MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION GÉNÉRALE DES RESSOURCES HUMAINES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES
CONCOURS EXTERNE

Session 2009

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

Directoire

Foulon Patrick, Président	Professeur des Universités
Bougé Luc, Vice-président	Professeur des Universités
Moisan Jacques, Vice-président	Inspecteur général
Torossian Charles, Vice-président	Inspecteur général
Van der Oord Eric, Vice-président	Inspecteur général
Chevallier Jean-Marie, Secrétaire général	Maître de conférences
Boisson François, Directoire	Professeur de chaire supérieure
Durand-Lose Jérôme, Directoire	Professeur des Universités
Goudon Thierry, Directoire	Professeur des Universités
Lévy Thierry, Directoire	Chargé de recherches
Mestre Jean François, Directoire	Professeur des Universités
Petazzoni Bruno, Directoire	Professeur de chaire supérieure
Abergel Luc	Professeur de chaire supérieure
Bachmann Florence	Professeure agrégée
Barou Geneviève	Maître de conférences
Baumann Pierre	Chargé de recherche
Bayle Lionel	Maître de conférences
Bechata Abdellah	Professeur agrégé
Bennequin Daniel	Professeur des Universités
Bernis Laurent	Professeur de chaire supérieure
Bertrand Pierre	Directeur de recherche
Biolley Anne-Laure	Professeure agrégée
Blanloeil Vincent	Maître de conférences
Bonnaillie-Noel Virginie	Chargée de recherche
Bonnefont Claire	Professeure de chaire supérieure
Borel Agnès	Professeure de chaire supérieure
Bouton-Drouhin Catherine	Professeure de chaire supérieure
Boyer Franck	Professeur des Universités
Bremont Julien	Maître de conférences
Cadoret Anna	Maître de conférences
Caldero Philippe	Maître de conférences

Cerf-Danon Hélène	Professeure de chaire supérieure
Chabanol Marie-Line	Maître de conférences
Chafaï Djalil	Chargé de recherches
Chardin Marc	Chargé de recherches
Chevallier Marie-Elisabeth	Professeure de chaire supérieure
Chillès Alain	Professeur de chaire supérieure
Contejean Evelyne	Chargée de recherche
Cori René	Maître de conférences
Correia Hubert	Professeur de chaire supérieure
Czarnecki Marco	Professeur des universités
De la Bretèche Régis	Professeur des Universités
De Seguins Pazzis Clément	Professeur agrégé
Domelevo Komla	Maître de conférences
Dozias Sandrine	Professeure de chaire supérieure
Dumas Laurent	Maître de conférences
Favennec Denis	Professeur de chaire supérieure
Feauveau Jean-Christophe	Professeur de chaire supérieure
Fleurant Sandrine	Professeure agrégée
Fontaine Philippe	Professeur de chaire supérieure
Fontanez Françoise	Professeure agrégée
Fort Jean-Claude	Professeur des Universités
Gallois Mirentchu	Professeure agrégée
Gamboa Fabrice	Professeur des Universités
Gaudry Pierrick	Chargé de recherche
Gaussier Hervé	Professeur des Universités
Godefroy Gilles	Directeur de recherche
Guelfi Pascal	Professeur de chaire supérieure
Guibert Gil	Professeur agrégé
Haas Bénédicte	Maître de conférences
Hanrot Guillaume	Chargé de recherche
Harinck Pascale	Chargée de recherche
Hernandez David	Chargé de recherche
Hirsinger Odile	Professeure agrégée
Hubert Evelyne	Chargée de recherches
Isaïa Jérôme	Professeur agrégé
Istas Jacques	Professeur des Universités
Julg Pierre	Professeur des Universités
Kostyra Marie-Laure	Professeure agrégée
Lafitte Pauline	Maître de conférences
Le Merdy Sylvie	Professeure agrégée
Lefevre Pascal	Professeur des Universités
Lévy Véhel Jacques	Directeur de recherche
Loiseau Bernard	Professeur de chaire supérieure
Maggi Pascale	Professeure de chaire supérieure
Marchal Philippe	Chargé de recherche
Méthou Edith	Professeure agrégée
Meunier Nicolas	Maître de conférences
Mézard Ariane	Professeure des Universités
Monier Marie	Professeure agrégée
Noble Pascal	Maître de conférences
Paroux Katy	Maître de conférences

Pennequin Denis	Maître de conférences
Peyre Emmanuel	Professeur des Universités
Philibert Bertrand	Professeur agrégé
Prieur Christophe	Chargé de recherche
Prieur Clémentine	Professeure des Universités
Régnier Mireille	Directrice de recherche
Risler Jean-Jacques	Professeur des Universités
Samson Adeline	Maître de conférences
Sauloy Jacques	Maître de conférences
Sauvageot François	Maître de conférences
Sauvé Marie	Professeure agrégée
Seuret Stéphane	Maître de conférences
Sidaner Sophie	Professeure de chaire supérieure
Suffrin Frédéric	Professeur agrégé
Taieb Franck	Professeur de chaire supérieure
Teillaud Monique	Chargée de recherche
Tosel Emmanuelle	Professeure agrégée
Tosel Nicolas	Professeur de chaire supérieure
Vernier le Goff Claire	Professeure agrégée
Vincent Christiane	Professeure de chaire supérieure
Weil Jacques-Arthur	Maître de conférences
Zayana Karim	Professeur agrégé
Zeitoun Marc	Professeur des Universités
Zwald Laurent	Maître de conférences

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mardi 7 avril 2009 ;
- Épreuve d'analyse et probabilités : vendredi 8 avril 2009 .

