Université Paris-Saclay - Année 2022-2023
Cours accéléré d'analyse numérique - M2 AMS

Schémas de différences finies pour les équations différentielles. II - EDP.

1 La méthode des différences finies pour des problèmes aux limites pour des EDP elliptiques.

On s'intéresse dans ce cours à l'approximation par la méthode des différences finies de certaines équations aux dérivées partielles. Nous allons considérer en premier des équations stationnaires, c'est à dire modélisant des phénomènes constants en temps. Notre problème modèle sera l'équation de Poisson.

1.1 L'équation de Poisson

Le modèle que l'on considère est l'équation de Poisson posée dans un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue et le terme source f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, donnée. L'opérateur différentiel Δ, le Laplacien, est défini par

$$\Delta u(x) := \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)\Big), \quad \text{pour } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

L'équation (1) modélise des phénomènes stationnaires (qui n'évoluent pas avec le temps). Elle exprime par exemple en physique le potentiel électrique engendré par une répartition de charges défini à partir de f. Elle modélise aussi des phénomènes de diffusion (de la chaleur, en régime stationnaire, d'un polluant dans un milieu fluide,...).

Il s'agit une équation du *second ordre* car c'est l'ordre des dérivées d'ordre plus élevé y intervenant, *linéaire*, c'est-à-dire dépendant linéairement de l'inconnue u.

Très souvent le domaine Ω est borné et ce problème doit être complété par des *conditions aux limites* sur le bord $\partial\Omega$ de Ω. Le cas le plus simple correspond à des conditions aux limites de Dirichlet, *i. e.* imposant la valeur de u sur le bord :

$$u(x) = g(x),\ \text{sur } \partial\Omega, \tag{2}$$

où g est une fonction définie sur $\partial\Omega$ donnée.

Le problème (1)-(2) s'appelle un *problème aux limites.*

D'autres conditions aux limites sont possibles. On peut par exemple imposer la valeur du flux normal sortant sur le bord : $\nabla u \cdot n = g$, avec g donné, sur $\partial\Omega$, où n est la normale unitaire extérieur à Ω sur chaque point de $\partial\Omega$. Cela s'appelle des conditions de Neumann. On peut aussi imposer la valeur de $\nabla u \cdot n + u$ (conditions dites de Robin), ou considérer des conditions aux limites dites *mixtes*, *i. e.* d'un type sur une partie du domaine, d'un autre type sur une autre partie du domaine.

1.1.1 Un problème modèle en dimension 1 : l'équation de Poisson en dimension 1 d'espace avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

On considère $n = 1$ et $\Omega =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a,\ b \in \mathbb{R}$. Considérons le problème aux limites pour l'équation de Poisson sur Ω, avec conditions aux limites de Dirichlet *homogènes* (cela signifie que l'on prend dans la condition aux limites (2) la donnée au bord $g = 0$) :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]a, b[, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où la fonction f est une fonction continue définie dans l'intervalle $[a, b]$, donnée.

Quelques résultats sur le caractère bien posé du problème (3) :

On peut montrer, en intégrant directement l'équation :

— Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe une unique solution u de (3), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. On obtient une formulation intégrale de la solution, toutefois on ne sait pas forcément évaluer sa valeur en un point.

— La solution u dépend de manière continue des données : il existe une constante C qui ne dépend que de f tel que $\max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty, \|u''\|_\infty\} \leq C\|f\|_\infty$.

— La solution u vérifie un principe du maximum : si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.

1.2 La méthode des différences finies pour la discrétisation des EDP.

Comme on a vu, le principe de la méthode des différences finies est d'approcher la solution u d'une équation différentielle en un ensemble discret de points du domaine de u, en remplaçant les dérivés de u en ces points par des *quotients de différences finies* qui les approchent.

