Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique

17 octobre 2008

Interpolation de Lagrange

1) Premier exemple.
Pour $x \in [0,\, 3\pi]$, on pose $f(x) = \sin x$. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on introduit $(n+1)$ points $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ équidistants de sorte que $x_0 = 0$ et $x_n = 3\pi$. On note $p_n f$ le polynome de degré inférieur ou égal à n tel que

(1) $\qquad \big(p_n f\big)(x_j) \,=\, f(x_j)\,, \qquad 0 \leq j \leq n\,.$

Le polynome $p_n f$ est le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points x_j. A l'aide des fonctions "polyfit" et "polyval" du logiciel "Matlab", proposer une procédure qui calcule $(p_n f)(x)$ pour x arbitraire et n quelconque. Tracer la courbe représentative de la fonction obtenue pour quelques valeurs de l'entier n.

2) Algorithme de Horner-Newton.
La méthode des différences divisées consiste à poser

(2) $\qquad f[x_j] \,=\, f(x_j)\,, \qquad 0 \leq j \leq n$

puis de proche en proche :

(3) $$f[x_j, \ldots, x_k] \,=\, \frac{f[x_j, \ldots, x_{k-1}] - f[x_{j+1}, \ldots, x_k]}{x_j - x_k}\,,\ 0 \leq j < k \leq n$$

jusqu'à $f[x_0, \ldots, x_n]$.

2-a) Construire une procédure qui, pour f et n arbitraires, calcule tous ces nombres et les stocke dans un tableau.

- Le calcul du polynome $p_n f$ s'effectue alors à l'aide de l'algorithme suivant :

(4) $\qquad q_0(x) \,\equiv\, f[x_0, \ldots, x_n]$

(5) $\qquad q_j(x) \,=\, f[x_0, \ldots, x_{n-j}] + (x - x_{n-j})\, q_{j-1}(x)\,, \qquad 1 \leq j \leq n$

avec à la fin :

(6) $\qquad q_n(x) = (p_n f)(x)\,.$

2-b) Construire une procédure qui calcule $(p_n f)(x)$ pour x quelconque et n arbitraire une fois donné le tableau de la question 2-a. La valider dans le cas où la fonction f est un polynome simple. La tester pour l'exemple proposé à la première question. Montrer qu'elle est toujours efficace pour n entier supérieur ou égal à 20.

3) Etude de l'erreur d'interpolation.
Pour f fonction régulière $[a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(p_n f)$ polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points x_j, on pose

$$E_n(f) \equiv \sup_{a \leq x \leq b} \mid f(x) - (p_n f)(x) \mid \, . \tag{7}$$

3-a) Proposer une valeur expérimentale de $E_n(f)$ pour la fonction f de la question 1. Comparer avec l'estimation classique (voir par exemple le livre de J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996).

$$E_n(f) \leq n! \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \sup_{a \leq x \leq b} \mid f^{(n+1)}(x) \mid \, . \tag{8}$$

On présentera les résultats dans le plan (n, logarithme des erreurs $E_n(f)$).

3-b) Que constate-t-on pour $n \approx 30$? Expliquer le phénomène observé.

4) Phénomène de Runge.
On change la fonction f pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, avec $a = -5$ et $b = +5$.

4-a) Avec des nœuds x_j équirépartis, constater la divergence de la suite des polynomes $p_n f$.

4-b) Avec des nœuds de Tchebycheff, c'est à dire

$$x_j = 5 \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)} \pi \right), \qquad 0 \leq j \leq n \tag{9}$$

dans le cas présent, montrer expérimentalement que la (nouvelle !) suite $p_n f$ converge. Tracer le graphe de l'erreur $E_n(f)$ obtenue en reprenant l'analyse proposée à la troisième question.

FD, octobre 2006, 4, 20 octobre 2008.