La liste d'admissibilité a été publiée le mardi mardi 2 juin 2009.

L'oral s'est déroulé du 26 juin au 15 juillet au lycée Marcelin-Berthelot de Saint-Maur-des-Fossés. La liste d'admission a été publiée le lundi 17 juillet 2009.

Depuis 2006 le concours propose quatre options qui se distinguent seulement pour les trois premières A, B, C, par les épreuves de modélisation et l'option D (informatique) avec trois épreuves orales spécifiques. En 2009 comme en 2008, on peut constater que dans les trois premières options, les nombres d'inscrits sont similaires ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D. Dans les quatre options, les pourcentages d'admis sont similaires. Nous continuons, tant que ces options ne sont pas stabilisées, à ne pas donner de statistiques détaillées par option.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collège) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes Écoles, classes préparatoires aux grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs). À l'issue du concours, les candidats admis sont normalement placés comme stagiaires. Les différentes possibilités de stage (stage en formation à l'IUFM, stage en situation dans un établissement secondaire, stage en CPGE, stage comme ATER, etc.) sont détaillées dans la note de service n°2005-038 du 2 mars 2005.
Des reports de stage peuvent être accordés par la DGRH [1] pour permettre aux lauréats d'effectuer des études doctorales ou des travaux de recherche dans un établissement ou organisme public français [2] ; les élèves des Écoles Normales Supérieures en bénéficient automatiquement pour terminer leur période de scolarité.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse

`http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm`

1. Direction générale des ressources humaines (personnels enseignants de second degré) du ministère de l'éducation nationale.
2. La DGRH demande une attestation de poursuite de recherches, ou à défaut une autorisation à s'inscrire dans une formation de troisième cycle universitaire. Les candidats doivent se munir d'une telle attestation et la fournir pendant l'oral.

ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse

`http://www.agreg.org`,

où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2009

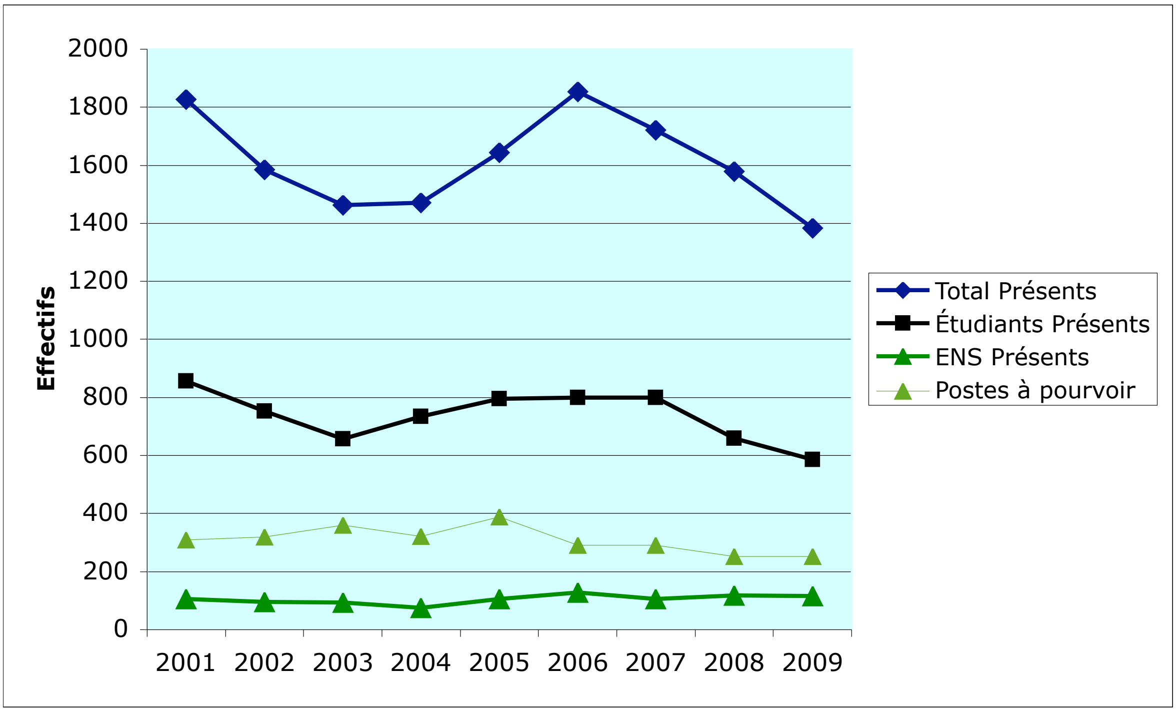
Après la diminution sensible du nombre de postes au concours 2006 (de 388 postes en 2005 à 290 postes en 2006 et 2007 soit une diminution de plus de 23 %), le nombre de postes proposés au concours a subi une nouvelle baisse de 13 % en 2008 pour se stabiliser à 252 en 2008 et 2009.

L'augmentation régulière du nombre d'inscrits constatée depuis le concours 2004 a plafonné en 2006-07 . Les nombres d'inscrits et surtout les nombres de présents aux deux épreuves d'écrit en 2008 et 2009 sont en baisse sensible : c'est certainement la conséquence de la diminution du nombre de postes mis au concours.

