

Société Française d'Acoustique
4^{ème} Congrès, Marseille, 14-18 avril 1997

Modèle et simulations numériques de la propagation acoustique non-linéaire dans les conduits

R. Msallam^{1&2}, S. Dequidt¹, F. Dubois², R. Caussé¹

¹ IRCAM

1 place Stravinsky, 75004 Paris, France

² Institut aérotechnique (CNAM)

15 rue Marat, 78210 Saint Cyr, France

Summary : We propose a quasi monodimensionnal model for propagation of nonlinear acoustic waves in pipes including viscothermal boundary layer effects using an integral method analogous to those used in aerodynamics. We present some numerical computations on simple cases and an original one, the nonlinear propagation effect in a trombone.

1 INTRODUCTION

Dans les conduits, à forte amplitude acoustique, l'approche linéaire classique (théorie de Kirchhoff, Rayleigh, 1896) permet la prise en compte des effets cumulatifs des pertes visco-thermiques aux parois mais ne décrit pas des phénomènes non-linéaires comme la distorsion (pouvant entraîner par effet cumulatif la formation d'onde de choc) ou l'apparition d'écoulement moyen ("acoustic streaming").

Ces phénomènes obéissent essentiellement aux équations non-linéaires tridimensionnelles de la dynamique des gaz (équations de conservation) et les progrès des méthodes de calcul scientifique permettent aujourd'hui d'envisager leur résolution numérique directe. Cependant, cela nécessite la mise en oeuvre de moyens informatiques très importants (en terme de maillage en particulier), d'autant plus qu'il existe une disproportion d'échelle entre les effets locaux (petite échelle) comme ceux de couche limite et la distance de propagation (Botteldooren, 1996).

C'est pourquoi, en nous inspirant de l'article historique de Chester (Chester, 1964), nous préférons nous ramener, par intégration sur la section des équations de conservation simplifiées à un modèle quasi unidimensionnel non-linéaire incluant des variations lentes en espace de la section et les effets de couche limite via le calcul des profils de vitesse et de température.

La formulation choisie nous rapproche ainsi de la problématique du couplage fluide parfait fluide visqueux et des méthodes intégrales de l'aérodynamique (Cousteix, 1988 ; Lagrée et al, 1996).

2 FORMULATION

Soit un écoulement axisymétrique dans une conduite à section $S(x)$ lentement variable en espace.

Les termes d'ordre 2 en $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ (petit paramètre mesurant les effets visqueux devant les effets convectifs ou instationnaires, Re désignant le nombre de Reynolds) et Sh (petit paramètre mesurant l'épaisseur de couche limite δ devant le rayon du tuyau R) sont négligés dans les équations de conservation (masse, impulsion et énergie). Le champ de pression est alors quasi-uniforme suivant la coordonnée transversale y dans la couche limite. En considérant les grandeurs (d'indice e) quasi-uniformes dans le flux principal ($\frac{1}{ReSh} \ll 1$), après intégration sur la section du tube, la formulation conservative du problème couplant la couche limite visco-thermique au fluide parfait s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t [S\rho_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e - \rho) dy] + \partial_x [S\rho_e u_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy] = 0 \\ \partial_t [S\rho_e u_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy] + \\ \partial_x [S\rho_e u_e^2 - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e u_e^2 - \rho u^2) dy + Sp_e] = p_e \partial_x S - 2\pi R \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ \partial_t [S\rho_e E_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e E_e - \rho E) dy] + \\ \partial_x [S\rho_e E_e u_e - 2\pi R \int_0^\delta (\rho_e E_e u_e - \rho E u) dy + Sp_e u_e - 2\pi R p_e \int_0^\delta (u_e - u) dy] \\ = -2\pi R K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{array} \right. \quad (1)$$

