

1994

# Introduction au calcul numérique des écoulements incompressibles visqueux

par V. Girault

Laboratoire d'Analyse Numérique - Tour 55-65 5ème étage  
Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

## Avant-propos.

Ces notes servent de support au Cours du Collège de Polytechnique: "Modélisation numérique des écoulements fluides", spécialité: "Formulation variationnelle et résolution par éléments finis du problème de Stokes". Elles sont destinées à des ingénieurs, c'est pourquoi l'accent est mis sur la description des méthodes numériques, plutôt que sur leur aspect mathématique. Le lecteur intéressé peut consulter la référence Girault & Raviart [12] qui donne les détails de bien des résultats seulement énoncés ici. La liste des méthodes numériques décrites dans ces notes est évidemment très loin d'être exhaustive, non seulement par manque de place, mais aussi parce que j'ai voulu privilégier les méthodes de bas degré, qui sont les plus souvent appliquées. En plus de la référence [12], le lecteur intéressé peut consulter la référence Pironneau [21] qui contient un large éventail de méthodes d'éléments finis, en particulier celles qui s'adaptent à des problèmes instationnaires qui ne sont pas abordés ici.

Les méthodes de loin les plus employées dans l'industrie pour résoudre les problèmes d'écoulements fluides (et les autres!) sont: les différences finies, les volumes finis et les éléments finis. De ces trois grandes méthodes, la méthode des éléments finis est celle qui nécessite le plus d'investissement mathématique, en particulier car elle demande que le problème posé soit mis sous forme variationnelle. Inversement, elle présente l'avantage sur la méthode des différences finies de bien s'adapter à la frontière et elle est souvent plus précise que la méthode de volumes finis. De plus, elle a l'avantage sur ces deux méthodes d'approcher souvent plus facilement les conditions sur la frontière.

Voici pour conclure quelques remarques sur le contenu mathématique de ces notes. Mettre un problème sous forme variationnelle exige des connaissances mathématiques qui ne s'improvisent pas. C'est pourquoi j'ai tenu à utiliser des espaces de Sobolev, qui sont le bon cadre fonctionnel, ne serait-ce que pour que le lecteur sache qu'ils existent. Je n'ai cependant pas voulu utiliser de dual d'espaces de Sobolev, c'est pourquoi j'ai pris des forces extérieures dans  $L^2(\Omega)$ , quitte à résoudre des problèmes un peu moins généraux. Enfin, et bien que l'intitulé de ce cours ne mentionne que le problème de Stokes, j'ai consacré le dernier chapitre au problème de Navier-Stokes, pour que le lecteur ait un aperçu des difficultés présentées par un problème non-linéaire.

## 0. Modélisation.

Nous donnons ici un bref aperçu des équations qui régissent le mouvement d'un fluide newtonien, incompressible et visqueux. Le lecteur intéressé trouvera dans Landau & Lifchitz [16] une dérivation complète de ces équations.

L'état d'un fluide en mouvement en un point d'espace  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et à un instant  $t$  est déterminé par sa vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$ , sa pression  $p = p(\mathbf{x}, t)$  et sa densité ou masse volumique  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ . Si on considère que la position  $\mathbf{x}$  d'une particule de fluide dépend du temps,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ , où  $\mathbf{a}$  est la position de cette particule à l'instant  $t = 0$ , alors

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)}{\partial t}.$$

Soit  $V_0$  un volume de l'espace; l'équation de conservation de la masse dans  $V_0$  s'écrit

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = 0,$$

et comme cette équation doit être vérifiée dans chaque volume  $V_0$ , ceci s'exprime par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (0.1)$$

ou, avec la convention d'indice répété

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0.$$

C'est l'équation de continuité.

Dans le cas d'un fluide visqueux, l'équation de conservation de la quantité de mouvement d'une unité du fluide est donnée par

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0},$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes, qui est symétrique et dépend de la nature du fluide. Lorsque ce fluide est soumis à la pesanteur, il faut ajouter  $\rho \mathbf{g}$  à la force qui s'exerce par unité de volume, où  $\mathbf{g}$  est l'accélération de la pesanteur:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) = \rho \mathbf{g},$$

ou, avec la convention d'indice répété,

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \sigma_{i,j}) = \rho g_i, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (0.2)$$

La loi de comportement du fluide est donnée par une équation de la forme

$$\sigma = -p\mathcal{I} + \sigma', \quad (0.3)$$

où  $\mathcal{I}$  est le tenseur identité et  $\sigma'$  est le tenseur visqueux des contraintes. Dans le cas d'un fluide visqueux newtonien, il s'écrit

$$\sigma' = \eta\{2D(u) - \frac{2}{3}(\operatorname{div} u)\mathcal{I}\} + \zeta(\operatorname{div} u)\mathcal{I}, \quad (0.4)$$

où

$$D_{i,j}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

est le tenseur des vitesses de déformation et  $\eta > 0$  et  $\zeta > 0$  sont les coefficients de viscosité. Dans la plupart des cas, on peut considérer qu'ils sont constants. Nous ne considérerons pas ici le cas d'un fluide non-newtonien car l'expression de  $\sigma'$  est beaucoup plus compliquée. Par exemple pour un fluide de grade deux,

$$\sigma' = 2\eta D(u) + 2\alpha_1 A(u) + 4\alpha_2 D^2(u),$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes et

$$A(u) = \frac{dD(u)}{dt} + D(u) \cdot \nabla u + (\nabla u)^t \cdot D(u).$$

Dans le cas d'un fluide incompressible et homogène, la densité  $\rho$  du fluide est une constante, indépendante de  $x$  et de  $t$ . Les équations de continuité et de mouvement se simplifient et deviennent respectivement

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = g, \quad (0.6)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \Delta u_i + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Ce sont les équations de Navier-Stokes. Pour simplifier, on pose

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho}, \quad (0.7)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $\bar{p}$  la pression cinématique. Noter que le tenseur des contraintes d'un fluide newtonien incompressible s'écrit

$$\sigma = -p\mathcal{I} + 2\eta D(u).$$

La quantité sans dimension

$$R = \frac{U L}{\nu},$$

où  $U$  est une vitesse caractéristique (dans une direction) et  $L$  une longueur caractéristique, est appelée nombre de Reynolds. Lorsque le nombre de Reynolds est petit, le terme  $(u \cdot \nabla)u$  est négligeable devant les autres termes de l'équation (0.6) qui devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla \bar{p} = g, \quad (0.8)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = g_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Ce sont les équations de Stokes. On peut aussi les écrire avec le tenseur des contraintes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\nu \operatorname{div} D(u) + \nabla \bar{p} = g, \quad (0.9)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial D_{i,j}(u)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = g_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Enfin, pour simplifier l'étude numérique, nous ne considérerons que les états stationnaires, c'est-à-dire ceux où  $\partial u / \partial t = 0$ . Nous renvoyons à Pironneau [21] pour une étude des problèmes de Navier-Stokes instationnaires.

Supposons maintenant que le fluide soit confiné dans une région  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$ . Ces équations doivent être complétées par des conditions au bord. Ici, nous nous bornerons à la condition la plus simple, appelée condition de Dirichlet, et qui correspond à l'adhérence du fluide à la paroi:

$$u = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega. \quad (0.10)$$

Mais on peut rencontrer évidemment d'autres conditions au bord. Par exemple, dans le cas d'une frontière libre, la condition est

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{soit } 2\nu D(u) \cdot n - \bar{p}n = 0, \quad (0.11)$$

où  $n$  est la normale à  $\Gamma$  extérieure à  $\Omega$ , et plus généralement, on peut imposer la condition

$$\sigma \cdot n = -\rho k,$$

où  $k$  est une force agissant sur une unité d'aire de la frontière.

Le problème de Navier-Stokes présente deux difficultés, de nature différente. La première est évidemment la non-linéarité provenant du terme de convection  $(u \cdot \nabla)u$ . La seconde difficulté est la condition d'incompressibilité (0.5) et qui est responsable de ce que

ce problème fait intervenir des dérivées d'ordre quatre. (Nous le verrons en passant en fonction courant). C'est cette difficulté que nous allons attaquer en premier en considérant d'abord la version linéaire du problème de Navier-Stokes, c'est-à-dire le problème de Stokes.

## 1. Quelques rappels théoriques sur le problème de Stokes en vitesse et pression.

### 1.1. Formulations variationnelles.

Nous rappelons ici les propriétés essentielles du problème de Stokes stationnaire dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ , où  $d = 2$  ou  $3$ , de frontière  $\Gamma$ . Nous généralisons un peu les données: dans (0.10), nous ne supposons pas la donnée au bord nulle et dans (0.8), nous ne prenons pas forcément  $g$  pour force extérieure. Par contre, pour simplifier, nous notons sans barre la pression cinématique. Le problème s'écrit

Pour  $f$  donné dans  $\Omega$  et  $k$  donné sur  $\Gamma$ , chercher un vecteur  $u(x)$  et un scalaire  $p(x)$  tels que:

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = k \quad \text{sur } \Gamma, \quad (1.3)$$

avec la condition de compatibilité:

$$\int_{\Gamma} k \cdot n \, d\sigma = 0, \quad (1.4)$$

où  $n$  désigne une fois pour toutes le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$ , dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ . En intégrant (1.2) dans  $\Omega$  et en appliquant la formule de Green, on voit immédiatement que cette condition de compatibilité est une condition nécessaire.

Dans toute la suite, nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  est connexe et borné, et que sa frontière  $\Gamma$  est assez régulière, mais peut admettre des coins, comme c'est le cas par exemple pour une frontière polygonale ou polyédrique. Or, il est connu que lorsque la frontière a des coins, et même si les données sont très régulières, ce problème n'a pas forcément de solution classique, c'est-à-dire, de solution assez dérivable pour que les dérivées dans (1.1) aient un sens. C'est pourquoi, au lieu de solutions classiques, nous chercherons des solutions faibles du problème de Stokes, qui sont obtenues en le mettant sous une forme variationnelle. C'est également un passage obligé pour construire des méthodes d'approximation par éléments finis. Nous allons donner ici deux de ces formulations; elles ont pour cadre fonctionnel les espaces classiques de Sobolev  $H^m(\Omega)$ , qui remplacent les espaces habituels  $C^m(\overline{\Omega})$ . Rappelons d'abord la définition de l'espace le plus simple  $H^1(\Omega)$ :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \text{ pour } 1 \leq i \leq d, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où les dérivées sont prises dans un sens faible, qui est le sens des distributions. On le munit de la semi-norme

$$|v|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

et de la norme

$$\|v\|_{1,\Omega} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2)^{1/2},$$

où  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  désigne la norme usuelle de l'espace  $L^2(\Omega)$ . C'est un espace de Hilbert pour cette norme et son produit scalaire associé est

$$(u, v)_{1,\Omega} = (u, v) + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire habituel de  $L^2(\Omega)$ . Sauf en dimension un, les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne sont pas forcément continues. Mais on montre d'une part que les fonctions régulières sont denses dans cet espace et d'autre part, qu'on peut donner un sens aux traces sur la frontière, c'est-à-dire aux valeurs des fonctions de  $H^1(\Omega)$  sur le bord  $\Gamma$ . Cet espace de traces se note  $H^{1/2}(\Gamma)$ :

$$H^{1/2}(\Gamma) = \text{l'espace des traces sur } \Gamma \text{ des fonctions de } H^1(\Omega).$$

Ceci permet aussi de définir l'espace de fonctions dont les traces sont nulles, noté  $H_0^1(\Omega)$ :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

De plus, on montre que les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  vérifient l'inégalité de Poincaré: il existe une constante  $\mathcal{P}$  telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{0,\Omega} \leq \mathcal{P}|v|_{1,\Omega}, \quad (1.5)$$

ce qui fait que la semi-norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ . C'est pourquoi on prend généralement  $|\cdot|_{1,\Omega}$  comme norme sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Cette définition se généralise facilement à tout entier  $m \geq 0$ :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); 1 \leq |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}, \quad (1.6)$$

muni de la semi-norme et de la norme:

$$|v|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.7)$$

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{k=0}^m |v|_{k,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme (1.8). Noter aussi que  $H^0(\Omega)$  coïncide avec  $L^2(\Omega)$ . On montre qu'en dimension deux ou trois, les fonctions de  $H^2(\Omega)$  sont continues. De plus, on peut définir la trace de leurs dérivées premières sur le bord. En particulier, pour étudier la fonction courant, nous nous servirons de l'espace

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega); v = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

où

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot \mathbf{n},$$

désigne la trace de la dérivée normale.

Pour bien poser le problème de Navier-Stokes, nous aurons également besoin des espaces de Banach  $W^{m,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega); 1 \leq |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \right\}, \quad (1.9)$$

muni de la semi-norme et de la norme:

$$|v|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{1/p}, \quad (1.10)$$

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{k=0}^m |v|_{k,p,\Omega}^p \right)^{1/p}, \quad (1.11)$$

en faisant la modification habituelle (c'est-à-dire, en prenant le maximum sur  $\Omega$  au lieu de l'intégrale et le maximum sur les indices au lieu de la somme) lorsque  $p = \infty$ . Nous utiliserons surtout les propriétés suivantes pour tout entier  $\ell \geq 0$ , qui sont des injections de Sobolev:

$$\text{en dimension 2, } H^{\ell+1}(\Omega) \subset W^{\ell,p}(\Omega) \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

$$\text{en dimension 3, } H^{\ell+1}(\Omega) \subset W^{\ell,p}(\Omega) \quad \text{pour } 1 \leq p \leq 6.$$

Enfin, comme nous allons surtout travailler avec des fonctions à valeurs vectorielles, nous étendons la définition de ces espaces et de ces normes à des vecteurs de manière naturelle.

Pour simplifier, supposons d'abord que le problème est homogène, *i.e.* il vérifie la condition (0.10) sur le bord:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma,$$

et prenons par exemple la force donnée  $\mathbf{f}$  dans  $L^2(\Omega)^d$ . La première formulation variationnelle est obtenue en prenant le produit scalaire de l'équation (1.1) dans  $L^2(\Omega)^d$  avec une fonction quelconque  $\mathbf{v}$  de  $H_0^1(\Omega)^d$  (appelée fonction-test):

$$-\nu(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Comme  $\mathbf{v}$  s'annule sur le bord de  $\Omega$ , la formule de Green nous donne:

$$-(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = (\nabla u_i, \nabla v_i) \quad , \quad (\nabla p, \mathbf{v}) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

Par conséquent, l'équation (1.1) devient:

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Remarquons que cette équation a un sens dès que  $\mathbf{u}$  appartient à  $H^1(\Omega)^d$  et  $p$  à  $L^2(\Omega)$ , car (et c'est un des buts de la formulation variationnelle), la formule de Green permet de décroître l'ordre de dérivation sur les inconnues  $\mathbf{u}$  et  $p$ . Et c'est ainsi que nous allons trouver une solution faible là où dans certains cas, la solution classique n'existe pas. Par contre, tout comme le problème d'origine, cette équation ne peut déterminer  $p$  qu'à une constante additive près. Ceci suggère de rechercher  $p$  dans l'espace quotient  $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$  (par exemple). Enfin, on procède de même avec l'équation (1.2) en prenant son produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction-test quelconque  $q$  dans  $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ . Cette deuxième étape paraît inutile et artificielle, mais elle a l'avantage de donner un terme semblable à celui de la première étape et nous verrons au moment de l'approximation qu'elle permet d'imposer faiblement la condition d'incompressibilité. Ainsi nous obtenons la formulation variationnelle:

*Chercher*  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$  et  $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$  tels que:

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad (1.12)$$

$$\forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \quad (q, \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0. \quad (1.13)$$

On montre facilement que ce problème est équivalent au problème de Stokes homogène (1.1), (1.2), (0.10).

