

# Une introduction à la dérivation d'ordre fractionnaire.

François Dubois  
avril 2007

## Plan

- 1) Motivation physique
- 2) Intégrateur d'ordre un demi
- 3) De Riemann-Liouville à Caputo
- 4) Intégrateur et dérivateur d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$
- 5) Exponentielle de Mittag-Leffler
- 6) Approximation numérique
- 7) Epilogue mécanique.

Ces notes manuscrites constituent une rédaction (préliminaire et bien imparfaite) d'un cours donné le 12 avril 2007 à l'Institut Supérieur d'Education à Praia au Cap Vert.

## I Motivation physique.

- On cherche à résoudre un profil typique de couche limite thermique :

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), \quad t > 0, \quad y > 0, \quad \mu > 0.$$

La fonction inconnue  $u(y, t)$  satisfait une condition de nullité en  $y = 0$  et son gradient  $\frac{\partial u}{\partial y}$  tend vers 0 pour  $y \rightarrow +\infty$  :

$$(1.2) \quad u(0, t) = 0$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \rightarrow 0 \text{ si } y \rightarrow +\infty.$$

Un profil typique  $u(0, t)$  (à  $t > 0$  fixé) est présenté à la figure 1

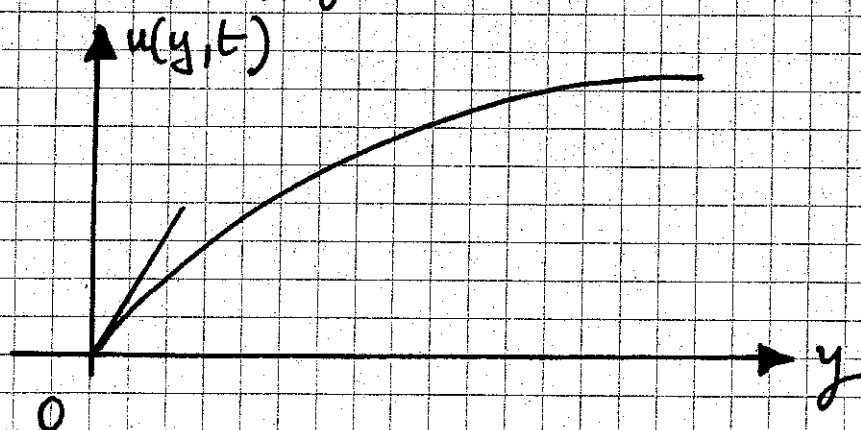


Figure 1. Profil typique de couche limite

Les ingénieurs sont directement intéressés par le flux de chaleur à la paroi, i.e.  $\Phi(t)$  donné par la loi de Fourier :

$$(1.4) \quad \phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0, t), \quad t > 0$$

et représenté symboliquement par la tangente à la courbe de la figure 1 en  $y=0$

- On peut résoudre analytiquement le problème (1.1)(1.2)(1.3) à l'aide de la transformation de Fourier en temps :

$$(1.5) \quad u(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(y, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

par la formule de réciprocity de Fourier. On sait qu'alors

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \hat{u}(y, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Notons  $\hat{f}(\omega)$  la transformée de Fourier de  $f(t)$  :

$$(1.7) \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

alors l'équation (1.1) s'écrit simplement

$$(1.8) \quad i\omega \hat{u} - \mu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = \hat{f}$$

- Pour  $z$  n'appartenant pas à  $] -\infty, 0[$ , on note  $\sqrt{z}$  la détermination principale de la racine carrée (Figure 2) :

$$(1.9) \quad \sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad r \geq 0, \quad -\pi < \theta < \pi$$

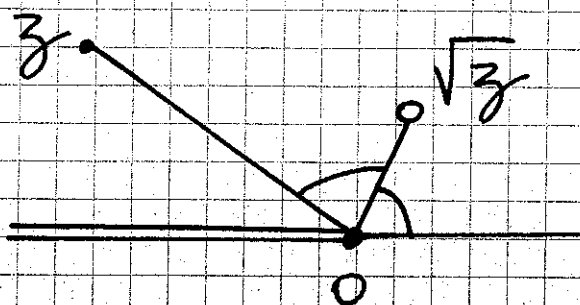


Figure 2. Détermination principale de  $\sqrt{z}$ .

On a donc en particulier

$$(1.10) \quad \operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0 \quad z \notin ]-\infty, 0].$$

- On peut alors résoudre l'équation (1.8) :

$$\hat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right)$$

et on tient compte de la condition limite (1.3) qui impose de ne pas permettre l'existence d'une solution exponentiellement croissante en  $y$ . Donc  $\alpha = 0$ . Puis on tient compte de la condition limite (1.2). On en déduit

$$(1.11) \quad \hat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} \left[ 1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right) \right].$$

On peut alors dériver cette expression par rapport à  $y$  :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{i\mu\omega}} \hat{f} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right)$$

puis faire  $y = 0$  :

$$(1.12) \quad \hat{\phi} = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}} \hat{f}.$$

## II) Intégrateur d'ordre un demi.

- Nous faisons un calcul de transformée de Fourier particulière qui va permettre d'éclaircir d'un point nouveau la relation (1.12). Nous notons  $H(\cdot)$  la fonction de Heaviside:

$$(2.1) \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

et nous posons

$$(2.2) \quad p(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} H(t).$$

Nous allons calculer la transformée de Fourier de  $p(\cdot)$ , en prenant garde au fait que  $p \notin L^1(\mathbb{R})$ . On a cependant

$$(2.3) \quad \hat{p}(w) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{R^2} e^{-iwt} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Prop 1) Transformée de Fourier de  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} H(t)$ .

