COHOMOLOGIE DE DE RHAM, COHOMOLOGIE CRISTALLINE ET REPRESENTATIONS p-ADIQUES

Jean-Marc FONTAINE

Si W est l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans un corps parfait k de caractéristique $p \neq 0$, si X est un schéma propre et lisse sur W, et si m est un entier ≥ 0, on sait depuis la thèse de Berthelot que le W-module $\mathbb{H}^m_{DR}(X)$ s'identifie au m-ième groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale de X, considérée comme un schéma sur W ; il est donc muni

- d'une part, d'une application $\Phi : \mathbb{H}^m_{DR}(X) \to \mathbb{H}^m_{DR}(X)$, semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu, induite par le <u>Frobenius</u> agissant sur la fibre spéciale ;

- d'autre part, d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i\, \mathbb{H}^m_{DR}(X))_{i \in \mathbb{Z}}$, <u>la filtration de Hodge</u>.

L'objet de cet article est de passer en revue les relations connues ou conjecturales entre l'action de Φ et la filtration de Hodge et d'en donner deux applications.

0.1. - <u>RELATIONS ENTRE ACTION DE FROBENIUS ET FILTRATION DE HODGE</u> (§ 1).

Certains W-modules munis d'une action semi-linéaire de Φ et d'une filtration peuvent être considérés comme certains des objets d'une catégorie abélienne $\underline{MF}_{tf}$ (dont la définition est rappelée plus loin). Si $K = \mathrm{Frac}\ W$, on conjecture que, quelque soient X et m, il existe un réseau de $\mathbb{H}^m_{DR}(X_K) = K \otimes_W \mathbb{H}^m_{DR}(X)$ qui est un objet de $\underline{MF}_{tf}$.

Lorsque tous les $H^j(X, \Omega^i_X)$ sont sans torsion, un théorème dû à Mazur ([M1], [M2]) dans le cas projectif et à Ogus ([BO1], §8) dans le cas général, permet d'établir cette conjecture dans chacun des trois cas suivants :

i) $m < p$,

ii) X est un schéma abélien,

iii) la fibre spéciale de X est une variété ordinaire.

L'hypothèse que les $H^j(X, \Omega^i_X)$ sont sans torsion implique que $\mathbb{H}^m_{DR}(X)$ est sans torsion et s'identifie donc à un réseau de $\mathbb{H}^m_{DR}(X_K)$; dans les cas (i) et (ii),

$\mathbb{H}^m_{DR}(X)$ est lui-même un objet de $\underline{MF}_{tf}$; dans le cas (iii) , cela ne semble pas être toujours vrai.

0.2. - PREMIERE APPLICATION : LA THEORIE DE WINTENBERGER (§ 2).

On peut donner une autre description de la catégorie $\underline{MF}_{tf}$. De celle-ci résulte, en particulier que

i) le W-module sous-jacent M à un objet de $\underline{MF}_{tf}$ est muni d'une graduation naturelle qui est un scindage de sa filtration ;

ii) si k est algébriquement clos, il y a une $\mathbb{Z}_p$-structure canonique, i.e. M contient un sous-$\mathbb{Z}_p$-module bien déterminé L tel que $M = W \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$.

D'où des conséquences tout à fait surprenantes pour les couples (X, m) qui satisfont la conjecture ci-dessus : on a un scindage canonique de la filtration de Hodge de $\mathbb{H}^m_{DR}(X_K)$ et, si k est algébriquement clos, une $\mathbb{Q}_p$-structure canonique sur $\mathbb{H}^m_{DR}(X_K)$; ces données, qui ne sont pas sans rappeler les structures de Hodge dans le cas complexe, me semblent tout à fait mystérieuses pour le moment, même lorsque X est une variété abélienne.

0.3. - DEUXIEME APPLICATION : CONSTRUCTION DE REPRESENTATIONS GALOISIENNES (§ 3).

Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et soit $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Soit $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau des entiers de K . Alors

$$H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) := \varprojlim H^0((\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}})/W_n)_{cris}, \text{faisc. struct.})$$

est muni d'une manière naturelle d'une action de Φ et d'une filtration.

Pour tout X et tout m , notons $U_m(X)$ l'ensemble des applications W-linéaires de $\mathbb{H}^m_{DR}(X)$ dans $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ qui commutent à l'action de Φ et respectent la filtration. C'est un $\mathbb{Z}_p$-module, sans torsion, séparé et complet pour la topologie p-adique, sur lequel $\mathcal{G}$ agit continûment. Je conjecture

C1) que $U_m(X)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de rang fini égal au rang sur W de $\mathbb{H}^m_{DR}(X)$ modulo torsion ;

C2) que, si les $H^j(X, \Omega^i_X)$ sont sans torsion et si $m < p$, alors $U_m(X)$ "s'identifie" (à un "grain de sel" près si $m = p-1$) au dual de

$$H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p) := \varprojlim H^m((X \times_{\mathrm{Spec}\, W} \mathrm{Spec}\, \bar{K})_{ét}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) ;$$

C3) que, dans le cas général, $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_m(X)$ s'identifie au dual de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$.

La conjecture C1 est démontrée dans chacun des trois cas signalés au n° 0.1 ; C2 et C3 le sont aussi lorsque X est un schéma abélien.

Ces résultats sont essentiellement ceux de [FL], à ceci près que l'anneau $H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$ y était remplacé par un certain anneau $\hat{S}$. Compte-tenu de [FL], une démontration possible consiste à prouver que, bien que les anneaux $\hat{S}$ et $H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$ soient différents, ils sont suffisamment "voisins" pour construire les mêmes représentations de Galois, c'est celle qui est indiquée ici (et constitue la seule partie véritablement originale de cet article) ; elle doit être considérée comme une partie d'un travail en préparation, en collaboration avec Bill Messing que je tiens à remercier ici. L'idée de remplacer $\hat{S}$ par $H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$ provient de ce travail et devrait faciliter une démonstration éventuelle des conjectures C2 et C3. L'anneau $H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$ semble avoir au moins deux avantages sur $\hat{S}$:

i) le premier est que, à défaut d'être clairement relié à la cohomologie étale, il est au moins clairement relié à la cohomologie cristalline !

ii) le second est que cette construction semble pouvoir se faisceautiser ; de façon un peu plus précise, on devrait pouvoir associer à chaque triplet (X,m,n) un faisceau $H^?_m(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ en $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-modules sur Spec W, pour une topologie convenable, de manière que

$$U_m(X) = \varprojlim_n \left(\varinjlim_L H^?_m(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(\mathrm{Spec}\ \mathfrak{O}_L)\right)$$

(où L parcourt les extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$ et où $\mathfrak{O}_L$ est l'anneau des entiers de L).
Bien sûr, $H^?_1(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ devrait être le noyau de la multiplication par p^n dans le schéma d'Albanese de X.

1. - FROBENIUS ET FILTRATION DE HODGE.

1.1. - Dans toute la suite, k est un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$, $W = W(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, K est le corps des fractions de W, $W_n = W/p^nW$ et σ est le Frobenius absolu opérant sur k, W, K, W_n.

Un Φ-module filtré est un W-module M muni

i) d'une application $\Phi : M \to M$, σ-semi-linéaire,

ii) d'une filtration décroissante

$M = \mathrm{Fil}^0 M \supset \mathrm{Fil}^1 M \supset \ldots \mathrm{Fil}^i M \supset \mathrm{Fil}^{i+1} M \supset \ldots$

par des sous-W-modules.

Avec une définition évidente des morphismes, les Φ-modules filtrés forment une catégorie additive $\mathbb{Z}_p$-linéaire $\underline{M\Phi}$.

1.2. - Soit X un schéma (quelconque) sur W . Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $X_n = X \times_{\mathrm{Spec}\, W} \mathrm{Spec}\, W_n$ et $X_k = X \times_{\mathrm{Spec}\, W} \mathrm{Spec}\, k$ $(= X_1)$.

Soit $(X_n/W_n)_{cris}$ (resp. $(X_k/W_n)_{cris}$) le site cristallin de X_n (resp. X_k) relativement à W_n et soit $\mathcal{O}_{X_n/W_n}$ (resp. $\mathcal{O}_{X_k/W_n}$) le faisceau structural (cf., par exemple, [BO1], § 5).