Une analyse plus fine montre que cette diminution est due à une diminution du nombre de candidats dans les catégories des étudiants hors ENS. [3]

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



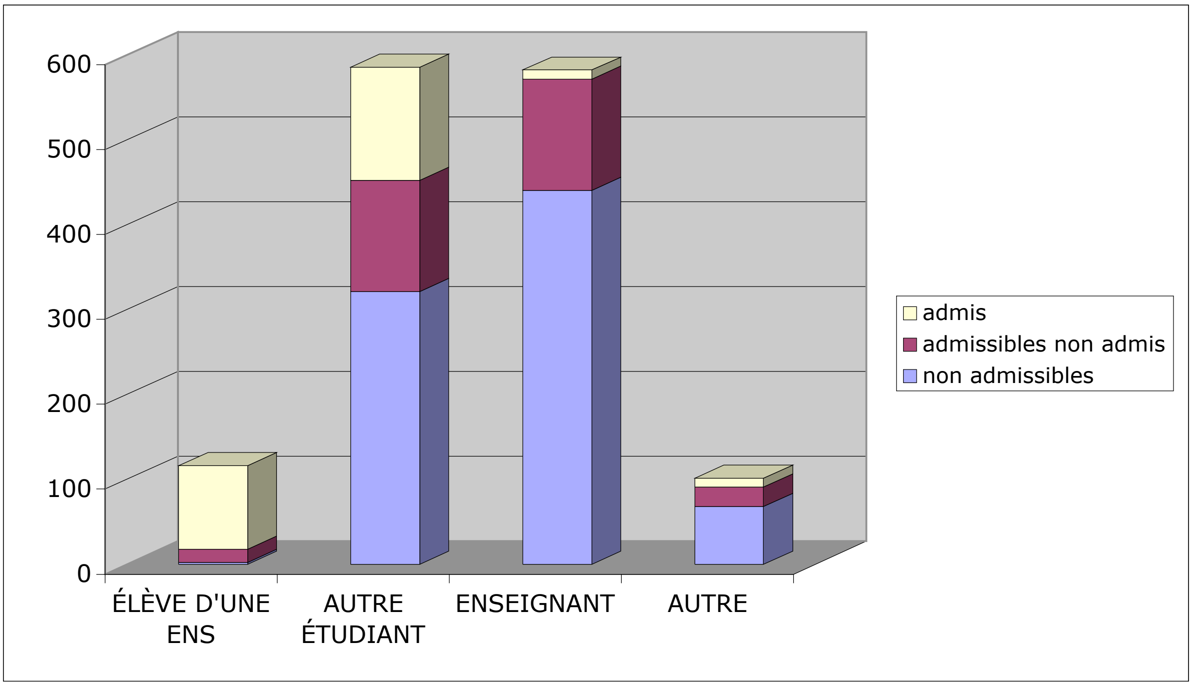
3. dans cette population, sont regroupées les catégories « étudiant » et « élève de 1^{re} année d'IUFM ».

À l'issue de la délibération d'écrit, 553 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 20/20 et le dernier une moyenne de 8,5/20. Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 252 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 19,8/20, le dernier admis une moyenne de 10,15/20.

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle, âge). Dans ces tableaux, **tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents**.

CATÉGORIES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE IUFM 1re ANNÉE	135	95	10	2	10,5	2,1
ÉLÈVE D'UNE ENS	123	116	114	98	98,3	84,5
ÉTUDIANT	582	490	254	131	51,8	26,7
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	86	31	14	4	45,2	12,9
SANS EMPLOI	102	39	12	4	30,8	10,3
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	21	12	4	1	33,3	8,3
AGRÉGÉ	9	1	0	0	0,0	0,0
CERTIFIÉ	848	411	99	5	24,1	1,2
PLP	39	7	0	0	0,0	0,0
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	318	151	39	5	25,8	3,3
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	4	0	0	0		
AUTRE FONCTIONNAIRE	13	4	1	0	25,0	0,0
SURVEILLANT	27	13	1	0	7,7	0,0
AUTRE	44	14	5	2	35,7	14,3
TOTAL	**2351**	**1384**	**553**	**252**	**40,0**	**18,2**

Résultat du concours par catégories professionnelles [4]



Résultat du concours par grandes catégories

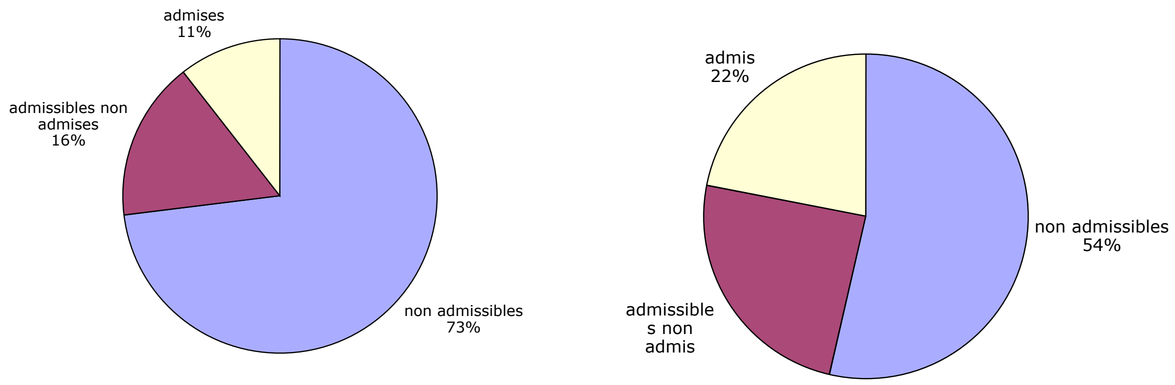
Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, un concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet 92 % de l'effectif des admis (92 % en 2007).

4. Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Répartition selon le genre

GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	736	457	123	48	26,91	10,50
HOMMES	1615	927	430	204	46,39	22,01
TOTAL	2351	1384	553	252	39,96	18,21

Résultat du concours par genres



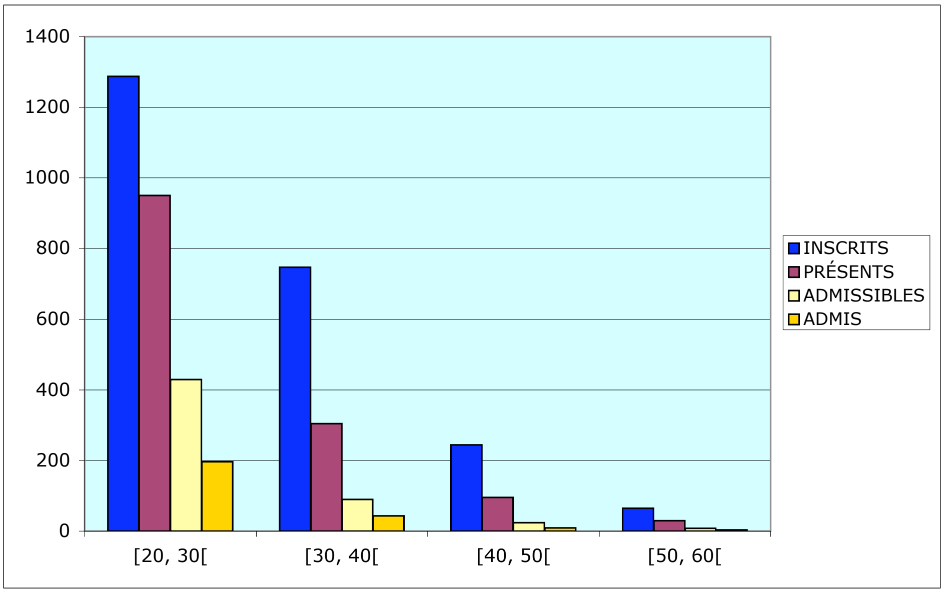
FEMMES HOMMES

On constate nouvelle baisse après le léger rééquilibrage de la parité pour le succès au concours en 2008 (17,62 % d'admis pour 12,71 % d'admises). Le résultat est pour les femmes semblable aux pourcentages constatés en 2007 (19,9 % d'admis pour 10,9 % d'admises). Ceci fait suite à une baisse constatée en 2006 et 2007 alors que les taux de succès chez les femmes (23 %) et chez les hommes (24 %) étaient pratiquement identiques en 2005. Ces pourcentages sont à analyser en tenant compte du fait que la diminution du nombre de places au concours entraîne une diminution mécanique du pourcentage de reçues parmi les femmes, puisqu'elles ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS (10 % cette année, à comparer aux 16% de 2008). Dans cette catégorie, on trouve en effet, en 2009, 39 %, des reçus au concours. Pour la catégorie élève d'une E.N.S les taux de réussite hommes, 84,6 %, et femmes, 83,8 %, ne sont pas significativement différents . Si on considère par contre la catégorie des étudiants hors ENS, il y a 31,2 % d'admis et 19,2 % d'admises. Ce résultat est assez surprenant puisqu'en 2008, pour la catégorie étudiant hors E.N.S, la parité était respectée dans les succès, avec 22 % d'admis et 23 % d'admises !

Répartition selon l'âge

TRANCHE D'ÂGE	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS
[20, 30[	1288	950	429	196
[30, 40[	747	304	90	43
[40, 50[	244	95	24	9
[50, 60[	65	29	8	3

Répartition par tranches d'âge



Cette répartition par tranches d'âge confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes constituent en effet l'essentiel des présents mais surtout des admis au concours, 77 % des reçus ont moins de 30 ans. Fait nouveau, cette année des candidats plus avancés en âge se sont présentés avec succès. Il suffit pour s'en convaincre de rappeler qu'en 2008 96 %, des reçus avaient moins de 30 ans.