on a

$$(2.4) \quad \hat{p}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{i w}}, \quad i w \notin ]-\infty, 0]$$

### Preuve de la proposition 1)

Nous la prouvons pour  $w \in \mathbb{R}$ , en commençant par le cas  $w > 0$ . On fait d'abord le changement

de variables  $t = u^2$  dans l'intégrale (2.3). alors

$$\int_0^{R^2} e^{-i\omega t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^R e^{-i\omega u^2} \frac{2u du}{u}$$

$$= 2 \int_0^R e^{-i\omega u^2} du$$

Puis pour  $\omega > 0$ , on pose  $z = u\sqrt{\omega}$ . alors

$$\int_0^{R^2} e^{-i\omega t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_0^{R/\sqrt{\omega}} e^{-iz^2} dz$$

- Pour calculer l'intégrale oscillante  $\int_0^R e^{-iz^2} dz$ , on intègre dans le plan complexe le long du contour  $\Gamma_R$  défini à la figure 3 la fonction  $z \mapsto \exp(-z^2)$

$$(2.5) \quad \int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0$$

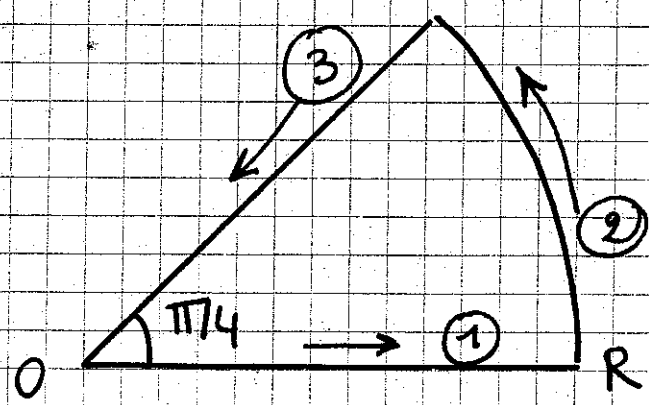


Figure 3. Contour d'intégration  $\Gamma_R$ .

Le contour  $\Gamma_R$  comporte trois branches :

(i) pour  $z \in \mathbb{R}$ , (ii) pour  $|z| = R$  et (iii) pour  $\arg z = \pi/4$  qui définissent autant de sous-contours.

$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz$  tend vers  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  si  $R \rightarrow \infty$ ; c'est classique

Pour  $z \in \Gamma_2$ , on a  $z = R e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < \pi/4$  :

$$\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} R i e^{i\theta} d\theta$$

$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \right| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cos \theta} d\theta$$

Pour  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta \geq 1 - \frac{2\theta}{\pi}$  ainsi qu'il l'est -  
né à la figure 4. Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \right| &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)} d\theta \\ &\leq \frac{R}{2} e^{-R^2} \frac{\pi}{R^2} \left[ e^{\frac{2R^2\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

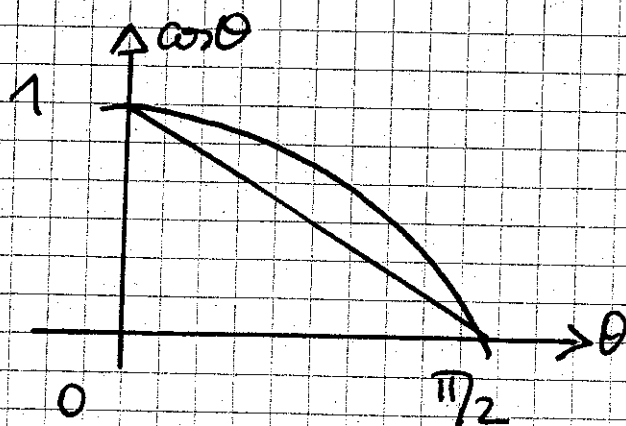


Figure 4

$$\cos \theta \geq 1 - \frac{2\theta}{\pi} \text{ pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\leq \frac{\pi}{2R} e^{-R^2} (e^{R^2} - 1) \leq \frac{\pi}{2R}$$

8

et ce terme peut être négligé dans la limite où  $R$  tend vers l'infini.

- Enfin  $z \in \Gamma_R^3$  s'écrit  $z = t e^{i\pi/4} = t\sqrt{i}$ ,  $t \geq 0$ :

$$\int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2} dz = - \int_0^R e^{-(t\sqrt{i})^2} \sqrt{i} dt = -\sqrt{i} \int_0^R e^{-it^2} dt$$

Donc par sommation:  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \sqrt{i} \int_0^\infty e^{-it^2} dt = 0$

$$(2.6) \quad \int_0^\infty e^{-it^2} dt = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}}$$

La transformée de Fourier  $\hat{p}(\omega)$  s'en déduit alors facilement dans ce cas puisque  $\hat{p}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_0^\infty e^{-it^2} dt$ .

- Pour  $\omega < 0$ , on remarque que  $\hat{p}(\omega) = \overline{\hat{p}(-\omega)}$  et on sait que pour  $z$  complexe n'appartenant pas à  $]-\infty, 0]$ , on a

$$(2.7) \quad \overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\bar{z}} \quad z \notin ]-\infty, 0]$$

On a donc le calcul suivant, pour  $\omega < 0$ :

$$\hat{p}(\omega) = \overline{\hat{p}(-\omega)} = \overline{\sqrt{\frac{\pi}{i(-\omega)}}} = \sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} = \sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}$$

ce qui finit d'établir la relation (2.4).  $\square$



- On peut donc reprendre l'expression du flux de chaleur (1.12) sous la forme :

$$(2.8) \quad \hat{\phi} = - \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \hat{\rho} \hat{f}$$

et grâce à la relation classique

$$(2.9) \quad \widehat{\rho * f} = \hat{\rho} \hat{f}$$

on a finalement

$$(2.10) \quad \phi = - \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \rho * f = - \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}$$

Nous venons de faire apparaître l'intégrateur d'ordre un-demi de la fonction  $f$ .