Pour approcher la dérivée d'ordre 2 d'une fonction u d'une seule variable, en un point x de son domaine, on utilise que

$$u''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

et on peut donc aussi approcher $u''(x)$ par le quotient de différences finies

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2},$$

avec h « petit ». On remarque ici que $u''(x) = (u')'(x)$ et que l'approximation que l'on vient de considérer peut être obtenue en approchant successivement u' par des formules de différences finies d'ordre 1 : on a que

$$u''(x) = (u')'(x) \approx \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} \approx \frac{\frac{u(x+h)-u(x+h-h)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

1.2.1 La méthode des différences finies pour le problème unidimensionnel (3).

L'idée de la méthode des différences finies pour approcher le problème de Poisson (3) est ainsi de discrétiser le domaine $\Omega = [a, b]$ et de remplacer, pour chaque pas h de la discrétisation considéré, l'opérateur différentiel $\mathcal{P} : u \mapsto u''$ par l'opérateur aux différences discret

$$\mathcal{P}_h : u \mapsto \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2},$$

aux points de la discrétisation.

Exercice 1. Supposons que f est de classe C^2. La solution u de (3) est alors de classe C^4. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de f (en particulier indépendante de h), tel que

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq Ch^2,$$

quelque soit $x \in]a, b[$.

Le résultat de cet exercice montre que l'opérateur discret $\mathcal{P}_h$ est une approximation *d'ordre 2* de l'opérateur continu $\mathcal{P}$.

En pratique on procède comme suit pour la discrétisation de l'équation (3) par la méthode des différences finies :

1. Discrétisation du domaine $[a, b]$.

Pour chaque entier $M \geq 1$ donné, on pose $h = \frac{b-a}{M+1}$; h est le *pas de la discrétisation*. Associée à chaque h ainsi défini, on construit une discrétisation uniforme de l'intervalle $[a, b]$, de pas h, donnée par les $M+2$ points

$$x_j = a + jh,\ j = 0, \ldots, M+1.$$

2. Calcul d'une solution approchée aux points de la discrétisation.

Soit $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ la solution du problème (3). On cherche à calculer des valeurs approchées notées u_j de la solution u aux points x_j, autrement dit on cherche $u_j \in \mathbb{R}$, pour $j = 0, \ldots, M+1$, tel que $u_j \simeq u(x_j)$.

Comme la fonction u est solution de (3), on a

$$-u''(x_j) = f(x_j),\ \text{pour } j = 1, \ldots, M,$$

et, puisque $x_0 = a$ et $x_{M+1} = b$,

$$u(x_0) = u(x_{M+1}) = 0.$$

La solution u de (3) vérifie alors

$$\begin{cases} -\frac{u(x_j+h)-2u(x_j)+u(x_j-h)}{h^2} \simeq f(x_j),\ \text{pour } j = 1, \ldots, M, \\ u(x_0) = u(x_{M+1}) = 0. \end{cases}$$

Remarquons que $x_j + h = x_{j+1}$ et $x_j - h = x_{j-1}$, si $j \in \{1, \ldots, M\}$.

La méthode des différences finies pour approcher la solution du problème (3) consiste alors à, pour $M > 1$ entier positif donné, chercher des réels $u_0, \ldots, u_{M+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right) = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, M, \\ u_0 = u_{M+1} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $h = \frac{b-a}{M+1}$ et $x_j = a + jh,\ j = 0, \ldots, M+1$.

Si on introduit une inconnue discrète donnée par le vecteur $(u_0, \ldots, u_{M+1})$, dont les composantes sont les valeurs approchées $u_j,\ j = 0, \ldots, M+1$, le problème discret que l'on cherche à résoudre peut s'écrire de manière équivalente :

Pour $M > 1,\ M \in \mathbb{N}$, donné, trouver $u_0, u_1, \ldots, u_M, u_{M+1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} u_0 = u_{M+1} = 0, \\ (S_h) \quad A_h U_h = F, \end{cases} \tag{5}$$

où

— $A_h \in \mathcal{M}^M(\mathbb{R})$ est la matrice

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

— U_h est le vecteur de $\mathbb{R}^M$ $(u_1, \ldots, u_M)^T$;

— $F \in \mathbb{R}^M$ est le vecteur $\big(f(x_1), \ldots, f(x_M)\big)^T$,

avec $x_j = a + jh,\ j = 1, \ldots, M,\ h = \frac{b-a}{M+1}$.

On a alors remplacé le problème continu (3) par le problème discret (4) ou le problème équivalent (5).

