Exposé "Premia", ENPC, 11 février 2004.

Calcul déterministe du prix des options asiatiques

François Dubois □ **et** **Tony Lelièvre** ⋆

1) Introduction
2) Modélisation mathématique
3) Cas d'une volatilité nulle
4) Un peu d'algèbre
5) Discrétisation
6) Quelques résultats
7) Conclusion.

□ fdubois@cnam.fr
⋆ lelievre@cermics.enpc.fr

1) Introduction

- Cas d'une option d'achat (call).
  S_0 : prix de l'action à la date $t = 0$
  K : prix désiré de l'action au temps T,
  A_T : prix moyen de l'action dans l'intervalle $]0, T[$

- Option asiatique : on compare
  (i) la valeur moyenne A_T de l'action sur l'intervalle de temps $]0, T[$
  (ii) le prix désiré K.

- Quel est le prix d'équilibre $W(S_0, K)$ pour cette option d'achat ?

  Quelle est la valeur de la fonction $W(\bullet, \bullet)$?

2) Modélisation mathématique

- $W(S_0, K)$: prix à l'instant $t = 0$
  de l'option d'achat à l'instant $T > 0$ d'une action
  - qui vaut S_0 à l'instant initial,
  - pour un prix désiré de l'action K à l'instant T
  - comparé avec la **valeur moyenne** entre 0 et T
  - avec un taux du marché r supposé constant
  - pour une volatilité σ du prix de l'action,
    supposée constante également.

- Alors (Rogers et Shi [1995]) on a

(0) $$W(S_0, K) \;=\; S_0 \; f\Big(0\,, \xi = \frac{K}{S_0}\Big)\,.$$

La fonction $f(\bullet, \bullet)$ est soumise à l'équation d'évolution suivante :

(1) $$\frac{\partial f}{\partial t} \,-\, \Big(r\,\xi + \frac{1}{T}\Big)\,\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\xi^2\;\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \;=\; 0\,,$$
$$\xi > 0, \quad 0 < t < T\,.$$

Condition finale lorsque $t = T$:

(2) $$f(T, \xi) \;=\; 0\;, \quad \xi \geq 0\,.$$

Condition limite en $\xi = 0$ au cours du temps :

(3) $$f(t, 0) \;=\; \frac{1}{r\,T}\,\Big(1 - \mathrm{e}^{-r\,(T\,-\,t)}\Big)\;, \quad 0 < t < T\,.$$

3) Cas d'une volatilité nulle

- On suppose dans cette partie que $\sigma = 0$.

L'équation (1) est une pure équation d'advection.

On désigne par $f_0(\bullet, \bullet)$ la solution de (1)(2)(3).

- Méthode des caractéristiques :

  équation différentielle ordinaire "satellite" :

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + r\,\xi + \frac{1}{T} = 0\,. \tag{4}$$

Sur la courbe solution de l'équation (4), on a la relation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_0\big(t, \xi(t)\big) = 0\,; \tag{5}$$

la fonction $f_0(\bullet, \bullet)$ est **constante**

sur les courbes caractéristiques.

- Intégration de l'équation "satellite" (4) élémentaire :

$$\xi(t) = \frac{1}{rT}\Big(\mathrm{e}^{r\,(T-t)}\,y - 1\Big)\,. \tag{6}$$

On a pour les données au bord ($t = T$ et $\xi = 0$)

$$\xi(T) = \frac{y-1}{rT} \qquad \geq 0 \quad \text{si} \quad y \geq 1 \tag{7}$$

$$\xi(t) = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{e}^{-r\,T} \leq y = \mathrm{e}^{-r\,(T-t)} \leq 1\,. \tag{8}$$