Definition ① Intégrateur d'ordre un-demi.

Soit  $u$  une fonction causale, i.e. telle que

$$(2.11) \quad u(t) = 0 \text{ si } t \leq 0$$

On appelle intégrateur d'ordre un-demi  $(I^{1/2}u)(t)$  la fonction définie par

$$(2.12) \quad (I^{1/2}u)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(\theta) d\theta}{\sqrt{t-\theta}}, \quad t > 0$$

et  $(I^{1/2}u)(t) = 0$  si  $t \leq 0$  par convention.

Prop (2) Le carré de l'intégrateur d'ordre un demi est l'intégrale usuelle.

Soit  $u(\cdot)$  une fonction causale, on a alors

$$(2.13) \quad [I^{1/2} (I^{1/2} u)](t) = \int_0^t u(\theta) d\theta$$

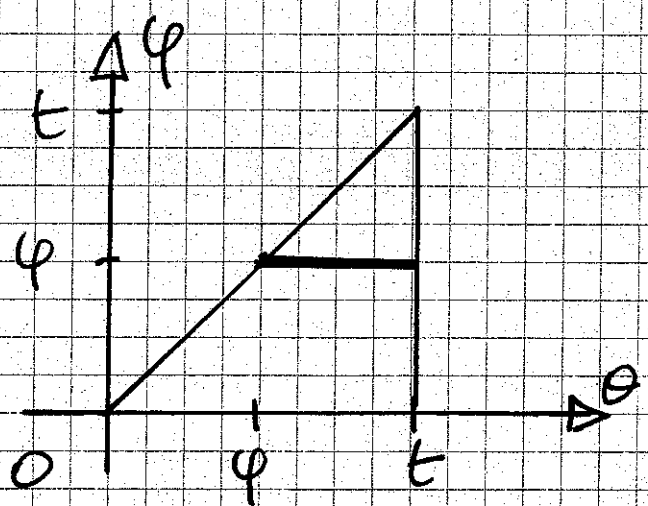
c'est à dire l'intégrale usuelle, qu'on peut aussi noter  $(I^1 u)(t) \equiv \int_0^t u(\theta) d\theta$ .

$$(2.14) \quad I_0^{1/2} I_0^{1/2} = I^1$$

Preuve de la proposition (2)

C'est un simple calcul d'intégrale double :

$$(I_0^{1/2} I_0^{1/2} u)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta \frac{u(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\theta-\varphi}}$$



qu'on calcule (Figure 5) à l'aide de Fubini :

Figure 5 Intégrale double

$$(I_0^{1/2} I_0^{1/2} u)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi u(\varphi) \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta} \sqrt{\theta-\varphi}}$$

on fait le changement de variable  $\theta = \varphi + x(t-\varphi)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  dans l'intégrale la plus à droite.

alors  $\frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta} \sqrt{\theta-\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$  et

$$[(I_0^{1/2} I_0^{1/2})u](t) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \right\} \int_0^t u(\varphi) d\varphi$$

ce qui établit la relation (2.13) à une constante multiplicative près.

11

- Le calcul de la dernière intégrale est classique; on pose  $y = \sqrt{x(1-x)}$  (cercle passant par les points  $(0,0)$  et  $(1,0)$ ) et on le paramètre par la pente  $\lambda$  de la corde:  $y = \lambda x$ .  
alors  $\lambda = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ , i.e.  $\lambda^2 = \frac{1}{x} - 1$ . Puis on calcule:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{y} \frac{dx}{d\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda x} (2\lambda x^2) d\lambda$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \pi$$

$$(2.15) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

Cette fois-ci, la relation (2.13) est établie.  $\square$

### III) De Riemann-Liouville à Caputo.

- on sait donc "intégrer une demi fois" une fonction causale. Si on dérive cette "demi-intégrale", on obtient une "demi-dérivée". C'est ce que proposent Riemann & Liouville à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle:

$$(3.1) \quad (D_{RL}^{1/2} u)(t) = \frac{d}{dt} (I^{1/2} u)(t)$$

c'est à dire

12

$$(3.2) \quad (D_{RL}^{1/2} u)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\theta) d\theta}{\sqrt{t-\theta}}, \quad t > 0.$$

Prop (3) Une autre expression de la demi-dérivée de Riemann-Liouville.

Soit  $u(\cdot)$  une fonction dérivable sur  $[0, \infty[$ . On a

$$(3.3) \quad (D_{RL}^{1/2} u)(t) = \frac{u(0)}{\sqrt{\pi t}} + \int_0^t \frac{u'(\theta)}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} d\theta.$$

Preuve de la proposition (3).