Cette formulation fait apparaître la contrainte pariétale (terme en $\partial_y u$ dans l'équation de l'impulsion), le flux de chaleur pariétal (terme en $\partial_y T$ dans l'équation de l'énergie) et les défauts des diverses quantités (masse linéique, débit masse ...) liés à l'existence de la couche limite. Lorsque les non-linéarités de couche limite sont négligeables, nous en déduisons le système couplé Euler-couche limite suivant (Msallam et al, 1996) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t W_1 + \partial_x W_2 = 0 \\ \partial_t W_2 + \partial_x [(\gamma - 1)W_3 + \frac{(3-\gamma)W_2^2}{2W_1}] = p_e \partial_x S - 2\pi R \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ \partial_t W_3 + \partial_x [\frac{W_2}{W_1}(\gamma W_3 - (\gamma - 1)\frac{W_2^2}{W_1})] = -2\pi R K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{array} \right. \quad (2)$$

la pression s'exprimant en fonction des variables linéiques conservatives :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 = S\rho_e - 2\pi R \int_0^\infty (\rho_e - \rho) dy \\ W_2 = S\rho_e u_e - 2\pi R \int_0^\infty (\rho_e u_e - \rho u) dy \approx S\rho_e u_e - 2\pi R \rho_0 \int_0^\infty (u_e - u) dy \\ W_3 = S\rho_e E_e - 2\pi R \int_0^\infty (\rho_e E_e - \rho E) dy \approx S\rho_e E_e \end{array} \right. \quad (3)$$

avec les profils de vitesse et de température au premier ordre (solutions de simples équations de diffusion) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(y, t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \partial_x p_e(\tau) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\nu_0(t-\tau)}} \right) d\tau \\ T(y, t) = T_0 + \frac{1}{\rho_0 c_p} \int_0^t \partial_t p_e(\tau) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha_0(t-\tau)}} \right) d\tau \end{array} \right. \quad (4)$$

Notons que l'épaisseur de couche limite n'apparaît plus explicitement.

3 SIMULATIONS NUMERIQUES

Le système est résolu par un schéma classique de discrétisation spatio-temporelle, le schéma de Lax-Wendroff (Lax et al, 1960) et la convolution numérique. Pour une onde propagative le code numérique converge à faible amplitude (effets non-linéaires négligeables) vers la solution de Kirchhoff "tuyaux larges" (Figure 1), et à forte amplitude (sans pertes) vers la solution d'onde simple (Whitham, 1974). Avec les pertes visco-thermiques, on observe la distorsion non-linéaire ainsi que les effets d'atténuation et de dispersion de l'onde en fonction de s , distance de propagation adimensionnée (Figure 2).

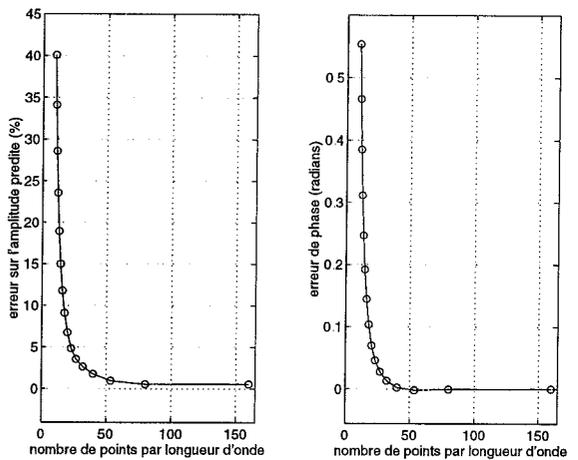


Fig. 1 : Erreurs entre code numérique et théorie de Kirchhoff (amplitude et phase)

