Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois.

Chaînette numérique.

24 novembre 2006.

1) Enoncé du problème continu.

- on se donne une courbe $[0,1] \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ assez régulière de longueur L donnée

(1) $$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = L,$$

fixée en $x=0$ et $x=1$; on prendra ici par convention

(2) $$y(0)=1, \quad y(1)=0.$$

- on cherche à déterminer la position d'équilibre qui minimise l'énergie potentielle dans un champ de gravité (unité dans ce TP !) i.e. la fonctionnelle

(3) $$J(y) = \int_0^1 y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

- Afin que le TP se déroule dans les délais, nous ne demandons pas de déterminer les extrémales de $J(\bullet)$ sous les contraintes (1) et (2). Il pourra être utile de le faire. Après.

2) Discrétisation

- On se donne n entier ≥ 1, $h = 1/n$, $x_j = jh$ pour $j = 0, \dots, n$. On approche la fonction $y(\cdot)$ par son interpolé affine sur $[x_j, x_{j+1}]$ à partir des valeurs nodales $y_j = y(x_j)$. La condition (2) prend la forme

(4) $\quad y_0 = 1, \quad y_n = 0.$

- On écrit une forme discrète de la relation (1) à l'aide d'une fonction g_n que l'on précisera

(5) $\quad g_n(y_0, y_1, \dots, y_n) = 0.$

- Donner de même l'expression de J_n, discrétisation de $J(\cdot)$ avec n intervalles et le choix d'une interpolation affine dans chaque intervalle

- Pour quelques exemples de fonctions discrètes $(y_j)_{j=0,\dots,n}$ satisfaisant la condition (4) et que l'on représentera graphiquement, calculer $J_n(y_0, \dots, y_n)$

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_i}(y_0, \dots, y_n) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\frac{\partial^2 J_n}{\partial y_i \partial y_j}(y_0, \dots, y_n) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$g_n(y_0, \dots, y_n)$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial y_i}(y_0, \dots, y_n) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

3) Point selle.

- On admet que la solution y du problème de minimisation discrète

$$(6) \quad J_n(y) \leq J_n(z), \ \forall z \text{ tel que } (4) \text{ et } (5)$$

sous la contrainte (4)(5) est point selle du Lagrangien

$$(7) \quad \mathcal{L}_n(y, \lambda) = J_n(y) + \lambda \, g_n(y).$$

Écrire les équations de ce point selle.

- Écrire et programmer un algorithme de Newton pour résoudre le système (non linéaire) précédent de n équations à n inconnues. On pourra le tester avec $n = 10$, $L = 1,5$ et la condition initiale $\lambda_0 = 0$, $(y_j)_{initial} = (1 - x_j)^2$.
- Pour une résolution numérique avec des valeurs de L plus grandes, on utilisera un algorithme de continuation en L : on initialise l'algorithme de Newton avec la solution obtenue antérieurement pour une valeur de L plus petite.