On effectue le changement de variable  $\varphi = t - \theta$  dans l'intégrale du membre de droite de (3.2) avant de dériver. Donc

$$\int_0^t \frac{u(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta = \int_0^t \frac{u(t-\varphi)}{\sqrt{\varphi}} d\varphi$$

Alors

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta = \frac{u(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial t} u(t-\varphi)}{\sqrt{\varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{u(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{u'(t-\varphi)}{\sqrt{\varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{u(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{u'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta$$

ce qui établit le résultat.  $\square$

- Si  $u(0) = 0$ , on peut remplacer  $(D_{RL}^{1/2} u)(t)$  par  $\frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} * u'(t)$  dès que  $u$  est dérivable. De plus, si  $u(0)$  est constante, la convolution  $\frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} * u'$  est identiquement nulle, propriété qu'on attend d'une demi-dérivée, ce qui n'est pas le cas avec Riemann-Liouville si  $u(0) \neq 0$ . On décide donc, avec Caputo [et Lighthill] de définir la "demi-dérivée"  $D^{1/2}$  par la convolution  $\frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} * u'(t)$ : Définition (2).

$$(3.4) \quad (D^{1/2} u)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta.$$

On a également la propriété suivante

Prop (4) Transformée de Fourier de la demi-dérivée.  
Soit  $(D^{1/2} u)$  défini par la relation (3.4) on a alors

$$(3.5) \quad \widehat{D^{1/2} u} = \sqrt{i\omega} \hat{u}.$$

Preuve de la proposition (4).

Conséquence élémentaire de  $\rho$  l'action de la transformée de Fourier d'un produit de convolution et de la proposition 1; on a

$$\begin{aligned} D^{1/2} u &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho * \frac{du}{dt}, \text{ donc } \widehat{D^{1/2} u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{\rho} (i\omega) \hat{u}, \\ \text{ie } \widehat{D^{1/2} u} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i\omega}} (i\omega) \hat{u} \text{ compte tenu de (2.4)} \\ &= \sqrt{i\omega} \hat{u}, \text{ ce qui montre la propriété. } \square \end{aligned}$$

On peut calculer facilement la dérivée d'ordre un-demi de quelques fonctions :

14

Prop 5) Quelques dérivées d'ordre  $1/2$  élémentaires

$$(3.6) \quad D^{1/2}(tH(t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} H(t)$$

$$(3.7) \quad D^{1/2}(\sqrt{t} H(t)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H(t).$$

Preuve de la proposition 5)

On utilise simplement la relation (3.4) :

$$D^{1/2}(tH(t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1 \, d\theta}{\sqrt{t-\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t$$

si  $t > 0$ , ce qui montre (3.6). Par ailleurs,

$$D^{1/2}(\sqrt{t} H(t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad ; \quad \theta = tx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{compte tenu de (2.15).}$$

Donc le résultat.



• On a alors le calcul suivant :

$$D^{1/2}(D^{1/2}(t\sqrt{t}H(t))) = D^{1/2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} H(t)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} H(t)\right) = H(t) = \frac{d}{dt}(tH(t))$$

$$(3.8) \quad D^{1/2} (D^{1/2} (tH(t))) = \frac{d}{dt} (tH(t))$$

on veut bien de mettre en évidence une "accélération" de la dérivation  $\frac{d}{dt}$ , au moins pour la fonction causale  $t \mapsto tH(t)$ . En fait, la relation

$$(3.9) \quad D^{1/2}_0 D^{1/2} = \frac{d}{dt}$$

est générale, comme nous allons l'établir.

Prop (6) La dérivation d'ordre un-demi est l'inverse à droite de l'intégration d'ordre  $1/2$ .

Si  $u(\cdot)$  est une fonction causale dérivable,

$$(3.10) \quad [I^{1/2}_0 D^{1/2} u](t) = u(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Preuve de la proposition (6).

$$\text{En effet, } [I^{1/2}_0 (D^{1/2} u)](t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{\pi(\theta-\varphi)}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{(t-\theta)(\theta-\varphi)}} \quad \text{par Fubini}$$

$$= \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \quad \text{compte tenu de (2.15)}$$

$$= u(t) \quad \text{car } u(\cdot) \text{ est causale. } \square$$

- Nous laissons en exercice au lecteur la preuve de la proposition

$$(3.11) \quad [(D^{1/2} \circ I^{1/2})u](t) = u(t), \quad u(\cdot) \text{ causale dérivable}$$

Prop (7) La dérivation d'ordre un-demi est une racine causale de la dérivée usuelle.

Soit  $u(\cdot)$  causale dérivable. Alors la relation (3.9) a lieu, c'est à dire

$$(3.12) \quad [(D^{1/2} \circ D^{1/2})u](t) = \frac{du}{dt}$$

Preuve de la proposition (7)

On calcule le produit  $(I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u$  de deux façons. On a d'une part :

$$\begin{aligned} (I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u &= [I^{1/2} (I^{1/2} \circ D^{1/2}) D^{1/2}]u \\ &= (I^{1/2} \circ D^{1/2})u = u(t) \quad \text{au vu de (3.10)} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u &= (I^{1/2} \circ I^{1/2}) [(D^{1/2} \circ D^{1/2})u] \\ &= \int_0^t [(D^{1/2} \circ D^{1/2})u](\theta) d\theta \quad \text{compte tenu de (2.14)}. \end{aligned}$$

ou dérive par rapport à  $t$  l'expression précédente. La relation (3.12) s'en déduit de manière élémentaire.  $\square$



## IV Intégrateur et dérivateur d'ordre $\alpha$ , $0 < \alpha < 1$ .

17

On généralise dans ce paragraphe au cas d'un indice  $\alpha \in ]0, 1[$  quelconque ce qui a été établi pour le cas particulier  $\alpha = \frac{1}{2}$  aux paragraphes précédents.