Répartition selon l'académie

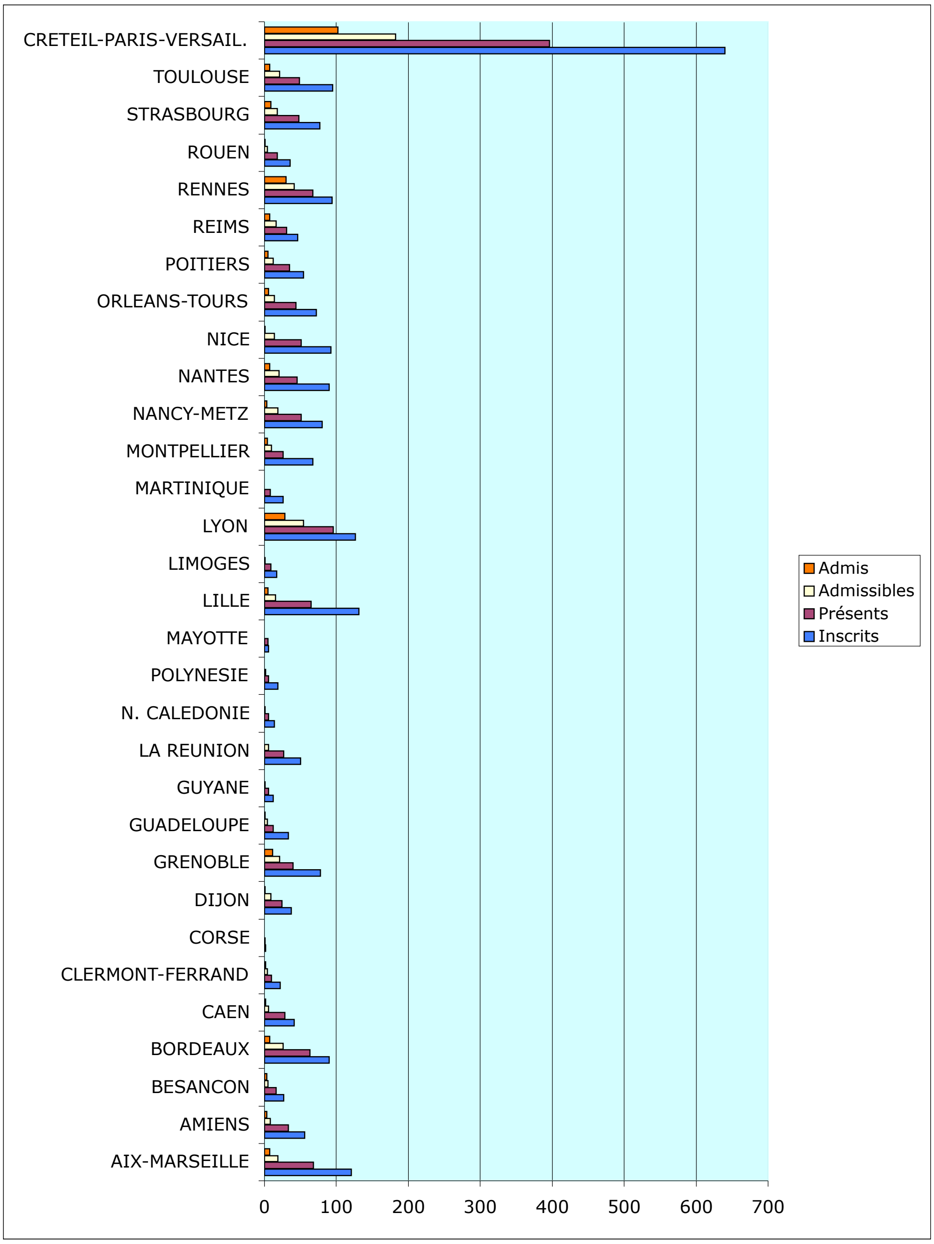
Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	121	68	19	7
AMIENS	56	33	8	3
BESANCON	27	16	5	3
BORDEAUX	90	63	26	7
CAEN	41	28	6	2
CLERMONT-FERRAND	22	10	4	2
CORSE	2	1	0	0
DIJON	37	24	9	1
GRENOBLE	78	40	21	11
GUADELOUPE	33	12	4	1
GUYANE	12	6	1	0
LA REUNION	50	27	6	0
N. CALEDONIE	14	6	1	0
POLYNESIE	19	6	2	0
MAYOTTE	6	5	0	0
LILLE	131	65	15	5
LIMOGES	17	9	1	0
LYON	126	96	54	28
MARTINIQUE	26	8	0	0
MONTPELLIER	67	26	10	4
NANCY-METZ	80	51	19	3
NANTES	90	45	20	7
NICE	92	51	14	1
ORLEANS-TOURS	72	44	14	6
POITIERS	54	35	12	5
REIMS	46	31	16	7
RENNES	94	67	41	30
ROUEN	36	18	4	1
STRASBOURG	77	48	18	9
TOULOUSE	95	49	21	7
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	640	396	182	102
TOTAL	2351	1384	553	252

Résultat du concours par académies

Hors ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	0	0	0	0
RENNES	70	64	64	45
LYON	26	26	25	9

ENS seulement	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	0	0	0	0
RENNES	70	64	64	57
LYON	26	26	25	21

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)



Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Notations et préliminaires

Tous les corps figurant dans le problème sont supposés commutatifs.

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels
- $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls
- Pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$, l'ensemble $[\![a,b]\!]$ désigne $[a,b] \cap \mathbf{N}$
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels
- $\mathbf{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls
- $\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs
- $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
- $\mathbf{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls
- $\mathbf{K}$ étant un corps, on note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, pour tout nombre entier naturel n
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbf{K}$
- $GL_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{K})$. Si $A \in GL_n(\mathbf{K})$, on note A^{-1} son inverse
- On dira que deux sous-espaces vectoriels V et W de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{K})$ sont **conjugués** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que
$$W = P^{-1}VP = \{P^{-1}MP\,;M \in V\}.$$
- I_n désigne l'élément unité de $M_n(\mathbf{K})$.
- Pour A dans $M_n(\mathbf{K})$ on désigne par ${}^tA$ la transposée de A, $\mathrm{tr}A$ la trace de A, $\det A$ le déterminant de A et P_A son polynôme caractéristique sur $\mathbf{K}$ c'est-à-dire $P_A(X) = \det(A - XI_n)$
- Pour E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et Id_E l'application identité sur E.
- Si u est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on pose $Sp(u)$ le spectre de u, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de u.
- Pour u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et pour $\lambda \in Sp(u)$ on pose $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_E)$ le sous-espace propre de u associé à λ.

Objet du problème

Dans ce problème, on se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{K})$ constitués de matrices diagonalisables.

Plus précisément, si n est un entier $\geqslant 1$ et $\mathbf{K}$ un corps, on note $\mathbf{MT}(n,\mathbf{K})$ l'affirmation suivante :

– Pour toutes matrices A et B diagonalisables dans $M_n(\mathbf{K})$, la propriété

(a) A et B commutent

est équivalente à la propriété

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{K})$.

L'un des objectifs de ce problème est de montrer que cette affirmation est vraie dans le cas complexe c'est-à-dire que $\mathbf{MT}(n, \mathbf{C})$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, qui est un résultat dû à Motzkin-Taussky, 1952.