Pour tout entier $m \geq 0$, le W-module

$H^m_{cris}(X_n/W_n) := H^m((X_n/W_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X_n/W_n})$

a une structure naturelle de Φ-module filtré :

i) on a $H^m((X_n/W_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}) = H^m((X_k/W_n)_{cris}, \mathcal{O}_{X_k/W_n})$ et Φ est induit par l'action de Frobenius sur X_k ;

ii) si J_{X_n/W_n} est le faisceau (d'idéaux à puissances divisées) noyau de la projection canonique de $\mathcal{O}_{X_n/W_n}$ sur $\mathcal{O}_{X_n}$ et si, pour tout entier $i \geq 0$, $J^{[i]}_{X_n/W_n}$ est sa i-ième puissance divisée, $\mathrm{Fil}^i H^m_{cris}(X_n/W_n)$ est l'image dans $H^m_{cris}(X_n/W_n)$ de $H^m((X_n/W_n)_{cris}, J^{[i]}_{X_n/W_n})$.

Par passage à la limite, on en déduit que, pour tout m , $H^m_{cris}(X/W) := \varprojlim H^m_{cris}(X_n/W_n)$ peut être considéré comme un Φ-module filtré.

Remarques. 1. - Si X et X' sont deux schémas sur W tels que $X_k = X'_k$, alors $H^m_{cris}(X/W)$ s'identifie à $H^m_{cris}(X'/W)$ en tant que W-module muni de l'action de Φ , mais les filtrations sont en général distinctes.

2. - Si X est propre et lisse, $H^m_{cris}(X/W)$ s'identifie à $\mathbb{H}^m_{DR}(X)$ (et la filtration n'est autre que la filtration de Hodge usuelle).

1.3. – Notons $\underline{M\Phi}_K$ la sous-catégorie pleine de $\underline{M\Phi}$ formée des objets dont le W-module sous-jacent M et les $Fil^i M$ sont des K-espaces vectoriels.

Pour tout schéma X sur W et tout m, $H^m_{cris}(X_K) := K \otimes_W H^m_{cris}(X/W)$ a une structure évidente d'objet de $\underline{M\Phi}_K$.

Remarque. Soit Y une variété propre et lisse sur K, qui a bonne réduction, i.e. est telle qu'il existe un schéma propre et lisse X sur W dont la fibre générique s'identifie à Y ; pour chaque choix d'un tel X, on a une identification naturelle de $K \otimes_W H^m_{cris}(X)$ avec $\mathbb{H}^m_{DR}(Y)$, qui définit une action de Φ sur $\mathbb{H}^m_{DR}(Y)$, d'après un résultat de Messing ([BO2], n°4.2 et [GM]), cette action est indépendante du choix d'un tel X. Ceci justifie, dans ce cas particulier, la notation $H^m_{cris}(X_K)$ employée ci-dessus, a priori nettement abusive si l'on considère que X_K désigne la fibre générique de X.

DEFINITIONS. – Soit D un objet de $\underline{M\Phi}_K$, de dimension finie en tant que K-espace vectoriel :

i) on dit qu'un réseau M de D est fortement divisible si $\Phi(\sum p^{-i} Fil^i M) = M$ (où l'on a posé $Fil^i M = M \cap Fil^i D$) ;

ii) on dit que D est faiblement admissible s'il existe un réseau de D qui est fortement divisible.

Remarques. 1. – La définition de "faiblement admissible" donnée ici n'est pas celle donnée dans [F1] ; mais c'est un résultat de Laffaille que ces deux définitions sont équivalentes ([L], §3 ; il est facile de vérifier que la définition de "fortement divisible" donnée ici équivaut à celle de Laffaille).

2. – Je ne suis pas spécialement fier de cette terminologie ; quand j'ai introduit la notion d'admissibilité faible je ne me suis pas rendu compte immédiatement qu'elle était liée à celle de divisibilité forte introduite plusieurs années auparavant (Dwork, Katz, vers 1970).

CONJECTURE $C(X,m)$ (cf. [F2], App. n°13). – Soit X un schéma propre et lisse sur W et soit m un entier ≥ 0. Alors $H^m_{cris}(X_K)$ est faiblement admissible.

Supposons que X satisfasse la condition

(*) <u>les</u> $H^j(X, \Omega^i_X)$ <u>sont tous sans torsion</u>

(c'est par exemple le cas si X est un schéma abélien ou si X est une intersection complète dans un espace projectif). Alors, la suite spectrale

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega^i_X) \Rightarrow \mathbb{H}^{i+j}_{DR}(X) = H^{i+j}_{cris}(X/W)$$

dégénère en E_1, chaque $H^m_{cris}(X/W)$ est sans torsion et s'identifie donc à un réseau de $H^m_{cris}(X_K)$. On peut alors démontrer cette conjecture dans certains cas particuliers :

PROPOSITION. - <u>Si</u> X <u>propre et lisse sur</u> W <u>satisfait</u> (*), <u>alors</u> :

i) <u>si</u> $m < p$ <u>ou si</u> X <u>est un schéma abélien</u>, $H^m_{cris}(X)$ <u>est fortement divisible</u> ;

ii) <u>si la fibre spéciale</u> X_k <u>de</u> X <u>est ordinaire</u> (i.e. si tous les $H^j(X, B^i_{X_k})$ sont nuls, où $B^i_{X_k}$ désigne l'image de $d : \Omega^{i-1}_{X_k} \to \Omega^i_{X_k}$), $H^m_{cris}(X_K)$ <u>est faiblement admissible</u>.

<u>Démonstration</u>. C'est une conséquence facile des résultats de Mazur ([M1], [M2]) pour X projectif, étendus par Ogus ([BO1], § 8) au cas général : supposons que X satisfasse (*), soit m un entier ≥ 0 et soit $M = H^m_{cris}(X/W)$. Pour tout entier $i \geq 0$, posons

$$M^i = \{x \in M \mid \Phi x \in p^i M\} \quad \text{et} \quad \langle i \rangle = \inf_{j \geq i} v_p(p^j/j!) .$$

Alors, pour toute fonction $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\begin{cases} \varepsilon(i)-1 \leq \varepsilon(i+1) \leq \varepsilon(i) , & \text{pour tout } i , \\ \varepsilon(j) - \varepsilon(i) \leq \langle i-j \rangle , & \text{si } i \geq j , \end{cases}$$

on a ([BO1], 8.25 et 8.41)

(**) $$\sum p^{\varepsilon(i)} \mathrm{Fil}^i M = \sum p^{\varepsilon(i)} M^i .$$

- Si $m < p$, en appliquant (**) à

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 , & \text{pour } 0 \leq i \leq m , \\ 0 , & \text{pour } i > m , \end{cases}$$

on voit que $pM = pM + M^{m+1}$, ou encore que $M^{m+1} \subset pM$, i.e. que $M^{m+1} = pM^m$, d'où l'on déduit que $\Phi(M^m) = p^m M$; et en appliquant (**) à

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} m-i , & \text{pour } 0 \leq i \leq m , \\ 0 , & \text{pour } i > m , \end{cases}$$

on voit que $\sum p^{m-i} \mathrm{Fil}^i M = \sum p^{m-i} M^i = M^m$, donc que $\Phi(\sum p^{-i} \mathrm{Fil}^i M) = p^{-m} \Phi(M^m) = M$, d'où l'assertion (i) pour $m < p$.

• Si X est un schéma abélien, l'assertion résulte du cas précédent pour $m = 1$, et le cas général s'en déduit en remarquant que la puissance extérieure m-ième d'un module fortement divisible est encore fortement divisible.