- On rappelle la définition de la fonction gamma d'Euler:

$$(4.1) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Elle vérifie les deux relations classiques

$$(4.2) \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$(4.3) \quad \Gamma(k+1) = k! \quad k \in \mathbb{N}.$$

On introduit la fonction beta:

$$(4.4) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \begin{array}{l} \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ \operatorname{Re} \beta > 0 \end{array}$$

On a alors la relation, un peu moins classique

$$(4.5) \quad \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha+\beta), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$$

- Nous prouvons la relation (4.5) dans le cas  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  pour fixer les idées. On a

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy e^{-x} x^{\alpha-1} e^{-y} y^{\beta-1}$$

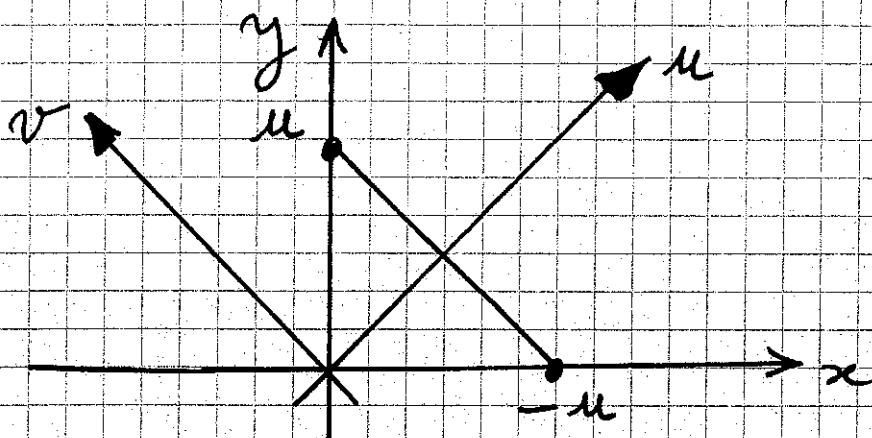


Figure 6 Changement de variables pour le calcul de  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ .

Nous posons  $u = x + y$ ,  $v = -x + y$ , soit  $x = \frac{u-v}{2}$ ,  $y = \frac{u+v}{2}$  comme illustré à la figure 6.

Alors  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$  et on en déduit

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} du \int_{-u}^{+u} dv e^{-u} \left(\frac{u-v}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{u+v}{2}\right)^{\beta-1} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du \int_0^1 (2ud\theta)^{\alpha-1} (1-\theta)^{\alpha-1} u^{\beta-1} \theta^{\beta-1}; v = -u + 2u\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{1+\alpha-1+\beta-1} \int_0^1 d\theta (1-\theta)^{\alpha-1} \theta^{\beta-1}$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta), \text{ ce qui montre la relation. } \square$$

• Nous généralisons maintenant la proposition (1).

Prop (8) Transformée de Fourier de  $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda} H(t)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ , alors on a

$$(4.6) \quad \widehat{\frac{1}{t^\lambda} H(t)} = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{(i\omega)^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

## Preuve de la proposition ⑧

19

• on pose

$$(4.7) \quad \rho_\lambda(t) = \frac{H(t)}{t^\lambda}$$

alors

$$(4.8) \quad \hat{\rho}_\lambda(\omega) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-i\omega t} \frac{dt}{t^\lambda}$$

on suppose  $\omega > 0$  pour fixer les idées et on fait le changement de variable  $\omega t = z$  au second membre de (4.8). Alors

$$(4.9) \quad \hat{\rho}_\lambda(\omega) = \omega^{\lambda-1} \int_0^\infty e^{-iz} \frac{dz}{z^\lambda}$$

avec une intégrale semi-convergente à calculer au membre de droite de (4.9). on a donc la bonne dépendance par rapport à  $\omega$  (voir le membre de droite de la relation (4.6)!) et il suffit maintenant de calculer la constante.

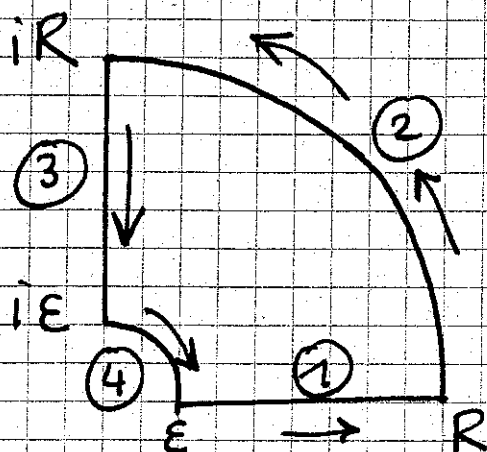


Figure 7. Contour d'intégration  $\Gamma_{\epsilon R}$  pour le calcul de  $\int_0^\infty \exp(-iz) \frac{dz}{z^\lambda}$ .

- Rappelons que  $z^\lambda$  est bien défini dans le plan complexe privé de  $\mathbb{R}_-$  par la relation:

$$(4.10) \quad (\rho e^{i\theta})^\lambda = \rho^\lambda e^{i\lambda\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad \lambda > 0.$$

et que cette fonction  $z \mapsto z^\lambda$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