A partir de (1.13), nous déduisons la seconde formulation variationnelle en choisissant uniquement des fonctions-test  $\mathbf{v}$  à divergence nulle, *i.e.* dans l'espace:

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d; \forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}, (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0\}. \quad (1.14)$$

D'où la deuxième formulation variationnelle:

*Chercher*  $\mathbf{u} \in V$  tel que:

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \quad (1.15)$$

Par rapport à la formulation précédente, le problème (1.15) présente un grand avantage théorique, mais aussi un grave inconvénient. D'un côté, le Théorème de Lax & Milgram permet d'affirmer que le problème (1.15) a une solution unique  $\mathbf{u}$  dans  $V$ , qui dépend continûment de la donnée  $\mathbf{f}$ . Rappelons l'énoncé de ce théorème (*cf.* Lax & Milgram [17]).



**Théorème 1.1.** (de Lax & Milgram). Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $V'$  son dual. Soit  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire, continue et elliptique sur  $V$ , i.e. il existe une constante  $M$  et une constante  $\alpha > 0$  telles que

$$\forall u \in V, \forall v \in V, a(u, v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad (1.16)$$

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (1.17)$$

Alors pour chaque élément  $f$  de  $V'$  le problème:

Chercher  $u \in V$  tel que:

$$\forall v \in V, a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad (1.18)$$

admet une solution unique  $u$  qui dépend continûment de  $f$ :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}.$$

Mais d'un autre côté, s'il est évident que toute solution  $u$  de (1.12), (1.13) est nécessairement solution de (1.15), il n'est pas du tout clair que la solution  $u$  de (1.15) soit encore solution de (1.12). D'autre part, (1.15) ne donne plus aucune information sur la pression  $p$ . En résumé, la difficulté théorique du problème de Stokes se ramène à l'équivalence des deux formulations (1.12), (1.13) et (1.15).

A ce stade, il est instructif de faire le parallèle avec le même système d'équations en dimension finie. Ce système a la forme

$$Au + B^t p = f, \quad Bu = 0, \quad (1.19)$$

où  $A$  est une matrice carrée, disons de dimension  $N \times N$ ,  $B$  une matrice généralement rectangulaire de dimension  $M \times N$ ,  $u$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p$  un vecteur de  $\mathbb{R}^M$  et  $f$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$ . C'est d'ailleurs ce système qu'on trouve quand on discrétise convenablement le problème (1.12), (1.13), comme nous le verrons plus loin. Ici,  $A$  joue le rôle du Laplacien,  $B$  celui de la divergence et  $B^t$  celui du gradient (au signe près). Avec cette interprétation, on peut supposer que  $A$  est symétrique, définie positive. Ceci permet d'écrire  $u$  en fonction de  $p$ :

$$u = A^{-1}(f - B^t p),$$

et en reportant dans la deuxième équation, on trouve

$$(BA^{-1}B^t)p = (BA^{-1})f.$$

Donc le système (1.19) a une solution unique si et seulement si la matrice carrée  $BA^{-1}B^t$  est inversible. Sachant que  $A$  est symétrique, définie positive,  $BA^{-1}B^t$  est inversible si et

seulement si  $B^t$  est injective, ce qui équivaut aussi à  $B$  surjective. Evidemment, la situation du problème (1.12), (1.13) est plus compliquée, car il est en dimension infinie, mais pour le résoudre, nous allons aboutir à une condition semblable: l'opérateur divergence doit être surjectif en un certain sens.

Pour cela, introduisons deux espaces:

$$V^\perp = \{v \in H_0^1(\Omega)^d; \forall w \in V, (\nabla v, \nabla w) = 0\}, \quad (1.20)$$

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q \, dx = 0\}, \quad (1.21)$$

ce dernier permettant de fixer la constante de l'espace quotient  $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ . Le théorème fondamental suivant, dont la démonstration est difficile (cf. Tartar [24] ou Girault & Raviart [12]), permet d'établir l'équivalence entre (1.12), (1.13) et (1.15) et de démontrer la dépendance continue de  $p$  par rapport à la donnée  $f$ .

**Théorème 1.2.** *L'opérateur divergence est un isomorphisme de  $V^\perp$  sur  $L_0^2(\Omega)$ .*

Ceci se traduit par: il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour chaque  $q$  dans  $L_0^2(\Omega)$ , il existe un unique  $v$  dans  $V^\perp$  tel que

$$\operatorname{div} v = q \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \|v\|_{1,\Omega} \leq \kappa \|q\|_{0,\Omega}. \quad (1.22)$$

Le Théorème 1.2 permet aussi de résoudre le problème de Stokes non-homogène, *i.e.* avec la condition (1.3)

$$u = k \quad \text{sur } \Gamma,$$

où  $k$  est donné dans  $H^{1/2}(\Gamma)^d$ , puisque c'est l'espace des traces des fonctions de  $H^1(\Omega)^d$ . En effet, si on connaît l'existence d'un vecteur  $u_0$  (appel relèvement) tel que

$$u_0 \in H^1(\Omega)^d, \quad u_0 = k \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \operatorname{div} u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

alors, le problème de Stokes (1.1), (1.2), (1.3) se ramène à un problème homogène, puisque la différence  $w = u - u_0$  est solution du problème:

$$-\nu \Delta w + \nabla p = f + \nu \Delta u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\operatorname{div} w = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$w = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

L'existence du relèvement est donnée par le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.** Pour chaque  $k \in H^{1/2}(\Gamma)^d$  vérifiant la condition de compatibilité (1.4):

$$\int_{\Gamma} k \cdot n \, d\sigma = 0,$$

il existe une fonction  $u \in H^1(\Omega)^d$  telle que

$$u = k \text{ sur } \Gamma, \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \|u\|_{1,\Omega} \leq C \|k\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Résumons les résultats de ce paragraphe. Pour chaque  $f$  donné dans  $L^2(\Omega)^d$  et chaque  $k$  donné dans  $H^{1/2}(\Gamma)^d$  vérifiant la condition de compatibilité (1.4)

$$\int_{\Gamma} k \cdot n \, d\sigma = 0,$$

le problème de Stokes (1.1), (1.2), (1.3)

Chercher  $u \in H^1(\Omega)^d$  et  $p \in L_0^2(\Omega)$  tels que:

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$u = k \quad \text{sur } \Gamma,$$

admet une solution unique qui dépend continûment des données  $f$  et  $k$ . De plus, ce problème admet les formulations variationnelles équivalentes:

Chercher  $u \in H^1(\Omega)^d$  et  $p \in L_0^2(\Omega)$  tels que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v),$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (q, \operatorname{div} u) = 0,$$

$$u = k \quad \text{sur } \Gamma;$$

Chercher  $u \in H^1(\Omega)^d$  tel que:

$$\forall v \in V, \quad \nu(\nabla u, \nabla v) = (f, v),$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (q, \operatorname{div} u) = 0,$$

$$u = k \quad \text{sur } \Gamma.$$

**Remarque 1.4.** On peut également considérer un problème de Stokes non-homogène avec la condition  $\operatorname{div} u = r$ , fonction donnée dans  $L^2(\Omega)$ , au lieu de (1.2). Dans ce cas, la condition de compatibilité (1.4) devient:

$$\int_{\Gamma} k \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} r \, dx. \quad (1.4')$$

**Remarque 1.5.** Ces formulations variationnelles ne sont pas uniques. Par exemple, si on veut imposer la condition au bord (0.11), on obtient une formulation variationnelle à partir de la version stationnaire de (0.9):

$$-2\nu \operatorname{div} D(u) + \nabla \bar{p} = f.$$

En effet, en prenant le produit scalaire de cette équation avec une fonction-test  $v$  de  $H^1(\Omega)^d$ , en appliquant la formule de Green, en utilisant la symétrie de  $D(u)$  et en tenant compte de la condition (0.11), on trouve

$$\forall v \in H^1(\Omega)^d, \quad 2\nu(D(u), D(v)) - (\bar{p}, \operatorname{div} v) = (f, v).$$

## 1.2. Formulation mixte en général.

Le problème de Stokes est un cas particulier de problème elliptique linéaire avec contrainte. Il est intéressant de le mettre dans un cadre abstrait, analogue au cadre du Théorème 1.1 de Lax & Milgram. Pour simplifier, nous nous bornerons au cas homogène.

Ici, nous avons affaire à deux espaces de Hilbert bien distincts: l'espace des vitesses,  $H_0^1(\Omega)^d$ , et l'espace des pressions,  $L_0^2(\Omega)$ . Nous les noterons respectivement par  $X$  et  $M$ , de dual  $X'$  et  $M'$ . Puis, nous avons deux formes bilinéaires: celle du terme de viscosité,  $\nu(\nabla v, \nabla w)$ , et celle qui exprime la contrainte,  $(q, \operatorname{div} v)$ . Nous les noterons respectivement par:

$$a(v, w) : X \times X \mapsto \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b(v, q) : X \times M \mapsto \mathbb{R},$$

et nous supposerons évidemment que  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  sont continues, *i.e.*

$$\forall v \in X, \forall w \in X, \quad a(v, w) \leq \|a\| \|v\|_X \|w\|_X,$$

$$\forall v \in X, \forall q \in M, \quad b(v, q) \leq \|b\| \|v\|_X \|q\|_M.$$

Alors notre problème abstrait avec contrainte s'écrit:

*Etant donné un élément  $f \in X'$ , trouver un couple  $(u, p) \in X \times M$  tel que:*

$$\begin{aligned} \forall v \in X, \quad a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle, \\ \forall q \in M, \quad b(u, q) &= 0. \end{aligned} \quad (Q)$$

Comme dans le cas du problème de Stokes, nous pouvons inclure la contrainte dans l'espace

$$V = \{v \in X; \forall q \in M, b(v, q) = 0\}.$$

Ceci induit un deuxième problème:

*Etant donné un élément  $f \in X'$ , trouver  $u \in V$  tel que:*

$$\forall v \in V, a(u, v) = \langle f, v \rangle. \quad (P)$$

Le théorème suivant, qui est l'analogie du Théorème de Lax & Milgram, donne des conditions suffisantes pour que les problèmes (P) et (Q) soient équivalents et aient une solution unique (cf. Babuška [2], Brezzi [6] ou Girault & Raviart [12]).

**Théorème 1.6.** (Babuška, Brezzi)

1. Supposons que la forme  $a(\cdot, \cdot)$  soit  $V$ -elliptique, i.e. il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2. \quad (1.23)$$

Alors le problème (P) admet une solution unique  $u \in V$  qui dépend continûment du second membre  $f$ .

2. En plus de (1.23) supposons qu'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que  $b(\cdot, \cdot)$  satisfasse

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta. \quad (1.24)$$

Alors le problème (Q) admet la solution unique  $u \in V, p \in M$ , où  $u$  est la solution du problème (P). De plus, le couple  $(u, p)$  dépend continûment du second membre  $f$ .

Evidemment, la première partie du Théorème 1.6 découle du Théorème 1.1 de Lax & Milgram. Il est donc très facile d'étudier le problème (P). Mais comme dans le cas du problème de Stokes, il est difficile d'établir une relation entre (P) et (Q). Et c'est la très importante condition (1.24) – qui est à la fois nécessaire et suffisante – qui permet de résoudre le problème (Q). A cause de son expression, la condition (1.24) s'appelle "condition inf-sup". On peut démontrer qu'elle équivaut à une propriété d'isomorphisme semblable à celle énoncée au Théorème 1.2. Egalement, on peut montrer qu'elle équivaut à la propriété suivante: pour chaque  $q \in M$ , il existe un unique  $v \in V^\perp$  tel que

$$b(v, q) = \|q\|_M^2 \quad \text{et} \quad \|v\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|q\|_M. \quad (1.25)$$

En comparant avec le Théorème 1.2, on constate que le problème de Stokes satisfait la condition inf-sup:

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{\int_\Omega q \operatorname{div} v \, dx}{\|v\|_{1,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}} \geq \frac{1}{\kappa} > 0,$$

où  $\kappa$  est la constante de (1.22).

## 2. Méthodes d'éléments finis classiques en vitesse et pression.

Tous les schémas décrits dans ce chapitre sont obtenus en exprimant la formulation (1.12), (1.13) dans des espaces de dimension finie. Ils présentent tous la particularité que les vitesses discrètes ne sont pas à divergence nulle. Si les espaces sont bien choisis, la divergence de la solution approchée tendra vers zéro en même temps que le paramètre de discrétisation.

Le bon choix d'espaces discrets compatibles est primordial; nous verrons que la condition de compatibilité n'est rien d'autre qu'une condition inf-sup discrète, uniforme par rapport au paramètre de discrétisation.

Ici, tous les schémas utilisent des vitesses discrètes continues; la plupart utilisent des pressions discrètes discontinues, mais nous donnerons des exemples fameux de pressions continues. Nous renvoyons à Crouzeix & Raviart [9] pour des exemples de schémas utilisant des vitesses discrètes discontinues. Enfin, notons que ces schémas passent assez facilement en trois dimensions.

### 2.1. Approximation en général.

Nous proposons ici d'approcher les problèmes abstraits (P) et (Q) du paragraphe 1.2. Pour ceci, nous introduisons deux espaces de dimension finie  $X_h$  et  $M_h$  tels que

$$X_h \subset X \quad \text{et} \quad M_h \subset M,$$

et nous écrivons les problèmes (P) et (Q) dans ces espaces. Ainsi, nous remplaçons (Q) par le problème  $(Q_h)$ :

*Chercher  $u_h \in X_h$  et  $p_h \in M_h$  tels que:*

$$\begin{aligned} \forall v_h \in X_h, \quad a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= \langle f, v_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(u_h, q_h) &= 0. \end{aligned} \tag{Q_h}$$

Puis, comme dans le cas continu, nous exprimons la contrainte au moyen d'un sous-espace  $V_h$  de  $X_h$ :

$$V_h = \{v_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, b(v_h, q_h) = 0\}. \tag{2.1}$$

Notons que, puisque  $M_h$  est un sous-espace strict de  $M$ , rien ne garantit que  $b(v_h, q) = 0$  pour tout  $q$  dans  $M$ , de sorte que  $V_h$  n'est pas forcément contenu dans  $V$ .

Avec l'espace  $V_h$ , nous remplaçons (P) par le problème  $(P_h)$ :

*Chercher  $u_h \in V_h$  tel que:*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \tag{P_h}$$

Il est clair que si on fait les hypothèses (1.23) et (1.24) par rapport aux espaces discrets  $X_h$  et  $M_h$ , alors les problèmes  $(P_h)$  et  $(Q_h)$  sont équivalents et ont une solution unique. Le théorème suivant donne en plus une estimation de l'erreur (*cf.* Girault & Raviart [12]).

**Théorème 2.1.**

1. Supposons que la forme  $a(\cdot, \cdot)$  soit  $V_h$ -elliptique: il existe une constante  $\alpha^* > 0$  telle que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_X^2. \quad (2.2)$$

Alors, le problème  $(P_h)$  a une solution unique  $u_h \in V_h$  et il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\|u - u_h\|_X \leq C_1 \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \right\}. \quad (2.3)$$

2. Supposons que la forme  $b(\cdot, \cdot)$  satisfasse la condition inf-sup discrète: il existe une constante  $\beta^* > 0$  telle que

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X \|q_h\|_M} \geq \beta^*. \quad (2.4)$$

Alors, il existe une constante  $C_2$  telle que pour tout  $u \in V$ ,

$$\inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_X \leq C_2 \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X. \quad (2.5)$$

3. Enfin, supposons que les deux conditions (2.2) et (2.4) soient vérifiées. Alors, il existe un unique  $p_h \in M_h$  tel que le couple  $(u_h, p_h)$  soit la solution du problème  $(Q_h)$  et il existe une constante  $C_3$  telle que

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \leq C_3 \left\{ \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \right\}. \quad (2.6)$$

Evidemment, les constantes  $C_1, C_2, C_3$  du Théorème 2.1 dépendent des constantes  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ . Donc, pour obtenir des majorations d'erreur satisfaisantes, il est indispensable de choisir les espaces discrets  $X_h$  et  $M_h$  de manière que  $\alpha^*$  et  $\beta^*$  ne dépendent pas du paramètre de discrétisation  $h$ . Autrement dit, il faut que la forme  $a(\cdot, \cdot)$  soit uniformément elliptique sur  $V_h$  et que la forme  $b(\cdot, \cdot)$  satisfasse une condition inf-sup uniforme. En pratique, c'est la condition inf-sup uniforme qui est la plus difficile à satisfaire, à tel point que c'est elle qui dicte le choix des espaces  $X_h$  et  $M_h$ . Le paragraphe suivant présente quelques critères commodes pour traiter cette condition.