• Si X_k est ordinaire et si, pour tout $i \geq 0$, $M_{[i]}$ est le plus grand-sous-module de $M = H^m_{cris}(X/W)$, stable par Φ , sur lequel Φ est divisible par p^i et $p^{-i}\Phi$ est bijective, on a ([BGK], prop. 7.3)

$$M_{[i]} \simeq H^{m-i}(X, \Omega^i_X) \quad \text{et} \quad M = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_{[i]} .$$

En appliquant (**) à

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j < i , \\ 0 & \text{si } j \geq i , \end{cases}$$

on voit que $pM + \mathrm{Fil}^i M = pM + M^i = (\bigoplus_{j<i} pM_{[j]}) \oplus (\bigoplus_{j\geq i} M_{[j]})$; comme $\mathrm{Fil}^i M$ est un facteur direct de M de rang égal à

$$\bigoplus_{j\geq i} \mathrm{rg}_W H^{m-j}(X, \Omega^j_X) = \mathrm{rg}_W(\bigoplus_{j\geq i} M_{[j]}) ,$$

on en déduit qu'il existe un unique W-automorphisme v de M , vérifiant $(v-1)M_{[i]} \subset \bigoplus_{j<i} M_{[j]}$ (et même $\subset \bigoplus_{j<i} pM_{[j]}$) pour tout i , tel que $\mathrm{Fil}^i M = v(\bigoplus_{j\geq i} M_{[j]})$; il est alors très facile de vérifier que $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} p^i M_{[i]}$ est fortement divisible, d'où l'assertion (ii) .

2. - LA CATEGORIE $\underline{\underline{MF}}_{tf}$.

Les résultats de ce paragraphe sont dus, pour l'essentiel, à J.P. Wintenberger ([W]) et sont énoncés ici sans démonstration.

2.1. - Soit $\underline{\underline{MF}}_{tf}$ la catégorie suivante :

• un objet de $\underline{\underline{MF}}_{tf}$ est un W-module de type fini, muni

i) d'une filtration $(\mathrm{Fil}^i M)_{i\in\mathbb{Z}}$ par des sous-W-modules facteurs directs de M , décroissante ($\mathrm{Fil}^{i+1} M \subset \mathrm{Fil}^i M$) , exhaustive ($\mathrm{Fil}^i M = M$, pour $i \ll 0$) et séparée ($\mathrm{Fil}^i M = 0$, pour $i \gg 0$) ;

ii) pour chaque entier $i \in \mathbb{Z}$, d'une application

$$\varphi^i_M : \mathrm{Fil}^i M \to M ,$$

σ-semi-linéaire, vérifiant

a) $\varphi^i_M(x) = p\varphi^{i+1}_M(x)$, si $i \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathrm{Fil}^{i+1}M$,

b) $\sum \mathrm{im}\, \varphi^i_M = M$;

• un morphisme $\eta : M \to N$ est une application W-linéaire, compatible avec la filtration $(\eta(\mathrm{Fil}^i M) \subset \mathrm{Fil}^i N)$ et les φ $(\eta \circ \varphi^i_M = \varphi^i_N \circ \eta|_{\mathrm{Fil}^i M})$.

Il est clair que $\underline{MF}_{tf}$ est une catégorie additive $\mathbb{Z}_p$-linéaire ; il n'est pas difficile de montrer qu'elle est abélienne.

Exemple. Soit M un W-module libre de rang fini, muni d'une filtration $(\mathrm{Fil}^i M)_{i\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) . Si on identifie M à un réseau de $M_K = K \otimes_W M$, on voit que se donner des applications φ^i_M vérifiant (ii) revient à se donner une application σ-semi-linéaire $\Phi : M_K \to M_K$ satisfaisant $\Phi(\sum p^{-i}\,\mathrm{Fil}^i M) = M$. En particulier, sous les hypothèses du (i) de la proposition du n°1.3, $H^m_{\mathrm{cris}}(X/W)$ a une structure naturelle d'objet de $\underline{MF}_{tf}$.

2.2. - Notons maintenant $\underline{MG}_{tf}$ la catégorie suivante :

• un objet de $\underline{MG}_{tf}$ est un W-module de type fini M , muni

i) d'une application σ-semi-linéaire, bijective

$$f_M : M \to M ,$$

ii) d'une graduation par des sous-W-modules, indexée par $\mathbb{Z}$,

$$M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i ;$$

• un morphisme $\eta : M \to N$ est une application W-linéaire qui commute à f $(\eta \circ f_M = f_N \circ \eta)$ et respecte la graduation $(\eta(M_i) \subset N_i)$.

Il est clair que $\underline{MG}_{tf}$ est une catégorie abélienne $\mathbb{Z}_p$-linéaire.

2.3. - On dispose d'un foncteur additif (et même $\mathbb{Z}_p$-linéaire), exact et fidèle

$$\psi : \underline{MG}_{tf} \to \underline{MF}_{tf} :$$

c'est celui qui à $(M, f_M, (M_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ associe le W-module M avec

$$\mathrm{Fil}^i M = \bigoplus_{j\geq i} M_j ,$$

$$\varphi^i_M\Big(\sum_{j\geq i} x_j\Big) = \sum_{j\geq i} p^{j-i} f_M(x_j) \quad (\text{si } x_j \in M_j) .$$

2.4. - Notons X l'ensemble des applications périodiques de $\mathbb{Z}$ dans lui-même. Soit M un objet de $\underline{MG}_{tf}$. Pour tout $\xi \in X$, posons

$$M_\xi = \{x \in M \mid f_M^n(x) \in M_{\xi(n)}\ , \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\} .$$

On vérifie facilement que presque tous les M_ξ sont nuls et que l'application évidente

$$\bigoplus_{\xi \in X} M_\xi \to M$$

est injective. On dit que M est <u>élémentaire</u> si c'est un isomorphisme. On note $\underline{MG}_{tf}^{él}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MG}_{tf}$ dont les objets sont ceux qui sont élémentaires. Elle est stable par sous-objet et quotient et est donc abélienne.

2.5. - Disons qu'un objet M de $\underline{MG}_{tf}$ <u>satisfait la propriété</u> (W1) si tout sous-quotient simple de M dans $\underline{MG}_{tf}$ est élémentaire (il revient au même de dire que les quotients successifs d'une suite de composition de M/pM sont élémentaires).

Tout sous-objet et tout quotient d'un objet de $\underline{MG}_{tf}$ satisfaisant (W1) satisfait encore (W1) .

2.6. - Si maintenant M est un objet de $\underline{MG}_{tf}$ et si u est un automorphisme du W-module sous-jacent, on peut définir un nouvel objet M^u de $\underline{MG}_{tf}$ de la façon suivante :

i) en tant que W-module gradué, $M^u = M$,

ii) on pose $f_{M^u} = u^{-1} \circ f_M$.

Disons qu'un objet M de $\underline{MG}_{tf}$ satisfait la propriété (W2) s'il existe $u \in \mathrm{Aut}_W(M)$ tel que

i) on a $(u-1)M_i \subset \bigoplus_{j<i} M_j$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

ii) M^u est élémentaire.

On démontre que, <u>si un tel</u> u <u>existe</u>, <u>il est nécessairement unique</u>, et on en déduit que tout sous-objet ou tout quotient, dans $\underline{MG}_{tf}$, d'un objet satisfaisant (W2) satisfait encore (W2) .

2.7. - Notons $\underline{MG}_{tf}^{W}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MG}_{tf}$ formée des objets satisfaisant (W1) et (W2) . Elle est stable par sous-objets et quotients et est donc encore abélienne. Le résultat de Wintenberger peut se formuler ainsi :

THEOREME. - <u>La restriction</u> ψ^W <u>de</u> ψ <u>à</u> $\underline{MG}_{tf}^W$ <u>induit une équivalence entre la catégorie</u> $\underline{MG}_{tf}^W$ <u>et la catégorie</u> $\underline{MF}_{tf}$.

Si $(M, (\mathrm{Fil}^i M)_{i\in\mathbb{Z}}, (\varphi_M^i)_{i\in\mathbb{Z}})$ est un objet de $\underline{MF}_{tf}$, le choix d'un scindage de la filtration (i.e. d'une famille $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de sous-W-modules de M tels que $\mathrm{Fil}^i M = \bigoplus_{j\geq i} M_j$, pour tout i) permet de munir M d'une structure d'objet de $\underline{MG}_{tf}$: elle définit une graduation de M et $f_M : M \to M$ est défini par

$$f_M(x) = \varphi_M^i(x) \text{ , si } x \in M_i \text{ .}$$

Le théorème revient alors à dire qu'<u>il existe un et un seul scindage de la filtration de</u> M <u>tel que l'objet de</u> MG_{tf} <u>ainsi obtenu satisfasse les propriétés</u> (W1) <u>et</u> (W2) .

