CNAM – *Paris* Février 2010

MVA005
Calcul différentiel et intégral

Première session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.
Les barèmes sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1 (9 points)

On considère f définie par :

$$x \in \mathcal{D}_f \mapsto f(x) = (x^2+1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

1°) Déterminer $\mathcal{D}_f$, domaine de définition de f.

2°) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

3°) Etudier la nature des branches infinies de f : donner l'équation de la parabole asymptote. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette parabole asymptote quand x tend vers $-\infty$, puis quand x tend vers $+\infty$.
Que remarque-t-on ?

4°) Etudier le comportement de f au voisinage de 0.

5°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

6°) Dresser le tableau de variation de f.

7°) Représenter graphiquement f.

Exercice 2 (7 points)

1°) On considère l'application f_1 définie par : $x \mapsto f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$.

Calculer $I_1 = \displaystyle\int_1^e f_1(x)\,dx$ en effectuant une intégration par partie.

2°) Soit f_2 définie par : $x \mapsto f_2(x) = \sin^3 x \cos x$.

Calculer, en utilisant un changement de variable simple, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x)\,dx$.

3°) Soit $f_3(x)$ définie par : $x \mapsto f_3(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+1)(x+2)}$.

Après avoir brièvement vérifié qu'elle est "bien-définie" sur $[0,1]$ et avoir effectué une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, calculer : $I_3 = \displaystyle\int_0^1 f_3(x)\, dx$.

4°) Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I_4 = \displaystyle\int_0^1 x^3 \ln x \;\, dx$ (en faisant une intégration par partie).

Exercice 3 (7 points)

On considère sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle du 1^{er}ordre :

$$xy'(x) - 2y(x) = x^2 + 1 \qquad (E)$$

1°) Ecrire et résoudre l'équation sans second membre associée à (E).

2°) En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

3°) Ecrire la solution de l'équation (E) qui vérifie $y(1) = 1$.

4°) Existe-t-il une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ en entier, c'est-à-dire une solution telle que $y(0)$ et $y'(0)$ aient des valeurs finies ?

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