Devoir numéro 1. A rendre en TD le 5 février.

Exercice 1 : Intégrale double.
On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.
(a) Représenter D.
On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

(b) Exprimer I à l'aide de deux intégrales sur des domaines plus simples. En déduire la valeur de I.
(c) Calculer

$$I = \int_T \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

avec $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Exercice 2 : Volume.
Calculer le volume du domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, x^2 + y^2 \leq 2ay\}$, où a est un réel > 0.

Exercice 3 : Comparaison d'intégrales.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On suppose qu'il existe deux constantes réelles $a > 0$ et $b > 0$ telles que pour tout $y \in [-1,1]$ on a $f(x,y) \leq a \exp(-b|x|)$. Pour $R \geq 0$ on pose

$$I(R) = \int_{[-R,R] \times [-1,1]} f(x,y) dxdy$$

(a) Majorer $I(R)$.
(b) En déduire que $\lim_{R \to +\infty} I(R)$ existe et en donner une majoration.
($*$) Montrer que $R \mapsto I(R)$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est-elle dérivable ?
[question plus délicate et facultative]

Exercice 4 : Equations différentielles.
(a) Soient a, b deux réels. Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (1) $y'' + 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.
(b) On suppose que $b(b^2 - 4) \neq 0$. Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$(2) \ y'' + b^2 y = \sin^2(x)$$

(c) Déterminer la solution de (2) qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour $x = 0$. On note cette solution $y(x,b)$.
(d) Pour tout x fixé calculer $\lim_{b \to 0} y(x,b)$. On note cette limite $y_1(x)$. Que peut-on dire de $y_1(x)$?
(e) Calculer $\lim_{b \to 2} y(x,b)$, que l'on note $y_2(x)$. Que peut-on dire de $y_2(x)$?