Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois

Minimisation sans contrainte

10 novembre 2006.

1) Méthode du gradient pour une fonctionnelle quadratique.

- Soit $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction assez régulière. Afin de minimiser J sur $\mathbb{R}^2$, la méthode du gradient simple consiste à se donner un point initial $u^0 \in \mathbb{R}^2$, un coefficient $\rho > 0$ et à calculer u^{k+1} à partir de u^k à l'aide de la relation suivante, qui définit l'algorithme du gradient simple :

$$(1) \qquad u^{k+1} = u^k - \rho \, \nabla J(u^k) \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Programmer cet algorithme classique pour une fonction J quadratique de votre choix. On représentera à chaque itération d'une part l'état u^k et d'autre part le segment $[u^k, u^{k+1}]$.
- Pourquoi le paramètre $\rho > 0$ ne doit-il pas être choisi trop grand ?

2) Minima locaux

- On pose

(2) $J(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}y + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}(x^4+y^4)$

Reprendre la question précédente avec cette fonction (non quadratique !) J et les valeurs suivantes des paramètres :

(3) $u^0 = (-3, \frac{1}{2})$; $\rho = 0{,}06$

(4) $u^0 = (3, 0)$; $\rho = 0{,}06$

Que constate-t-on ?

- Montrer que, sauf pour un cas facile à traiter d'un point de vue analytique, la recherche des minima de J se ramène à celle des zéros de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

(5) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + x - y - 1 \\ -\frac{x^2}{2} + y + y^3 \end{pmatrix}$

Déterminer tous les zéros de f à l'aide d'un algorithme de Newton (sous-relaxé) :

(6) $u^{k+1} = u^k - \rho\,(df(u^k))^{-1} \cdot f(u^k)$, $k \in \mathbb{N}$

- Quelle vérification graphique pouvez-vous proposer ? Proposer une synthèse de l'étude des extrema de J.

3) Réseau téléphonique

- On désigne par $a_1, \dots, a_n$ n points du plan $\mathbb{R}^2$ qu'on suppose non alignés. On cherche $u \in \mathbb{R}^2$ qui minimise la fonction

$$(7) \quad J(v) = \sum_{j=1}^{n} |v - a_j| \; , \; v \in \mathbb{R}^2 .$$

- Quelle est la solution du problème de minimisation ($u \in \mathbb{R}^2$, $J(u) \leq J(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$) si on remplace J de la relation (7) par $\tilde{J}(v) = \frac{1}{2} \sum_j |v - a_j|^2$?

- Montrer que J (de la relation (7) !) est strictement convexe. En déduire l'existence et l'unicité de $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $J(u) \leq J(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$.
  Caractériser u si ce n'est pas l'un des points a_j.

- Calculer u par un algorithme de gradient.

- Valider le programme précédent avec le cas $n = 3$, qu'on peut résoudre graphiquement à l'aide d'arguments de géométrie élémentaire.