J. Cuedamet
UFR M.I.G
U.P.S. Toulouse

Solutions paramétriques

(X, 4 nov 86)

1 Hypersurfaces euclidiennes à courbure moyenne donnée

$$\inf_{u \in C} \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx - \int_\Omega f u\,dx + \int_{\partial\Omega} (u-v)\,d\Gamma$$

$$\inf_{B \in \mathcal{B}} \sup_{|\varphi| \leq 1} \langle \chi_B, \operatorname{div} \varphi \rangle - \langle \chi_B, f \rangle + \int_{\partial\Omega} |\chi_B - \chi_v|\,d\Gamma$$

- existence par faible* inf-compacité VB_{loc} et $VB_{loc} \subset\subset L^1_{loc}$

2 Hypersurfaces lorentziennes à courbure moyenne donnée

$$\sup_{u \in C} \int_\Omega \sqrt{1-|\nabla u|^2}\,dx - \int f u\,dx \qquad \text{(Minkowsky)}$$

$$\sup_{B \in \mathcal{E}} \inf_{|\varphi_3|^2 - |\varphi_x|^2 \geq 1} \langle \chi_B, \operatorname{div} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \rangle - \langle \chi_B, f \rangle$$

- existence idem euclidien
- Régularité lipschitz par
  - $-\partial_3 \chi_B$ mesure ≥ 0
  - $\nabla \chi_B$ abs. continu $/ -\partial_3 \chi_B$, $\|\nabla \chi_B\|_{L^\infty(-\partial_3 \chi_B)} \leq 1$
  - enfin $\partial_3 \chi_B$ mesure de Young $/\!/\, dx$ et $H = \nabla u$

Scan 17 octobre 2024.
D.

3 Solution de classe C^1 d'une équation de conservation

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = g(w)$$

$$\partial_t w + d_w f(w)\,\partial_x w = (g - (\partial_x f))(w) = h(w)$$

(1) $\displaystyle\int_\Omega \varphi(-\partial_t w - d_w f(w)\,\partial_x w + h)\,dx\,dt \geq 0 \qquad \varphi = \varphi(x,t,w)$

(2) $\displaystyle\int_\Omega (\varphi\, n_t + \varphi\, n_x + \varphi h\, n_z)\sqrt{1+|\nabla w|^2}\,dx\,dt = \int_{G_w} (\varphi A \,|\, n)\,ds \geq 0$

${}^T n = \left(-\dfrac{\partial_x w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}, -\dfrac{\partial_t w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{\ \ }}\right)$ normale extérieure à l'hypographe de w

φA section (à support de proj. compacte) du fibré canonique

(3) $\displaystyle\int_\Omega -\varphi\,\partial_t w\,dx\wedge dt - \varphi\, d_w f\,\partial_x w\,dx\wedge dt + \varphi h\,dx\wedge dt =$

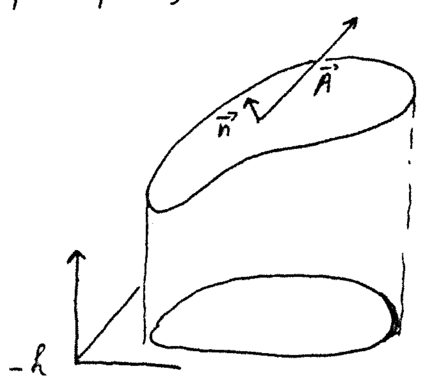
$\displaystyle\qquad\int_{G_w} \varphi\,dw\wedge dx - \varphi\, d_w f\wedge dt + \varphi h\,dx\wedge dt \geq 0$

Si $k < \inf_{\text{supp}\,\varphi} w$ (2) + Green ou (3) + Stokes

$$\int_{x,t,z} \chi \,\operatorname{div}\varphi A\,dx\,dt\,dz + \int_{x,t}\varphi(\cdot,-k)\,h(\cdot,-k) \geq 0$$

$$\sup_{\chi}\inf_{\varphi} \langle \chi, \operatorname{div}\varphi A\rangle + \int \varphi(\cdot,-k)\,h(\cdot,-k)$$

$\{\varphi A ; \varphi - \}$ d'intérieur vide dans $\mathcal{K}_{\mathbb{R}^3}$



1) Extension $C^1_m(\Omega, \mathbb{R}^N)$
– prolongement de graphe
– cone de formes test