La majoration (2.6) est optimale lorsque la constante  $C_3$  ne dépend pas de  $h$ . En effet, elle exprime que l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte est proportionnelle à l'erreur d'approximation des espaces  $X_h$  et  $M_h$ , et c'est ce qu'on peut espérer de mieux.

Remarquons enfin que dans le cas du problème de Stokes, l'ellipticité uniforme est toujours réalisée puisque

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad a(v, v) = \nu |v|_{1, \Omega}^2 \quad \text{i.e.} \quad \alpha = \alpha^* = \nu > 0.$$

## 2.2. La condition inf-sup discrète du problème de Stokes.

Reprenons le cas du problème de Stokes. Remarquons d'abord que selon la propriété (1.25), la condition inf-sup discrète uniforme équivaut à: pour chaque  $q_h \in M_h$ , il existe un unique  $v_h \in V_h^\perp$  tel que

$$\|q_h\|_{0,\Omega}^2 = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} v_h \, dx \quad \text{et} \quad |v_h|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\beta^*} \|q_h\|_{0,\Omega}. \quad (2.7)$$

Intuitivement, ceci veut dire: il faut qu'il y ait assez de fonctions  $v_h$  dans  $X_h$  pour satisfaire (2.7) pour chaque fonction  $q_h$  de  $M_h$ .

Le lemme suivant donne une autre condition équivalente (*cf.* Fortin [11]). Elle est valable dans un cadre abstrait, mais nous l'écrivons ici seulement pour le problème de Stokes.

**Lemme 2.2.** *La condition inf-sup discrète (2.4) est vérifiée uniformément si et seulement si il existe un opérateur  $\pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^d; X_h)$  tel que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \forall q_h \in M_h, \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\pi_h(v) - v) \, dx = 0, \quad (2.8)$$

et il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, |\pi_h(v)|_{1,\Omega} \leq C |v|_{1,\Omega}. \quad (2.9)$$

Faute de mieux, nous utiliserons ce critère dans certains cas d'espaces simples, mais il est techniquement très difficile de s'en servir dans un cas général. La partie délicate est la vérification de (2.9), qui exprime la stabilité pour la norme de  $H_0^1(\Omega)^d$ . Or, les fonctions de  $H_0^1(\Omega)^d$  sont peu régulières, et même pas continues (sauf en dimension  $d = 1$ ); ceci exclut en particulier les opérateurs classiques d'interpolation et rend la construction de  $\pi_h$  difficile.

Il existe une troisième technique, beaucoup plus employée (mais aussi beaucoup plus sophistiquée) qui permet de se ramener à une condition inf-sup locale, plus facile à vérifier. L'idée consiste à partitionner  $\Omega$  en un nombre fini (disons  $R$ ) de "petits" ouverts deux à deux disjoints  $\Omega_\tau$ , appelés "macro-éléments", et à vérifier la condition inf-sup sur chacun de ces ouverts. Plus précisément, nous introduisons les espaces (*cf.* Boland & Nicolaidis [4] ou Stenberg [23]):

$$X_h(\Omega_\tau) = \{v_h \in X_h; \operatorname{support}(v_h) \subset \Omega_\tau\} \subset H_0^1(\Omega_\tau)^d, \quad (2.10a)$$

$$M_h(\Omega_\tau) = \{\bar{q}_h \in L_0^2(\Omega_\tau); \bar{q}_h = q_h|_{\Omega_\tau} + c, q_h \in M_h, c \in \mathbb{R}\}. \quad (2.10b)$$



Alors, la condition inf-sup locale uniforme dans chaque  $\Omega_r$  s'écrit: il existe une constante  $\lambda^* > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que pour tout  $\Omega_r$ ,

$$\inf_{q_h \in M_h(\Omega_r)} \sup_{v_h \in X_h(\Omega_r)} \frac{-\int_{\Omega_r} q_h \operatorname{div} v_h \, dx}{\|v_h\|_{1,\Omega_r} \|q_h\|_{0,\Omega_r}} \geq \lambda^*. \quad (2.11)$$

Remarquons que, alors que  $X_h(\Omega_r) \subset X_h$ , les fonctions de  $M_h(\Omega_r)$  ne constituent pas forcément un sous-espace de  $M_h$ . Cette liberté de choix nous sera très utile lorsque on appliquera cette technique à des espaces de pressions continues. Evidemment, la condition inf-sup locale (2.11) n'implique pas à elle seule la condition inf-sup globale (2.7) puisque la première intéresse uniquement les fonctions de  $M_h(\Omega_r)$  et non pas toutes les fonctions de  $M_h$ . Cependant, on remarque que sur chaque  $\Omega_r$ , les fonctions de  $M_h$  diffèrent des fonctions de  $M_h(\Omega_r)$  uniquement par des constantes. Autrement dit, si on définit l'espace:

$$\overline{M}_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); q_h|_{\Omega_r} = \text{constante}, 1 \leq r \leq R\}, \quad (2.12)$$

on peut décomposer la restriction à  $\Omega_r$  de toute fonction  $q_h$  de  $M_h$  en une somme:

$$q_h|_{\Omega_r} = \tilde{q}_h + \bar{q}_h|_{\Omega_r} \quad \text{où} \quad \tilde{q}_h \in M_h(\Omega_r) \quad \text{et} \quad \bar{q}_h \in \overline{M}_h,$$

décomposition orthogonale dans  $L^2(\Omega_r)$ . Ceci nous induit à compléter la condition locale (2.11) par une condition inf-sup globale (et uniforme) relative à la paire d'espaces  $(X_h, \overline{M}_h)$ . Comme les fonctions de  $\overline{M}_h$  sont très simples (puisque constantes par morceaux), cette condition est *a priori* beaucoup plus facile à vérifier que pour la paire d'origine  $(X_h, M_h)$ . Le théorème suivant établit le bien-fondé de cette technique.

**Théorème 2.3.** *Avec les notations ci-dessus, si la condition inf-sup locale (2.11) est vérifiée sur chaque  $\Omega_r$  uniformément en  $h$  et  $r$ , et si la paire  $(X_h, \overline{M}_h)$ , avec  $\overline{M}_h$  défini par (2.12), vérifie une condition inf-sup uniforme, alors la paire d'espaces d'origine  $(X_h, M_h)$  vérifie aussi une condition inf-sup uniforme.*

Puisque les fonctions de  $\overline{M}_h$  sont très simples, on peut, en particulier, utiliser le Lemme 2.2 pour démontrer que la paire  $(X_h, \overline{M}_h)$  vérifie une condition inf-sup. Et pour ce faire, on peut évidemment remplacer  $X_h$  par n'importe lequel de ses sous-espaces, disons  $\overline{X}_h$ , puisque la condition inf-sup s'énonce (*cf.* (2.7)): pour tout  $q_h$  de  $M_h$ , il existe  $v_h$  dans  $X_h$  tel que . . . .

Enfin, citons une autre technique (*cf.* Verfurth [26]) qui consiste à combiner deux conditions inf-sup, pas nécessairement uniformes, dépendant d'un paramètre de manière à obtenir une condition uniforme en prenant le minimum par rapport à ce paramètre. Cette approche complète utilement la précédente car elle permet, en particulier, de tenir compte d'éléments différents près du bord lorsque la frontière est courbe.

### 2.3. Approximation discontinue de la pression: construction d'espaces d'éléments finis triangulaires et quadrilatéraux dans $\mathbb{R}^2$ .

Pour simplifier, nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  a une frontière  $\Gamma$  polygonale. Considérons d'abord le cas des triangles. On appelle triangulation de  $\bar{\Omega}$  une décomposition de  $\bar{\Omega}$  en triangles deux à deux disjoints ou qui ne se rencontrent qu'en un sommet ou en un côté entier. Lorsque les triangles sont disposés selon une structure particulière on dit que la triangulation est structurée et dans le cas contraire qu'elle est non-structurée. Un exemple fréquent de triangulation structurée est celui d'un maillage hexagonal où en chaque sommet six triangles se rencontrent. Le choix entre triangulation structurée ou non-structurée est délicat, la triangulation d'un domaine est souvent une tâche longue et difficile, mais nous n'avons pas la place d'aborder ces questions ici.

Soit  $h > 0$  le paramètre de discrétisation et  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\bar{\Omega}$  composée de triangles  $T$  de diamètre majoré par  $h$ . Par la suite, nous aurons souvent besoin que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  soit régulière au sens suivant.

**Définition 2.4.** Soit  $h_T$  le diamètre de  $T$  et  $\rho_T$  le diamètre du cercle inscrit dans  $T$ . On dit que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est régulière s'il existe  $\sigma > 0$ , indépendant de  $h$ , tel que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma.$$

Intuitivement, cette définition impose que les triangles ne soient pas trop "applatés".

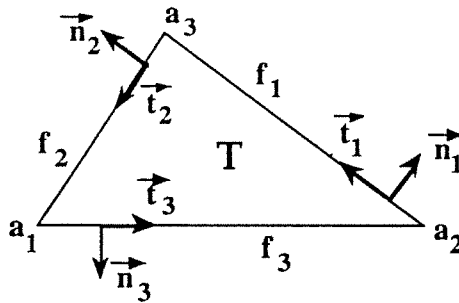


Figure 1

Il est commode d'utiliser les coordonnées barycentriques  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  du triangle  $T$ . Rappelons que si  $a_1, a_2, a_3$  désignent les sommets de  $T$  et  $f_1, f_2, f_3$  leur face opposée (cf. Figure 1), les coordonnées barycentriques  $\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \lambda_3(\mathbf{x})$  sont des polynômes de degré un à deux variables caractérisés par les équations

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Notons que l'on a nécessairement

$$\lambda_i|_{f_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Un espace d'éléments finis sur une triangulation  $\mathcal{T}_h$  est un espace de fonctions dont la restriction à chaque triangle  $T$  est un polynôme déterminé de manière unique par un ensemble de conditions linéaires, appelées degrés de liberté. Rappelons aussi la notation: pour chaque entier  $k \geq 0$ ,  $\mathcal{P}_k$  est l'espace des polynômes (à  $d$  variables) de degré inférieur ou égal à  $k$ .

Dans le cas du problème de Stokes,  $X = H_0^1(\Omega)^2$  et  $M = L_0^2(\Omega)$ . Nous devons donc construire des paires d'espaces  $(X_h, M_h)$  tels que

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^2 \quad \text{et} \quad M_h \subset L_0^2(\Omega),$$

ce qui implique que les fonctions de  $X_h$  doivent être globalement continues (car elles sont polynômiales dans chaque triangle) mais que les fonctions de  $M_h$  ne sont pas forcément continues aux interfaces des triangles. Nous avons choisi d'étudier ici le cas où les fonctions de  $M_h$  sont discontinues, autrement dit, polynômiales dans chaque triangle  $T$  sans condition de raccord aux interfaces entre triangles. Ceci étant fixé, il s'agit maintenant de satisfaire la condition inf-sup (2.7). On voit facilement qu'une fois que  $M_h$  est choisi, on doit construire  $X_h$  pour satisfaire cette condition. Nous allons donc choisir successivement

$$M_h = \{q_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathcal{P}_k, \int_{\Omega} q_h dx = 0\}, \quad (2.13)$$

avec  $k = 0, k = 1$ , etc. . . , et construire à chaque fois l'espace  $X_h$  le plus simple (si possible) pour satisfaire (2.7).

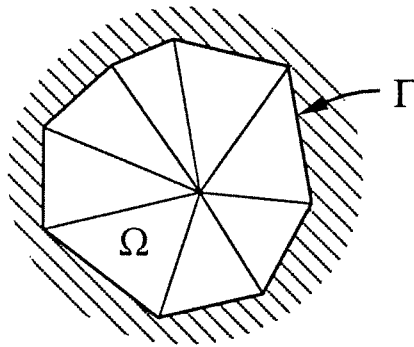


Figure 2

Commençons avec  $k = 0$ . Pour que les fonctions de  $X_h$  soient continues, elles doivent être des polynômes de degré au moins un dans chaque triangle  $T$ . Cependant, l'exemple de la Figure 2 montre que le degré un est à proscrire, la raison étant que les polynômes de degré un n'offrent pas assez de degrés de liberté pour vérifier (2.7). Dans cet exemple, la triangulation  $\mathcal{T}_h$  n'a qu'un seul noeud intérieur à  $\Omega$ ; donc les fonctions de  $X_h$  sont entièrement déterminées par leur valeur en ce noeud (puisqu'elles s'annulent sur  $\Gamma$ ). Par

contre, les fonctions de  $M_h$  ont sept degrés de liberté (un de moins que le nombre de triangles de  $\mathcal{T}_h$ ). L'espace  $X_h$  n'a donc pas assez de fonctions pour satisfaire (2.7).

Cet exemple nous suggère de choisir pour vitesses des polynômes de degré deux. Ce choix est correct, mais peu économique; nous allons voir qu'un espace de polynômes intermédiaire entre les degrés un et deux suffit. Plus précisément, considérons le triangle  $T$  de la Figure 1 et cherchons un vecteur  $w$  dont les composantes soient des polynômes de degré deux et les traces tangentielles sur  $\partial T$  des polynômes de degré un, *i.e.*

$$w \in \mathbb{P}_2^2 \quad \text{et} \quad w \cdot \tau_i|_{f_i} \in \mathbb{P}_1, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

On peut chercher ce vecteur sous la forme d'une somme:

$$\bar{w} = u + v \quad \text{avec} \quad u \in \mathbb{P}_1^2 \quad \text{et} \quad v \in \mathbb{P}_2^2 \quad \text{tel que} \quad v \cdot \tau_i|_{f_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

dans l'idée que le terme  $u$  serve à assurer une approximation convenable de la vitesse et le terme  $v$  serve à satisfaire la condition inf-sup. Remarquons alors que le vecteur  $p_1 = n_1 \lambda_2 \lambda_3$  s'annule sur les côtés  $f_2$  et  $f_3$  (donc en particulier aux trois sommets de  $T$ ) et vérifie  $p_1 \cdot \tau_1|_{f_1} = 0$ . Par conséquent, nous posons

$$p_1 = n_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad p_2 = n_2 \lambda_3 \lambda_1, \quad p_3 = n_3 \lambda_1 \lambda_2, \quad (2.14)$$

et nous prenons les vitesses  $w$  dans le sous-espace de  $\mathbb{P}_2^2$ :

$$\mathcal{P}_1(T) = \mathbb{P}_1^2 \oplus \text{Vect}\{p_1, p_2, p_3\}, \quad (2.15)$$

dont la dimension est 9 (alors que la dimension de  $\mathbb{P}_2^2$  est 12). Quant aux degrés de liberté, on remarque facilement que tout  $w$  de  $\mathcal{P}_1(T)$  est déterminé par les paramètres

$$w(a_i) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (2.16a)$$

$$\int_{f_i} w \cdot n_i \, d\sigma \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (2.16b)$$

*i.e.* ses valeurs aux sommets de  $T$  et son flux normal à travers les côtés de  $T$ . Nous choisissons donc la paire d'espaces:

$$\bar{M}_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_0\}, \quad (2.17a)$$

$$\bar{X}_h = \{w_h \in C^0(\bar{\Omega})^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in \mathcal{P}_1(T), w_h|_\Gamma = \mathbf{0}\}, \quad (2.17b)$$

(les barres sur les espaces s'accordent avec les notations de la fin du paragraphe 2.2).

