Université Paris Sud — Département de mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique

10 octobre 2008

Intégration numérique

1) Algorithmes fondamentaux.
Construire un module "Matlab" qui calcule de façon approchée les intégrales $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ et $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des cinq méthodes suivantes : sommes de Riemann à gauche et à droite, formule du point milieu, méthode des trapèzes et méthode de Simpson. On utilisera n intervalles d'intégration permettant une subdivision régulière de l'intervalle d'étude.

2) Etude expérimentale de l'erreur.
Pour chacune des deux intégrales proposées plus haut, on note ϵ_n l'erreur entre le calcul exact de l'intégrale et la valeur approchée évaluée avec n intervalles. Montrer expérimentalement que cette erreur est de la forme $\epsilon_n \approx C\, n^{-\alpha}$ et déterminer les différentes valeurs de α pour les deux intégrales vues plus haut et les cinq méthodes proposées. Pouvez-vous expliquer les résultats obtenus à l'aide du cours ?

Pour les deux intégrales proposées plus haut, combien de points sont nécessaires pour que la méthode de Simpson donne le résultat exact avec la précision de la machine (10^{-15} typiquement) ?

3) Calcul d'une intégrale singulière.
On s'intéresse maintenant au calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(\sqrt{x})}$. Proposer une méthode simple pour évaluer cette intégrale avec la précison de la machine.

4) Une seconde intégrale singulière.
Même question pour l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin(\sqrt{x+x^4+x^6})}$. On pourra développer la fonction autour de la singularité et appliquer une formule d'intégration numérique pour la partie régulière. Combien de points (environ !) utilisez-vous pour atteindre la précision numérique de la machine ?

FD, 4 octobre 2008.