2) Formulation min-max

Solutions admissibles

1 Définition

Lemme.– Ω convexe de $\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_t$, $\Gamma_0\subset\partial\Omega$, $v\in C^1_m(\Gamma_0;\mathbb{R}^N)$, $w\in C^1_m(\tilde\Omega;\mathbb{R}^N)$,

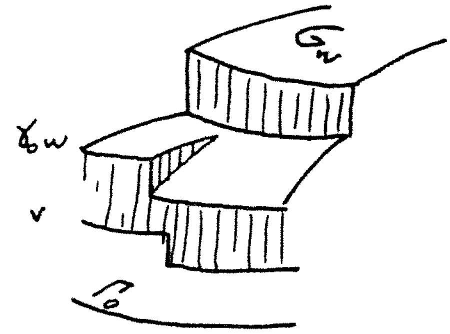
Il existe $\tilde G_w$ 2 variété triangulable $C^0\cap C^1_m$ de $\tilde\Omega\times\mathbb{R}^N$

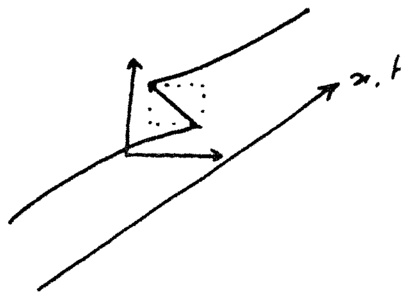
$$G_w\subset\tilde G_w \qquad (\tilde\Omega=\Omega\cup\Gamma_0)$$

$$\partial G_w = G_v$$

$$\tilde G_w\setminus G_w\perp\Omega$$

dimension 1 — dimension 2





$\mathcal{C}$ cône convexe de 1-formes $\varphi=\varphi_i(x,t,w)\,dw^i$ (semi-basiques) de classe C^1 sur $\tilde\Omega\times\mathbb{R}^N$ à support dans $\tilde\Omega\times\mathbb{R}^N$.

- exactes et monotones sur $\mathbb{R}^N$
- t.q. $\varphi\cdot d_w f=\varphi_i\,\partial_j f^i\,dw^j$ exacte sur $\mathbb{R}^N$

Définition.– $w\in C^1_m(\bar\Omega;\mathbb{R}^N)$ solution $\mathcal{C}$-admissible de

$$\partial_t w+\partial_x f\circ w=0$$

si

$$L(\tilde G_w,\varphi)=\int_{\tilde G_w}\varphi\wedge dx-\varphi\cdot d_w f\wedge dt\geq 0\qquad\forall\varphi\in\mathcal{C}$$

pour 1 prolongement $\tilde G_w$ de G_w

2 Formulation entropie-flux

Si $\varphi \in \mathcal{E}$ il existe S, F de classe C^1 sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$

$$\varphi = d_w S \quad , S \text{ convexe sur } \mathbb{R}^N$$

$$\varphi \cdot d_w f = d_w F$$

$$F\big|_{\partial\Omega} = S\big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\varphi \wedge dx - \varphi \cdot d_w f \wedge dt = d_w S \wedge dx - d_w F \wedge dt$$
$$= d(S\,dx - F\,dt) + (\partial_t S + \partial_x F)\, dx \wedge dt$$

$$L(\tilde{G}_w, d_w S) = \int_{G_w} (\partial_t S + \partial_x F)\, dx \wedge dt$$

$$L(\tilde{G}_w, d_w S) = \sum \int_{\partial (G_w)_i} S\,dx - F\,dt + \int_{G_w} d_w S(\cdot, w)(\partial_t w + d_w f(w)\partial_x w)\, dx \wedge dt$$

$L(\tilde{G}_w, d_w S)$ ne dépend que de G_w et

w dans $C^1_m(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ est solution $\mathcal{E}$-admissible de (1) ssi

$$L(w, d_w S) = \int_{\Omega} (\partial_t S + \partial_x F)(w)\; dx\, dt \geq 0$$

$$L(w, d_w S) = \sum_{i=0} \int_{\Gamma_i} [S]\, dx - [F]\, dt + \int_{\Omega} d_w S(\cdot, w)(\partial_t w + d_w f(w)\partial_x w)\, dx\, dt \geq 0$$

$$[S] = S_g - S_d \quad \text{sur } \Gamma_i$$
$$= S(v) - S(\gamma_0 w) \quad \text{sur } \Gamma_0$$