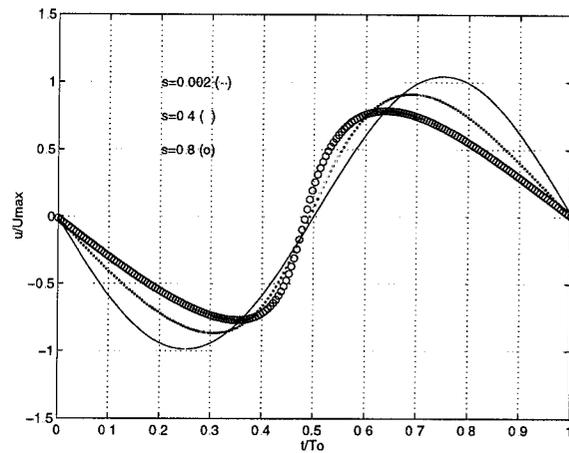


Fig. 2 : Déformation d'une sinusoïde en fonction de la distance de propagation

4 APPLICATION

Nous appliquons ce modèle à l'étude des effets non-linéaires dans le trombone, effets non négligeables à fort niveau de jeu (Hirschberg et al, 1996). A partir d'un signal mesuré de début de coulisse (Gilbert et al, 1996) et d'une géométrie simplifiée de trombone, nous comparons le spectre du signal de pression calculé à la sortie du pavillon en linéaire et en non-linéaire (figure 3).

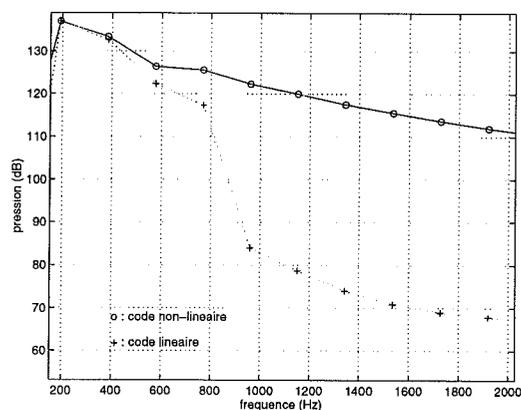


Fig. 3 : Influence de la distorsion non-linéaire

La distorsion non-linéaire de l'onde engendre un fort enrichissement du spectre qui rend le timbre plus réaliste à l'écoute (son "cuivré").

5 CONCLUSION

Nous avons présenté un modèle couplant les équations d'Euler de la dynamique des gaz et des équations de couche limite pour la propagation acoustique non-linéaire dans les guides. Les simulations numériques montrent que ce modèle est compatible à faible amplitude avec la théorie linéaire de Kirchhoff et à forte amplitude avec des solutions classiques de l'acoustique non-linéaire.

La formulation est suffisamment générale pour envisager la prise en compte d'autres effets (non-linéarités de couches limites, fluctuations de parois...).

Nous concevons ainsi un outil utile à l'étude et à la modélisation des instruments à vent. Par ailleurs, notre modèle offre une alternative aux modèles utilisés pour simuler la propagation non-linéaire dans les pavillons (Holland et al, 1996).

Nous remercions A. Hirschberg, L. Menguy et J. Gilbert pour les nombreux échanges scientifiques que nous avons eus.

Références

- Botteldooren D., Numerical model for moderately nonlinear sound propagation in three-dimensional structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(3):1357–1367, 1996.
- Chester W., Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, 18(44), 1964.
- Cousteix J., *Couche limite laminaire*. Cepadues-Editions, 1988.
- Gilbert J., Petiot J.F., Non-linéarités dans les instruments de type cuivre : résultats expérimentaux. Actes de Colloques du 4^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Marseille, 1996.
- Hirschberg A., Gilbert J., Msallam R., Wijnands A., Shock waves in trombones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(3):1754–1758, 1996.
- Holland K.R., Morfey C.L., A model of nonlinear wave propagation in horns. *J. Audio Eng. Soc.*, 44:569–580, 1996.
- Lagrée P.Y., Rossi M., Etude de l'écoulement du sang dans les artères: effets non linéaires et dissipatifs. *CRAS*, t 332 Série II b. pages 401–408, 1996.
- Lax P.D., Wendroff B., Systems of conservation laws. *CPAM*, 13:217–237, 1960.
- Msallam R., Menguy L., Causse R., Hirschberg A., Nonlinear wave propagation in trombones. In *Nonlinear acoustics in perspective 1996* (14th ISNA). Nanjing University Press, Nanjing, 1996.
- Rayleigh J.W.S., *Theory of Sound*. 2nd ed. (1896), reprinted by Dover, New York 1945.
- Whitham G.B., *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience Publication, 1974.