2.8. - On peut donner une autre description de la catégorie $\underline{MG}_{tf}^W$: notons $\underline{MG}_{tf}^{W'}$ la catégorie suivante :

• un objet de $\underline{MG}_{tf}^{W'}$ est un couple (N,u) formé d'un objet $N = (N, f_N, (N_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ de $\underline{MG}_{tf}^{\text{él}}$ et d'un W-automorphisme u de N satisfaisant :

i) $(u-1)N_i \subset \bigoplus_{j<i} N_j$, pour tout i ,

ii) il existe une suite de composition de $\bar{N} = N/pN$ (dans $\underline{MG}_{tf}^{\text{él}}$)

$$0 = \bar{N}^{(0)} \subset \bar{N}^{(1)} \subset \ldots \bar{N}^{(r)} = \bar{N}$$

telle que $(u-1)\bar{N}^{(j+1)} \subset \bar{N}^{(j)}$, pour $j = 0,1,2,\ldots,r-1$;

• un morphisme est un morphisme de $\underline{MG}_{tf}^{\text{él}}$ qui commute avec u .

On montre que la correspondance de $\underline{MG}_{tf}^W$ dans $\underline{MG}_{tf}^{W'}$ qui à M associe (M^u, u) (où u est uniquement déterminé par la propriété (W2)) est fonctorielle et induit une équivalence entre ces deux catégories.

2.9. - <u>Remarque</u>. On a sur chacune des catégories $\underline{MF}_{tf}$, $\underline{MG}_{tf}$ et $\underline{MG}_{tf}^{W'}$ des notions de produit-tensoriel, de "hom interne" et d'objet-unité : les sous-catégories pleines $\underline{MG}_{tf}^W$ et $\underline{MG}_{tf}^{\text{él}}$ de $\underline{MG}_{tf}$ sont stables par ces opérations et les foncteurs ψ et ψ^W commutent avec elles. Ces structures jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Wintenberger.

Chacune des cinq catégories ci-dessus est alors une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{Z}_p$ (au sens de Saavedra, [Sa]) et s'identifie à la catégorie des représentations linéaires de type fini d'un groupe proalgébrique défini sur $\mathbb{Z}_p$. Cette interprétation est particulièrement agréable pour les catégories $\underline{MG}_{tf}$ et $\underline{MG}_{tf}^{él}$; je vais la donner dans le cas particulier où k est <u>algébriquement clos</u> :

a) La catégorie $\underline{MG}_{tf}$ s'identifie à la catégorie des couples (L, ρ) où L est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini et $\rho : \mathbb{G}_m \to GL(L)$ est un morphisme <u>défini sur</u> W (attention toutefois que ρ ne peut en général être considéré que comme un morphisme de foncteurs en groupes ; le foncteur en groupes $R \mapsto GL(L)(R) = \mathrm{Aut}_R(R \otimes_{\mathbb{Z}_p} L)$ n'est représentable sur $\mathbb{Z}_p$ que si L est libre). Le dictionnaire s'obtient ainsi

i) $(L, \rho) \mapsto \begin{cases} M = W \otimes_{\mathbb{Z}_p} L \ , \ f_M(w \otimes x) = \sigma(w) \otimes x \ , \ \text{si} \ w \in W \ , \ x \in L \ , \\ M_i = \{x \in M \mid \rho(\lambda)x = \lambda^i x \ , \ \text{pour tout} \ \lambda \in W^\times\} \ ; \end{cases}$

ii) $(M, f_M, (M_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \mapsto \begin{cases} L = \{x \in M \mid f_M(x) = x\} \ , \\ \text{si } R \text{ est une } W\text{-algèbre, } R \otimes_{\mathbb{Z}_p} L = R \otimes_W M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R \otimes_W M_i \\ \text{et } \rho(\lambda) \cdot x = \lambda^i x \ , \ \text{si } \lambda \in R^\times \text{ et } x \in R \otimes_W M_i \ . \end{cases}$

En particulier, si M est un objet de $\underline{MG}_{tf}$, sans p-torsion, correspondant à un couple (L, ρ), la sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{MG}_{tf}$ engendrée par M et son dual s'identifie à la catégorie des représentations linéaires de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ du plus petit sous-groupe algébrique H de $GL(L)$ défini sur $\mathbb{Z}_p$ tel que $H \otimes W$ contient l'image de ρ.

b) Pour tout entier $s \geq 1$, soit A_s l'anneau des entiers de l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré s contenue dans K et soit $T_s = \mathrm{Res}_{A_s/\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_m$ (i.e. $T_s(R) = (A_s \otimes_{\mathbb{Z}_p} R)^\times$, pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre R) : c'est donc un tore algébrique défini sur $\mathbb{Z}_p$, de dimension relative s, qui se déploie sur A_s, donc a fortiori sur W.

Si R est une W-algèbre, l'application de $A_s \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ dans $R^{\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$ qui à $a \otimes x$ associe $(\sigma^i(a)x)_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$, identifie $T_s(R)$ à $(R^\times)^{\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$; pour tout $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, soit alors $\xi_{s,i} : T_s \to \mathbb{G}_m$ le caractère défini par $\xi_{s,i}((y_j)_{j \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}) = y_i$. Les $\xi_{s,i}$ forment une base du groupe des caractères X_s de T_s ; on peut identifier X_s au groupe des applications de $\mathbb{Z}$ dans lui-même, périodiques de période divisant s en posant

$$\Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} n_i \xi_{s,i}\Big)(m) = n_{\bar{m}} \quad \text{(où } \bar{m} \text{ désigne l'image de } m \text{ dans } \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}) \ .$$

Si $(\xi^*_{s,i})_{i\in\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$ désigne la base du groupe $Y_s = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_s)$ des cocaractères de T_s, duale de celle des $\xi_{s,i}$, on voit que T_s est le plus petit sous-groupe algébrique de lui-même, défini sur $\mathbb{Z}_p$, contenant l'image de $\rho = \xi^*_{s,0}$. On en déduit que la catégorie des représentations linéaires de type fini de T_s s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\underline{MG}_{tf}$ formée des objets élémentaires "de niveau divisant s", i.e. des objets M tels que $M = \bigoplus_{\xi\in X_s} M_\xi$.

Par passage à la limite, $\underline{MG}^{él}_{tf}$ s'identifie à la catégorie des représentations linéaires de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ du groupe proalgébrique $T = \varprojlim T_s$ (où l'application de transition de $T_{s'}$ dans T_s, pour s divisant s', est induite par la norme).

2.10. - Autres remarques. 1. Soit X un schéma propre et lisse sur W satisfaisant la condition (*) du n°1.3 et soit m un entier $< p$. Le théorème de Wintenberger fournit un scindage canonique de la filtration de Hodge de $\mathbb{H}^m_{DR}(X) = H^m_{cris}(X/W)$, autrement dit nous permet d'identifier $H^m_{DR}(X)$ à $\bigoplus_{i=0}^{m} H^{m-i}(X,\Omega^i_X)$. Il nous fournit aussi un endomorphisme nilpotent canonique, $u-1$, vérifiant, avec l'identification précédente et $i+j < p$,

$$(u-1)\,H^j(X,\Omega^i_X) \subset \bigoplus_{\substack{r+s=i+j\\ r<i}} H^s(X,\Omega^r_X) .$$

Il nous donne également, lorsque k est algébriquement clos, deux $\mathbb{Z}_p$-structures canoniques :

- celle définie par f_M : i.e. $\mathbb{H}^m_{DR}(X) = W\otimes_{\mathbb{Z}_p} L$, avec $L = \{x\in\mathbb{H}^m_{DR}(X) \mid f_M(x) = x\}$ où $f_M(x) = p^{-i}\Phi x$, si $x\in H^{m-i}(X,\Omega^i_X)$;
- celle définie par $f_{M^u} = u^{-1}\circ f_M$, i.e. $\mathbb{H}^m_{DR}(X) = W\otimes_{\mathbb{Z}_p} L^{él}$, avec $L^{él} = \{x\in\mathbb{H}^m_{DR}(X) \mid f_{M^u}(x) = x\}$.