(1° inéquation) si $\mathcal{E} \supset \Lambda^1_{\mathcal{D}(\Omega)}$ $\quad w$ $\mathcal{E}$.admissible $\Rightarrow w$ solution faible

Admissibilité relativement à une entropie physique

$\mathcal{S}$ entropie du problème

$(\mathcal{S}$ convexe , $d_w \mathcal{S}\, d_w f = d_w \mathcal{F})$

$$v \in C^1_m(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

$$\mathcal{E} = \{ \theta(d_w \mathcal{S} - d_w \mathcal{S}(v)) + \varphi \,;\, \theta \in \mathcal{D}^+(\tilde{\Omega}),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^m \}$$

$$\theta(d_w \mathcal{S} - d_w \mathcal{S}(v)) + \varphi = d_w\big(\theta(\mathcal{S} - d_w \mathcal{S}(v)(w-v) - \mathcal{S}(v)) + \varphi . w\big) = \dots$$

$$\theta(d_w \mathcal{F} - d_w \mathcal{S}(v) . d_w f) + \varphi . d_w f = d_w\big(\theta(\mathcal{F} - d_w \mathcal{S}(v) . (f(w) - f(v)) - \mathcal{F}(v)) + \varphi . f(w)\big)$$

Exemples

1) $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \qquad \mathcal{S}(u) = \frac{u^2}{2}$

2) $\partial_t \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} -w^2 \\ p(w^1) \end{pmatrix} = 0 \qquad \mathcal{S}(w) = \frac{(w^2)^2}{2} - P(w^1) \qquad \mathcal{F}(w) = w^2 p(w^1)$

3) $$\partial_t \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} + \partial_x \left\{ \frac{w^2}{w^1} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} + (\gamma - 1)\left(w^3 - \frac{(w^2)^2}{2w^1}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ w^2/w^1 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

$$\mathcal{S}(w) = -w^1 \operatorname{Log} \frac{w^3 - (w^2)^2/2w^1}{(w^1)^\gamma} \qquad \mathcal{F}(w) = \frac{w^2}{w^1} \mathcal{S}(w)$$

3 Interprétation

w $\mathcal{E}$-admissible $\Leftrightarrow$ 1) w solution classique hors de $D(w)$

2) $x'_i [S] - t'_i [F] \geq 0$

w $\mathcal{E}$-admissible $\Leftrightarrow$ 1) w solution classique hors de $D(w)$

$$\left.\begin{array}{l} 2) \quad x_i'[w] - t_i'[f(w)] = 0 \quad i=1,\dots \\ 2') \quad x_i'[S(w)] - t_i'[F(w)] \geq 0 \quad i=1,\dots \\ 3) \quad x_0'[S(w)] - t_0'[F(w)] \geq 0 \end{array}\right\} (\theta = 0)$$

Explicitation de 2' $\quad (t_i' = 1)$

$$\int_0^1 d_w S.(x_i' - d_w f)\,\partial_\sigma w\, d\sigma = \int_0^1 d_w S\, \partial_\sigma[x_i'(w-w_d) - (f(w) - f(w_d))]\, d\sigma$$

$$= -\int_0^1 d_w^2 S\,(\partial_\sigma w,\, x_i'(w-w_d) - (f(w)-f(w_d)))\, d\sigma$$

Sous existence de courbes de Hugoniot Rankine

$$f(w(\sigma)) - f(w_d) = \lambda(\sigma)\,(w(\sigma) - w_d) \qquad \sigma \in [0,1]$$

$$\text{donc} \quad d_w f(w_d)\,\partial_\sigma w(0) = \lambda(0)\,\partial_\sigma w(0) \qquad \lambda(1) = x_i'$$

$$d_w f(w(\sigma))\,\partial_\sigma w(\sigma) = \partial_\sigma \lambda(\sigma)(w(\sigma) - w_d) + \lambda(\sigma)\,\partial_\sigma w(\sigma)$$

$$= \int_0^1 (\lambda - x_i')\,\partial_\sigma\,(d_w S(w).(w-w_d) - (S(w) - S(w_d)))\, d\sigma$$

$$= \int_0^1 \partial_\sigma \lambda\,.\,(S(w) - S(w_d) - d_w S(w).(w-w_d))\, d\sigma$$