Dans toute la suite, lorsqu'il sera demandé d'étudier l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$, il faudra examiner successivement si les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (a)$ sont vraies.

Les parties **I, II** et **III** peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

I-A : Le sens direct et le cas $n = 2$

1. Soit $\mathbf{K}$ un corps et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
   On considère u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u c'est-à-dire que si F est un sous-espace propre de v, on a $u(F) \subset F$.
   (b) Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
   (c) En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans E pour les endomorphismes u et v, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de u et de v.
2. Plus généralement, on considère $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E.
   On suppose en outre que ces endomorphismes commutent deux à deux :
   $$(\forall\,(i,j) \in I^2), \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   Montrer l'existence d'une base commune de réduction dans E pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ c'est-à-dire une base $\mathscr{B}$ de E qui est une base de vecteurs propres pour chaque endomorphisme u_i, $i \in I$.
   (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E, en étudiant à part le cas où $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'homothéties.)
3. Montrer que l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbf{K})$, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout corps $\mathbf{K}$.
4. Étudier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{R})$.
5. On étudie l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.
   Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.
   (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où B est une matrice diagonale de $M_2(\mathbf{C})$ avec au moins une valeur propre nulle.
   (b) En supposant que B est une matrice diagonale non nulle avec une valeur propre nulle, démontrer l'existence d'un nombre complexe λ_0 tel que $A + \lambda_0 B$ ait une valeur propre double.
   (c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ dans $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$ est vraie.
6. On suppose ici $\mathbf{K} = \mathbb{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où p est un nombre premier et n un nombre entier $\geqslant 1$.
   (a) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.
   (b) Démontrer l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbb{F}_2)$.

(c) Démontrer l'affirmation $\mathbf{MT}(2,\mathbb{F}_p)$, dans le cas $p \geqslant 3$.
$\big($*Indication* : on pourra suivre le même plan que dans le cas complexe rencontré à la question **I-A-5**$\big)$

I-B : Application de la réduction simultanée

1. (a) On suppose ici que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.
On considère un sous-groupe multiplicatif fini G de $GL_n(\mathbf{K})$ où n est un entier $\geqslant 1$.
On suppose que :

$$(\forall\, M \in G), \quad M^2 = I_n.$$

Montrer que G est abélien de cardinal inférieur ou égal à 2^n.

(b) En déduire que pour tout $(n,m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbf{K})$ et $GL_m(\mathbf{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

2. Dans cette question, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et n est un nombre entier $\geqslant 1$.
On considère A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{C})$ et on introduit l'endomorphisme de $M_n(\mathbf{C})$

$$\Phi_{A,B} : M \mapsto AM + MB.$$

(a) En supposant que A est diagonalisable et que $B = 0$, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

(b) En supposant A et B diagonalisables, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

(c) Démontrer la réciproque, c'est-à-dire que si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, A et B le sont.
(*Indication* : On pourra utiliser la décomposition de Jordan-Dunford de A et B)

(d) Lorsque A et B sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de ceux de A et de ${}^tB$.

3. Dans cette question, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et on note $S_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $M_2(\mathbf{R})$.
Soit V un hyperplan vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$ constitué de matrices diagonalisables sur $\mathbf{R}$.
On se propose de montrer que V est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que V contient la matrice I_2.

(b) Montrer que V est conjugué au sous-espace vectoriel engendré par (I_2, A, B) avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où ω est un nombre réel non nul.

(c) En déduire le résultat.

4. Montrer que tout espace vectoriel formé de matrices diagonalisables de $M_2(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbf{R})$.

Partie II : Le cas $n = 3$

On suppose que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle. On **rappelle** les définitions suivantes :
- Pour les polynômes de $\mathbf{K}[X]$

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

où m et n sont deux entiers $\geqslant 1$, on définit le **résultant** de P et Q par le déterminant de taille $m+n$.

$$R(P,Q) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_m \\ \vdots & & & a_{m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_0 & & & \vdots \\ 0 & a_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{vmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \underbrace{\begin{vmatrix} b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_n \\ \vdots & & & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{vmatrix}}_{m \text{ colonnes}}$$

- Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ de coefficient dominant a_n, on définit le **discriminant** de P par

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} R(P,P').$$

1. On considère α, β et γ trois scalaires de $\mathbf{K}$. Montrer que le discriminant du polynôme

$$P = -X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

est

$$-27\gamma^2 - 18\gamma\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3.$$

2. On pose dans $M_3(\mathbf{K})$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose s distinct de 0 et 1. Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de $M + \lambda N$ est un polynôme de degré six en λ dont le coefficient dominant est $(s(1-s))^2$.

3. On pose dans $M_3(\mathbf{K})$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note

$$P_B = -X^3 + aX^2 + bX + c.$$

(a) Montrer que si $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$, on a :

$$(\forall \lambda \in \mathbf{K}), \quad P_{B+\lambda Q} = -X^3 + (a+\lambda) X^2 + (b - (b_1 + b_5)\lambda) X + c.$$

(b) Montrer alors que si en plus $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ est un polynôme de degré quatre en λ et déterminer son coefficient dominant.

4. Ici $\mathbf{K} = \mathbf{C}$; on se propose de démontrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ de l'affirmation $\mathbf{MT}(3,\mathbf{C})$.
Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(3,\mathbf{C})$; on note $\mathscr{F}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré dans $M_3(\mathbf{C})$ par I_3, A et B.
   (a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$ et que si la dimension de $\mathscr{F}$ est strictement inférieure à 3, les matrices A et B commutent.
   (b) On suppose que la dimension de $\mathscr{F}$ est égale à 3. Montrer que l'on peut se ramener par conjugaison au cas où $A = \mathrm{Diag}(0,0,1)$ et B est un projecteur de rang 1.
   (c) En déduire que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ de l'affirmation $\mathbf{MT}(3,\mathbf{C})$ est vraie.

