Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique — 25 septembre 2009

Splines cubiques

L'interpolation par splines est une alternative moderne à l'interpolation de Lagrange classique. On découpe l'intervalle d'étude à l'aide d'une subdivision et on se donne des valeurs numériques aux sommets du maillage monodimensionnel ainsi obtenu. Puis on utilise une interpolation de degré relativement faible dans chaque intervalle. Des conditions de raccord permettent d'assurer une bonne régularité. Dans le cas fondamental proposé dans ces travaux pratiques, les polynomes d'interpolation sont de degré trois et les fonctions interpolantes deux fois continûment dérivables.

1) Interpolation de Hermite.

• Expliciter la base $(\varphi_j)_{1\leq j\leq 4}$ de l'espace P_3 des polynomes de degré inférieur ou égal à trois satisfaisant aux relations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1(0)=1\,,\ \varphi_1(1)=0\,,\ \varphi_1'(0)=0\,,\ \varphi_1'(1)=0 \\ \varphi_2(0)=0\,,\ \varphi_2(1)=1\,,\ \varphi_2'(0)=0\,,\ \varphi_2'(1)=0 \\ \varphi_3(0)=0\,,\ \varphi_3(1)=0\,,\ \varphi_3'(0)=1\,,\ \varphi_3'(1)=0 \\ \varphi_4(0)=0\,,\ \varphi_4(1)=0\,,\ \varphi_4'(0)=0\,,\ \varphi_4'(1)=1\,. \end{cases}$$

Calculer $\varphi_j''(0)$ et $\varphi_j''(1)$ pour les quatre polynomes introduits à la question précédente. Montrer que toute fonction $\psi\in P_3$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$(2)\quad \psi \,=\, \psi(0)\,\varphi_1 \,+\, \psi(1)\,\varphi_2 \,+\, \psi'(0)\,\varphi_3 \,+\, \psi'(1)\,\varphi_4\,.$$

• On se donne deux nombres réels $a<b$ et une fonction ψ polynomiale de degré inférieur ou égal à trois. Comment adapter les fonctions φ_j précédentes en de nouvelles fonctions $\widetilde{\varphi_j}$ de façon à remplacer la relation (2) par la représentation

$$(3)\quad \psi \,=\, \psi(a)\,\widetilde{\varphi_1} \,+\, \psi(b)\,\widetilde{\varphi_2} \,+\, \psi'(a)\,\widetilde{\varphi_3} \,+\, \psi'(b)\,\widetilde{\varphi_4}\ ?$$

• Développer un sous-programme "Matlab" (ou Scilab ou Octave) qui, étant donné l'ensemble des six nombres réels a, b, $\psi(a)$, $\psi(b)$, $\psi'(a)$ et $\psi'(b)$, dessine le graphe de la fonction $\psi(\bullet)$ précédente sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ (et uniquement sur cet intervalle !).

2) Splines cubiques sur un maillage uniforme.

• On se place sur l'intervalle $[0\,,\,1]$ et on se donne un entier naturel N supérieur ou égal à 1. On pose

(4) $\quad h \,=\, \dfrac{1}{N}\,, \qquad x_j \,=\, j\,h\,, \quad 0 \leq j \leq N\,.$

On se donne une famille arbitraire $u_0, \,\ldots,\, u_N$ de réels et on cherche à relier les points $(x_j\,,\,u_j)$ $(0 \leq j \leq N)$ à l'aide du graphe d'une fonction $u(\bullet)$ assez régulière de sorte que

(5) $\quad u\big(x_j\big) \,=\, u_j\,, \quad 0 \leq j \leq N\,.$

On suppose de plus que la restriction de la fonction $u(\bullet)$ à chaque intervalle $[x_j\,,\,x_{j+1}]$ est un polynome de degré inférieur ou égal à trois :

(6) $\quad u\,\big|_{[x_j\,,\,x_{j+1}]} \in P_3\,, \quad 0 \leq j \leq N-1\,.$

• Montrer que les seules inconnues de ce problème sont les dérivées v_j de la fonction $u(\bullet)$ aux points x_j :

(7) $\quad v_j \,\equiv\, u'(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq N\,.$

Montrer que la condition de raccord des dérivées secondes au point x_j pour $1 \leq j \leq N-1$ prend la forme algébrique suivante :

(8) $\quad v_{j-1} \,+\, 4\,v_j \,+\, v_{j+1} \,=\, \dfrac{3}{h}\big(u_{j+1} - u_{j-1}\big)\,, \quad 1 \leq j \leq N-1\,.$

• On suppose de plus

(9) $\quad u''(0) \,=\, u''(1) \,=\, 0\,.$

Montrer qu'on a alors les relations

(10) $\quad 2\,v_0 \,+\, v_1 \,=\, \dfrac{3}{h}\big(u_1 - u_0\big)\,, \qquad 2\,v_{N-1} \,+\, v_N \,=\, \dfrac{3}{h}\big(u_N - u_{N-1}\big)\,.$

Former et résoudre le système tridiagonal qui permet de calculer les dérivées premières $(v_j)_{0 \leq j \leq N}$ en fonction de l'entier N et des valeurs numériques $(u_j)_{0 \leq j \leq N}$. Développer un programme "Matlab" (ou équivalent) qui étant donné N, $u_0, \,\ldots,\, u_N$ dessine le graphe de la fonction $u(\bullet)$, "spline cubique d'interpolation" définie dans cette partie. Valider et exploiter.

3) Bonus : splines cubiques sur un maillage quelconque.

On lève l'hypothèse (4) et on suppose seulement

(11) $\quad 0 = x_0 \,<\, x_1 \,<\, \ldots \,<\, x_j \,<\, x_{j+1} \,<\, \ldots \,<\, x_N \,=\, 1\,.$

Reprendre l'ensemble de l'étude proposée à la seconde question dans ce cas général. On pourra poser $\Delta_{j+1/2} \,\equiv\, x_{j+1} \,-\, x_j$ pour $0 \leq j \leq N-1$ et $\rho_j \,\equiv\, \frac{\Delta_{j+1/2}}{\Delta_{j-1/2}}$ pour $1 \leq j \leq N-1$.

FD, 22 septembre 2009.