- toute discontinuité de contact ($\lambda = \text{cte} = x'$) est admissible
- toute discontinuité sans dégénerescence linéaire ~~est~~ telle que $\partial_\sigma \lambda < 0$ sur $[0,$

($\to$ sous vraie non linéarité condition de k-choc)

Explicitation de 3

Choix de v et $\mathcal{E}_v$ tel que $v = v$ sur Γ_0

$$d_w S \in \mathcal{E} \Rightarrow d_w S(v) = 0$$

Alors 3) équivalent à

$$x_0'\, S(w) - t_0'\, F(w)\Big|_w^v - d_w S(v)(x_0' - t_0'\, d_w f(v)).(v-w) \geq 0$$

donc $\quad x'_0 S - t'_0 F$ convexe sur $\mathbb{R}^N \quad$ 3) $\Rightarrow w = v$

concave sur $\mathbb{R}^N \quad$ 3) vide.

(ex : cond. initiales $\to v = w \quad$ cond 'finales' w qcq)

Plus généralement si U C^1 diffeom de $\mathbb{R}^N$ t.q.

$(x'_0 S - t'_0 F) \circ U$ convexe sur $\mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad w(x_0, t_0) = v(x_0, t_0)$

$(x'_0 S - t'_0 F) \circ U$ concave sur $\mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad w(x_0, t_0)$ qcq.

Remarque .. $d_w(x'_0 S - t'_0 F)(v)$ régulier et caractéristiques entrantes

3) et w dans un voisinage de $v \Rightarrow$ Hugoniot Rankine.

4 Variantes et extensions

1) Condition de Hugoniot-Rankine sur Γ_0

$$\mathcal{E} = \{ \theta\, d_w S + \varphi \,;\, \theta \in \mathcal{D}^+(\tilde{\Omega}) \,,\, \varphi \in \Lambda^1_{\mathcal{D}(\tilde{\Omega})} \}$$

2) Conditions partielles sur Γ_0

$$\mathcal{E} = \{ \theta_i (d_w S - d_{w_i} S(\nu_i)) + \varphi \,;\, \theta_i \in \mathcal{D}^+(\tilde{\Omega}) \,,\, \varphi \in \Lambda^1_{\mathcal{D}(\Omega)} \} \ldots$$

3) Présence de termes sources

$$L(w, d_w S) = \int_{\tilde{G}_w} d_w S \wedge dx - d_w F \wedge dt + d_w S . h \, dx \wedge dt$$

4) Multidimensionnel

$$L(w, d_w S) = \int_{\tilde{G}_w} d_w S \wedge dx + \sum_1^n d_w F_i \,\widehat{(dx)}^i$$

où $\quad d_w S \, d_w f_i = d_w F_i$

(Ex Euler $\quad F_i = \frac{m^i}{\rho} S$)

Solutions admissibles sous forme paramétrique

1 Formulation sup inf

$$w \ \mathcal{E}\text{.admissible} \Leftrightarrow L(w, d_w S) = \int_{\tilde{G}_w} d_w S \wedge dx - d_w F \wedge dt \geq 0 \quad \forall d_w S \in \mathcal{E}$$

$$\Leftrightarrow L(w, \theta_0 d_w S + \varphi) = \int_{\Omega} [\partial_t(\theta_0 S) + \partial_x(\theta_0 F)](w)\, dx\, dt$$
$$+ \int_{\Omega} [\partial_t \varphi \cdot w + \partial_x \varphi \cdot f(w)]\, dx\, dt \geq 0$$

Problème sup inf

$$\mathcal{P}) \quad \sup_{w} \inf_{\theta_0 \geq 1} \inf_{\varphi} L(w, \theta_0 d_w S + \varphi)$$

$$\mathcal{P}) \quad \sup_{w \in W} \inf_{\theta_0 \geq 1} L(w, \theta_0 d_w S)$$

W classe des solutions faibles de (1)

w solution de $\mathcal{P}$ et valeur de $\mathcal{P} > -\infty \Rightarrow w \ \mathcal{E}$.admissible

2 Solutions sous forme paramétrique

$$w \in C^1_m(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^N) \qquad (w(x,t) \in \Pi[-k,k])$$

