Corrigé du contrôle numéro 2.

Exercice 1 : Systèmes linéaires.

Dans chaque cas on n'utilise que des opérations élémentaires (qui conservent l'ensemble des solutions), donc on travaille bien par "équivalence " :

1)

$$\begin{cases} x-2y+3z &= 2 \\ 2x\ -y-\ z &= 3 \\ x-\ y+\ z &= 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z &= 2 \\ \quad 3y-7z &= -1 \quad (L_2-2L_1) \\ \quad y-2z &= 0 \quad (L_3-L_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z &= 2 \\ \quad y-2z &= 0 \\ \quad 3y-7z &= -1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z &= 2 \\ \quad y-2z &= 0 \\ \quad -z &= -1 \quad (L_3-3L_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 3x-y+z &= 3 \\ x+3y+2z &= 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ -4y-2z &= 0 \quad (L_2-3L_1) \\ 2y+z &= 1 \quad (L_3-L_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 0 &= 2 \quad (L_2+2L_3) \\ 2y+z &= 1 \end{cases}$$

Donc (S_2) n'a pas de solutions.

3)

$$\begin{cases} x+2y-z-t &= 1 \\ 3x+7y-2z-t &= 3 \\ 5x+12y-3z-t &= 5 \\ x+3y+t &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-t &= 1 \\ y+z+2t &= 0 \ (L_2-3L_1) \\ 2y+2z+4t &= 0 \ (L_3-5L_1) \\ y+z+2t &= 0 \ (L_4-L_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-t &= 1 \\ y+z+2t &= 0 \\ 0=0 & \quad (L_3-2L_2) \\ 0=0 & \quad (L_4-2L_2) \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Sol}(S_3) = \{(1+3z+5t, -z-2t, z, t), z, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 : Un sous-espace vectoriel déterminé par un système d'équation cartésiennes.

(a) Pour vérifier si les vecteurs proposés appartiennent ou non à E on reportent leurs composantes dans les deux équations qui définissent E :

- $1-0+0-0=1\neq 0$, donc $e_1 \notin E$.
- $1-1+0-0=0$, mais $1+1-0-0=2\neq 0$ donc $u_0 \notin E$.
- $0-1+1-0=0$ et $0+1-1-0=0$ donc $u_1 \in E$.
- $1-0+0-1=0$ et $1+0-0-1=0$ donc $u_2 \in E$.
- $1-(-1)+(-1)-1=0$ et $1+(-1)-(-1)-1=0$ donc $u_3 \in E$.

(b) E est un sous-espace vectoriel comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Rappelons l'argument.

D'abord $(0,0,0,0) \in E$ car ses composantes vérifient évidemment les équations (homogènes).

Ensuite pour $u=(x,y,z,t) \in E$, $u'=(x',y',z',t') \in E$ et $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ quelconques, vérifions que $\lambda u + \lambda' u' \in E$. Or $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$. Vérifions la première équation sur les composantes de $\lambda u + \lambda' u'$:

$$(\lambda x+\lambda' x')-(\lambda y+\lambda' y')+(\lambda z+\lambda' z')-(\lambda t+\lambda' t') = \lambda(x-y+z-t)+\lambda'(x'-y'+z'-t') = 0+0=0$$

Pour la deuxième équation :

$$(\lambda x+\lambda' x')+(\lambda y+\lambda' y')-(\lambda z+\lambda' z')-(\lambda t+\lambda' t')=\lambda(x+y-z-t)+\lambda'(x'+y'-z'-t')=0+0=0$$

Ainsi $\lambda u+\lambda' u' \in E$, donc E est stable par combinaisons linéaires et c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(c) On a vu en (a) que u_1 et u_2 sont dans E. D'autre part (u_1,u_2) est libre, puisque $u_1\neq 0$ et u_2 n'est pas multiple de u_1. Enfin si $u=(x,y,z,t)\in E$ alors en ajoutant les deux équations définissant E on trouve $2x-2t=0$, d'où $x=t$. Et en soustrayant ces deux équations on obtient $2z-2y=0$, soit $z=y$. Ainsi $u=(x,y,y,x)=xu_2+yu_1$, donc (u_1,u_2) engendre E.

Finalement (u_1,u_2) est une base de E et $\dim(E)=2$.

(d) Comme $\dim(E)=2$ toutes les suites libres de E ont au plus 2 éléments : donc (u_1,u_2,u_3) est liée (en fait on peut voir tout de suite que $u_3=u_2-u_1$, d'où $u_1-u_2+u_3=0$, ce qui donne une autre preuve que la suite est liée).