En utilisant le fait que  $q_h|_T \in \mathbb{P}_0$  et  $w_h|_T \in \mathcal{P}_1(T) \supset \mathbb{P}_1^2$ , les propriétés d'approximation des éléments finis (cf. Ciarlet [7]) entraînent immédiatement que

$$\forall p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \leq C h |p|_{1,\Omega},$$

$$\forall u \in H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2, \quad \inf_{v_h \in X_h} |u - v_h|_{1,\Omega} \leq C h |u|_{2,\Omega},$$

cette dernière propriété ayant lieu si  $\mathcal{T}_h$  est régulière. Par contre, la vérification de la condition inf-sup n'est pas standard. On l'obtient en construisant l'opérateur  $\pi_h$  du Lemme 2.2. La démonstration correspondante est assez technique et elle a lieu sous l'hypothèse que  $\mathcal{T}_h$  est régulière (cf. Bernardi & Raugel [3]). Les hypothèses (2.2) et (2.4) du Théorème 2.1 sont donc vérifiées avec des constantes indépendantes de  $h$ . Nous pouvons alors appliquer la conclusion (2.6) qui donne une erreur en  $O(h)$ :

$$|u - u_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C h \{|u|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}\}, \quad (2.18)$$

pourvu que  $\mathcal{T}_h$  soit régulière. L'ordre de cette erreur est compatible avec le degré des polynômes qui approchent la pression. Nous aurions obtenu le même ordre d'erreur si nous avions approché la vitesse par des polynômes de  $\mathbb{P}_2^2$  dans chaque  $T$ . Ainsi qu'il est dit plus haut, ce dernier choix est plus coûteux, mais en revanche, il a l'avantage de définir les deux composantes de la vitesse indépendamment à chaque noeud.

Voyons maintenant le cas où  $k = 1$ , i.e.  $p_h|_T \in \mathbb{P}_1$ . La construction précédente nous suggère de lui associer le vecteur vitesse  $w$  tel que  $w \in \mathbb{P}_3^2$  et  $w \cdot \tau_i|_{f_i} \in \mathbb{P}_2$ . Ici, de même, nous cherchons  $w$  sous la forme d'une somme:

$$w = u + v \quad \text{avec} \quad u \in \mathbb{P}_2^2 \quad \text{et} \quad v \in \mathbb{P}_3^2 \quad \text{tel que} \quad v \cdot \tau_i|_{f_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

toujours dans l'idée que le terme  $u$  serve à assurer une approximation convenable de la vitesse et le terme  $v$  serve à satisfaire la condition inf-sup. Mais comme le degré des polynômes est ici plus élevé, on peut choisir simplement

$$v = c \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}^2.$$

(La fonction  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , qui s'annule sur les trois côtés de  $T$  est appelée "fonction bulle"). Nous prenons donc  $w$  dans le sous-espace de  $\mathbb{P}_3^2$ :

$$\mathcal{P}_2(T) = (\mathbb{P}_2 \oplus \text{Vect}\{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\})^2, \quad (2.19)$$

de dimension 14, avec les degrés de liberté:

$$\begin{aligned} w(a_i) & \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ w(b_i) & \quad \text{où } b_i \text{ est le point-milieu du côté } f_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ w(a_T) & \quad \text{où } a_T \text{ est le centre de } T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Remarquons que les deux composantes de  $w$  peuvent être prises de manière indépendante. Ainsi, nous choisissons la paire d'espaces:

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1\}, \quad (2.21a)$$

$$X_h = \{w_h \in C^0(\bar{\Omega})^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in \mathcal{P}_2(T), w_h|_\Gamma = 0\}, \quad (2.21b)$$

Comme précédemment, le fait que  $q_h|_T \in \mathbb{P}_1$  et  $w_h|_T \in \mathcal{P}_2(T) \supset \mathbb{P}_2^2$  entraîne respectivement que

$$\forall p \in H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \leq C h^2 |p|_{2,\Omega},$$

$$\forall u \in H^3(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2, \quad \inf_{v_h \in X_h} |u - v_h|_{1,\Omega} \leq C h^2 |u|_{3,\Omega},$$

toujours sous l'hypothèse que  $\mathcal{T}_h$  soit régulière. Quant à la condition inf-sup, nous pouvons maintenant la vérifier grâce au Théorème 2.3. En effet, prenons pour partition de  $\Omega$  la triangulation elle-même, *i.e.*  $\Omega_\tau = T$ . On peut montrer que le couple  $(X_h(T), M_h(T))$  vérifie une condition inf-sup locale uniforme sur chaque  $T$  (*cf.* Girault & Raviart [12]). La démonstration repose essentiellement sur les remarques suivantes:

(i) puisque  $w_h|_{\partial T} = 0$ , alors

$$\int_T q_h \operatorname{div} w_h \, dx = - \int_T \nabla q_h \cdot w_h \, dx,$$

(ii) puisque  $q_h|_T \in \mathbb{P}_1$ , alors  $\nabla q_h \in \mathbb{P}_0^2$ ,

(iii) on peut choisir  $w_h = \nabla q_h \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \in \mathcal{P}_2(T)$ ,

(iv) avec ce choix,

$$- \int_T q_h \operatorname{div} w_h \, dx \geq C |q_h|_{1,T}^2.$$

Ce n'est pas encore la condition inf-sup désirée, mais le fait que  $q_h \in L_0^2(T)$  permet de la retrouver quand  $\mathcal{T}_h$  est régulière. Enfin, on complète cette condition locale en remarquant que:

(i) la paire  $(\bar{X}_h, \bar{M}_h)$  définie par (2.17) satisfait une condition inf-sup globale;

(ii) l'espace  $\bar{M}_h$  coïncide avec l'espace de la formule (2.12) relatif à la partition choisie ici, *i.e.*  $\Omega_\tau = T$ ;

(iii)  $\bar{X}_h$  est un sous-espace de  $X_h$ .

Alors le Théorème 2.3 implique la condition inf-sup uniforme pour le couple  $(X_h, M_h)$ . Par conséquent, nous pouvons appliquer la conclusion (2.6) du Théorème 2.1 qui nous donne une erreur en  $O(h^2)$  si  $\mathcal{T}_h$  est régulière:

$$|u - u_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C h^2 \{|u|_{3,\Omega} + |p|_{2,\Omega}\}. \quad (2.22)$$

L'extension au cas  $k \geq 2$  est une généralisation immédiate de ce dernier cas (cf. Girault & Raviart [12]).

Voyons maintenant le cas des quadrilatères. Une quadrangulation de  $\bar{\Omega}$  a la même définition qu'une triangulation en remplaçant des triangles par des quadrilatères convexes et non réduits à des triangles. En général, les quadrangulations sont structurées, c'est-à-dire que chaque sommet est l'intersection de quatre quadrilatères. Mais ce n'est pas obligatoire, et il est parfois commode de construire des quadrangulations non-structurées. D'un point de vue pratique, la méthode des éléments finis quadrilatéraux est une généralisation intéressante de la méthode des différences finies. Mais dès qu'on a affaire à des quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes, leur analyse théorique est un peu plus complexe car les espaces d'éléments finis sur des quadrilatères ne sont pas composés de polynômes. En effet, rappelons d'abord la notation:  $Q_k$  est l'espace des polynômes (à deux variables) de degré inférieur ou égal à  $k$  en chaque variable, *i.e.*

$$Q_k = \text{Vect}\{x_1^i x_2^j, 0 \leq i, j \leq k\}.$$

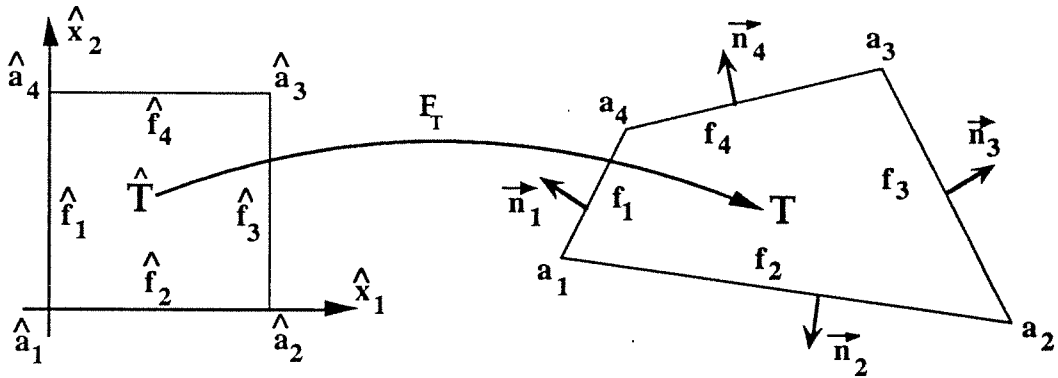


Figure 3

Soit  $\hat{T}$  le carré de référence  $[0, 1] \times [0, 1]$ , de sommets  $\hat{a}_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$ , et  $T$  un quadrilatère convexe et non réduit à un triangle, de sommets  $a_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$ , comme dans la Figure 3. Rappelons qu'il existe une application unique bilinéaire (c'est-à-dire, dont les composantes sont dans  $Q_1$ ), inversible  $F_T$  qui applique  $\hat{T}$  sur  $T$  et  $\hat{a}_i$  sur  $a_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$ . Alors, un espace d'éléments finis sur  $T$  est l'image par  $F_T^{-1}$  d'un espace de polynômes définis sur le carré de référence  $\hat{T}$ . En particulier, on pose

$$Q_k(T) = \{\hat{q} \circ F_T^{-1}; \hat{q} \in Q_k\}. \quad (2.23)$$

Il est clair que si  $T$  est un quadrilatère quelconque (et non un parallélogramme),  $Q_k(T)$  n'est pas un espace de polynômes dès que  $k \geq 1$ ; par contre,  $Q_0(T) = \mathcal{P}_0$ . Enfin, notons que

dans les méthodes d'éléments finis quadrilatéraux, certaines intégrales de la formulation variationnelle sont obligatoirement approchées par une formule de quadrature, car on ne peut pas les calculer autrement. D'ailleurs, lorsque la quadrangulation est rectangulaire, on retrouve les méthodes de différences finies classiques en calculant les intégrales de la formulation variationnelle par des formules de quadratures bien choisies. Nous en verrons un exemple au chapitre 3.

Soit  $h > 0$  le paramètre de discrétisation et  $\mathcal{T}_h$  une quadrangulation de  $\bar{\Omega}$  composée de quadrilatères convexes (non réduits à des triangles)  $T$ , de diamètre majoré par  $h$ . Nous dirons que  $\mathcal{T}_h$  est régulière si les deux triangulations obtenues en divisant les quadrilatères  $T$  en triangles sont elles-mêmes régulières. Comme dans le cas triangulaire, nous prenons successivement les pressions dans l'espace

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_k\},$$

avec  $k = 0, k = 1$ , etc.

Commençons avec  $k = 0$  et cherchons pour les vitesses un vecteur  $w$  de "degré" minimal, de composantes tangentielles affines sur  $\partial T$ , qui soit compatible avec une pression constante. Pour ceci, remarquons que le polynôme

$$\hat{q}_1 = \hat{x}_2(1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2),$$

s'annule sur les côtés  $\hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4$  de  $\hat{T}$  (cf. Figure 3). Donc la fonction

$$p_1 = n_1(\hat{q}_1 \circ F_T^{-1}),$$

a toutes ses composantes tangentielles nulles sur  $\partial T$ . Ceci nous induit à choisir

$$\hat{q}_2 = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)\hat{x}_1, \quad \hat{q}_3 = (1 - \hat{x}_2)\hat{x}_1\hat{x}_2, \quad \hat{q}_4 = \hat{x}_1\hat{x}_2(1 - \hat{x}_1), \quad (2.24a)$$

$$p_i = n_i(\hat{q}_i \circ F_T^{-1}), \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (2.24b)$$

et prendre  $w$  dans le sous-espace de dimension 12 de  $Q_2(T)^2$ :

$$Q_1(T) = Q_1(T)^2 \oplus \text{Vect}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}. \quad (2.25)$$

Comme dans le cas triangulaire, le premier espace dans cette somme assure une bonne approximation de la vitesse tandis que le second espace ne sert qu'à satisfaire la condition inf-sup. Egalement, les degrés de liberté de  $w$  sont ses valeurs aux sommets  $a_i$  de  $T$  et son flux normal à travers les côtés  $f_i$  de  $T$ .

Nous choisissons donc les espaces:

$$\bar{M}_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_0\}, \quad (2.26a)$$

$$\bar{X}_h = \{w_h \in C^0(\bar{\Omega})^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in Q_1(T), w_h|_\Gamma = 0\}. \quad (2.26b)$$



Une analyse très similaire à celle du cas triangulaire correspondant (*cf.* Bernardi & Raugel [3]) montre que l'erreur commise est en  $O(h)$ , *i.e.* la majoration (2.18) est encore valable ici.

Par contre, l'extension au degré supérieur est plus simple que dans le cas triangulaire. Considérons le cas où  $k = 1$ ; si on prend les pressions dans l'espace  $\mathbb{P}_1$  défini sur  $T$  (et non pas sur  $\hat{T}$ , ce qui est une distinction importante ici), il suffit de leur associer des vitesses dans  $Q_2(T)^2$  pour satisfaire la condition inf-sup. Ceci se vérifie en passant par une condition inf-sup locale, complétée par la condition globale que vérifie la paire  $(\bar{X}_h, \bar{M}_h)$  de (2.26). Nous choisissons donc la paire d'espaces:

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1\}, \quad (2.27a)$$

$$X_h = \{w_h \in C^0(\bar{\Omega})^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in Q_2(T)^2, w_h|_\Gamma = \mathbf{0}\}, \quad (2.27b)$$

et nous pouvons démontrer (*cf.* Girault & Raviart [12]) que l'erreur correspondante est en  $O(h^2)$ , *i.e.* elle vérifie (2.22).

**Remarque 2.5.** Jusqu'ici, nous avons sélectionné des méthodes qui satisfont la condition inf-sup. Cependant, il faut aussi citer une méthode très simple et répandue, mais qui ne satisfait pas la condition inf-sup. Dans cette méthode, la pression discrète  $p_h$  est constante dans chaque quadrilatère  $T$  et la vitesse  $u_h$  appartient à  $Q_1(T)^2$  dans chaque  $T$ . On l'appelle la méthode " $Q_1 - P_0$ ". Lorsque la quadrangulation est rectangulaire, on voit facilement que la condition inf-sup n'est pas satisfaite parce que la pression a un mode parasite. C'est-à-dire, il existe  $q_h \neq 0$ , à moyenne nulle dans  $\Omega$ , tel que pour tout  $v_h$ ,  $\int_\Omega q_h \operatorname{div} v_h \, dx = 0$ . Cette pression prend deux valeurs égales et opposées disposées comme sur un damier (en anglais, on l'appelle "checker-board mode").

Néanmoins, lorsque le maillage est structuré et moyennant quelques précautions simples, cette méthode approche toujours la vitesse de façon satisfaisante. Quant à la pression, il est parfois (mais pas toujours) nécessaire de la filtrer pour obtenir aussi une approximation satisfaisante (*cf.* Boland & Nicolaidis [5], Girault & Raviart [12] ou Pitkaranta & Stenberg [22]).

**Remarque 2.6.** En pratique, il n'est évidemment pas nécessaire d'imposer la contrainte  $\int_\Omega p_h \, dx = 0$  qui n'est qu'un moyen théorique commode pour fixer la constante additive de  $p_h$ , non précisée par les équations de Stokes. On fixe plutôt la valeur de la pression en un point.