1.2.2 Convergence de la méthode.

On va par la suite chercher à montrer :

1. Le problème discret (5) est bien posé ;
2. La solution $((u_0, \ldots, u_{M+1}))_M$ du problème discret (5) approche la solution u du problème continu (3) au sens suivant :

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{j=0,\ldots,M+1}|u(x_j)-u_j|\right)=0.$$

Ci-dessus, on aurait dû préciser le lien entre h et M, $h=\frac{b-a}{M+1}$; on l'omet en général pour ne pas surcharger les notations, mais on le garde à l'esprit.

On note $\Pi_h u$ le vecteur $\Pi_h u=(u(x_1),\ldots,u(x_M))\in\mathbb{R}^M$. Comme $u_0=u(x_0),\ u_{M+1}=u(x_{M+1})$, la propriété ci-dessus se réécrit

$$\lim_{h\to 0}\|\Pi_h u-U_h\|_\infty=0.$$

On dit que la méthode **converge en norme infinie**.

Preuve de 1. Commençons par montrer que le système linéaire (S_h) admet une unique solution, en montrant que la matrice A_h du système linéaire (S_h) est inversible. On peut le montrer comme conséquence du lemme suivant, qui est une version discrète du principe du maximum.

Lemme 1. *Soit $U\in\mathbb{R}^M$ tel que $(A_hU)_i\geq 0,\ \forall\ i=1,\ldots,M$. Alors $U_i\geq 0,\ \forall\ i=1,\ldots,M$. De même, soit $U\in\mathbb{R}^M$ tel que $(A_hU)_i\leq 0,\ \forall\ i=1,\ldots,M$. Alors $U_i\leq 0,\ \forall\ i=1,\ldots,M$.*

Idée de la preuve du lemme 1. On considère i_0 tel que $U_{i_0}=\min\{U_i,\ i=1,\ldots,M\}$ et on montre que $U_{i_0}\geq 0$. Pour ce faire on considère séparément les cas $i_0=1$ ou $i_0=M$ et $i_0\in\{2,\ldots,M-1\}$ et on explore la relation $(A_hU)_{i_0}\geq 0$. □

Une preuve alternative de que le système linéaire (S_h) admet une unique solution est de montrer que sa matrice est symétrique définie négative donc inversible.

Preuve alternative de 1. La matrice h^2A_h est symétrique définie positive donc inversible : en effet, si $X=(x_1,\ldots,x_M)\in\mathbb{R}^M$ on a

$$(h^2A_hX|X)=x_1^2+(x_2-x_1)^2+\cdots+(x_M-x_{M-1})^2+x_M^2>0\ \text{ si } X\neq 0.$$

Preuve de 2. Montrons maintenant 2, en supposant que la solution u du problème (3) est de classe C^4. C'est le cas si f est de classe C^2. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{h\to 0}\|e_h\|_\infty=0,$$

où e_h est le vecteur de $\mathbb{R}^M$ défini par $e_h=\Pi_h u-U_h=(u(x_1)-u_1,\ldots,u(x_M)-u_M)$. Le vecteur e_h correspond à l'**erreur globale** du schéma associée à une discrétisation de pas h.

On a

$$A_hU_h=F:=\begin{pmatrix}f(x_1)\\ \vdots\\ f(x_M)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u''(x_1)\\ \vdots\\ -u''(x_M)\end{pmatrix},$$

et

$$A_h \Pi_h u = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_M) \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$(A_h \Pi_h u)_i = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}, \text{ pour } i = 1, \ldots, M.$$

On obtient alors

$$(A_h e_h)_i = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + u''(x_i) := (\varepsilon_h(u))_i,$$

où l'on a noté par $\varepsilon_h(u)$ le vecteur de $\mathbb{R}^M$ avec $(\varepsilon_h(u))_i$ défini comme ci-dessus.

La valeur $(\varepsilon_h(u))_i$ est l'**erreur de consistance du schéma** au point x_i. Elle correspond à l'erreur produite par le schéma sur la solution exacte.

On peut alors montrer les deux propriétés suivantes.

