

Thèse

présentée à l'Université Paris 6

pour obtenir

l'Habilitation à Diriger des Recherches en Mathématiques

par

François DUBOIS

SUR L'APPROXIMATION NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES EN MECANIQUE DES FLUIDES

Soutenue le **16 décembre 1992** devant le jury composé de

MM. Jacques-Louis LIONS	Président
Alain-Yves LEROUX	Rapporteur
Olivier PIRONNEAU	Rapporteur
Denis SERRE	Rapporteur
Bertrand MERCIER	Examineur
Jean-Claude NEDELEC	Examineur
Pierre-Arnaud RAVIART	Examineur

REMERCIEMENTS

Je suis tout particulièrement sensible à l'honneur que me fait le Professeur Jacques-Louis Lions de présider le jury de mon habilitation à diriger des recherches en mathématiques. Il représente pour moi une personnalité phare des mathématiques appliquées les plus modernes et il a également pris ces dernières années une part active dans le développement des programmes spatiaux. Je suis donc heureux de le remercier ici à ce double titre.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués à l'Ecole Polytechnique et à l'Aérospatiale. Ils sont avant tout dus à la confiance qui m'a été accordée par mes patrons successifs, Jean-Claude Nédélec et Bertrand Mercier. Je remercie tout particulièrement Jean Claude Nédélec de m'avoir proposé de travailler sur le problème des conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques non linéaires au cours de ma thèse, me laissant un problème intéressant qu'il aurait pu aborder lui-même beaucoup plus vite. Il m'a également proposé de participer à l'enseignement d'analyse numérique à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, ce qui m'a donné une ouverture à la fois scientifique et humaine. De Bertrand Mercier, qui m'a recruté à l'Aérospatiale et avec lequel j'ai partagé quatre années d'expérience de la recherche en milieu industriel, j'ai particulièrement apprécié le dynamisme, les critiques constructives qu'il a toujours prodiguées à la lecture des versions préliminaires de mes travaux et l'aptitude à s'intéresser à des thèmes nouveaux.

L'enthousiasme pour l'Analyse Numérique m'a été en grande partie communiqué par Pierre-Arnaud Raviart qui a toujours porté attention aux idées que j'ai pu lui soumettre. J'admire également le professeur réputé qui, à l'Ecole Polytechnique comme au DEA d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6 m'a confié des charges d'enseignement et m'a permis à mon tour un contact privilégié avec des étudiants très motivés.

Les Professeurs Alain-Yves Leroux, Olivier Pironneau et Denis Serre font partie des experts reconnus en mécanique des fluides numérique. Ils ont eu la tâche ingrate de rapporter sur ce mémoire. Je les remercie pour les efforts qu'ils ont pu avoir à faire pour apporter une lecture approfondie de mes travaux.

Ce travail doit également à ceux qui en ont permis la réalisation matérielle par un financement régulier, et je remercie ici la Direction du Personnel du Ministère de l'Equipement et les pilotes de la Recherche Auto-Financée d'Aérospatiale Espace &

Défense d'avoir donné des responsabilités à des hommes éclairés, convaincus qu'une approche scientifique systématique finit par déboucher sur une technologie solide.

Je dois beaucoup à la confiance en l'approche scientifique qui m'a été transmise par Laurence Halpern à une période où l'approche semi-empirique m'apparaissait, à tort, comme la plus raisonnable. Elle a eu la gentillesse au printemps dernier de faire une première lecture "informelle" de ce mémoire et par là m'a permis d'en améliorer plusieurs points. Qu'elle trouve ici le témoignage de mon amitié.

Bien entendu, les échanges variés que j'ai pu avoir tant à l'X qu'aux Mureaux ont beaucoup compté pour moi. Je suis heureux de citer Alain Bamberger, Pierre Degond, Jean-Marc Dupuy, Philippe Le Floch, Sylvie Mas-Gallic, Geneviève Raugel, François-Xavier Roux, Jean-Paul Vila, Rémy Baraille, Eric Chaput, Jean-Jacques Chattot, François Coron, Jean-Pierre Dumont, Didier Lemaire, Guillaume Mehlman, Olivier Michaux, Gilles Moulès et Jean-Bernard Renard. Ils m'ont chacun beaucoup appris et m'ont à de nombreuses reprises permis de rectifier de trop nombreuses erreurs dans mes propres réflexions.

Des collaborations avec d'autres institutions de recherche m'ont permis d'apprécier des visions scientifiques parfois très différentes des miennes. En particulier, Jacques Audounet, Yann Brenier, Sébastien Candel, Carlos Conca, Frédéric Coquel, Thierry Gallouet, Vivette Girault, Edwige Godlewski, Bernard Larrouturou, Pierre Mazet, Jean-Louis Montagné, Stanley Osher, Michèle Schatzman m'ont offert des échanges fructueux parfois contradictoires mais toujours enrichissants, tant d'un point de vue scientifique qu'humain.