La suite (u_0,u_1,u_2) a trois éléments, mais $u_0\notin E$ donc l'argument précédent ne s'applique pas. En fait (u_1,u_2) est libre, engendre E, et on a vérifié au (a) que $u_0\notin E$. Ainsi $u_0\notin \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ donc (u_1,u_2,u_0) est libre. Enfin "libre" ne dépend pas de l'ordre donc pour finir (u_0,u_1,u_2) est bien libre.

Exercice 3 : Un sous-espace vectoriel déterminé par une partie génératrice.

(a) La suite (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) est liée puisque c'est une suite de cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$, de dimension 4.

Pour être plus précis nous allons appliquer l'algorithme du rang à la suite (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5).

• D'abord $u_1\neq 0$, donc on conserve u_1.

• Puis $u_2\notin \mathrm{Vect}(u_1)$, puisque les multiples de u_1 ont leur quatre coordonnées égales.

• Ensuite on résout l'équation vectorielle $u_3=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$, autrement dit le système :

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 &=2\\ \lambda_1+3\lambda_2 &=1\\ \lambda_1+3\lambda_2 &=1\\ \lambda_1+3\lambda_2 &=1\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 &=2\\ \lambda_1+3\lambda_2 &=1\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 &=2\\ 2\lambda_2 &=-1\ (L_2-L_1)\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1 &=\frac{5}{2}\\ \lambda_2 &=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi $u_3=\frac{5}{2}u_1-\frac{1}{2}u_2$, donc $u_3\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et on rejette u_3.

• Clairement $u_4=u_2+u_3$. Or on vient de voir que $u_3\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, donc on a également $u_4\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, et on rejette u_4. (On peut bien sûr aussi résoudre, comme ci-dessus, le système linéaire traduisant l'équation vectorielle $u_4=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$.)

• Comme ci-dessus on obtient $u_5=\frac{u_2-u_1}{2}$, donc on rejette u_5.

Conclusion : $\mathcal{B}=(u_1,u_2)$ est une base de E, qui est donc de dimension 2.

(b) Pour compléter (u_1,u_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ on considère la suite de vecteurs $(u_1,u_2,e_1,e_2,e_3,e_4)$, où (e_1,e_2,e_3,e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comme la suite $(u_1,u_2,e_1,e_2,e_3,e_4)$ contient une base de $\mathbb{R}^4$ elle engendre $\mathbb{R}^4$ (sans être libre puisqu'elle a six éléments). Donc si on lui applique l'algorithme du rang on obtiendra une base de $\mathbb{R}^4$.

• Comme (u_1,u_2) est libre l'algorithme conserve u_1 et u_2.

• Le vecteur qu'i faut traiter ensuite, $e_1=(1,0,0,0)$, est clairement dans $E=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. En effet on a $e_1=u_1-u_5$, or on a déjà vérifié en (a) que $u_5\in E$. Donc on rejette e_1.

• En revanche ni e_2, ni e_3 (ni e_4 d'ailleurs) ne sont dans E, car les combinaisons linéaire de u_1 et u_3 ont leurs trois dernières composantes égales.

La base extraite de $(u_1,u_2,e_1,e_2,e_3,e_4)$ est donc $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,e_2,e_3)$, et nous avons complété $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

(c) On a vu en (b) que $e_1 = u_1 - u_5$. Et en (a) on a vu que $u_5 = \frac{u_2-u_1}{2}$. On en déduit que $e_1 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$. Les coordonnées de e_1 dans $\mathcal{B}'$ sont donc $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$.

Le vecteur e_2 est le troisième vecteur de la base $\mathcal{B}'$: donc ses coordonnées sont $(0, 0, 1, 0)$.

De même les coordonnées de e_3 dans $\mathcal{B}'$ sont $(0, 0, 0, 1)$.

Enfin $u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, donc

$$e_4 = u_1 - (e_1 + e_2 + e_3) = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - e_2 - e_3$$

donc les coordonnées de e_4 dans $\mathcal{B}'$ sont $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1)$.

Ceci permet de trouver les coordonnées de $u = (x, y, z, t)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En effet on a

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 = (\frac{3x}{2}u_1 - \frac{x}{2}u_2) + ye_2 + ze_3 + (-\frac{t}{2}u_1 + \frac{t}{2}u_2 - te_2 - te_3) =$$

$$(\frac{3x}{2} - \frac{t}{2})u_1 + (\frac{t}{2} - \frac{x}{2})u_2 + (y-t)e_2 + (z-t)e_3.$$

Les coordonnées de (x, y, z, t) dans $\mathcal{B}'$ sont donc $(\frac{3x}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2} - \frac{x}{2}, y - t, z - t)$.

(d) Utilisons d'abord les coordonnées dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_2, e_3)$ qui complète la base (u_1, u_2) de E. Nous remarquons que $u \in E$ si et seulement si les coordonnées de u selon e_2 et e_3 sont nulles. Or si $u = (x, y, z, t)$ nous avons vu en (c) que la coordonnée selon e_2 est $y - t$ et la coordonnée selon e_3 est $z - t$.

