrightarrow{MN} = F(x, y)$.

7.2) Etablir les propriétés suivantes :

a) si $X_0 \in \Omega_{1,1}$ alors $\Big(t \in [0, +\infty[\to X(t; X_0)\Big)$ sort de $\Omega_{1,1}$ pour rentrer dans $\Omega_{1,2}$ c'est-à-dire il existe $T > 0$ et $\tau > 0$ tels que $X(t; X_0) \in \Omega_{1,1}$ pour tout $t \in [0, T[$ et $X(t; X_0) \in \Omega_{1,2}$ pour tout $t \in]T, T + \tau[$.

b) si $X_0 \in \Omega_{1,2}$ alors $\Big(t \in [0, +\infty[\to X(t; X_0)\Big)$ sort de $\Omega_{1,2}$ pour rentrer dans $\Omega_{1,3}$.

c) si $X_0 \in \Omega_{1,3}$ alors $X(t; X_0) \in \Omega_{1,3}$ pour tout $t \geqslant 0$ et $\lim_{t \to +\infty} X(t; X_0) = \mathcal{O}$.

7.3) Soit $a > 0$. Dessiner l'orbite de $C = (a, -a)$, puis l'orbite de $D = (-a, -a)$.