#### 2.4. Le cas des éléments finis tétraédriques dans $\mathbb{R}^3$ .

Les éléments finis standard tétraédriques sont une généralisation immédiate des éléments finis triangulaires. En fait, on les définit directement dans  $\mathbb{R}^d$  et toutes les définitions

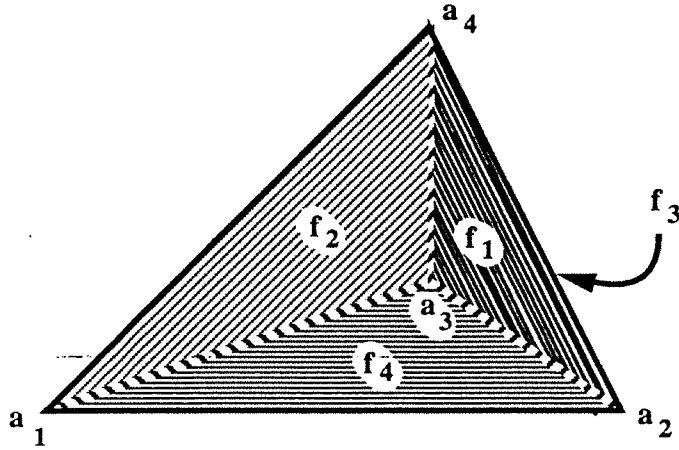


Figure 4

rappelées au début du paragraphe 2.3 sont valables ici en remplaçant  $d = 2$  par  $d = 3$ . Par exemple, soit  $T$  un tétraèdre quelconque, de sommets  $a_1, a_2, a_3, a_4$  et de faces opposées  $f_1, f_2, f_3, f_4$  comme dans la Figure 4,  $n_i$  désignant la normale unité extérieure à  $f_i$ .

Les coordonnées barycentriques de  $T$ ,  $\lambda_i(x)$  pour  $1 \leq i \leq 4$ , sont des polynômes de degré un à trois variables déterminés par les équations:

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq 4.$$

Ils vérifient nécessairement

$$\lambda_i|_{f_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Comme dans le cas bidimensionnel, nous adoptons l'hypothèse que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est polyédrique. (Notons que cette simplification est plus importante que dans  $\mathbb{R}^2$  car les éléments "courbes" de  $\mathbb{R}^3$  sont moins maniables.) On désigne toujours par  $h > 0$  le paramètre de discrétisation. Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\bar{\Omega}$  composée de tétraèdres  $T$  de diamètre majoré par  $h$ . Notre stratégie est inchangée: nous choisissons successivement

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathcal{P}_k\},$$

avec  $k = 0$ , etc. . . et nous construisons à chaque fois un espace  $X_h$  approprié qui satisfait la condition inf-sup (2.7). Pour simplifier, nous ne considérons que le cas où  $k = 0$ , car cette méthode devient rapidement trop coûteuse en dimension trois. L'expérience bidimensionnelle nous suggère de chercher un vecteur  $w$  dont les composantes sont des polynômes de  $\mathcal{P}_3$  et dont les composantes tangentielles sur  $\partial T$  sont des polynômes de  $\mathcal{P}_1$ . Pour ceci, remarquons que le polynôme de  $\mathcal{P}_3^3$ :

$$p_1 = n_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4,$$

s'annule sur les faces  $f_2, f_3, f_4$  et vérifie évidemment  $p_1 \times n_1 = 0$ . Donc nous posons

$$p_1 = n_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4, \quad p_2 = n_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_1, \quad p_3 = n_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2, \quad p_4 = n_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (2.28a)$$

$$\mathcal{P}_1(T) = \mathbb{P}_1^3 \oplus \text{Vect}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \quad (2.28b)$$

qui est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_3^3$  de dimension 16. Comme en dimension deux, le premier espace de cette somme assure une bonne approximation de la vitesse, tandis que le second espace ne sert qu'à satisfaire la condition inf-sup. Tout  $w \in \mathcal{P}_1(T)$  est déterminé par ses valeurs aux sommets  $a_i$  de  $T$  et son flux normal à travers les faces  $f_i$  de  $T$ . Ainsi, nous choisissons la paire d'espaces:

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_0\}, \quad (2.29a)$$

$$X_h = \{w_h \in C^0(\overline{\Omega})^3; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in \mathcal{P}_1(T), w_h|_\Gamma = 0\}. \quad (2.29b)$$

On démontre facilement que l'erreur d'approximation de ces espaces est  $O(h)$ , lorsque la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est régulière. La vérification de la condition inf-sup est sensiblement la même que dans le cas bidimensionnel mais en plus délicat. En conclusion, on trouve que l'erreur de ce schéma est  $O(h)$ , *i.e.* la majoration (2.18) a encore lieu ici.

## 2.5. Approximation continue de la pression: éléments triangulaires de type Taylor-Hood.

Pour obtenir une approximation continue de la pression, il faut que les fonctions de  $M_h$  soient des polynômes de degré au moins un dans chaque triangle. Donc, nous considérons le cas du degré un:

$$M_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1, \int_\Omega q_h dx = 0\}. \quad (2.30)$$

Nous allons associer à  $M_h$  trois types d'espaces  $X_h$  qui donneront lieu à des approximations d'ordre différent. Bien entendu, nous supposons que  $\mathcal{T}_h$  est régulière.

Commençons avec le "mini-élément" (auss appelé " $\mathbb{P}_1$ -bulle") (*cf.* Arnold, Brezzi & Fortin [1]), qui est d'ordre un. Dans chaque  $T$ , nous prenons chaque composante de la vitesse dans l'espace

$$\mathcal{P}_1(T) = \mathbb{P}_1 \oplus \text{Vect}\{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\}, \quad (2.31a)$$

où de nouveau la "fonction bulle" ne sert qu'à satisfaire la condition inf-sup,

$$X_h = \{w_h \in C^0(\overline{\Omega})^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in \mathcal{P}_1(T)^2, w_h|_\Gamma = 0\}. \quad (2.31b)$$

En ce qui concerne la condition inf-sup (2.7), on la vérifie facilement en construisant explicitement l'opérateur  $\pi_h$  du Lemme 2.2. Par ailleurs, les propriétés d'approximation des espaces  $M_h$  et  $X_h$  sont immédiates:

$$\forall p \in H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \leq C h^2 |p|_{2,\Omega},$$

$$\forall u \in H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2, \quad \inf_{v_h \in X_h} |u - v_h|_{1,\Omega} \leq C h |u|_{2,\Omega}.$$

On en déduit que le schéma utilisant les espaces  $M_h$  et  $X_h$  définis par (2.30) et (2.31) est d'ordre un:

$$|u - u_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C h \{|u|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}\}.$$

Maintenant, remarquons que l'interpolation dans  $M_h$  est plus précise que dans  $X_h$ . On peut espérer obtenir de meilleurs résultats (*i.e.* l'ordre deux) en raffinant l'espace  $X_h$ . La méthode de Taylor-Hood proprement dite consiste à prendre tout simplement dans chaque  $T$  les composantes de la vitesse dans  $\mathbb{P}_2$ , avec pour degrés de liberté les valeurs aux trois sommets  $a_i$  et au point milieu  $b_i$  des trois côtés. L'espace est donc

$$X_h = \{w_h \in C^0(\bar{\Omega})^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in \mathbb{P}_2^2, w_h|_\Gamma = 0\}. \quad (2.32)$$

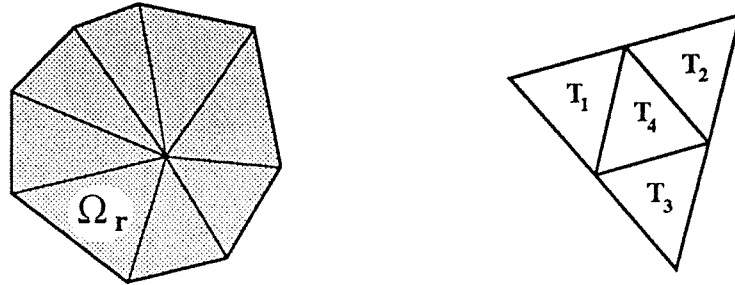


Figure 5

La difficulté réside alors dans la vérification de la condition inf-sup. On peut l'établir en passant par une condition inf-sup locale (*cf.* Girault & Raviart [12]), mais la démonstration est loin d'être triviale. La partition employée s'obtient en réunissant tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$  qui se rencontrent en certains noeuds de  $\mathcal{T}_h$  convenablement choisis, comme dans la Figure 5. Ceci ne limite pas la triangulation, car en fait il n'est pas obligatoire que les macro-éléments  $\Omega_r$  soient deux à deux disjoints. L'énoncé du Théorème 2.3 est encore valable lorsque la décomposition de  $\Omega$  n'est pas une partition, pourvu qu'un même triangle n'appartienne qu'à un nombre fixe de  $\Omega_r$ . Donc, on montre que le schéma de Taylor-Hood est d'ordre deux:

$$|u - u_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C h^2 \{|u|_{3,\Omega} + |p|_{2,\Omega}\}.$$

Enfin, une variante très répandue de cette méthode de Taylor-Hood consiste à décomposer chaque triangle  $T$  en quatre triangles égaux,  $T_i$ , pour  $1 \leq i \leq 4$  (cf. Figure 5), et à prendre les composantes de la vitesse continues sur  $T$  et affines (donc polynômiales de degré un) dans chaque sous-triangle  $T_i$ ; les degrés de liberté étant les mêmes que ceux de la méthode de Taylor-Hood. On l'appelle la méthode " $P_1$ -iso  $P_1$ ". Evidemment, avec cette discrétisation, l'erreur d'interpolation de la vitesse ne peut être que d'ordre un. Cependant, les résultats obtenus en pratique sont suffisamment précis pour justifier la popularité de cette variante: de ces trois méthodes, elle est la plus utilisée.

## 2.6. Un algorithme de découplage pour résoudre le système linéaire.

Reprenons le cadre abstrait du paragraphe 2.1 en supposant que les hypothèses (2.2) et (2.4) sont satisfaites et qu'en plus la forme  $a$  est symétrique. Cherchons le système linéaire correspondant au problème  $(Q_h)$ . Soit  $N$  la dimension de  $X_h$ ,  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  une base de  $X_h$ ,  $M$  la dimension de  $M_h$  et  $\{\chi_k\}_{k=1}^M$  une base de  $M_h$ . Dans ces bases, le problème  $(Q_h)$  s'écrit:

Chercher  $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i$  et  $p_h = \sum_{k=1}^M P_k \chi_k$  tels que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) U_j + \sum_{\ell=1}^M b(\varphi_i, \chi_\ell) P_\ell &= \langle f, \varphi_i \rangle, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N, \\ \sum_{j=1}^N b(\varphi_j, \chi_k) U_j &= 0, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq M. \end{aligned} \tag{2.33}$$

On peut déjà remarquer que l'hypothèse (2.4) entraîne forcément que  $N \geq M$  car (2.4) assure l'existence d'un isomorphisme entre  $M_h$  et  $V_h^\perp$ , qui est un sous-espace de  $X_h$ . Soit  $A$  la matrice carrée  $N \times N$  de coefficients

$$A_{i,j} = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j}, \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq N,$$

et  $B$  la matrice rectangulaire  $M \times N$  de coefficients

$$B_{k,j} = (b(\varphi_j, \chi_k))_{k,j}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq M, 1 \leq j \leq N.$$

On retrouve bien le double système linéaire (1.19), avec pour inconnues  $u = (U_i)_{i=1}^N$ ,  $p = (P_k)_{k=1}^M$  et second membre  $f = (\langle f, \varphi_i \rangle)_{i=1}^N$ . De plus les hypothèses ci-dessus entraînent que  $A$  est symétrique, définie positive et  $B$  surjective. Donc le système (2.33) a une solution unique

$$p = (BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1}f \quad \text{et} \quad u = A^{-1}(f - B^t p). \tag{2.34}$$

Le système (2.33) est donc entièrement résolu, mais il est rare qu'on utilise directement les formules (2.34) car leur calcul est coûteux. Plutôt, on remarque que la matrice  $BA^{-1}B^t$  est symétrique, définie positive et donc la première équation du système (2.34) se prête bien à une méthode itérative de type gradient. En effet, on sait que résoudre le système linéaire  $\mathcal{A}x = b$ , avec  $\mathcal{A}$  symétrique, définie positive, équivaut à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}v, v) - (b, v).$$

Donc ici,  $p$  réalise le seul minimum de la fonctionnelle

$$J(q) = \frac{1}{2}(BA^{-1}B^t q, q) - (BA^{-1}f, q) = \frac{1}{2}(A^{-1}B^t q, B^t q) - (A^{-1}f, B^t q).$$

On peut fractionner ce calcul, en introduisant, pour  $q$  donné dans  $\mathbb{R}^M$ , l'unique solution  $v(q) \in \mathbb{R}^N$  du système

$$Av(q) = f - B^t q.$$

Alors

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{1}{2}(A^{-1}(f - Av(q)), f - Av(q)) - (A^{-1}f, f - Av(q)) \\ &= \frac{1}{2}(Av(q), v(q)) - \frac{1}{2}(f, v(q)) - \frac{1}{2}(A^{-1}f, f - Av(q)) \\ &= \frac{1}{2}(Av(q), v(q)) - \frac{1}{2}(A^{-1}f, f). \end{aligned}$$

Posons

$$K(q) = \frac{1}{2}(Av(q), v(q)). \quad (2.35)$$

Alors minimiser  $J$  revient à minimiser  $K$  puisque le terme restant est constant. Comme  $J$  a un minimum unique, le minimum de  $K$  est aussi unique et  $p$  est caractérisé par

$$K(p) = \inf_{q \in \mathbb{R}^M} K(q) \text{ avec } Av(q) = f - B^t q. \quad (2.36)$$

Il y a plusieurs algorithmes pour résoudre le problème de minimisation (2.36). Ici nous décrivons en détail l'algorithme de gradient simple, aussi appelé algorithme d'Uzawa. On part d'un vecteur donné  $p^0 \in \mathbb{R}^M$ , d'une suite de vecteurs (appelés directions)  $w^m \in \mathbb{R}^M$  à choisir, et on construit la suite de vecteurs  $p^m \in \mathbb{R}^M$  par la formule

$$\forall m \geq 0, p^{m+1} = p^m - \rho^m w^m, \quad (2.37)$$

où le scalaire  $\rho^m \in \mathbb{R}$  minimise  $K(p^m - \rho w^m)$  par rapport à  $\rho$ :

$$K(p^m - \rho^m w^m) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} K(p^m - \rho w^m).$$

On obtient des algorithmes différents selon le choix de la suite  $w^m$ . L'algorithme d'Uzawa, s'obtient en prenant  $w^m = g^m$ , où  $g^m$  désigne le gradient de  $K(p^m)$ . Faisons les calculs; on dérive (2.35) et la seconde équation de (2.36) par rapport à  $q$ , ce qui donne

$$K'(q) = -Bv(q) \quad \text{et} \quad K''(q) = -Bv'(q) = BA^{-1}B^t.$$

Posons  $u^m = v(p^m)$ , alors

$$g^m = K'(p^m) = -Bu^m.$$

On vérifie facilement que l'application  $\rho \mapsto K(p^m - \rho g^m)$  a un minimum unique atteint au point  $\rho^m$  caractérisé par  $\frac{dK}{d\rho} = 0$ . Ceci s'écrit

$$K'(p^m - \rho^m g^m) \cdot g^m = 0,$$

d'où on tire facilement l'expression de  $\rho^m$  avec un développement de Taylor, en utilisant le fait que la dérivée seconde de  $K$  est constante:

$$0 = K'(p^m - \rho^m g^m) \cdot g^m = K'(p^m) \cdot g^m - \rho^m K'' \cdot (g^m, g^m),$$

d'où

$$\rho^m = \frac{K'(p^m) \cdot g^m}{K'' \cdot (g^m, g^m)} = \frac{\|g^m\|^2}{(B^t g^m, A^{-1} B^t g^m)}.$$

Pour économiser les calculs, on introduit le vecteur auxiliaire  $z^m$  défini par

$$Az^m = B^t g^m.$$

Alors, à partir du vecteur  $p^0$ , l'étape de démarrage de l'algorithme d'Uzawa est

$$Au^0 = f - B^t p^0,$$

puis, pour chaque  $m \geq 0$ , connaissant  $u^m \in \mathbb{R}^N$  et  $p^m \in \mathbb{R}^M$ , l'étape générale est

$$\begin{aligned} g^m &= -Bu^m, \\ Az^m &= B^t g^m, \\ \rho^m &= \frac{\|g^m\|^2}{(B^t g^m, z^m)}, \\ p^{m+1} &= p^m - \rho^m g^m, \\ u^{m+1} &= u^m + \rho^m z^m. \end{aligned}$$

On montre (*cf.* Girault & Raviart [12]) que cet algorithme est convergent. Les vecteurs  $z^m$  et  $u^0$  sont définis volontairement de manière implicite, pour indiquer qu'on n'inverse pas la matrice  $A$ , mais qu'on résout le système linéaire correspondant. Le coût de l'algorithme

se mesure au nombre de fois où il faut résoudre ce système et on voit qu'il faut en résoudre un à chaque étape, y compris l'étape initiale. Comme la matrice  $A$  est symétrique, définie positive, il y a plusieurs algorithmes pour résoudre ces systèmes, par exemple, Choleski (si  $N$  n'est pas trop grand) ou gradient conjugué.