Ce travail n'aurait pas été possible sans la collaboration discrète et efficace de nombreux stagiaires à l'Aérospatiale. Ainsi, Florence Arnoux, François-Xavier Fraisse, Frédéric Vergé, Isabelle Terrasse, Jacques Mercier, Philippe Laborie, Antonio de Barros, Frédéric Vitart, Jean-Louis Vaudescal, Francis Allouche, Anne Houron, Sylvie Pavsic, Franck Bertagnolio, Philippe Naturel ont, par la pertinence de leurs travaux, contribué au développement (ou à la mise au rebut!) de quelques idées. Je regrette que ces collaborations se soient si vite terminées.

Enfin, depuis la fin de ces travaux, j'ai eu la chance de faire la connaissance du Professeur André Rousset. Sa haute compétence scientifique et ses responsabilités importantes au sein du groupe de direction de l'Aérospatiale ne lui ont pas fait perdre simplicité, modestie et gentillesse. Je le remercie de m'avoir accepté comme un de ses interlocuteurs.

RESUME

Cete thèse regroupe un ensemble de travaux, publications et rapports internes, issus d'une expérience de huit années de mécanique des fluides numérique au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique et au Département Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique de la Division Systèmes Stratégiques et Spatiaux d'Aérospatiale. L'étude s'articule autour de quatre thèmes principaux : la modélisation des fluides parfaits, l'analyse mathématique des équations de la mécanique des fluides, les aspects fondamentaux de l'analyse des schémas numériques et la mise en œuvre industrielle de diverses méthodes.

Le modèle mathématique du fluide parfait compressible est étudié de façon détaillée du point physique et mathématique. On montre sans hypothèse de régularité sur la loi d'état du fluide que la convexité de l'entropie de Lax est équivalente à la concavité de l'entropie thermostatique et à la positivité de la température. Ce résultat est ensuite étendu à un mélange de deux gaz réels sans interaction mutuelle.

L'étude des conditions aux limites pour le problème de Stokes de la dynamique des fluides incompressibles à deux ou trois dimensions d'espace est abordé d'un nouveau point de vue. Une formulation variationnelle comportant la vitesse, le tourbillon et la pression est proposée avec pour seule hypothèse de régularité l'appartenance du champ de vitesse à l'espace $H(\text{div})$, du tourbillon à l'espace $H(\text{rot})$ et de la pression à l'espace L^2 . On montre que les conditions aux limites en (vitesse normale, pression) et (vitesse tangentielle, tourbillon tangentiel) conduisent à deux partitions de la frontière. Le problème est alors bien posé si toutes les composantes du champ de vitesse sont données sur un morceau analytique de la frontière.

Les études théoriques des schémas numériques portent sur divers aspects de la méthode des volumes finis pour les fluides compressibles. Le problème de Riemann est le thème de quatre travaux indépendants portant sur une formulation non linéaire des conditions aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz, l'adaptation du flux d'Osher pour prendre en compte les effets de gaz réel à l'équilibre chimique, une correction d'entropie non paramétrée du schéma de Roe [en collaboration avec Guillaume Mehlman] et une version à pas fractionnaires du schéma de Godounov en hydrodynamique [en collaboration avec Rémy Baraille, Ghislaine Bourdain et Alain-Yves Leroux]. L'étude de la méthode MUSCL de Van Leer pour l'extension au second ordre

de précision des volumes finis est abordée de façon très générale et la notion d'interpolation non linéaire conservant la convexité est proposée. Cette notion permet d'affaiblir les conditions classiques de décroissance de la variation totale et un nouveau limiteur de pente dit de Lagrange est testé pour l'équation d'advection et l'équation de Burgers avec un terme source afin d'étudier expérimentalement la convergence vers l'état stationnaire d'un problème modèle pour l'aérodynamique. L'extension aux équations de Navier Stokes compressibles des méthodes de volumes finis en maillage non structuré est proposée à deux et trois dimensions d'espace. Une méthodologie générale fondée sur le caractère linéaire et local de la dérivation y est développée.

Le calcul scientifique en aérodynamique s'est développé intensivement ces dernières années à l'Aérospatiale sous l'impulsion du programme Hermès. Trois contributions aux ateliers scientifiques hypersoniques d'Antibes de 1990 et 1991 [en collaboration avec Olivier Michaux pour les deux premières et avec Guillaume Mehlman, Frédéric Thivet et Sébastien Candel pour la troisième] montrent l'état de l'art pour la résolution numérique des équations d'Euler à trois dimensions d'espace en maillage non structuré en incluant les effets de gaz réel, pour la résolution numérique des équations de Navier Stokes autour de rampes hypersoniques et pour l'introduction de modèles physiques complexes de déséquilibre thermodynamique et chimique dans les calculs d'écoulements hypersoniques dans les tuyères à haute enthalpie. Enfin, l'étude collective [en collaboration avec Eric Chaput, Didier Lemaire, Gilles Moulès et Gilles Vaudescal] des approximations parabolisée et de couche mince des équations de Navier Stokes a permis à Aérospatiale de développer un code économique et précis pour le calcul des efforts aérodynamiques dans la haute atmosphère incluant l'essentiel des effets visqueux.