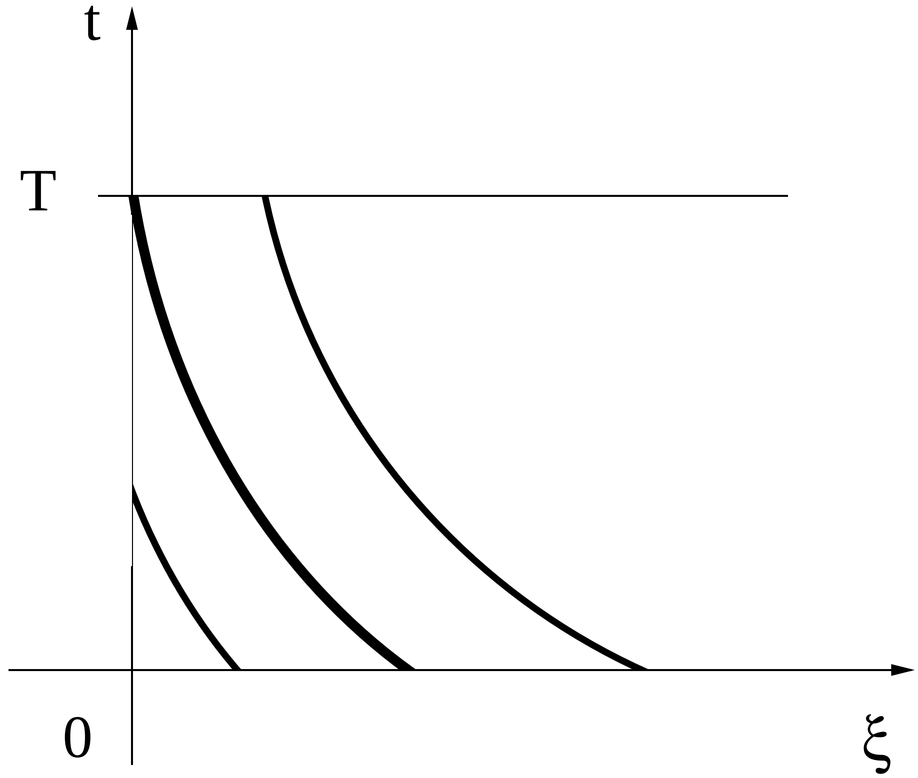

Figure 1 Courbes caractéristiques dans le plan $(t,\,\xi)$ le long desquelles la fonction $f_0(\bullet,\,\bullet)$ est constante.

• On a donc

$$
(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0\Big(t,\, \dfrac{1}{rT}\,(\mathrm{e}^{r\,(T-t)}\,y-1\,)\Big) \;= \\ \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} f_0\Big(T,\, \dfrac{y-1}{rT}\Big) \;=\; 0 & \text{si} \quad y \geq 1 \\ f_0\Big(t,\,0\Big) \;=\; \dfrac{1-y}{rT} & \text{si} \quad \mathrm{e}^{-r\,T} \;\leq\; y \;\leq\; 1\,. \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

4) Un peu d'algèbre

- Changement de variable et de fonction inconnue :

$$(10) \qquad \big(t,\, \xi\big) \;\longmapsto\; \Big(\theta \,=\, t,\, y \,=\, (1 + rT\xi)\, \mathrm{e}^{r\,(t\,-\,T)}\Big)$$

$$(11) \qquad g(\theta,\, y) \;\equiv\; f(t,\, \xi) \,-\, f_0(t,\, \xi)\,.$$

Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial t} \;\equiv\; \frac{\partial}{\partial \theta} \,+\, ry\, \frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} \;\equiv\; rT\, \mathrm{e}^{r\,(\theta\,-\,T)}\, \frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \;\equiv\; \big(rT\, \mathrm{e}^{r\,(\theta\,-\,T)}\big)^2\, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,$$

on peut former l'équation vérifiée par la fonction $g(\bullet,\, \bullet)$:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \,+\, \frac{\sigma^2}{2} \Big(y - \mathrm{e}^{r\,(\theta\,-\,T)}\Big)^2\, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \;= \\ & \qquad\qquad = \; -\frac{\sigma^2}{2} \Big(y - \mathrm{e}^{r\,(\theta\,-\,T)}\Big)^2\, \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \end{aligned} \right.$$

avec

$$(13) \qquad 0 \,\leq\, \theta \,\leq\, T\,, \qquad y \,\geq\, \mathrm{e}^{r\,(\theta\,-\,T)}\,.$$

- Terme source singulier :

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} \;=\; \frac{1}{rT}\, \delta_1(y)\,.$$

où δ_1 désigne la masse de Dirac au point $y = 1$.

• Compte tenu de (14), l'équation (12) prend la forme :

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma^2}{2} \Big(y - \mathrm{e}^{r\,(\theta - T)} \Big)^2 \, \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} \; = \\ \qquad\qquad = \; -\dfrac{\sigma^2}{2} \Big(1 - \mathrm{e}^{r\,(\theta - T)} \Big)^2 \, \delta_1(y) \end{cases}$$

qui est une équation purement diffusive
avec une viscosité non constante.