Enfin, toujours si k est algébriquement clos, il nous fournit une action du pro-tore T défini dans la remarque précédente.

Toutes ces structures me semblent, pour le moment, tout à fait mystérieuses, même lorsque X est un schéma abélien (le cas intéressant étant alors celui où $m = 1$) ; la question se pose de savoir si certaines d'entre elles ont une interprétation géométrique (ou analytique) "raisonnable".

2. Si l'on suppose de plus que la fibre spéciale de X est ordinaire, les résultats de Wintenberger ne sont pas nouveaux : le scindage provient de ce que la filtration de Hodge et "la filtration croissante par les pentes", i.e., avec les notations de la fin du § 1, la filtration par les $\bigoplus_{j<i} M_{[j]}$, sont opposées.

3. La théorie de Wintenberger s'étend sans difficulté aux objets de $\underline{M\Phi}_K$ faiblement admissibles (cf. n° 1.3). Autrement dit, si D est un tel module et si on choisit un réseau M de D fortement divisible, le scindage de Wintenberger de la filtration de M induit un scindage de la filtration de D qui est indépendant du choix de M . Autrement dit, pour tout schéma propre et lisse X sur W pour lequel la conjecture énoncée au n°1.3 est vraie, on a un scindage canonique de la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham de la fibre générique... et, sur cette cohomologie, un endormorphisme nilpotent canonique $u-1$, et, si k est algébriquement clos, deux $\mathbb{Q}_p$-structures canoniques, ainsi qu'une action de la fibre générique de T sur l'une d'entre elles.

3. - REPRESENTATIONS p-ADIQUES.

3.1. - Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et soit $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Soit $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau des entiers de $\bar{K}$. Avec les notations de 1.2, on pose

$$H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K},n}) := H^m_{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}})/W_n)$$

et

$$H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) := H^m_{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \varprojlim H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K},n}) .$$

C'est un W-module topologique (la topologie est celle de la limite projective, avec la topologie discrète sur les $H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K},n})$) muni d'une structure de Φ-module filtré, sur lequel $\mathcal{G}$ opère linéairement, continûment et de manière compatible à la structure de Φ-module filtré.

THEOREME 1. i) <u>On a</u> $H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0$ <u>si</u> $m \geq 1$;

ii) $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ <u>est sans</u> p-<u>torsion et la projection canonique de</u> $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ <u>dans</u> $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K},n})$ <u>identifie</u> $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})/p^n H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ <u>à</u> $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K},n})$.

THEOREME 2. <u>Soit</u> X <u>un schéma propre et lisse sur</u> W <u>et soit</u> m <u>un entier tel que la conjecture</u> $C(X,m)$ <u>est satisfaite</u>. <u>Alors</u>,

i) $U_m(X) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(H^m_{cris}(X), H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}}))$ <u>est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini inférieur ou égal à la dimension sur</u> K <u>de</u> $\mathbb{H}^m_{DR}(X_K)$ (qui est égale à la dimension sur $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$) ;

ii) <u>on a l'égalité dans chacun des cas suivants</u> :

a) $m < p$,

b) X <u>est un schéma abélien,</u>

c) <u>les</u> $H^j(X, \Omega^i_X)$ <u>sont sans torsion et la fibre spéciale de</u> X <u>est ordinaire</u>;

iii) <u>si</u> X <u>est un schéma abélien,</u> $U_m(X)$ <u>s'identifie au dual de</u> $H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$ <u>si</u> $m < p$ (à un "grain de sel" près si $m = p-1$), <u>et</u> $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_m(X)$ <u>au dual de</u> $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$, <u>pour tout</u> m .

(le "grain de sel" est le suivant : on a un homomorphisme injectif de $H^{p-1}_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$ dans $(U_{p-1}(X))^*$, dont le conoyau est "au pire" un groupe fini tué par p sur lequel le groupe d'inertie opère trivialement).

La démonstration est en gros la suivante : dans [F L] , on a construit une W-algèbre $\hat{S}$ munie d'une structure naturelle de Φ-module filtré avec action de $\mathcal{G}$. On commence par construire une injection de $\hat{S}$ dans $H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$, compatible avec toutes les structures; si, pour tout Φ-module filtré M , on pose $U(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(M, H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}}))$ et $U_{\hat{S}}(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(M, \hat{S})$, on en déduit un homomorphisme injectif de $U_{\hat{S}}(M)$ dans $U(M)$. On montre alors que, si M est fortement divisible, cet homomorphisme

a) est un isomorphisme si $\mathrm{Fil}^p M = 0$,

b) induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U_{\hat{S}}(M)$ sur $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} U(M)$, même si $\mathrm{Fil}^p M \neq 0$.

On est donc réduit à prouver l'analogue du théorème 2 obtenu en remplaçant partout $U_m(X)$ par $U_{\hat{S},m}(X) = U_{\hat{S}}(H^m_{cris}(X))$.

3.2. - Commençons par calculer les $H^m_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K}})$. Soit L une extension finie de K et soit $\mathfrak{O}_L$ l'anneau de ses entiers. Choisissons $y \in L$ tel que $\mathfrak{O}_L = W[y]$ (cela est possible, cf. [S], chap. III, prop. 12). Pour tout entier $n \geq 1$, soient $\Sigma_{L,n} = W_n[Y]$, l'anneau des polynômes en la variable Y à coefficients dans W_n , et P_n l'image dans $W_n[Y]$ du polynôme minimal de y sur W . La W_n-algèbre $\mathfrak{O}_{L,n} = \mathfrak{O}_L/p^n\mathfrak{O}_L$ s'identifie (en envoyant Y sur l'image de y) au quotient de la W_n-algèbre lisse

$W_n[Y]$ par l'idéal (P_n) . Soit $\mathcal{D}_{L,n} = D_{\Sigma_{L,n}}((P_n))$ l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $\Sigma_{L,n}$ relativement à l'idéal (P_n) . Alors ([BO1], th. 7.1), $H^*_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) := H^*_{cris}(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L,n}/W_n)$ s'identifie à la cohomologie du complexe de W_n-modules

$$D_{L,n} \longrightarrow D_{L,n} \otimes_{\Sigma_{L,n}} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_{L,n} \otimes_{\Sigma_{L,n}} \Omega^i_{\Sigma_{L,n}} \longrightarrow \cdots$$

(où, si $\gamma_r(x)$ désigne la r-ième puissance divisée de $x \in (P_n)$, on a

$$d(\gamma_j(x) \otimes \omega) = \gamma_{j-1}(x) \otimes dx \cdot \omega + \gamma_j(x) \otimes d\omega) .$$

Si $m \geq 2$, on a $\Omega^m_{\Sigma_{L,n}} = 0$, d'où, a fortiori, $H^m_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) = 0$; par conséquent, $H^m_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K},n}) = \varinjlim H^m_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$ (pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$) $= 0$.

Pour $m = 1$, on voit que, si L' désigne une extension de L obtenue en adjoignant une racine p^n-ième de y , l'image de $H^1_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$ dans $H^1_{cris}(\mathcal{O}_{L',n})$ est nulle et on a donc encore $H^1_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K},n}) = 0$, d'où $H^1_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0$, ce qui achève la démonstration de l'assertion (i) du théorème 1.

3.3. - Revenons à $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$. Notons $J_{L,n}$ l'idéal à puissances divisées de $D_{L,n}$ enveloppe de l'idéal (P_n) et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $J^{[i]}_{L,n}$ sa i-ème puissance divisée. Alors

$$\mathrm{Fil}^i H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) = J^{[i]}_{L,n} \cap H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) .$$

L'action de Φ sur $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$ peut se définir ainsi : l'anneau $D_{L,n}$ est aussi l'enveloppe à puissances divisées de $\Sigma_{L,n}$ relativement à l'idéal (p, P_n) , compatibles avec les puissances divisées naturelles de $p\Sigma_{L,n}$; si on note Φ l'unique endomorphisme σ-semi-linéaire de la W_n-algèbre $\Sigma_{L,n}$ vérifiant $\Phi Y = Y^p$, on a $\Phi((p, P_n)) \subset (p, P_n)$; Φ s'étend donc à $D_{L,n}$ et $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$ est stable par Φ .