1. **La méthode est stable en norme infinie** : il existe une constante C indépendante de h tel que, pour tous vecteurs $u, \ \tilde{u} \in \mathbb{R}^M$ vérifiant

$$A_h u = f,$$
$$A_h \tilde{u} = \tilde{f},$$

avec $f, \ \tilde{f} \in \mathbb{R}^M$, on ait

$$\|u - \tilde{u}\| \leq C\|f - \tilde{f}\|$$

La stabilité de la méthode est une conséquence du résultat suivant :

$$|||(A_h)^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}, \ \forall h > 0.$$

2. **La méthode est consistante en norme infinie** :

$$\lim_{h \to 0} \|\varepsilon_h(u)\|_\infty = 0.$$

On peut même montrer que la méthode est **consistante à l'ordre 2** en norme infinie : il existe $C > 0$, indépendant de h, tel que

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq Ch^2.$$

Cette propriété est une conséquence du résultat de l'exercice 1.

Comme on a

$$A_h e_h = \varepsilon_h(u),$$

on obtient alors, d'après les propriétés de stabilité et de consistance de la méthode,

$$\|e_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq Ch^2,$$

où la constante C ne dépend pas de h, et donc la méthode converge en norme infinie.

Nous venons de voir un résultat qui est général pour d'autres équations :

$$\text{consistance} \;+\; \text{stabilité} \;=\; \text{convergence}.$$

Même plus précisément,

$$\text{consistance à l'ordre } p \;+\; \text{stabilité} \;=\; \text{convergence avec erreur globale en } h^p.$$

Mais il faut utiliser ce « résultat » avec précaution. Les notions de consistance et de stabilité dépendent de la norme utilisée. Ici on a considéré la norme infinie. Si l'on montrait la stabilité en norme 2, par exemple, on devrait aussi montrer la consistance en norme 2.

1.2.3 Le cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

.

On peut adapter la méthode de différences finies que l'on vient de voir au problème aux limites avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \\ u(a) = u_g, \quad u(b) = u_d, \end{cases} \tag{6}$$

où $u_g,\ u_d \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Pour discrétiser le problème (8) par la méthode des différences finies, on suit la même démarche : on se donne $M \in \mathbb{N},\ M > 0$, on pose $h = \frac{b-a}{M+1}$ et on cherche des valeurs u_j approchant la solution exacte u aux points $x_j = a + jh,\ j = 0, \ldots, M+1$, vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}\big(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\big) = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, M, \\ u_0 = u_g, \quad u_{M+1} = u_d. \end{cases}$$

Exercice 2. Le système linéaire vérifié par $U_h = (u_1, \ldots, u_M)$ n'est pas cette fois-ci le problème discret (5) associé à des conditions homogènes. Écrire le système linéaire correspondant au problème discret dans le cas non homogène.

1.2.4 Le cas de conditions aux limites de Neumann et mixtes

.

On veut désormais traiter un problème aux limites avec conditions aux limites pouvant être de Dirichlet, Neumann, Robin ou mixtes. Pour ce faire, on va considérer l'équation $-u'' + u = f$, avec f une fonction donnée.

On remarque que le problème aux limites avec conditions de Neumann homogènes

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \\ u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

n'est pas bien posé, car si u est une solution, toute fonction de la forme $u + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante, est aussi une solution.

On considère alors le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \\ p_g u(a) + \alpha_g u'(a) = u_g, \quad p_d u(b) + \alpha_d u'(b) = u_d, \end{cases} \tag{8}$$

où $u_g,\ u_d \in \mathbb{R}$ sont donnés et où selon le type de conditions aux limites que l'on souhaite, on choisira les valeurs de $p_g,\ p_d,\ \alpha_g$ et α_d. Par exemple $p_g = p_d = 0,\ \alpha_g = \alpha_d = 1$ pour des conditions de Neumann, $p_g = p_d = 1,\ \alpha_g = \alpha_d = 0$ pour des conditions de Dirichlet, et ainsi de suite selon que l'on veut des conditions mixtes, de Robin, etc.

Exercice 3. Proposer une discrétisation pour ce problème en utilisant une discrétisation d'ordre 1 des dérivés $u'(a)$ et $u'(b)$ (on verra dans la feuille de Tp comment discrétiser ces dérivées à l'ordre 2) et écrire le système linéaire correspondant au problème discret.