• Conditions aux limites pour l'équation (15) :

$$(16) \qquad g(T,\, y) \; = \; 0\,, \quad y \geq 1\,,$$

$$(17) \qquad g\Big(\theta,\, \mathrm{e}^{r\,(\theta - T)}\Big) \; = \; 0\,, \quad y = \mathrm{e}^{r\,(\theta - T)}\,.$$

• Condition limite "artificielle" pour $y = y_{\mathrm{max}}$
pour limiter le domaine de calcul :

$$(18) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(t,\, y_{\mathrm{max}}) \; = \; 0\,.$$

La valeur du paramètre purement numérique y_{max}
reste à déterminer au mieux !

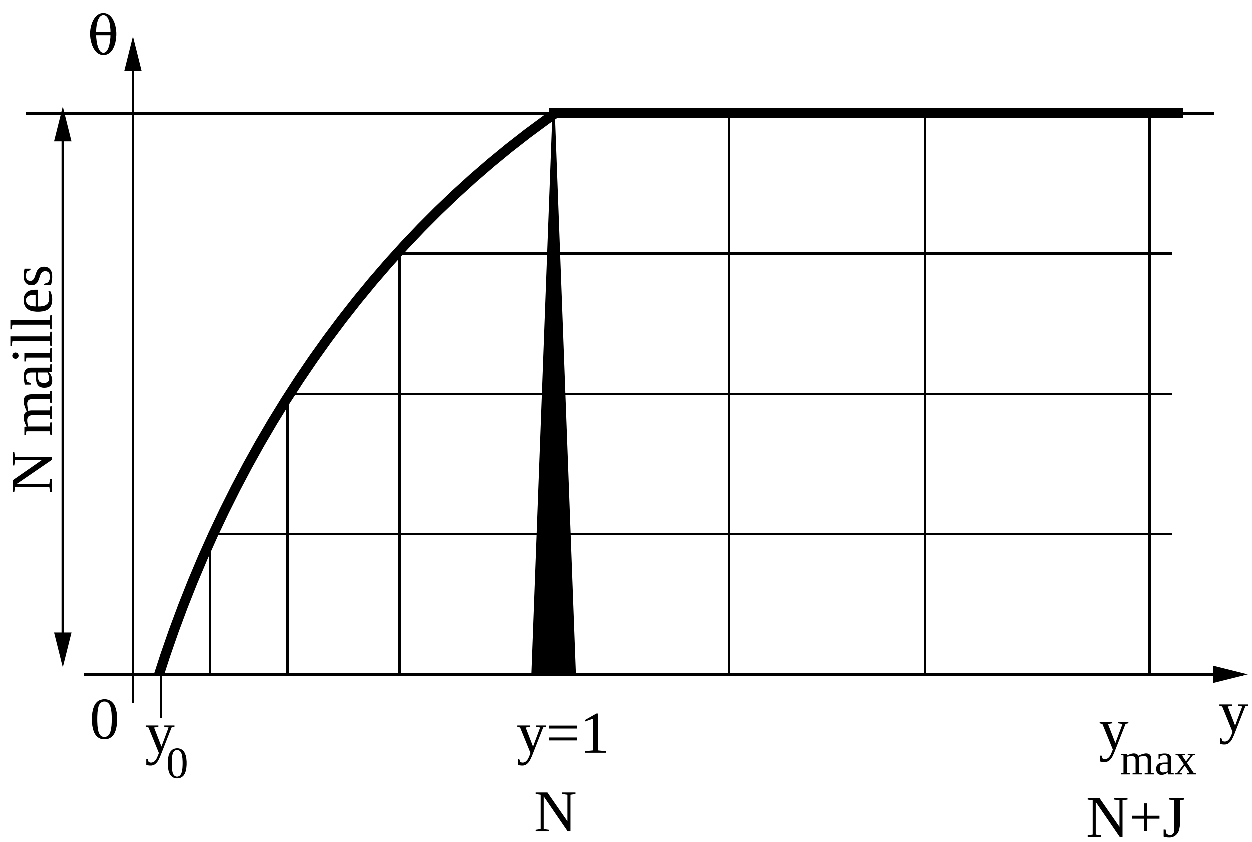

Figure 2 Domaine de calcul discret.

5) Discrétisation

• Equation d'évolution (15) :

$$(19) \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} + A(\theta) \bullet v(\theta) \; = \; b(\theta)$$

$v(\bullet)$ est une fonction inconnue de la variable y
(avec $y \geq \mathrm{e}^{-r\,\theta}$),
l'opérateur linéaire $A(\theta)$ est donné par

$$(20) \qquad A(\theta) \; \equiv \; \frac{\sigma^2}{2} \Big(y - \mathrm{e}^{-r\,\theta} \Big)^2 \, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \, ;$$

il agit sur des fonctions assez régulières de la variable y.