- On intègre  $z \mapsto e^{-z} z^{-\lambda}$  le long du contour  $\Gamma_{\varepsilon, R}$  ( $0 < \varepsilon < R$ ) défini à la figure 7. On a quatre termes à calculer. Le premier (selon la numérotation définie à la figure 7) tend vers  $\Gamma(1-\lambda)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow \infty$ . Pour le "grand" quart de cercle, on a  $z = R e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} e^{-z} \frac{dz}{z^\lambda} \right| &\leq \int_0^{\pi/2} \left| e^{-R(\cos\theta + i\sin\theta)} \frac{i R e^{i\theta}}{R^\lambda e^{i\lambda\theta}} \right| d\theta \\ &\leq R^{1-\lambda} \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos\theta} d\theta \\ &\leq R^{1-\lambda} \int_0^{\pi/2} e^{-R(1 - \frac{2\theta}{\pi})} d\theta \quad (\text{voir la figure 4}) \\ &\leq R^{1-\lambda} e^{-R} \frac{\pi}{2R} \left[ e^{\frac{2R\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} \\ &\leq \frac{\pi}{2R^\lambda} (1 - e^{-R}) \quad \text{qui tend vers zéro si } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Le troisième terme où  $z = it$  se calcule facilement:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon, 0}^3} e^{-z} \frac{dz}{z^\lambda} = - \int_\varepsilon^R e^{-it} i^{1-\lambda} \frac{dt}{t^\lambda} \quad \text{qui tend vers}$$

$-i^{1-\lambda} \int_0^\infty e^{-it} \frac{dt}{t^\lambda}$ . Enfin le quatrième terme tend clairement vers zéro si  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De la relation  $\int_{\Gamma_\varepsilon R} e^{-z} \frac{dz}{z^\lambda} = 0$ , on déduit

$$(4.11) \quad \int_0^\infty e^{-it} \frac{dt}{t^\lambda} = \Gamma(1-\lambda) i^{\lambda-1}$$

et la relation (4.6) résulte de (4.9) et (4.11).  $\square$

Def (3) Intégrale d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

Pour  $u(\cdot)$  fonction causale, on pose

$$(4.12) \quad (I^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\theta)}{(t-\theta)^{1-\alpha}} d\theta$$

on a alors

$$(4.13) \quad \widehat{I^\alpha u} = \left( \frac{1}{i\omega} \right)^\alpha \widehat{u}$$

qui justifie la notation "d'intégrale d'ordre  $\alpha$ ".

Preuve de cette proposition.

On a aussi  $I^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \rho_{1-\alpha} * u$  avec la notation introduite à la relation (4.7).

Par transformation de Fourier de ce produit de convolution, on a

$$\widehat{I^\alpha u} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \widehat{\rho_{1-\alpha}} \widehat{u} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(i\omega)^{1-(1-\alpha)}} \widehat{u} = \frac{\widehat{u}}{(i\omega)^\alpha}$$

et montre la relation (4.13).  $\square$

• on généralise de même la dérivée d'ordre  $1/2$ , en cherchant  $D^\alpha u$  sous la forme

$$(4.14) \quad (D^\alpha u)(t) = K \int_0^t \frac{du/d\theta}{(t-\theta)^\lambda} d\theta$$

où  $K$  et  $\lambda$  sont à déterminer. on a alors

$D^\alpha u = K \rho_\lambda * \frac{du}{dt}$  et par transformation de Fourier et utilisation de la relation (4.6),

$$\widehat{D^\alpha u} = K \frac{\Gamma(1-\lambda)}{(i\omega)^{1-\lambda}} (i\omega) \widehat{u} = K \Gamma(1-\lambda) (i\omega)^\lambda \widehat{u}.$$

On récupère une cohérence avec le résultat attendu après transformation de Fourier, c'est à dire

$$(4.15) \quad \widehat{D^\alpha u}(\omega) = (i\omega)^\alpha \widehat{u}(\omega)$$

en posant la

Def 4 Dérivée d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$(4.16) \quad (D^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{du/d\theta}{(t-\theta)^\alpha} d\theta$$

pour  $u(\cdot)$  causale.

Prop 9 Dérivation d'ordre  $\alpha$  d'une puissance.

$$(4.17) \quad D^\alpha (t^\beta H(t)) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} H(t) \quad \left. \begin{matrix} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{matrix} \right\}$$

qui généralise les relations classiques pour  $\alpha=1$ .

### Preuve de la proposition (9)

23

Pour  $t > 0$ , on a, compte tenu de la définition (4.16),

$$\begin{aligned} D^\alpha(t^\beta H(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\beta \theta^{\beta-1}}{(t-\theta)^\alpha} d\theta \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} t^{\beta-1} \frac{t}{t^\alpha} \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{-\alpha} dx \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} B(\beta, 1-\alpha) \\ &= \frac{\beta \Gamma(\beta) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} \quad \text{compte tenu de (4.5)} \end{aligned}$$

D'où le résultat compte tenu de la relation (4.2).  $\square$

Prop (10) Composition de l'intégrateur d'ordre  $\alpha$  et du dérivateur d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Soit  $u(t)$  une fonction causale dérivable.

$$(4.18) \quad [(I_0^\alpha D^\alpha)u](t) = u(t)$$

$$(4.19) \quad I_0^\alpha D^\alpha = Id.$$

### Preuve de la proposition (10)

On suppose  $t > 0$ . Compte tenu de (4.12) et (4.16), on a:

$$\begin{aligned}
[I_0^\alpha D^\alpha u](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\theta}{(t-\theta)^{1-\alpha}} \int_0^\theta \frac{du/d\varphi}{\Gamma(1-\alpha) (\theta-\varphi)^\alpha} d\varphi & 24 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \int_\varphi^t \frac{d\theta}{(t-\theta)^{1-\alpha} (\theta-\varphi)^\alpha} & \text{via Fubini} \\
&= \frac{B(\alpha, 1-\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t du = \frac{1}{\Gamma(1)} u(t) & \text{au m de (4.5)} \\
& & \text{et } u(0) = 0
\end{aligned}$$

et le résultat en résulte.  $\square$

- Le lecteur pourra calculer à titre d'exercice  $I^\alpha (t^\beta H(t))$ , les composées  $I_0^\alpha D^\beta$  pour  $0 < \alpha, \beta < 1$  et leurs symétriques  $D_0^\beta I^\alpha$  appliquées aux fonctions causales.