Finalement $(x, y, z, t) \in E \iff (x, y, z, t)$ est solution du système (S) : $\begin{cases} y - t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{cases}$.

(e) Utilisons à nouveau la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^4$. Alors nous savons que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ sont supplémentaires. Nous en déduisons que $F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \{(0, y, z, 0), y, z \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de E.

Exercice 4 : Deux sous-espaces vectoriels.

(a) On résout le système (S) définissant E par la méthode du pivot :

$$(S) \begin{cases} x + 2y - z - t &= 0 \\ x - y - z + 2t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z - t &= 0 \\ \quad -3y \quad + 3t &= 0 \ (L_2 - L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z - t &= 0 \\ \quad y \quad - t &= 0 \ (\frac{L_2}{-3}) \end{cases}$$

Donc $E = \{(z - t, t, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\}$. Alors $E = \{z(1, 0, 1, 0) + t(-1, 1, 0, 1)\ z, t \in \mathbb{R}\}$. Donc E est engendré par $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$. Or $u_1 \neq 0$ et u_2 n'est pas proportionnel à u_1. En conclusion (u_1, u_2) est une base de E.

(b) F est engendré par (v_1, v_2), or $v_1 \neq 0$ et v_2 n'est pas proportionnel à v_1, donc (v_1, v_2) est libre et c'est une base de F. D'où $\dim(F) = 2$.

On vérifie immédiatement que les composantes de v_1 ne vérifient aucune des deux équations du système (S) définissant E, donc $v_1 \notin E$. De même $v_2 \notin E$.

Comme $E \cap F \subset F$ on a $\dim(E \cap F) \leq \dim(F) = 2$. Et s'il y a avait égalité des dimensions alors on aurait $E \cap F = F$, soit encore $F \subset E$. Mais ceci n'est pas possible puisque $v_1 \in F$ et $v_1 \notin E$.

Ce raisonnement par l'absurde montre que nécessairement $\dim(E \cap F) < \dim(F) = 2$.

(c) Pour $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ on a $y_1v_1 + y_2v_2 = (y_1 + y_2, y_2, -y_1, y_2)$. Alors le vecteur $y_1v_1 + y_2v_2$ appartient à E si et seulement si ses composantes vérifient (S), autrement dit ssi (y_1, y_2) est solution de :

$$\begin{cases} (y_1 + y_2) + 2y_2 - (-y_1) - y_2 &= 0 \\ (y_1 + y_2) - y_2 - (-y_1) + 2y_2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 &= 0 \\ 2y_1 + 2y_2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 + y_2 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi $y_1v_1 + y_2v_2 \in E \iff y_2 = -y_1$.

Maintenant $u \in E \cap F$ si et seulement si $u \in F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $u \in E$, donc si et seulement si u peut s'écrire $u = y_1v_1 + y_2v_2$, de sorte qu'en plus $u \in E$. Or on vient de déterminer les couples (y_1, y_2) qui conviennent.

On en déduit que les vecteurs de $E \cap F$ sont les vecteurs de la forme $y_1(v_1 - v_2)$. Autrement dit $E \cap F$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 - v_2 = (0, -1, -1, -1)$, et $\dim(E \Cap F) = 1$.

(d) D'après la formule de la dimension $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Comme on l'a vu en (b) le vecteur v_1 n'est pas dans $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, donc (u_1, u_2, v_1) est une suite libre de $E + F$. Mais comme $\dim(E + F) = 3$ la suite (u_1, u_2, v_1) est une base de $E + F$.

Pour trouver un supplémentaire de $E + F$ on complète cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

En fait le premier vecteur de base canonique e_1 est dans $E + F$, puisque $u_1 + v_1 = 2e_1$.

Mais (u_1, u_2, v_1, e_2) est bien une base de $\mathbb{R}^4$. En effet c'est une suite de quatre vecteurs et c'est une suite génératrice. Pour vérifier que (u_1, u_2, v_1, e_2) engendre $\mathbb{R}^4$, il suffit de remarquer que le sous-espace vectoriel engendré par cette suite contient tous les vecteurs de la base canonique :

- $e_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}v_1$;
- e_2 est clairement dans le sous-espace vectoriel engendré ;
- $e_3 = u_1 - e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}v_1$;
- $e_4 = u_2 + e_1 - e_2 = \frac{1}{2}u_1 + u_2 + \frac{1}{2}v_1 - e_2$.

Comme (u_1, u_2, v_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_2)$ sont supplémentaires. Autrement dit un supplémentaire de $E + F$ dans $\mathbb{R}^4$ est la droite $\{(0, y, 0, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$.