**Remarque 2.7.** On peut aussi découpler le calcul de  $u_h$  et de  $p_h$  en résolvant d'abord le problème  $(P_h)$  pour trouver  $u_h$ , et ensuite le problème  $(Q_h)$  pour trouver  $p_h$ . Mais cette approche n'est réaliste que si l'espace  $V_h$  a une base de fonctions à support "petit" et aisément calculable (cf. Hecht [14]). C'est le cas par exemple de la méthode  $Q_1 - P_0$  décrite dans la Remarque 2.5, sur un maillage rectangulaire (cf. Figure 6).

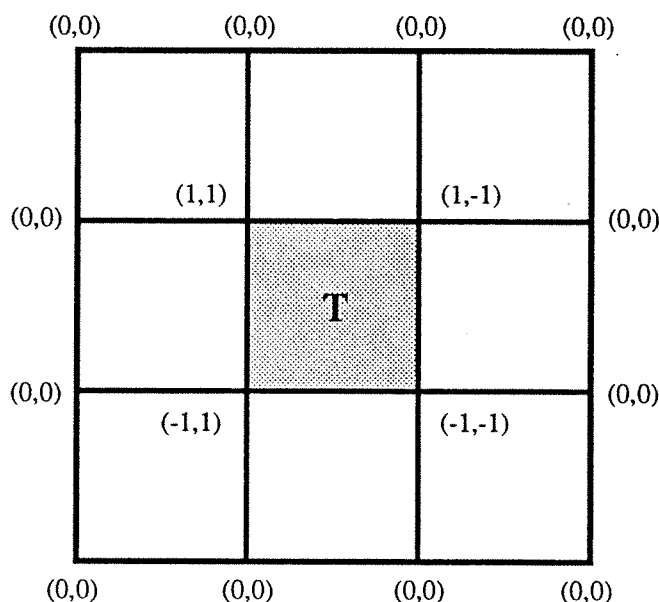


Figure 6

### 3. Le passage en fonction courant.

Contrairement aux schémas discutés au chapitre précédent, les schémas présentés ici sont de type incompressible, c'est-à-dire la vitesse approchée est exactement à divergence nulle. Ceci s'obtient en exprimant la vitesse au moyen de la fonction courant. Cette technique est surtout utilisée en dimension deux, car en dimension trois la fonction courant est un vecteur, le potentiel vecteur, et la méthode à laquelle on aboutit est plus coûteuse. Pour simplifier, nous nous placerons donc en dimension deux et nous ferons l'exposé principal pour le problème homogène, dans un domaine simplement connexe du plan. Dans un tel domaine bidimensionnel, il est bien connu que nous pouvons écrire:

$$\mathbf{u} = \text{rot } \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \quad (3.1)$$



où la fonction courant  $\psi$  est unique dans  $H_0^2(\Omega)$ . En prenant le rotationnel de l'équation (1.1) et en utilisant les identités

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \psi) = -\Delta \psi, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = -\Delta \mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}), \quad (3.3)$$

on déduit facilement que la fonction courant  $\psi$  est l'unique solution du problème biharmonique:

$$\psi \in H_0^2(\Omega) \quad , \quad \nu \Delta^2 \psi = \operatorname{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.4)$$

C'est pourquoi le problème de Stokes est en réalité un problème d'ordre quatre.

Malheureusement, il est difficile d'exploiter en pratique la formulation (3.4) car elle demande la construction de sous-espaces d'éléments finis de  $H^2(\Omega)$ . Ces éléments, appelés "éléments de Hermite" sont coûteux et incommodes. Au lieu, nous proposons d'affaiblir la formulation (3.4) en introduisant le tourbillon, ou vorticité comme variable supplémentaire:

$$\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (3.5)$$

Alors  $\psi$  et  $\omega$  sont reliés par l'équation:

$$\omega = -\Delta \psi, \quad (3.6)$$

et l'équation (3.4) s'écrit:

$$-\nu \Delta \omega = \operatorname{rot} \mathbf{f}. \quad (3.7)$$

Nous aboutissons donc à un système de deux équations de Laplace, (3.6) et (3.7), dont on démontre facilement qu'il est équivalent au problème de Stokes.

### 3.1. Formulation faible en fonction courant et tourbillon.

Au lieu de prendre pour inconnues la vitesse et la pression, nous choisirons donc pour inconnues la fonction courant et le tourbillon. Prenons d'abord le produit scalaire de l'équation (3.7) avec une fonction-test  $\varphi$ , assez régulière, nulle sur  $\Gamma$ . La formule de Green nous donne

$$\nu(\nabla \omega, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi).$$

Remarquons que tous les termes de cette équation ont un sens si  $\omega$  et  $\varphi$  appartiennent à  $H^1(\Omega)$ . Puis, prenons le produit scalaire de (3.6) avec une fonction-test  $\mu$ . En appliquant la formule de Green et en se servant du fait que  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma$ , on trouve

$$(\nabla \psi, \nabla \mu) = (\omega, \mu).$$

Remarquons que tous les termes de cette équation ont un sens si  $\psi$  et  $\mu$  appartiennent à  $H^1(\Omega)$ . Donc si on veut utiliser ces deux équations variationnelles, on peut “oublier” que  $\psi$  est en fait dans  $H_0^2(\Omega)$ , mais en revanche, il faut demander que  $\omega$  soit dans  $H^1(\Omega)$ , ce qui est plus fort que la régularité normale du tourbillon. Nous proposons donc la formulation variationnelle suivante (cf. Ciarlet & Raviart [8]):

Chercher un couple  $(\psi, \omega)$  dans  $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tel que:

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) , \nu(\nabla \omega, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi) . \quad (3.8)$$

$$\forall \mu \in H^1(\Omega) , (\nabla \psi, \nabla \mu) = (\omega, \mu) . \quad (3.9)$$

Il est facile de voir que si ce problème a une solution, elle est forcément unique. Mais par contre, il n’a pas toujours une solution. En effet, ce problème est un cas particulier du problème mixte étudié au paragraphe 1.2 et on peut montrer par contre-exemple que la forme  $b$  correspondante ne satisfait pas la condition inf-sup (1.24). La raison est que la formule (3.8) demande que  $\omega$  appartienne à  $H^1(\Omega)$ , tandis que le système (3.8), (3.9) ne permet pas de majorer  $\|\omega\|_{1,\Omega}$  en fonction des données. La difficulté vient donc des normes employées. Il est possible de modifier légèrement (3.8), (3.9) pour obtenir une formulation qui entre exactement dans le cadre du paragraphe 1.2, mais elle n’apporte rien de plus d’un point de vue pratique, car une fois discrétisée, elle donne lieu aux mêmes schémas que (3.8), (3.9). Néanmoins, si la solution  $u$  du problème de Stokes (1.1), (1.2), (0.10) appartient à  $H^2(\Omega)^2$ , ce qui est une hypothèse de régularité, alors il est facile de voir que le couple  $(\psi, \omega)$ , où  $\psi$  est la fonction courant de  $u$  et  $\omega$  son tourbillon, est la solution de (3.8), (3.9). Nous ferons donc l’hypothèse

$$u \in H^2(\Omega)^2 . \quad (3.10)$$

### 3.2. Approximation par éléments finis mixtes.

Pour simplifier, on suppose encore que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est polygonale, de manière à trianguler ou quadranguler entièrement  $\bar{\Omega}$  par une triangulation ou quadrangulation  $\mathcal{T}_h$ . Le problème (3.8), (3.9) se prête facilement à une approximation par éléments finis. Pour approcher le tourbillon, on prend un espace standard d’éléments finis dans  $H^1(\Omega)$ , par exemple l’espace introduit au paragraphe 2.5 dans le cas d’une triangulation:

$$\Theta_h = \{\theta_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h , \theta_h|_T \in \mathcal{P}_1\} , \quad (3.11a)$$

ou dans le cas d’une quadrangulation

$$\Theta_h = \{\theta_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h , \theta_h|_T \in Q_1(T)\} . \quad (3.11b)$$

Puis, pour approcher la fonction courant, on prend dans les deux cas un sous-espace convenable de  $\Theta_h$ :

$$\Phi_h = \Theta_h \cap H_0^1(\Omega) = \{\varphi_h \in \Theta_h; \varphi_h = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (3.12)$$

Alors, on a immédiatement une approximation de (3.8), (3.9):

*Chercher un couple  $(\psi_h, \omega_h)$  dans  $\Phi_h \times \Theta_h$  tel que:*

$$\forall \varphi_h \in \Phi_h, \nu(\nabla \omega_h, \nabla \varphi_h) = (\mathbf{f}, \text{rot } \varphi_h). \quad (3.13)$$

$$\forall \mu_h \in \Theta_h, (\nabla \psi_h, \nabla \mu_h) = (\omega_h, \mu_h). \quad (3.14)$$

Il est très facile de vérifier que le problème (3.13), (3.14) admet une solution unique, car c'est un système linéaire carré dont le système homogène associé n'admet que la solution nulle. Il est également facile de constater que c'est un problème de type  $(Q_h)$ . En effet, on a ici

$$X_h = \Phi_h \times \Theta_h, \quad M_h = \Theta_h,$$

$$\forall s_h = (\psi_h, \omega_h), \forall t_h = (\varphi_h, \theta_h) \in X_h, \quad a(s_h, t_h) = (\omega_h, \theta_h),$$

$$\forall t_h = (\varphi_h, \theta_h) \in X_h, \forall \mu_h \in M_h, \quad b(t_h, \mu_h) = (\nabla \varphi_h, \nabla \mu_h) - (\theta_h, \mu_h).$$

Alors

$$V_h = \{t_h = (\varphi_h, \theta_h) \in \Phi_h \times \Theta_h; \forall \mu_h \in \Theta_h, (\nabla \varphi_h, \nabla \mu_h) = (\theta_h, \mu_h)\}.$$

Notons également que  $\|\theta_h\|_{0,\Omega}$  est une norme sur  $V_h$  uniformément équivalente (par rapport à  $h$ ) à la norme produit. Cependant, l'analyse d'erreur du paragraphe 2.1 ne s'applique pas ici, car la condition inf-sup (2.4) n'est pas satisfaite uniformément par rapport à  $h$ . En effet, pour  $\mu_h$  quelconque dans  $M_h$ , en choisissant  $t_h = (0, -\mu_h)$ , on trouve

$$\sup_{t_h \in X_h} b(t_h, \mu_h) \geq \|\mu_h\|_{0,\Omega}^2,$$

ce qui entraîne la condition inf-sup car on est en dimension finie, mais pas avec la bonne norme. C'est la même difficulté que pour le problème (3.8), (3.9). Malgré ceci, on peut majorer l'erreur, sans toutefois obtenir des estimations aussi fines que celles du Théorème 2.1. Sans entrer dans les détails, qui sont assez techniques, on montre dans un domaine convexe (cf. Girault & Raviart [12]) que l'erreur sur la fonction courant  $|\psi - \psi_h|_{1,\Omega}$  est presque  $O(h)$  et l'erreur sur le tourbillon  $\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega}$  est  $O(h^{1/2})$ .

**Remarque 3.1.** Dans le cas particulier où  $\mathcal{T}_h$  est une quadrangulation uniforme composée de rectangles (ce qui limite  $\Omega$  à être rectangulaire par morceaux), on montre que la méthode (3.13), (3.14) est d'ordre un, c'est-à-dire l'erreur sur le tourbillon est  $O(h)$  (cf. Girault & Raviart [12]). Ce cas est particulièrement intéressant, car si on approche les intégrales

de (3.13), (3.14) dans chaque rectangle  $T$  par la formule à quatre points qui généralise la formule des trapèzes, on retrouve le schéma aux différences finies Marker-and-Cell (cf. Daly *et al.* [10]), qui est un des schémas les couramment utilisés. En effet, si  $(i, j)$  est l'indice d'un noeud intérieur de la quadrangulation, et si  $h_1$  et  $h_2$  désignent respectivement le pas dans la direction de  $x_1$  et de  $x_2$ , l'équation (3.13) donne en ce noeud

$$\begin{aligned} -\nu \left\{ \frac{1}{h_1^2} (\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}) + \frac{1}{h_2^2} (\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}) \right\} \\ = \frac{1}{2h_1} (f_{i+1,j}^2 - f_{i-1,j}^2) - \frac{1}{2h_2} (f_{i,j+1}^1 - f_{i,j-1}^1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{f} = (f^1, f^2)$ ; et (3.14) donne

$$-\frac{1}{h_1^2} (\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) - \frac{1}{h_2^2} (\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) = \omega_{i,j}. \quad (3.16)$$

Ce sont bien les équations intérieures du schéma Marker-and-Cell. Noter que (3.16) donne une expression explicite de  $\omega_{i,j}$ ; si on substitue cette expression dans (3.15), on trouve une discrétisation du problème biharmonique (3.4).

On peut aussi interpréter le schéma Marker-and-Cell comme une méthode de volumes finis, mais il est avantageux de le présenter comme une méthode d'éléments finis couplée avec une formule d'intégration numérique, car cette approche permet de l'étendre non seulement à des triangles ou à des quadrilatères, mais aussi à des approximations d'ordre plus élevé. Pour simplifier, nous nous sommes limités à des polynômes de degré un, mais tout ceci est valable pour des polynômes de degré  $k$  quelconque.

Il y a diverses faons de résoudre numériquement le système (3.13), (3.14) où les deux inconnues  $\psi_h$  et  $\omega_h$  sont généralement liées. On peut évidemment résoudre simultanément toutes les équations de (3.13), (3.14), ce qui constitue un système volumineux. Mais on peut également dissocier le calcul de  $\psi_h$  et de  $\omega_h$  par une méthode directe, en remarquant que les deux équations de (3.13), (3.14) sont "presque" deux problèmes aux limites discrets pour l'opérateur de Laplace. En effet, si on connaît la trace de  $\omega_h$  sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ , alors l'équation (3.13) détermine  $\omega_h$ . Ensuite, une fois que  $\omega_h$  est connu, l'équation (3.14) détermine  $\psi_h$ . Plus précisément, soit  $G_h$  l'espace des traces des fonctions de  $\Theta_h$ ; *i.e.* décomposons  $\Theta_h$  en

$$\Theta_h = \Phi_h \oplus G_h.$$

Soit  $w_h^0 \in \Phi_h$  et  $\psi_h^0 \in \Phi_h$  les solutions (uniques) des systèmes:

$$\forall \varphi_h \in \Phi_h, \quad \nu(\nabla \omega_h^0, \nabla \varphi_h) = (\mathbf{f}, \text{rot} \varphi_h), \quad (3.17a)$$

$$\forall \varphi_h \in \Phi_h, \quad (\nabla \psi_h^0, \nabla \varphi_h) = (\omega_h^0, \varphi_h). \quad (3.17b)$$

Puis, pour  $g_h$  quelconque dans  $G_h$  soit  $\omega_h(g_h) \in \Theta_h$  et  $\psi_h(g_h) \in \Phi_h$  les solutions (uniques) des systèmes:

$$\begin{aligned} \forall \varphi_h \in \Phi_h, \nu(\nabla \omega_h(g_h), \nabla \varphi_h) &= 0 \\ \omega_h(g_h) &= g_h \text{ sur } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\forall \varphi_h \in \Phi_h, (\nabla \psi_h(g_h), \nabla \varphi_h) = (\omega_h(g_h), \varphi_h). \quad (3.18b)$$

Par conséquent, la trace sur  $\Gamma$  (disons  $\lambda_h$ ) de  $\omega_h$  devient l'inconnue du problème. On vérifie facilement (*cf.* Glowinski & Pironneau [13]) que  $\lambda_h$  est l'unique solution du problème:

Chercher  $\lambda_h \in G_h$  tel que:

$$\forall g_h \in G_h, (\omega_h(\lambda_h), \omega_h(g_h)) = -(\omega_h^0, \omega_h(g_h)). \quad (3.19)$$

Alors, le couple  $(\omega_h(\lambda_h), \psi_h(\lambda_h))$  est la solution de (3.8), (3.9). La matrice du système (3.19) est symétrique, définie positive. Elle n'est pas creuse (généralement), mais elle n'est pas très "grande" puisque la dimension de  $G_h$  (le nombre de noeuds de  $\mathcal{T}_h$  sur  $\Gamma$ ) est faible comparée avec celle de  $\Theta_h$ . Sa construction nécessite le calcul de  $\omega_h(g_h)$  – *i.e.* la résolution d'un problème de Dirichlet non-homogène – pour chaque fonction de base  $g_h$  de  $G_h$ .