## Ⓟ Exponentielle de Mittag-Leffler

- Pour  $\theta \in \mathbb{C}$  et  $0 < \alpha \leq 1$ , on appelle exponentielle de Mittag-Leffler et on note  $E_\alpha(\cdot)$  la fonction suivante

$$(5.1) \quad E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

On remarque bien sûr que  $E_1$  est l'exponentielle usuelle :  $E_1(\theta) = \exp(\theta)$ . Nous allons surtout vérifier que cette fonction permet d'exprimer



facilement "la" solution de l'équation  
"d. différentielle" suivante

$$(5.2) \quad D^\alpha u + \lambda^\alpha u = 0, \quad t > 0$$

avec la condition initiale

$$(5.3) \quad u(0) = 1$$

Dans ce qui suit, nous supposons admis que le modèle (5.2)(5.3) a une unique solution  $u(\cdot)$  telle que  $u(t) \equiv 1$  pour  $t < 0$  ( $u-1$  est causale) et nous désirons sans ambage à l'ordre  $\alpha$  une série comme la somme de ses dérivées à l'ordre  $\alpha$ .

Prop (11) Résolution de l'équation d. différentielle fondamentale

La fonction

$$(5.4) \quad u(t) = E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha), \quad H(t) \quad t > 0$$

est une solution de l'équation (5.2) avec la condition initiale (5.3)

Preuve de la proposition (11)

grâce à la proposition 9 (relation (4.17)), on peut dériver à l'ordre  $\alpha$  le terme général

de la série au membre de droite de (5.4). On a

$$\begin{aligned} D^\alpha \left\{ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} (-\lambda t)^\alpha)^k + H(t) \right\} &= \frac{(-1)^k \lambda^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)} D^\alpha [t^{\alpha k} H(t)] \\ &= \frac{(-1)^k \lambda^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} t^{\alpha k - \alpha} H(t) \\ &= -\lambda^\alpha \frac{(-1)^{k-1} \lambda^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(1+\alpha(k-1))} t^{\alpha(k-1)} H(t) \end{aligned}$$

et au retour, à un décalage d'indice près, le terme général de la série qui permet de calculer  $E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha)$ . On somme donc pour  $k$  de 1 à l'infini la relation précédente. On trouve

$$(5.5) \quad D^\alpha [E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) - 1] + E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) = 0$$

ce qui donne le résultat escompté car  $E_\alpha(0) = 1$  et  $D^\alpha(1) = 0$ .



## Ⓓ Approximation numérique.

- Nous changeons de paradigme la fonction causale de départ  $u(\cdot)$  n'est plus connue via l'ensemble continu de ses valeurs  $u(t)$  pour  $t > 0$  mais grâce à un échantillonnage  $u_j$  selon un pas  $h \equiv \Delta t$ :

$$(6.1) \quad u_j = u(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$

La causalité s'exprime par le fait que  $u_j = 0$  si  $j \in \mathbb{N}$ . Comment approcher dans ces conditions  $(D^\alpha u)(jh)$ , dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $u(t)$  au temps  $jh$ ?

- l'idée "naturelle" consiste à approcher d'abord la dérivée usuelle  $Du = \frac{du}{dt}$  à l'aide d'un schéma aux différences. Nous choisissons dans un premier temps le schéma décentré amont, c'est à dire "vers le passé":

$$(6.2) \quad \frac{du}{dt}(jh) \approx \frac{1}{h}(u_j - u_{j-1}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

Nous introduisons le "décalage d'indice"  $\delta$ :

$$(6.3) \quad (\delta u)_j \equiv u_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

on a alors le calcul suivant:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)(jh) \approx \frac{1}{h}(u_j - (\delta u)_j) = \frac{1}{h}[(Id - \delta)u]_j$$

et la fonction  $u$  elle-même peut disparaître:

$$(6.4) \quad \frac{d}{dt} \approx \frac{1}{h}(I - \delta)$$

- l'idée de Grunwald et Letnikov est de prendre la puissance formelle à l'ordre  $\alpha$  de cet opérateur:

$$(6.5) \quad D^\alpha \simeq \left( \frac{1}{h} (I - \delta) \right)^\alpha$$

et de développer en série le membre de droite de la relation (6.5):

$$(I - \delta)^\alpha = Id - \alpha \delta + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \delta^2 + \dots$$

d'où

$$(D^\alpha u)_j \simeq \frac{1}{h^\alpha} \left( u_j - \alpha u_{j-1} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) u_{j-2} + \dots \right)$$

Définition 5 Schéma de Grünwald et Letnikov.

on pose

$$(6.6) \quad (D_{GL}^\alpha u)_j = \frac{1}{h^\alpha} \left[ 1 - \alpha u_j + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u_{j-2} + \dots + \beta_k u_{j-k} + \dots \right]$$

où  $\beta_k$  est le coefficient de  $x^k$  dans le développement en série de  $(1-x)^\alpha$ .