Soit $\tilde{\mathcal{O}}_L = \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \Sigma_{L,n}/(p, P_n)$. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(\tilde{\mathcal{O}}_L)$; pour $0 \leq r \leq n-1$, notons $\hat{a}_r$ l'image dans $D_{L,n}$ d'un relèvement de a_r dans $\Sigma_{L,n}$; alors $p^r \hat{a}_r^{p^{n-r}}$ ne dépend pas du choix du relèvement et appartient à $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$; l'application

$$\alpha_{L,n} : W_n(\tilde{\mathcal{O}}_L) \longrightarrow H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) ,$$

qui à $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ associe $\sum_{r=0}^{n-1} p^r \hat{a}_r^{p^{n-r}}$, est un homorphisme d'anneaux qui ne dépend pas du choix du générateur y de la W-algèbre $\mathfrak{O}_L$.

L'idéal de $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ formé des $(0,a_1,\dots,a_{n-1})$ est muni de puissances divisées naturelles (cf. par exemple, [I], n°0.1.4) ; notons $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$, relativement à l'idéal $I_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ formé des $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ tels que $a_0^{p^n}=0$, compatibles avec les puissances divisées des $(0,a_1,\dots,a_{n-1})$. Comme $\alpha_{L,n}(I_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)) \subset p\mathfrak{O}_{L,n} \cap H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{L,n})$, $\alpha_{L,n}$ s'étend en un homomorphisme d'algèbres à puissances divisées

$$\alpha^{DP}_{L,n} : W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L) \to H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{L,n}) .$$

On peut munir $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ d'une structure de Φ-module filtré de la manière suivante :

i) la structure de W-module est celle qui est déduite de la structure naturelle par l'extension des scalaires σ^{-n} ;

ii) l'action naturelle de Φ sur $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$,

$$\Phi((a_0,a_1,\dots,a_{n-1})) = (a_0^p,a_1^p,\dots,a_{n-1}^p) ,$$

envoie $I_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ dans lui-même et s'étend en un endomorphisme de $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$;

iii) on a un homomorphisme

$$\theta_{L,n} : W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L) \to \mathfrak{O}_{L,n} ;$$

c'est celui qui à $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ associe $\sum_{r=0}^{n-1} p^r \hat{a}_r^{p^{n-r}}$, où, cette fois-ci, $\hat{a}_r$ désigne un relèvement de a_r dans $\mathfrak{O}_{L,n}$; comme $\theta_{L,n}(I_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L))$ est contenu dans l'idéal à puissances divisées $p\mathfrak{O}_{L,n}$ de $\mathfrak{O}_{L,n}$, $\theta_{L,n}$ induit un homomorphisme

$$\theta^{DP}_{L,n} : W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L) \to \mathfrak{O}_{L,n} ,$$

dont le noyau est un idéal à puissances divisées ; alors $\mathrm{Fil}^i W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ est la i-ème puissance divisée du noyau de $\theta^{DP}_{L,n}$.

Il est immédiat que $\alpha^{DP}_{L,n}$ est un morphisme de Φ-modules filtrés. En outre, si L/K est galoisienne, $\mathrm{Gal}(L/K)$ opère de manière naturelle sur $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ et sur $H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{L,n})$ et $\alpha^{DP}_{L,n}$ commute à l'action de Galois.

3.4. - PROPOSITION. Supposons que l'indice de ramification de l'extension L/K soit divisible par p^n. Alors $\alpha^{DP}_{L,n}$ est un isomorphisme de Φ-modules filtrés.

<u>Démonstration</u>. Il s'agit de vérifier

i) d'une part que $\alpha_{L,n}^{DP}$ est bijective,

ii) d'autre part, que, pour tout i,

$$\alpha_{L,n}^{DP}(\mathrm{Fil}^i W_n^{DP}(\widetilde{\mathcal{O}}_L)) = \mathrm{Fil}^i H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) .$$

Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
W_n^{DP}(\widetilde{\mathcal{O}}_L) \arrow[rr, "\alpha_{L,n}^{DP}"] \arrow[dr, "\theta_{L,n}^{DP}"'] & & H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n}) \arrow[dl, "can."] \\
& \mathcal{O}_{L,n} &
\end{tikzcd}$$

est commutatif et comme $\mathrm{Fil}^i W_n^{DP}(\widetilde{\mathcal{O}}_L)$ (resp. $\mathrm{Fil}^i H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$) est la i-ème puissance divisée du noyau de $\theta_{L,n}^{DP}$ (resp. de l'application canonique), la deuxième assertion résulte de la première. Montrons donc la première : quitte à remplacer K par l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans L, on peut supposer L/K totalement ramifiée et choisir pour y une uniformisante de $\mathcal{O}_L$: si on note ep^n le degré de l'extension L/K, on a alors $(p, P_n) = (p, Y^{ep^n})$. On en déduit que $D_{L,n}$ est aussi l'enveloppe à puissances divisées de $\Sigma_{L,n}$ relativement à l'idéal (Y^{ep^n}).

Comme $\Sigma_{L,n}$ est lisse, on a $H^0_{cris}(\Sigma_{L,n}) = \mathrm{Ker}(\Sigma_{L,n} \xrightarrow{d} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}})$. On a $Y^{ep^n} \in H^0_{cris}(\Sigma_{L,n})$; dans l'homomorphisme canonique de $H^0_{cris}(\Sigma_{L,n})$ dans $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$, Y^{ep^n} s'envoie dans l'idéal à puissances divisées noyau de la projection de $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$ dans $\widetilde{\mathcal{O}}_L$; d'où un homomorphisme de $D_{H^0_{cris}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n}))$ dans $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{L,n})$, que l'on vérifie être un isomorphisme.

On a $\Sigma_{L,n}/p\Sigma_{L,n} = k[Y]$ et, comme $\Sigma_{L,n}$ est lisse sur W_n, l'homomorphisme canonique de $W_n(k[Y])$ sur $H^0_{cris}(\Sigma_{L,n})$ est un isomorphisme ([IR], III, prop. 1.4). Il envoie $[Y^e] = (Y^e, 0, \ldots, 0)$ sur Y^{ep^n} et induit donc un isomorphisme de $D_{W_n(k[Y])}(([Y^e]))$ sur $D_{H^0_{cris}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n}))$.

Mais, pour $0 \le r \le n-1$, l'image de $(0, \ldots, 0, Y^{ep^n}, 0, \ldots, 0) = p^r([Y^e])^{p^{n-r}}$ dans $D_{W_n(k[Y])}(([Y^e]))$ est $p^r \cdot (p^{n-r})! \cdot \gamma_{p^{n-r}}([Y^e]) = 0$. Donc $D_{W_n(k[Y])}(([Y^e]))$ s'identifie à $D_{W_n(k[Y]/(Y^{ep^n})}(([Y^e]))$.

On a donc obtenu un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \alpha'^{DP}_{L,n} : D_{W_n(k[Y]/(Y^{ep^n}))}(([Y^e])) & \xrightarrow{\sim} & D_{W_n(k[Y])}(([Y^e])) \\ & & \downarrow\wr \\ & & D_{H^0_{cris}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n})) \xrightarrow{\sim} H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{L,n}) . \end{array}$$

Mais $k[Y]/(Y^{ep^n}) = \widetilde{\mathfrak{O}}_L$. Comme l'idéal de $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ engendré par $[Y^e]$ et les $(0,a_1,\ldots,a_{n-1})$ n'est autre que l'idéal de $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ formé des $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$ tels que $a_0^{p^n} = 0$, $D_{W_n(k[Y]/(Y^{ep^n}))}(([Y^e]))$ s'identifie à $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$. Il est alors immédiat que l'isomorphisme $\alpha'^{DP}_{L,n}$ s'identifie à $\alpha^{DP}_{L,n}$.