**Remarque 3.2.** On peut procéder de même en dimension trois, mais, comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, cette approche est plus compliquée et plus coûteuse. D'une part la fonction courant et le tourbillon sont tous deux des vecteurs, ce qui fait qu'au lieu de quatre inconnues,  $u_1, u_2, u_3$  et  $p$ , on en a maintenant six,  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$ . D'autre part, l'opérateur correspondant n'est plus le gradient, mais le rotationnel et les conditions aux limites ne fixent plus toute la trace de la fonction courant, mais seulement la trace tangentielle. De ce fait, les espaces d'éléments finis pour approcher la fonction courant et le tourbillon ne sont pas des sous-espaces classiques de  $H^1(\Omega)^3$ , mais sont plutôt des espaces non-conformes (*cf.* Nedelec [20] ou Girault & Raviart [12]).

### 3.3. Discrétisation de la pression.

En ce qui concerne la pression, une fois que  $\psi_h$  et  $\omega_h$  sont calculés, on peut soit utiliser une approximation discontinue, soit une approximation continue de  $p$ . Mais c'est cette dernière qui est la plus facile à mettre en oeuvre. Pour déduire le problème approché, nous utiliserons (3.3) et (3.5), sachant que  $\text{div } u = 0$

$$-\Delta u = \text{rot}(\text{rot } u) = \text{rot } \omega.$$

Donc, en multipliant (1.1) par  $\nabla q$ , on obtient:

$$\forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), (\nabla p, \nabla q) = (f - \nu \text{rot } \omega, \nabla q). \quad (3.20)$$

Cette équation détermine  $p$  de manière unique dans  $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ . Noter que l'hypothèse (3.10) entraîne que  $p$  est bien dans  $H^1(\Omega)$ .

En ce qui concerne la discrétisation, nous cherchons donc  $p_h$  dans l'espace  $M_h$  défini par (2.30):

$$M_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1, \int_{\Omega} q_h dx = 0\},$$

ce qui est le degré minimum pour que les fonctions soient continues. Notre problème approché est:

*Chercher  $p_h \in M_h$  tel que*

$$\forall q_h \in M_h, (\nabla p_h, \nabla q_h) = (f - \nu \operatorname{rot} \omega_h, \nabla q_h). \quad (3.21)$$

C'est un problème standard de Neumann pour l'opérateur de Laplace. Une étude approfondie de l'erreur (cf. Girault & Raviart [12]) donne le Théorème 3.4 si la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière au sens suivant (comparer avec la Définition 2.4):

**Définition 3.3.** La triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière s'il existe deux constantes  $\tau > 0$  et  $\sigma > 0$ , indépendantes de  $h$  telles que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \tau h \leq h_T \leq \sigma \rho_T.$$

Intuitivement, cette définition veut dire que la triangulation n'a pas de triangle "trop petit".

**Théorème 3.4.** *On suppose que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière et que l'ouvert  $\Omega$  est convexe. Alors la solution  $p_h$  du problème (3.21) satisfait l'estimation:*

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \{ & h \inf_{q_h \in Q_h} |p - q_h|_{1,\Omega} + \nu \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} \\ & + \nu \inf_{\theta_h \in \Theta_h} (\|\omega - \theta_h\|_{0,\Omega} + h |\omega - \theta_h|_{1,\Omega}) \}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On a donc la même estimation d'erreur pour  $p_h$  que pour  $\omega_h$ , c'est-à-dire, en général,  $\|p - p_h\|_{0,\Omega}$  est  $O(h^{1/2})$ . Comme pour le tourbillon, cette majoration n'est pas optimale, mais ce n'est pas dû au caractère continu de l'approximation de  $p$ : une approximation discontinue n'aboutit pas à de meilleures estimations. Noter que lorsque  $\mathcal{T}_h$  est une quadrangulation uniforme composée de rectangles, comme dans la Remarque 3.1, alors l'erreur sur la pression est bien  $O(h)$ , puisqu'il en est de même pour l'erreur sur le tourbillon.

#### 4. Application au problème de Navier-Stokes stationnaire.

Rappelons la version stationnaire des équations de Navier-Stokes (0.6):

Chercher  $u \in H^1(\Omega)^d$  et  $p \in L_0^2(\Omega)$  tels que:

$$-\nu \Delta u + u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \nabla p = f, \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.2)$$

$$u = k, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4.3)$$

avec la condition de compatibilité

$$\int_{\Gamma} k \cdot n \, d\sigma = 0. \quad (4.4)$$

Nous allons voir que tous les schémas des chapitres précédents s'adaptent facilement à ce problème. Mais auparavant, il est nécessaire d'en rappeler les principaux résultats théoriques.

##### 4.1. Résumé de la théorie des équations de Navier-Stokes.

Commençons avec le cas homogène:

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.5)$$

La seule différence avec le problème de Stokes est l'introduction du terme de convection non-linéaire  $(u \cdot \nabla)u$ . Or, si on veut mettre le problème de Navier-Stokes sous forme variationnelle, il est nécessaire que l'intégrale

$$\int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx$$

soit finie pour chaque  $v \in H_0^1(\Omega)^d$ . Comme  $\partial u / \partial x_j \in L^2(\Omega)^d$ , il faut que le produit  $u_j v_i$  appartienne aussi à  $L^2(\Omega)$ . Et comme  $u_j$  et  $v_i$  jouent ici le même rôle, il faut que chacun appartienne à  $L^4(\Omega)$ . C'est bien le cas, en dimension 2 ou 3, grâce aux injections de Sobolev rappelées au paragraphe 1.1: l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$  est continue et même compacté, c'est-à-dire, de toute suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut extraire une suite qui converge dans  $L^2(\Omega)$ .

Donc, si on définit la forme trilinéaire:

$$a_1(u; v, w) = \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx, \quad \} \quad (4.6)$$

alors, on a pour  $d = 2$  ou  $d = 3$

$$\forall u, v, w \in H^1(\Omega)^d, |a_1(u; v, w)| \leq C \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}. \quad (4.7)$$

Par conséquent, comme pour le problème de Stokes, on a deux formulations variationnelles équivalentes au problème (4.1), (4.2), (4.5):

Chercher  $u \in H_0^1(\Omega)^d$  et  $p \in L_0^2(\Omega)$  tels que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \nu(\nabla u, \nabla v) + a_1(u; u, v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v), \quad (4.8a)$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), (q, \operatorname{div} u) = 0; \quad (4.8b)$$

Chercher  $u \in V$  tel que:

$$\forall v \in V, \nu(\nabla u, \nabla v) + a_1(u; u, v) = (f, v). \quad (4.9)$$

Un théorème classique permet d'affirmer que ces deux problèmes ont toujours une solution (au moins), mais comme il s'agit de problèmes non-linéaires, la démonstration n'est pas immédiate (cf. Lions [18] ou Temam [25]). Elle repose en particulier sur le fait que

$$\forall u \in V, \forall v \in H^1(\Omega)^d, a_1(u; v, v) = 0, \quad (4.10)$$

ce qui rend la forme  $a_1$  anti-symétrique.

**Théorème 4.1.** *Pour chaque  $f \in L^2(\Omega)^d$ , le problème (4.8) admet au moins une solution:  $u \in H_0^1(\Omega)^d$ ,  $p \in L_0^2(\Omega)$  et*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_*, \quad (4.11)$$

où

$$\|f\|_* = \sup_{v \in V} \frac{(f, v)}{\|v\|_{1,\Omega}}.$$

En ce qui concerne l'unicité, il est clair qu'un seul  $p$  correspond à chaque  $u$ . Par contre, l'unicité de  $u$  n'est pas assurée et en pratique il n'est même pas réaliste de la supposer. On peut démontrer une condition suffisante qui garantisse l'unicité (cf. Lions [18] ou Temam [25]):

$$\frac{\mathcal{B}}{\nu^2} \|f\|_* < 1, \quad (4.12)$$

où

$$\mathcal{B} = \sup_{u, v, w \in V} \frac{a_1(u; v, w)}{\|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}}.$$

Mais elle est très restrictive car elle demande une forte viscosité et/ou une faible force extérieure. Cependant, nous ne pouvons pas ici résoudre des problèmes avec bifurcation,



qui demandent une approche entièrement différente telle celle des modèles  $k-\epsilon$  (cf. Mohammadi & Pironneau [19]). Donc ici, l'hypothèse raisonnable est que la solution soit isolée, même si elle n'est pas unique. Concrètement, ceci se traduit par la notion de solution non-singulière, définie comme suit.

**Définition 4.2.** On dit que la paire  $(u, p)$  est une solution non-singulière du problème (4.8) si le problème linéarisé:

$$-\nu \Delta v + u_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \nabla q = f_* , \quad \text{dans } \Omega , \quad (4.13)$$

$$\operatorname{div} v = 0 , \quad \text{dans } \Omega , \quad (4.14)$$

$$u = 0 , \quad \text{sur } \Gamma , \quad (4.15)$$

a une solution unique  $v \in H_0^1(\Omega)^d$ ,  $q \in L_0^2(\Omega)$  pour chaque second membre  $f_*$  et qui dépend continement de  $f_*$ . (Pour simplifier, nous ne précisons pas l'espace parcouru par  $f_*$ , et qui est un espace plus grand que  $L^2(\Omega)^d$ ).

Mathématiquement, on trouve le problème linéarisé (4.13) d'une part en passant le terme non-linéaire du problème de Navier-Stokes au second membre (ce qui revient à le considérer comme une perturbation du problème de Stokes) et d'autre part en dérivant l'opérateur correspondant. Selon cette définition, la solution est non-singulière si cet opérateur dérivé est un isomorphisme de l'espace des seconds membres dans l'espace des solutions (cf. Girault & Raviart [12]).

Voyons maintenant le cas non-homogène. Contrairement au problème de Stokes, il est beaucoup plus difficile ici de ramener la théorie du problème non-homogène à celui d'un problème homogène, car le problème de Navier-Stokes est non-linéaire. Cependant, c'est faisable (cf. Hopf [15]) lorsque la condition de compatibilité (4.4) a lieu sur chaque composante connexe de  $\Gamma$  (dans le cas où  $\Gamma$  n'est pas connexe). Dans ce cas, on démontre que le problème de Navier-Stokes non-homogène admet au moins une solution  $u \in H^1(\Omega)^d$ ,  $p \in L_0^2(\Omega)$  pour chaque  $f \in L^2(\Omega)^d$  et  $k \in H^{1/2}(\Gamma)^d$  satisfaisant

$$\int_{\Gamma_i} k \cdot n \, d\sigma = 0 , \quad \text{pour toute composante connexe } \Gamma_i \text{ de } \Gamma .$$

Par ailleurs, la définition des solutions non-singulières est valable sans modification dans le cas non-homogène (puisque cette définition provient d'une dérivation).

Enfin, passons en fonction courant, dans le cas homogène, où  $\Omega$  est simplement connexe en dimension  $d = 2$ . On vérifie facilement l'identité:

$$\forall u = (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2 , \forall v = (v_1, v_2) \in V , \quad a_1(u; u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{rot} u (u_1 v_2 - u_2 v_1) dx .$$

Donc, en passant en fonction courant et en introduisant le tourbillon  $\omega = \text{rot } u$ , on trouve:

$$\begin{aligned} \forall u = \mathbf{rot } \psi, \forall v = \mathbf{rot } \varphi, a_1(u; u, v) &= - \int_{\Omega} \omega \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \omega \nabla \psi \cdot \mathbf{rot } \varphi dx, \end{aligned} \quad (4.16)$$

expression qui a un sens pour  $\omega$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\psi$  et  $\varphi$  dans  $W^{1,4}(\Omega)$ . Remarquons que l'on prend un espace un peu plus petit pour la fonction courant:  $W^{1,4}(\Omega)$  au lieu de  $H^1(\Omega)$ . Mais l'approximation de  $W^{1,4}(\Omega)$  ne pose aucun problème. Inversement, il n'est plus nécessaire de prendre le tourbillon dans  $H^1(\Omega)$ ; l'espace  $W^{1,4/3}(\Omega)$  suffit puisque les dérivées de  $\omega$  n'apparaissent que dans l'expression  $\nu(\nabla \omega, \nabla \varphi)$ , laquelle a un sens pour  $\omega$  dans  $W^{1,4/3}(\Omega)$  et  $\varphi$  dans  $W^{1,4}(\Omega)$ . De ce fait, on exprime la contrainte au moyen de l'espace:

$$V' = \{t = (\varphi, \theta) \in W_0^{1,4}(\Omega) \times L^2(\Omega); \forall \mu \in W^{1,4/3}(\Omega), (\nabla \varphi, \nabla \mu) = (\theta, \mu)\}.$$

On montre que sur cet espace l'application  $t = (\varphi, \theta) \mapsto \|\theta\|_{0,\Omega}$  est une norme équivalente à la norme produit  $|\varphi|_{1,4,\Omega} + \|\theta\|_{0,\Omega}$ . Pour simplifier, cette norme est notée  $|t|$ :

$$\forall t = (\varphi, \theta) \in V', |t| = \|\theta\|_{0,\Omega}.$$

On aboutit donc à la formulation suivante (pour  $f \in L^{4/3}(\Omega)^2$ ):

Chercher  $\psi \in W_0^{1,4}(\Omega)$  et  $\omega \in W^{1,4/3}(\Omega)$  tels que

$$\forall \varphi \in W_0^{1,4}(\Omega), \nu(\nabla \omega, \nabla \varphi) + (\omega \nabla \psi, \mathbf{rot } \varphi) = (f, \mathbf{rot } \varphi), \quad (4.17a)$$

$$\forall \omega \in W^{1,4/3}(\Omega), (\nabla \psi, \nabla \mu) = (\omega, \mu). \quad (4.17b)$$

On montre facilement que ce problème équivaut au problème de Navier-Stokes homogène lorsque le tourbillon est assez régulier:  $\omega = \text{rot } u \in W^{1,4/3}(\Omega)$  (cf. Girault & Raviart [12]). On démontre l'unicité sous l'hypothèse semblable à (4.12):

$$\frac{B_{\diamond}}{\nu^2} \|f\|_{\diamond} < 1,$$

où

$$\begin{aligned} B_{\diamond} &= \sup_{r=(\psi,\omega), s=(\varphi,\theta), t=(\zeta,\lambda) \in V'} \frac{(\omega \nabla \varphi, \mathbf{rot } \zeta)}{|r| |s| |t|}, \\ \|f\|_{\diamond} &= \sup_{s=(\varphi,\theta) \in V'} \frac{(f, \mathbf{rot } \varphi)}{|s|}. \end{aligned}$$