- Le schéma de Grünwald-Letnikov (6.6) est très populaire chez les praticiens de l'approximation numérique de dérivées d'ordre fractionnaire. Pourtant, le schéma initial (6.2) pour la dérivée d'ordre 1 n'est précis qu'à l'ordre 1. Il semble plus judicieux de partir d'un schéma décent vers le passé,

d'ordre deux, comme le schéma de Gear: 29

$$(6.7) \quad \frac{du}{dt}(jh) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{3}{2} u_j - 2u_{j-1} + \frac{1}{2} u_{j-2} \right)$$

on déroule (suivant Lubisch et une équipe formée d'A.C. Galucio, J.F. Deu, S. Mengué et l'auteur) le procédé précédent. on remarque d'abord que l'opérateur de Gear  $G$ , défini au membre de droite de la relation (6.7):

$$(6.8) \quad (Gu)_j = \frac{1}{h} \left( \frac{3}{2} u_j - 2u_{j-1} + \frac{1}{2} u_{j-2} \right)$$

peut s'écrire simplement à l'aide de l'opérateur de décalage d'indice:

$$(6.9) \quad G = \frac{1}{h} \left( \frac{3}{2} \text{Id} - 2S + \frac{1}{2} S^2 \right)$$

on a une factorisation préliminaire:

$$(6.10) \quad G = \frac{3}{2h} \left( I - \frac{4}{3} S + \frac{1}{3} S^2 \right)$$

### Def 6) Schéma $G^\alpha$

d'approximation  $(G^\alpha u)_j$  de la dérivée d'ordre  $\alpha$   $(D^\alpha u)(jh)$  s'obtient en élevant le membre de droite de (6.10) à la puissance  $\alpha$ :

$$(6.11) \quad (G^\alpha u)_j = \left( \frac{3}{2h} \right)^\alpha \left[ \frac{u_j}{3} - \frac{4^\alpha}{3} u_{j-1} + \frac{\alpha(8^\alpha - 5)}{9} u_{j-2} + \dots + \frac{\alpha!}{k!} u_{j-k} \right]$$

où  $\gamma_k$  est le coefficient de  $x^k$  dans le développement en série formelle de  $(1 - \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{3})^\alpha$ . 30

## (VII) Epilogue mécanique

- A quoi servent les dérivées d'ordre fractionnaire? Selon nous, avant tout à modéliser un comportement qui s'amortit très lentement. La solution du modèle (5.2) (5.3) est représentée à la figure 8. Bien sûr, pour  $\alpha > 0$ , la solution  $u(t)$  (relation (5.1)) tend vers 0 pour  $t \rightarrow \infty$ , mais beaucoup moins vite que la classique exponentielle. Elle décroît (à  $\alpha = 1$ ). De plus, la dérivation d'ordre fractionnaire est une convolution, qui met en évidence des effets de mémoire longue.

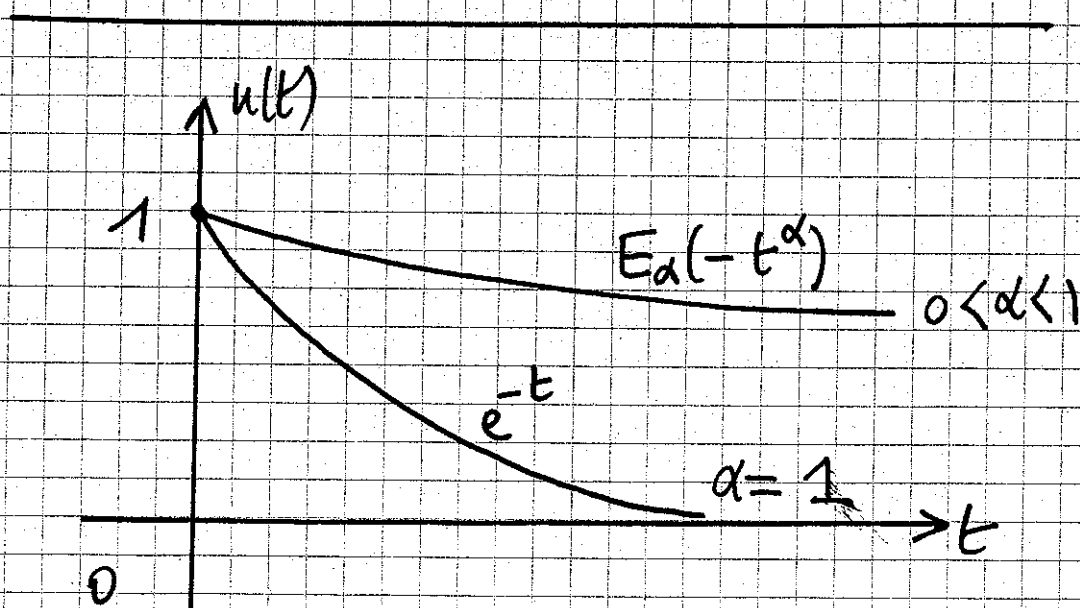


Figure 8

Décroissance lente de la solution de  $D^\alpha u + u = 0, u(0) = 1$

- Les mécaniciens se sont rendu compte au cours des années 1980 que les élastomères comme le caoutchouc ont un amortissement qui est donné avec une excellente approximation par un terme du type  $\gamma z^\alpha D^\alpha u$ , avec un exposant  $\alpha$  compris strictement entre 0 et 1. Un oscillateur anharmonique en caoutchouc suit donc avec une excellente approximation une équation différentielle (?) du type

$$(7.1) \quad m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma z^\alpha D^\alpha u + ku = f(t)$$

Il faut noter ici que le coefficient  $\gamma$  de la dérivée fractionnaire n'est en général pas  $\frac{1}{2}$  comme pour les couches limites thermiques, mais un nombre réel qui n'a pas d'approximation rationnelle simple en général.

- L'approximation numérique du modèle (7.1) est en général délicate. Une approche possible est de coupler le schéma de Newmark, classique en mécanique des structures, avec celui de Grünwald-Letnikov ou  $G^\alpha$ .

Versailles, 21 avril 2007

Dubois