3.5. - Soit $\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}} = \mathfrak{O}_{\bar{K}}/p\mathfrak{O}_{\bar{K}}$. On a $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) = \varinjlim W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$ (pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$). Soit $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}})$ l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}})$ relativement à l'idéal $I_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}})$ formé des $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$ tels que $a_0^{p^n} = 0$, compatibles avec les puissances divisées naturelles des $(0,a_1,\ldots,a_{n-1})$. On a $W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) = \varinjlim W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_L)$; comme l'ensemble des extensions L de K dont l'indice de ramification est divisible par p^n est cofinal dans l'ensemble des extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$, la proposition 3.4 implique :

COROLLAIRE. - <u>Par passage à la limite, les</u> $\alpha^{DP}_{L,n}$ <u>induisent un isomorphisme de Φ-modules filtrés</u>

$$\alpha_n^{DP} : W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) \longrightarrow H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K},n}) .$$

3.6. - Soit $\mathfrak{O}_C = \varprojlim \mathfrak{O}_{\bar{K}}/p^n\mathfrak{O}_{\bar{K}}$. Pour tout $a \in \mathfrak{O}_C$, on note $\widetilde{a}$ son image dans $\mathfrak{O}_C/p\mathfrak{O}_C = \widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}$.

On munit l'ensemble R des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ d'une structure d'anneau commutatif en posant

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} + (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (\lim_{m\to\infty} (x^{(n+m)}+y^{(n+m)})^{p^m})_{n\in\mathbb{N}} ,$$

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (x^{(n)}y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} .$$

L'application qui à $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ associe $(\widetilde{x^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ identifie R à la limite projective du diagramme

$$\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}} \xleftarrow{f} \widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}} \xleftarrow{f} \cdots \xleftarrow{f} \widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}} \xleftarrow{f} \widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}} \xleftarrow{f} \cdots$$

(où $f(a) = a^p$) . L'anneau R est parfait de caractéristique p et l'application de k dans R , qui à ε associe $([\varepsilon^{p^{-n}}])_{n\in\mathbb{N}}$ (où $[a] \in W$ est le représentant de Teichmüller de $a \in k$), identifie k à un sous-corps de R (cf. par exemple, [FL], n°2.1).

L'anneau $W(R)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans R est donc une W-algèbre sans p-torsion et s'identifie à un sous-anneau de $W_K(R) := K \otimes_W W(R)$. L'application

$$\theta^0 : W(R) \longrightarrow \mathfrak{O}_C ,$$

qui à $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ associe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)}$, est un homomorphisme surjectif dont le noyau est un idéal principal ([F2], prop. 2.4).

Notons S' l'enveloppe à puissances divisées (compatibles à celles des $(0, x_1, \dots, x_n, \dots)$) de $W(R)$ relativement au noyau de θ^0 (si ξ_0 est un générateur de $\ker \theta^0$, c'est le sous-$W(R)$-module de $W_K(R)$ engendré par les $\xi_0^n/n!$, pour $n \in \mathbb{N}$) et $W^{DP}(R)$ le séparé complété de S' pour la topologie p-adique.

La W-algèbre $W^{DP}(R)$ a une structure naturelle de Φ-module filtré avec action de $\mathcal{G}$: comme $\Phi(\ker \theta^0) \subset \ker \theta^0 + (p)$, l'action naturelle de Φ sur $W(R)$ s'étend à S' et $W^{DP}(R)$; $\mathrm{Fil}^i W^{DP}(R)$ est l'adhérence de la i-ème puissance divisée de l'enveloppe à puissances divisées du noyau de θ^0 , l'action de $\mathcal{G}$ est évidente.

3.7. - Si $n \geq 1$, l'application

$$\beta_n : W(R) \longrightarrow W_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) ,$$

qui à $(x_0, x_1, \dots)$ associe $(\widetilde{x_0^{(n)}}, \widetilde{x_1^{(n)}}, \dots, \widetilde{x_{n-1}^{(n)}})$, est un épimorphisme d'anneaux. L'image de $\mathrm{Ker}\, \theta^0 + pW(R)$ est l'idéal $I_n(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}})$ et β_n induit un homomorphisme

$$\beta_n^{DP} : W^{DP}(R)/p^n W^{DP}(R) \longrightarrow W_n^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) .$$

Il est facile de voir que c'est en fait un isomorphisme de Φ-modules filtrés, compatible avec l'action de $\mathcal{G}$, et que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
W^{DP}(R)/p^{n+1}W^{DP}(R) & \xrightarrow{\beta_{n+1}^{DP}} & W_{n+1}^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) & \xrightarrow{\alpha_{n+1}^{DP}} & H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K},n+1}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
W^{DP}(R)/p^{n}W^{DP}(R) & \xrightarrow{\beta_{n}^{DP}} & W_{n}^{DP}(\widetilde{\mathfrak{O}}_{\bar{K}}) & \xrightarrow{\alpha_{n}^{DP}} & H^0_{cris}(\mathfrak{O}_{\bar{K},n})
\end{array}$$

est commutatif.

L'assertion (ii) du théorème 1 en résulte ainsi que la proposition suivante :

PROPOSITION. - <u>Par passage à la limite, les</u> $\alpha_n^{DP} \circ \beta_n^{DP}$ <u>nous permettent d'identifier</u> $W^{DP}(R)$ <u>et</u> $H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$.

3.8. - Pour tout $x \in R$, soit $[x] = (x, 0, \ldots, 0, \ldots) \in W(R)$. Comme dans [F 2], §4, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R , notons $S_{\mathfrak{a}}$ la sous-W-algèbre de $W_K(R)$ engendrée par les $p^{-1}[x]$, pour $x \in \mathfrak{a}$, et $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$ son séparé complété pour la topologie p-adique.

Soit $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{a}''$) l'idéal des $x \in R$ tels que $x^{(0)} \in p^p \mathcal{O}_C$ (resp. $x^{(0)} \in p^{p-1}\mathcal{O}_C$) et soient $S = S_{\mathfrak{a}}$, $S'' = S_{\mathfrak{a}''}$ (c'est le même anneau S que dans [F 2], § 2). On vérifie que $S \subset S' \subset S''$. Par passage aux complétions, on en déduit des homomorphismes

$$\hat{S} \longrightarrow \hat{S}' = H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \longrightarrow \hat{S}''$$

qui, avec des conventions évidentes, sont des morphismes de Φ-modules filtrés avec action de $\mathcal{G}$.

On sait ([F 2], prop. 4.4) que $\hat{S} \to \hat{S}''$ est injective ; on en déduit que $\hat{S} \to \hat{S}'$ l'est aussi, et un calcul analogue à celui de <u>op. cit.</u> montre qu'il en est de même de $\hat{S}' \to \hat{S}''$.

Pour tout Φ-module filtré M , posons $U_{\hat{S}}(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(M, \hat{S})$, $U(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(M, H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$, $U_{\hat{S}''}(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(M, \hat{S}'')$; on a des homorphismes injectifs de $\mathbb{Z}_p[\mathcal{G}]$-modules

$$U_{\hat{S}}(M) \longrightarrow U(M) \longrightarrow U_{\hat{S}''}(M) .$$

Posons aussi $\hat{S}_K = K \otimes_W \hat{S}$, $H^0_{cris}(\bar{K}) = K \otimes H^0_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et $\hat{S}''_K = K \otimes_W \hat{S}''$. Si, pour tout objet D de $\underline{M\Phi}_K$ (cf. n°1.3) on pose $V_{\hat{S}}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(D, \hat{S}_K)$, $V(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(D, H^0_{cris}(\bar{K}))$, $V_{\hat{S}''}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{M\Phi}}(D, \hat{S}''_K)$, on a des homomorphismes injectifs de $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-modules

$$V_{\hat{S}}(D) \longrightarrow V(D) \longrightarrow V_{\hat{S}''}(D) .$$

PROPOSITION. - i) <u>Pour tout objet</u> D <u>de</u> $\underline{M\Phi}_K$, <u>faiblement admissible, on a</u> $V_{\hat{S}}(D) = V(D) = V_{\hat{S}''}(D)$.

ii) <u>Pour tout</u> Φ-<u>module filtré</u> M <u>fortement divisible</u> <u>(i.e. tout réseau fortement divisible d'un objet</u> D <u>de</u> $\underline{M\Phi}_K$) <u>vérifiant</u> $\mathrm{Fil}^p M = 0$, <u>on a</u> $U_{\hat{S}}(M) = U(M)$.