## 4.2. Discrétisation du terme de convection non-linéaire.

Voyons d'abord les schémas classiques en vitesse-pression. Soit  $(X_h, M_h)$  une quelconque paire d'espaces d'éléments finis étudiée au chapitre 2:

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^d, \quad M_h \subset L_0^2(\Omega),$$

$(X_h, M_h)$  satisfaisant une condition inf-sup uniforme. Comme d'habitude, on définit l'espace avec contrainte:

$$V_h = \{v_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, (q_h, \operatorname{div} v_h) = 0\}.$$

Grâce à la régularité des fonctions de  $X_h$ , la forme trilinéaire  $a_1$  définie par (4.6) a un sens sur  $X_h^3$ , mais elle n'est pas anti-symétrique sur  $V_h \times X_h \times X_h$  car  $V_h$  n'est pas contenu dans  $V$  (la propriété (4.10) exige que  $u$  soit à divergence nulle). Cependant, on peut la rendre facilement anti-symétrique en la remplaçant par:

$$\bar{a}_1(u; v, w) = \frac{1}{2} \{a_1(u; v, w) - a_1(u; w, v)\},$$

ce qui ne modifie pas le problème de Navier-Stokes. On peut donc discrétiser le terme de convection en utilisant la forme  $\bar{a}_1$ . D'où le schéma général:

Chercher  $u_h \in X_h$  et  $p_h \in M_h$  tels que

$$\forall v_h \in X_h, \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) + \bar{a}_1(u_h; u_h, v_h) - (p_h, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h), \quad (4.18a)$$

$$\forall q_h \in M_h, (q_h, \operatorname{div} u_h) = 0. \quad (4.18b)$$

C'est un problème discret non-linéaire. Comme pour le problème de Navier-Stokes, on peut montrer que (4.18) a toujours au moins une solution et

$$|u_h|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{*,h},$$

où

$$\|f\|_{*,h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{(f, v_h)}{|v_h|_{1,\Omega}}.$$

De même, la solution est unique lorsque

$$\frac{B_{*,h}}{\nu^2} \|f\|_{*,h} < 1, \quad (4.19)$$

où

$$B_{*,h} = \sup_{u_h, v_h, w_h \in V_h} \frac{\bar{a}_1(u_h; v_h, w_h)}{|u_h|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega} |w_h|_{1,\Omega}}.$$

Mais on peut démontrer un résultat plus intéressant (cf. Girault & Raviart [12]): si  $(u, p)$  est une solution non-singulière du problème de Navier-Stokes, il existe un voisinage de cette solution dans lequel le problème (4.18) a une solution unique  $(u_h, p_h)$  pour chaque  $h$  assez petit (disons  $h \leq h_0$ ). De plus, la solution discrète  $(u_h, p_h)$  converge vers  $(u, p)$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ |u - u_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \} = 0.$$

Enfin lorsque cette solution  $(u, p)$  est assez régulière, l'ordre de convergence est le même que pour le problème de Stokes discrétisé avec cette paire d'espaces  $(X_h, M_h)$ .

Notons aussi que, grâce à l'hypothèse d'une solution non-singulière, l'anti-symétrie de la forme  $a_1$  n'intervient plus et il n'est pas utile de la remplacer par  $\tilde{a}_1$  dans le problème (4.18). Il n'est pas possible d'esquisser ici la démonstration de ces résultats qui est assez abstraite et générale. Cependant, remarquons que cette technique utilise à fond l'idée que le problème de Navier-Stokes est une perturbation du problème de Stokes et elle ne s'applique que si on dispose de majorations d'erreur assez fines et précises pour le problème de Stokes.

**Remarque 4.3.** Ceci est valable aussi bien pour une approximation continue que pour une approximation discontinue de la pression.

Passons maintenant en fonction courant. Soit  $\Theta_h$  et  $\Phi_h$  les espaces d'éléments finis définis par (3.11) et (3.12). Il est clair que  $\Phi_h$  est un sous-espace de  $W^{1,q}(\Omega)$  quelque soit  $q$ ; en particulier

$$\Phi_h \subset W_0^{1,4}(\Omega).$$

Donc le terme trilinéaire  $a_1$  sous la forme (4.16) est bien défini sur  $\Theta_h \times \Phi_h \times \Phi_h$ . Par conséquent, on discrétise (4.17) ainsi:

*Chercher  $\psi_h \in \Phi_h$  et  $\omega_h \in \Theta_h$  tels que*

$$\forall \varphi_h \in \Phi_h, \nu(\nabla \omega_h, \nabla \varphi_h) + (\omega_h \nabla \psi_h, \mathbf{rot} \varphi_h) = (f, \mathbf{rot} \varphi_h), \quad (4.20a)$$

$$\forall \mu_h \in \Theta_h, (\nabla \psi_h, \nabla \mu_h) = (\omega_h, \mu_h). \quad (4.20b)$$

L'espace avec contrainte  $V_h$  est inchangé, mais sa norme produit est celle de  $V'$ :  $|\varphi_h|_{1,4,\Omega} + \|\theta_h\|_{0,\Omega}$  et il n'est pas trivial d'établir que la norme  $\|\theta_h\|_{0,\Omega}$  lui est encore uniformément équivalente. C'est l'objet du résultat suivant.

**Théorème 4.4.** *Si l'ouvert  $\Omega$  est un polygone convexe et si la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière, alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\forall s_h = (\varphi_h, \theta_h) \in V_h, |\varphi_h|_{1,4,\Omega} \leq C \|\theta_h\|_{0,\Omega}.$$

On peut alors démontrer (cf. Girault & Raviart [12]) que les résultats énoncés ci-dessus pour le problème en vitesse-pression (4.18) sont aussi valables pour le problème en fonction courant-tourbillon (4.20). En ce qui concerne l'unicité, elle a lieu sous l'hypothèse

$$\frac{\mathcal{B}_{h,\diamond}}{\nu^2} \|\mathbf{f}\|_{h,\diamond} < 1, \quad (4.21)$$

où

$$\mathcal{B}_{h,\diamond} = \sup_{r_h=(\psi_h,\omega_h), s_h=(\varphi_h,\theta_h), t_h=(\zeta_h,\lambda_h) \in V_h} \frac{(\omega_h \nabla \varphi_h, \mathbf{rot} \zeta_h)}{|r_h| |s_h| |t_h|},$$

et

$$\|\mathbf{f}\|_{h,\diamond} = \sup_{s_h=(\varphi_h,\theta_h) \in V_h} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{rot} \varphi_h)}{|s_h|}.$$

### 4.3. Quelques algorithmes de résolution non linéaire.

Pour résoudre numériquement les systèmes non-linéaires (4.18) ou (4.20), le plus simple est de linéariser le terme non-linéaire. Voyons d'abord une méthode d'approximations successives pour (4.18):

1. Soit  $u_h^0$  une valeur de démarrage dans  $V_h$ , c'est-à-dire

$$u_h^0 \in X_h \quad \text{et} \quad \forall q_h \in M_h, (q_h, \text{div} u_h^0) = 0,$$

(celle-ci peut être calculée en résolvant un problème de Stokes avec les mêmes données).

2. Pour  $m \geq 0$ , soit  $u_h^{m+1} \in X_h$  et  $p_h^{m+1} \in M_h$  solution de:

$$\forall v_h \in X_h, \nu(\nabla u_h^{m+1}, \nabla v_h) + \tilde{a}_1(u_h^m; u_h^{m+1}, \nabla v_h) - (p_h^{m+1}, \text{div} v_h) = (\mathbf{f}, v_h), \quad (4.22a)$$

$$\forall q_h \in M_h, (q_h, \text{div} u_h^{m+1}) = 0. \quad (4.22b)$$

On vérifie facilement que pour chaque  $u_h^m$ , le problème (4.22) se comporte comme un problème de Stokes et admet une solution unique  $(u_h^{m+1}, p_h^{m+1})$ . Donc, à partir de chaque valeur de démarrage  $u_h^0$ , cet algorithme détermine une suite unique  $(u_h^m, p_h^m)$ . Mais on ne sait démontrer la convergence de cette suite que sous les conditions d'unicité (4.19) – conditions qui sont très restrictives, mais qui assurent que l'on a affaire à une contraction. Soulignons que chaque étape de cet algorithme nécessite la résolution d'un problème linéaire avec contrainte, analogue au problème de Stokes.

La méthode des approximations successives est sensiblement la même pour résoudre (4.20):

1. Soit  $\omega_h^0 \in \Theta_h$  une valeur de démarrage (qui peut être calculée en résolvant un problème de Stokes en  $\psi_h$  et  $\omega_h$ , avec les mêmes données).

2. Pour  $m \geq 0$ , soit  $\psi_h^{m+1} \in \Phi_h$  et  $\omega_h^{m+1} \in \Theta_h$ , solution de:

$$\forall \varphi_h \in \Phi_h, \nu(\nabla \omega_h^{m+1}, \nabla \varphi_h) + (\omega_h^m \nabla \psi_h^{m+1}, \mathbf{rot} \varphi_h) = (f, \mathbf{rot} \varphi_h), \quad (4.23a)$$

$$\forall \mu_h \in \Theta_h, (\nabla \psi_h^{m+1}, \nabla \mu_h) = (\omega_h^{m+1}, \mu_h). \quad (4.23b)$$

Elle détermine une suite unique  $(\psi_h^m, \omega_h^m)$  pour chaque valeur de démarrage  $\omega_h^0$  et elle converge si la condition d'unicité (4.21) est réalisée.

Lorsque l'on sait que la solution est non-singulière et que l'on connaît une "bonne" valeur de démarrage, il est plus avantageux de linéariser la forme  $a_1$  en utilisant l'algorithme de Newton:

1. Soit  $u_h^0$  une valeur de démarrage dans  $V_h$ .

2. Pour  $m \geq 0$  soit  $u_h^{m+1} \in X_h$  et  $p_h^{m+1} \in M_h$  solution de:

$$\begin{aligned} \forall v_h \in X_h, \nu(\nabla u_h^{m+1}, \nabla v_h) + a_1(u_h^m; u_h^{m+1}, v_h) + a_1(u_h^{m+1}; u_h^m, v_h) \\ - (p_h^{m+1}, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h) + a_1(u_h^m; u_h^m, v_h), \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$\forall q_h \in M_h, (q_h, \operatorname{div} u_h^{m+1}) = 0. \quad (4.24b)$$

L'hypothèse d'une solution non-singulière se prête bien à l'analyse de cette méthode (comparer (4.24) avec le problème linéarisé (4.13), (4.14), (4.15)); les démonstrations se font directement dans un cadre général. On peut montrer (cf. Girault & Raviart [12]) que si  $u_h$  est une solution non-singulière des équations (4.18) écrites avec la forme  $a_1$  (ce qui a lieu pour tout  $h$  assez petit) il existe un voisinage de  $u_h$  dans lequel toute valeur de démarrage  $u_h^0$  permet de construire une suite unique  $(u_h^{m+1}, p_h^{m+1})$  solution de (4.24) qui converge vers  $(u_h, p_h)$ . De plus, la convergence est quadratique, ce qui est typique d'une méthode de Newton.

Dans le cas de (4.20), l'algorithme de Newton s'écrit:

1. Soit  $\omega_h^0 \in \Theta_h$  une valeur de démarrage.

2. Pour  $m \geq 0$ , soit  $\psi_h^{m+1} \in \Phi_h$  et  $\omega_h^{m+1} \in \Theta_h$ , solution de:

$$\begin{aligned} \forall \varphi_h \in \Phi_h, \nu(\nabla \omega_h^{m+1}, \nabla \varphi_h) + (\omega_h^m \nabla \psi_h^{m+1}, \mathbf{rot} \varphi_h) \\ + (\omega_h^{m+1} \nabla \psi_h^m, \mathbf{rot} \varphi_h) = (f, \mathbf{rot} \varphi_h) + (\omega_h^m \nabla \psi_h^m, \mathbf{rot} \varphi_h), \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\forall \mu_h \in \Theta_h, (\nabla \psi_h^{m+1}, \nabla \mu_h) = (\omega_h^{m+1}, \mu_h). \quad (4.25b)$$

La démonstration générale de la convergence de la méthode de Newton s'adapte facilement à ce cas particulier et donne des résultats similaires au cas précédent.

## 5. Quelques références bibliographiques.

- [1] D. Arnold, F. Brezzi & M. Fortin. "A stable finite element for the Stokes equations". *Calcolo* **21**, 4, 337-344 (1984).
- [2] I. Babuska. "The finite element method with Lagrange multipliers". *Numer. Math.* **20**, 179-192 (1973).
- [3] C. Bernardi & G. Raugel. "Analysis of some finite elements for the Stokes problem". *Math. of Comp.* **44**, 169, 71-79 (1985).
- [4] J. Boland & R. Nicolaides. "Stability of finite elements under divergence constraints". *SIAM J. Numer. Anal.* **20**, 4, 722-731 (1983).
- [5] J. Boland & R. Nicolaides. "Stable and semistable low order finite elements for viscous flows". *SIAM J. Numer. Anal.* **22**, 474-492 (1985).
- [6] F. Brezzi. "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers". *R.A.I.R.O., Anal. Numer.* **R2**, 129-151 (1974).
- [7] P.-G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland (1978).
- [8] P.-G. Ciarlet & P.-A. Raviart. "A mixed finite element method for the biharmonic equation" in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*. (C. de Boor, ed.), Academic Press (1974).
- [9] M. Crouzeix & Raviart. "Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations". *R.A.I.R.O., Anal. Numer.* **R3**, 33-76 (1973).
- [10] B. Daly, F. Harlow, F. Shannon & J. Welch. "The MAC Method". Los Alamos Report (1965).
- [11] M. Fortin. "An analysis of the convergence of mixed finite element methods". *R.A.I.-R.O. Anal. Numer.* **11**, R3, 341-354 (1977).
- [12] V. Girault & P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Series in Computational Mathematics **5**, Springer-Verlag (1986).
- [13] R. Glowinski & O. Pironneau. "Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem". *SIAM Review* **21**, 2, 167-212 (1979).
- [14] F. Hecht. "Construction d'une base d'un élément fini  $P_1$  non conforme à divergence nulle dans  $\mathbb{R}^3$ ". *R.A.I.R.O. Anal. Numer.* **15**, 2, 119-150 (1981).
- [15] E. Hopf. "On Non-Linear Partial Differential Equations". *Lecture Series of the Symp. on Partial Diff. Equations*. Berkeley (1965).
- [16] L. Landau & E. Lifchitz. *Mécanique des Fluides VI*, Mir, Moscou (1971).
- [17] P. Lax & N. Milgram. *Parabolic equations. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*. Princeton (1954).

- [18] J.-L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Gauthier-Villars (1969).
- [19] B. Mohammadi & O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. Research in Applied Mathematics. Wiley-Masson (1994).
- [20] J.-C. Nedelec. “Eléments finis mixtes incompressibles pour l’équation de Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ ”. *Numer. Math.* **39**, 97-112 (1982).
- [21] O. Pironneau. *Méthodes des Elements Finis pour les Fluides*. RMA **7**, Masson (1988).
- [22] J. Pitkaranta & R. Stenberg. “Error bounds for the approximation of the Stokes problem using bilinear/constant elements on irregular quadrilateral meshes” in *The Mathematics of Finite Elements and Applications V*, MAFELAP 1984, 325-334, Academic Press (1985).
- [23] R. Stenberg. “Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: A unified approach”. *Math. of Comp.* **42**, 9-23 (1984).
- [24] L. Tartar. *Topics in Nonlinear Analysis*. Pub. Math. d’Orsay. Univ. Paris Sud (1978).
- [25] R. Temam. *Theory and Numerical Analysis of The Navier-Stokes Equations*. North-Holland (1979).
- [26] R. Verfurth. *Finite element approximation of stationary Navier-Stokes equations with slip boundary condition*. Habilitationsschrift, Report 75, Univ. Bochum (1986).