• Pas de temps Δt :

$$\Delta t \; = \; \frac{T}{N} \, , \qquad \theta^k \; \equiv \; k \, \Delta t \, , \quad 0 \, \leq \, k \, \leq \, N.$$

Solution approchée $v^k \simeq v(\theta^k)$ de (19) au temps θ^k
grâce au schéma de Crank-Nicolson :

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t} \, v^k \; + \; \dfrac{1}{2} \, A(\theta^k) \bullet v^k \; = \\ \quad = \; \dfrac{1}{\Delta t} \, v^{k+1} \; - \; \dfrac{1}{2} \, A(\theta^{k+1}) \bullet v^{k+1} \; + \; b(\theta^{k+1/2}) \end{cases}$$

• Condition **finale** (16) :

$$(22) \qquad v^N \; = \; 0 \, .$$

• Les temps intermédiaires θ^k définissent naturellement des points y_j sur la courbe limite :

$$(23) \qquad y_j \;\equiv\; \exp\big(-r\,\theta^{N-j}\big)\,, \qquad 0 \,\leq\, j \,\leq\, N.$$

On a $y_0 = \mathrm{e}^{-r\,T}$, $y_N = 1$ et plus généralement :

$$(24) \qquad y_{j+1} \;=\; \mathrm{e}^{r\,\Delta t}\, y_j\,, \qquad j \,\geq\, 0\,.$$

Suite géométrique de raison $\rho \;\equiv\; \mathrm{e}^{r\,\Delta t}$
associée au problème aux limites (15) (16) (17) (18)
discrétisé par un pas de temps constant.

• Relation (20) valable dans le cas d'un espace continu.
Opérateur discret agit sur les fonctions discrètes (w_j).
Opérateur aux différences finies $D^k_{j\,m}$
centré à cinq points :

$$(25) \qquad \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}\Big)^k_j \;\simeq\; \sum_{m=j-2}^{j+2} D^k_{j\,m}\; w_m\,.$$

Cet opérateur qui doit être compatible avec les points
existants sur la grille à l'instant k !

- Les difficultés dont nous ne parlons pas ici :

1) réglage du paramètre y_{max}

2) calcul préliminaire du schéma aux différences
sur une grille en progression géométrique

3) discrétisation de la masse de Dirac

4) traitement des conditions aux limites

5) à chaque pas de temps, évaluation et factorisation
de Gauss d'une matrice pentadiagonale

6) interpolation des résultats lorsque $t = 0$
puisque les valeurs spécifiées du paramètre ξ
peuvent "tomber" entre deux points de la grille.

6) Quelques résultats

- Valeurs prédites pour le prix $f(0, 1)$
de l'option asiatique.

- Maximum de chiffres significatifs,
en ne gardant que les chiffres communs
aux deux maillages les plus fins,
avec 3200 et 6400 mailles temporelles respectivement.

r	σ	DL-2004	auteur	référence
0.02	0.30	7.307626	Lelièvre-2000	7.308
0.02	0.05	1.6970588	Lelièvre-2000	1.697
0.15	0.05	6.7943549	Thompson (−)	6.794354
0.15	0.05	6.7943549	Thompson (+)	6.794465
0.10	0.20	7.0410766	Témam & BL	7.041

- Outil opérationnel dans Premia :
méthode très voisine de celle exposée ici ;
permet une précision de cinq chiffres significatifs
en moins d'une seconde de temps calcul
sur une machine de type "gigahertz".

7) Conclusion

- Programme de travail initial :
  calculer avec quatre chiffres significatifs au moins
  la solution de l'équation des options asiatiques.

- Méthode des caractéristiques,
  changement de variables et de fonction inconnue,
  domaine **mobile** en fonction du temps,
  différences finies implicites en temps d'ordre deux,
  maillage géométrique en espace,
  schéma numérique d'ordre formel égal à trois.

- Singularité initiale du problème prise en compte
  via un changement de fonction inconnue,
  possible sans changer de méthode
  compte tenu de la **linéarité** de l'équation.

- Résultats satisfaisants :
  précision de cinq chiffres significatifs
  en moins d'une seconde de temps calcul
  sur une machine de type "1 gigahertz".

- Analyse numérique précise des résultats à élaborer.

- Amélioration dans le futur de l'algorithmique :
  utilisation d'un schéma explicite en temps
  et/ou d'un schéma temporel d'ordre plus élevé.