Etude d'un schéma de Boltzmann sur réseau recentré en vitesse

Tony FEVRIER, Université Paris-Sud ORSAY

Benjamin GRAILLE, Université Paris-Sud ORSAY

Francois DUBOIS, CNAM Paris, Université Paris-Sud ORSAY

La mise en œuvre des schémas de Boltzmann sur réseau est d'une grande simplicité et leur flexibilité permet de simuler un grand nombre d'équations aux dérivées partielles. Ils sont d'ailleurs intensément utilisés dans les milieux industriels et font l'objet depuis une décennie de profondes recherches théoriques. Nous nous proposons ici de présenter un nouveau type de schémas de Boltzmann sur réseau inspirés des travaux de M. Geier [2] et permettant de résoudre certaines équations macroscopiques de type fluide (acoustique, Navier-Stokes, *etc.*).
Etant fixés Δx un pas d'espace et Δt un pas de temps, on se donne un réseau régulier de l'espace à deux dimensions $\mathcal{L} = \Delta x(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ et un ensemble fini de vitesses $\{v_j\}_{0 \le j \le 8}$, avec $v_j \in \Delta x / \Delta t \mathcal{V}$ où $\mathcal{V} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)\}$ pour le schéma dit D2Q9—la généralisation à trois dimensions spatiales ou à des vitesses différentes est immédiate mais n'est pas présentée par soucis de simplicité. Une caractéristique de cette approche est que si $x_k \in \mathcal{L}$ alors $x_k + v_j \Delta t \in \mathcal{L}$, pour $0 \le j \le 8$. Nous introduisons alors les fonctions de distribution $f_j(x_k, t^n)$, $0 \le j \le 9$, qui représentent le nombre de macro-particules au point x_k à l'instant $t^n = n\Delta t$ qui ont la vitesse v_j. Les quantités macroscopiques qui nous intéressent sont alors des moments discrets des f_j. Par exemple pour la masse et la quantité de mouvement

$$\rho(x_k, t^n) = \sum_{j=0}^{8} f_j(x_k, t^n), \qquad q(x_k, t^n) = \sum_{j=0}^{8} v_j f_j(x_k, t^n).$$

Classiquement, le schéma s'écrit d'une manière générale sous la forme

$$f_i(x_k, t^{n+1}) = f_i^*(x_k - v_i \Delta t, t^n)$$

où le symbole * désigne la fonction de distribution après une phase dite de collision. Dans le schéma de d'Humières [1], la phase de collision est diagonale dans un espace des moments $m = Mf$ obtenus à l'aide d'une matrice fixe M de taille 9×9.
Nous proposons de faire dépendre la matrice M d'un champ de vitesses $\widetilde{u}$ donné *a priori* : $m(\widetilde{u}) = M(\widetilde{u})f$. L'objet de cette contribution est de présenter cette approche et d'en étudier la précision formelle à l'aide de la méthode asymptotique de F. Dubois [3]. Nous présentons également quelques résultats numériques illustrant les propriétés de stabilité du schéma.

Références

[1] D.D'Humières, *Generalized Lattice-Boltzmann Equations*, AIAA Rarefied Gas Dynamics: Theory and Applications, Progress in Astronautics and Aeronautics, **159**, p. 450–458, 1992.

[2] A.Greiner, M.Geier, JC.Korvink, *Cascaded digital lattice boltzmann automata for high Reynolds number flow*, PhysRev, 2006.

[3] F.Dubois, *Une introduction au schéma de Boltzmann sur réseau*, Phys. 3, Annexe, 2008.

Tony FEVRIER, tony.fevrier@math.u-psud.fr
Benjamin GRAILLE, benjamin.graille@math.u-psud.fr
Francois DUBOIS, francois.dubois@cnam.fr