Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique

23 octobre 2009

Gradient projeté à deux variables

• On se propose de déterminer numériquement la solution d'un problème de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u \in K \\ J(u) \leq J(v)\,, \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

pour différents convexes $K \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $J(\bullet)$ quadratique :

$$(2) \quad J(v) \,=\, \frac{1}{2} \Big[\Big(\frac{x-a}{\alpha} \Big)^2 + \Big(\frac{y-b}{\beta} \Big)^2 \Big] \,, \quad v \equiv (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,,$$

où l'on suppose $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. On s'intéressera successivement aux deux convexes

$$(3) \quad K_1 \,=\, \Big\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \,=\, 1 \Big\} \qquad p \neq 0\,,\ q \neq 0\,,$$

$$(4) \quad K_2 \,=\, \big\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0 \big\}\,.$$

1) Préliminaires.

• Développer deux programmes "Matlab" permettant de calculer la projection d'un point arbitraire de $\mathbb{R}^2$ sur les convexes K_1 et K_2.

2) Algorithme du gradient projeté.

• Si P désigne le projecteur sur le convexe K et ρ un réel strictement positif (à fixer au mieux !), on rappelle que l'algorithme du gradient projeté s'écrit (avec les notations du problème (1)) :

$$(5) \quad u^{k+1} \,=\, P\Big(u^k \,-\, \rho\, \nabla J\big(u^k\big) \Big)\,.$$

Développer un (ou plusieurs !) programmes "Matlab" permettant de résoudre le problème (1) pour $K = K_1$ et $K = K_2$ en utilisant l'algorithme du gradient projeté (5).

FD, 20 octobre 2009.