Démonstration. D'après la remarque (d) du n° 5.5 de [F2] , $V_{\hat{S}}(D)$ et $V_{\hat{S}''}(D)$ s'identifient tous deux au $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-module noté $\underline{V}^*_B(D)$ et l'inclusion de $V_{\hat{S}}(D)$ dans $V_{\hat{S}''}(D)$ est une égalité ; comme $V_{\hat{S}}(D) \subset V(D) \subset V_{\hat{S}''}(D)$, les trois sont égaux, d'où (i) .

La seule démonstration de (ii) que je connaisse est assez pénible. En voici les grandes lignes : on montre d'abord que l'on peut supposer k algébriquement clos et on travaille ensuite par dévissage, ce qui conduit à utiliser la catégorie $\mathcal{MF}$ introduite dans [FL] , n°1.11. On munit S' d'une structure d'objet de $\mathcal{MF}$ (en procédant comme pour S dans op. cit.). Il suffit alors de montrer que, pour tout objet M de $\mathcal{MF}^{f,p}_{tor}$ (op. cit., § 1), la flèche canonique de $\underline{U}_S(M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M,S)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M,S')$ est un isomorphisme. Par dévissage, on peut supposer que M est simple. Si $\widetilde{S}$ (resp. $\widetilde{S}'$) désigne le conoyau, dans $\mathcal{MF}$, de la multiplication par p dans S (resp. S') , $\underline{U}_S(M)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M,\widetilde{S})$ et $\underline{U}_{S'}(M)$ à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M,\widetilde{S}')$. Il suffit alors de calculer "explicitement" $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M,\widetilde{S}')$ (le calcul est entièrement analogue à celui de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M,\widetilde{S})$ fait dans op.cit., § 5) et de comparer avec le résultat du calcul de loc. cit..

Remarque. Il aurait bien sûr été préférable, d'avoir travaillé avec S' au lieu de S dans [FL] : tous les résultats de [FL] restent valables en remplaçant S par S' (et les calculs ne sont qu'à peine plus compliqués) ; on aurait alors pu "oublier" l'anneau S et cela nous aurait évité d'avoir à comparer $U_{\hat{S}}(M)$ et $U(M)$.

3.9. - Indiquons brièvement comment la proposition précédente permet de démontrer le théorème 2.

Si V est une "représentation p-adique" (i.e. un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}$) , on a $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]}(V, H^0_{cris}(\bar{K})) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et on dit que V est cristalline positive si on a l'égalité (avec les notations de [F2] , on a (op. cit., rem. d du n°5.5) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]}(V, H^0_{cris}(\bar{K})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]}(V, B^+)$ et une représentation V est cristalline au sens de [F2] si et seulement s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $V(i) = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i)$ est cristalline positive (où $\mathbb{Q}_p(i)$ est la puissance tensorielle i-ième de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p, \mu_{p^\infty}(\bar{K}))$).

La catégorie des représentations p-adiques cristallines positives est une sous-catégorie pleine de celle des représentations p-adiques, stable par sous-objet et quotient. Un objet D de $\underline{M\Phi}_K$ est dit <u>admissible</u> s'il existe V cristalline positive telle que $D \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(V, H^0_{cris}(\bar{K}))$. Les objets admissibles forment une sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne des objets de $\underline{M\Phi}_K$ qui sont faiblement admissibles, stable par sous-objets et quotients (cf. [F1], [F2]).

On peut démontrer que, si D est faiblement admissible, alors $\dim_{\mathbb{Q}_p} V(D) \leq \dim_K D$, avec l'égalité si et seulement si D est admissible.

L'assertion (i) du théorème 2 résulte alors de ce que $U_m(X)$ est un réseau de $V(H^m_{cris}(X_K))$ et que $H^m_{cris}(X_K)$ est faiblement admissible.

L'assertion (ii) s'obtient ainsi :

a) si $m < p$, $H^m_{cris}(X_K)$ est faiblement admissible et vérifie $\mathrm{Fil}^p H^m_{cris}(X_K) = 0$; c'est le résultat principal de [FL] que tout D faiblement admissible vérifiant $\mathrm{Fil}^p D = 0$ est admissible.

b) si X est un schéma abélien, $H^1_{cris}(X_K)$ est admissible, d'après (a) ; il en est de même de $H^m_{cris}(X_K) = \Lambda^m H^1_{cris}(X_K)$, puisque l'admissibilité est stable par produit tensoriel et facteur direct ([F1]).

c) lorsque les $H^j(X, \Omega^i_X)$ sont sans torsion et la fibre spéciale ordinaire, alors $D = H^m_{cris}(X_K)$ est un module filtré faiblement admissible ordinaire (i.e. les pentes de D sont entières et, si $D_{[j]}$ désigne la partie de D de pente j, on a

$$D = (\bigoplus_{j<i} D_{[j]}) \oplus \mathrm{Fil}^i D \text{ , pour tout } i).$$

On peut démontrer (par récurrence sur la dimension de D) que tout module filtré faiblement admissible ordinaire est admissible.

Enfin, l'assertion (iii) s'obtient ainsi :

- pour $m = 1$, $(H^1_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p))$ est le module de Tate du groupe p-divisible $(X_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $H^1_{cris}(X)$ en est son module de Dieudonné filtré ; c'est alors un cas particulier d'un résultat plus général sur les groupes p-divisibles (et même sur les schémas en groupes commutatifs finis et plats sur W, voir [FL], §9) ;

- pour $m > 1$, on a $H^m_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p) = \Lambda^m H^1_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)$ et $H^m_{cris}(X) = \Lambda^m H^1_{cris}(X)$.

Le résultat se déduit alors de ce que, si M_1 et M_2 sont deux modules filtrés fortement divisibles tels que $\mathrm{Fil}^p(M_1 \otimes M_2) = 0$, alors (cf. [FL] , rem. b du n°6.13) l'application évidente de $U(M_1) \otimes U(M_2)$ dans $U(M_1 \otimes M_2)$ est un isomorphisme (à un grain de sel près si $\mathrm{Fil}^{p-1}(M_1 \otimes M_2) \neq 0$).

BIBLIOGRAPHIE

[BGK] S. BLOCH, K. KATO et O. GABBER : p-adic Etale Cohomology, à paraître.

[BO1] P. BERTHELOT et A. OGUS : Notes on Crystalline Cohomology, Princeton University Press, Princeton 1978.

[BO2] P. BERTHELOT et A. OGUS : F-isocrystals and de Rham Cohomology I, Inv. Math., à paraître.

[F1] J.-M. FONTAINE : Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, Journées de géométrie algébrique de Rennes, Astérisque 65, Soc. math. de France, Paris (1979), pp. 3-80.

[F2] J.-M. FONTAINE : Sur certains types de représentations du groupes de Galois d'un corps local : construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Annals of Math., 115 (1982), pp. 529-577.

[FL] J.-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE : Construction de représentations p-adiques, Ann. Sci. E.N.S., à paraître.

[FM] J.-M. FONTAINE et B. MESSING : travail en préparation.

[GM] H. GILLET et B. MESSING : article en préparation.

[I] L. ILLUSIE : Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. E.N.S., 4e série, 2 (1979), pp. 501-661.

[IR] L. ILLUSIE et M. RAYNAUD : Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt, à paraître.

[L] G. LAFFAILLE : Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, Bull. Soc. math. France, 108 (1980), pp. 187-206.

[M1] B. MAZUR : Frobenius and the Hodge filtration, Bull. A.M.S. 78 (1972), pp. 653-667.

[M2] B. MAZUR : Frobenius and the Hodge filtration (Estimates), Annals of Math., 98 (1973), pp. 58-95.

[Sa] N. SAAVEDRA RIVANO : Catégories tannakiennes, Lecture Notes in Math., n°265, Springer, Berlin 1972.

[S] J.-P. SERRE : Corps locaux, 2e éd. Hermann, Paris 1968.

[W] J.-P. WINTENBERGER : Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux, à paraître.

INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques Pures
associé au C.N.R.S.
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HERES Cedex (France)