χ^w fonction caractéristique de l'hypographe de w

$$\chi^w(x,t,z) = 1 \quad \text{si} \quad z < w(x,t) \quad (z^i < w^i(x,t))$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

$\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \qquad \rho = 1$ sur $\Pi[-k,k] = P_k$

$$L(w,\theta_0 d_w S+\varphi) = \int_\Omega [\langle \partial_t\theta_0(\Pi\partial_j)\rho S + \partial_x\theta_0(\Pi\partial_j)\rho F, \chi\rangle + \langle \partial_t\varphi(\Pi\partial_j)\rho w + \partial_x\varphi(\Pi\partial_j)\rho f(w)\rangle]\, dx\, dt$$

$$= \mathcal{L}(\chi^w, \theta_0 d_w S+\varphi\rangle$$

(P) $\quad \sup_{\chi\in\mathcal{X}} \inf_{\theta_0\geq 1} \mathcal{L}(\chi, \theta_0 d_w S)$

$\mathcal{X}$ classe des fonctions caractéristiques d'hypographes de solutions faibles de (1)

Lemme.- Si $\partial_i\partial_j f = 0$ pour $i\neq j$ $\mathcal{X}$ coïncide avec l'ensemble extrémal de

$$X = \{u\in[0,1]^{\Omega\times P_k}\ ;\ \partial_j u\leq 0,\ \langle \partial_t\varphi.(\Pi\partial_j)\rho w + \partial_x\varphi.(\Pi\partial_j)\rho f(w), u\rangle = 0\}$$

Proposition.- 1) Pour θ_0 dans $W^{1,1}(\Omega)$ il existe w à valeurs dans P_k

$$\sup_{\chi\in X} \mathcal{L}(\chi,\theta_0 d_w S) = \int_\Omega [\partial_t(\theta_0 S)(w) + \partial_x(\theta_0 F)(w)]\, dx\, dt$$

2) Si $\sup_{\chi\in X} \mathcal{L}(\chi,\theta_0 d_w S)\to\infty$ qd $\|\theta\|\to\infty$ ($\theta\geq 1$) sur un espace Y admettant un prédual et inclus dans $W^{1,1}(\Omega)$

le lagrangien bilinéaire $(\chi,\theta)\to\mathcal{L}(\chi,\theta d_w S)$ admet un point selle $(\bar\chi,\bar\theta)$ sur

$$X\times\{\theta\in Y;\ \theta\geq 1\}.$$

3) $\bar\chi$ est fonction caractéristique d'hypographe de solution E-admissible et plus précisément

i) $\int_\Omega \partial_t(\theta S)(\bar w) + \partial_x(\theta F)(\bar w)\, dx\, dt \geq 0$ pour tout $\theta\geq 0$ de Y

ii) $\int_\Omega (\partial_t(\bar\theta S)(\bar w) + \partial_x(\bar\theta F)(\bar w))\, dx\, dt \geq \int_\Omega (\partial_t(\bar\theta S)(w) + \partial_x(\bar\theta F)(w))\, dx\, dt$

pour toute solution faible de (1)

Remarque.- 1) $\bar\theta > 1$ sur $\omega\subset\Omega \Rightarrow \bar w$ sans discontinuités autres que de contact dans ω

2) $\bar\theta$ a priori non unique

3) Si $(\bar{\theta}, \bar{\chi})$ est point selle de $\mathcal{L}(\cdot, \cdot\, d_w S)$ il en est de même de $(1, \bar{\chi})$

et sur Ω $\bar{\chi}$ satisfait à la condition de taux d'entropie (Dafermos)

4) Perturbations naturelles

i) $\mathcal{L}(\chi, \theta_0 d_w S) + \frac{1}{n} \int_{\Omega} (\partial_t \theta_0)^2 + (\partial_x \theta_0)^2 \; dx\,dt$

ii) $\sup\limits_{w} \inf\limits_{|\varphi| \leq n \theta_0} L(w, \theta_0 d_w S + \varphi)$

(non diss. de contact)

iii) $\sup\limits_{\chi \in [0,1]^{\Omega \times P_1}} \inf\limits_{|\varphi|^2 + \theta_0^2 \leq n \Psi} \mathcal{L}(\chi, \theta_0 d_w S + \varphi)$

(non diss.)

5) Convergence des solutions perturbées et interprétation mesures de Young