Partie III : Le cas général dans C

III-A : Bases holomorphes

1. Soit Ω_0 un disque ouvert de $\mathbf{C}$ contenant l'origine ; on considère une application holomorphe M de Ω_0 dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire telle que chaque coefficient m_{ij} de M définisse une fonction holomorphe de Ω_0 dans $\mathbf{C}$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Pour tout $z \in \Omega_0 \setminus \{0\}$, on note $V(z)$ le noyau de la matrice $M(z)$.
Démontrer l'existence d'un réel $\rho > 0$ et d'un entier $m \geqslant 0$ tels que
$$(\forall\, z \in \Omega_0), \quad (0 < |z| < \rho) \Longrightarrow (\dim V(z) = m).$$
($Indication$: on pourra considérer les mineurs de $M(z)$.)
On suppose $m \geqslant 1$ dans la suite.
2. Sous les hypothèses ci-dessus et avec les mêmes notations, démontrer l'existence d'un nombre réel $r > 0$ et de m fonctions $\psi_1, \cdots, \psi_m$, holomorphes sur $D_r = \{z \in \Omega_0 \,; |z| < r\}$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, telles que pour tout $z \in D_r \setminus \{0\}$, les vecteurs $\psi_1(z), \cdots, \psi_m(z)$ engendrent $V(z)$ et $\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0)$ sont tous non nuls.
($Indication$: on pourra commencer par trouver des vecteurs $\tilde{\psi}_1(z), \cdots, \tilde{\psi}_m(z)$ méromorphes en z, qui engendrent $V(z)$.)
3. Toujours avec les mêmes notations, notons Z^* l'ensemble des couples $(z,\psi) \in \Omega_0 \times \mathbf{C}^n$ tels que $z \neq 0$ et $\psi \in V(z)$, Z l'adhérence de Z^* dans $\Omega_0 \times \mathbf{C}^n$ et $V(0)$ (qui n'a pas encore été défini) le sous-ensemble de $\mathbf{C}^n$ tel que
$$\{0\} \times V(0) = Z \cap (\{0\} \times \mathbf{C}^n).$$
   (a) On suppose que la famille $(\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0))$ est libre. Démontrer que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.
   (b) Montrer qu'il existe une famille $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$, comme à la question **III-A-2** telle que la famille $(\psi_1(0), \cdots, \psi_m(0))$ soit libre et en déduire que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.
   ($Indication$: partant d'une famille quelconque $(\phi_1, \cdots, \phi_m)$ vérifiant **III-A-2**, on pourra construire des familles $(\psi_1, \cdots, \psi_k, \phi_{k+1}, \cdots, \phi_m)$ par récurrence sur k.)
4. On considère une application holomorphe N d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ dans $M_n(\mathbf{C})$, un point μ_0 de $\mathbf{C}$ et un cercle Γ centré en μ_0, orienté dans le sens direct.
On suppose que pour tout $\lambda \in U$, la matrice $N(\lambda)$ est diagonalisable, que :
$$(\forall\, \lambda \in U), (\forall\, \mu \in \Gamma), \quad N(\lambda) - \mu I_n \in GL_n(\mathbf{C}),$$
et on note $R(\lambda,\mu) = (N(\lambda) - \mu I_n)^{-1}$.
   (a) Démontrer que la formule suivante
$$\Pi(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma R(\lambda,\mu)\, d\mu$$
   définit une application holomorphe Π de U dans $M_n(\mathbf{C})$.

(b) Soit λ_0 un point de U ; on suppose que μ_0 est l'unique valeur propre de $N(\lambda_0)$ entourée par le cercle Γ. Démontrer que $\Pi(\lambda_0)$ est la projection sur $E_{\mu_0}(N(\lambda_0))$, le sous-espace propre de $N(\lambda_0)$ associé à μ_0, parallèlement à la somme des autres sous espaces propres de $N(\lambda_0)$.

5. Démontrer que pour tout $\lambda \in U$, la matrice $\Pi(\lambda)$ est un projecteur, somme de projecteurs sur des sous-espaces propres de $N(\lambda)$ associés à des valeurs propres entourées par Γ.

Partie III-B : Courbes spectrales

Dans cette partie le corps de base est $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et $\mathbb{D}$ désigne le disque ouvert unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} ; |z| < 1\}$.
Soit A et B deux matrices dans $M_n(\mathbf{C})$, pour $n \in \mathbf{N}^*$; on pose :

$$(\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2), \quad P(\lambda, \mu) = P_{A+\lambda B}(\mu) = \det(A + \lambda B - \mu I_n).$$

Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, le polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ sera noté P_λ.
On définit l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2 ; P(\lambda, \mu) = 0\}.$$

On appelle **multiplicité** (dans $\mathscr{C}$) d'un point $x = (\lambda, \mu)$ de $\mathscr{C}$, la multiplicité de la racine μ du polynôme P_λ, notée $d(x)$.
Nous **admettrons** le théorème suivant qui permet de paramétrer localement l'ensemble $\mathscr{C}$ par des injections holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbf{C}^2$:

Quelque soit $x_0 = (\lambda_0, \mu_0) \in \mathscr{C}$, il existe $l \in \mathbf{N}^*$ et deux familles finies d'applications holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbf{C}$, $(f_\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$ et $(g_\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$, qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $(\forall\, \alpha \in [\![1, l]\!]), \quad f_\alpha(0) = \lambda_0 \text{ et } g_\alpha(0) = \mu_0$

(ii) $(\forall\, z \in \mathbb{D}), (\forall\, \alpha \in [\![1, l]\!]), \quad (f_\alpha(z), g_\alpha(z)) \in \mathscr{C}$

(iii) $(\exists \eta > 0), (\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathscr{C}),$
$(|\lambda - \lambda_0| \leqslant \eta, |\mu - \mu_0| \leqslant \eta) \Longrightarrow \Big((\exists \alpha \in [\![1, l]\!]), (\exists z \in \mathbb{D}), \ \lambda = f_\alpha(z) \text{ et } \mu = g_\alpha(z)\Big)$

(iv) $(\forall\, \alpha \in [\![1, l]\!]), (\forall\, (z, w) \in \mathbb{D}^2), \quad (f_\alpha(z) = f_\alpha(w), g_\alpha(z) = g_\alpha(w)) \Longrightarrow (z = w)$

(v) $(\forall\, (\alpha, \beta) \in [\![1, l]\!]^2), (\alpha \neq \beta), \big(\forall\, (z, w) \in (\mathbb{D}\backslash\{0\})^2\big), \quad (f_\alpha(z), g_\alpha(z)) \neq (f_\beta(w), g_\beta(w))$

(vi) $(\forall\, z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}), (\forall\, \alpha \in [\![1, l]\!]), \quad f'_\alpha(z) \neq 0.$

Nous noterons $F_\alpha = (f_\alpha, g_\alpha)$ les applications associées de $\mathbb{D}$ dans $\mathbf{C}^2$, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.

Remarque : la condition (ii) signifie que $F_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathscr{C}$, (iii) que l'ensemble $\bigcup\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant l} F_\alpha(\mathbb{D})$ contient un voisinage de x_0 dans $\mathscr{C}$, (iv) que chaque F_α est injective et (v) que $(F_\alpha(\mathbb{D}\backslash\{0\}))_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints. La condition (vi) est particulière à notre situation où chaque polynôme P_λ est de degré n en μ, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Pour $\alpha \in [\![1, l]\!]$, l'ensemble $F_\alpha(\mathbb{D})$ s'appelle une **branche locale** de $\mathscr{C}$ en x_0.
Nous **admettrons** que la multiplicité dans $\mathscr{C}$ est constante dans une branche épointée, c'est-à-dire que $d(x)$ ne dépend pas de x si $x \neq x_0$ et $x \in F_\alpha(\mathbb{D})$; on la notera d_α, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.
On appellera **ramification** e_α d'une branche $F_\alpha(\mathbb{D})$ en x_0 l'ordre du zéro 0 de $f_\alpha - \lambda_0$, qui existe puisque f_α est non constante ; nous **admettrons** alors que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{\lambda_0\}$ suffisamment proche de λ_0, le nombre de points $x = (\lambda, \mu) \in F_\alpha(\mathbb{D})$ est exactement e_α, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.
Enfin, nous **supposerons** que pour $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ fixé, si μ_0 et μ'_0 sont deux racines distinctes de P_{λ_0}, les branches locales de $\mathscr{C}$ en $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ sont disjointes des branches locales de $\mathscr{C}$ en $x'_0 = (\lambda_0, \mu'_0)$.

1. Soit $\big(F_\alpha(\mathbb{D})\big)_{\alpha\in[\![1,l]\!]}$ la famille de branches locales de $\mathscr{C}$ en un point $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ de $\mathscr{C}$.
Démontrer que la multiplicité de x_0 dans $\mathscr{C}$ vérifie

$$d(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{l} e_\alpha d_\alpha.$$

2. On suppose jusqu'à la fin du problème que $A+\lambda B$ est diagonalisable, pour λ dans $\mathbf{C}$.
Soit $(F_\alpha(\mathbb{D}))_{\alpha\in[\![1,l]\!]}$ la famille de branches locales de $\mathscr{C}$ en $x_0=(\lambda_0,\mu_0)$ et z un point de $\mathbb{D}\backslash\{0\}$.
On définit l'espace vectoriel, pour $\alpha\in[\![1,l]\!]$

$$V_\alpha(z)=\{\psi\in\mathbf{C}^n\,;(A+f_\alpha(z)B)\psi=g_\alpha(z)\psi\},$$

et l'espace vectoriel associé $V_\alpha(0)$ comme en **III-A-3**.
Nous **admettons** la relation suivante :

$$E_{\mu_0}(A+\lambda_0B)=\sum_{\alpha=1}^{l}V_\alpha(0).$$

Montrer alors que la ramification e_α de $F_\alpha(\mathbb{D})$ est égale à 1, pour tout $\alpha\in[\![1,l]\!]$.

3. (a) Établir l'existence de n fonctions entières $\mu_i:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$ telle que $\mathscr{C}$ coïncide avec la réunion des graphes de $\mu_i, 1\leqslant i\leqslant n$.
   (b) Démontrer l'existence de nombres complexes $a_i,b_i, 1\leqslant i\leqslant n$, tels que

$$(\forall\, i\in[\![1,n]\!]),(\forall\,\lambda\in\mathbf{C}),\quad \mu_i(\lambda)=a_i+\lambda b_i.$$

4. Notation : pour $i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda\in\mathbf{C}$ et $r>0$, $\Gamma_i(\lambda,r)$ désigne le cercle de centre $\mu_i(\lambda)$ et de rayon r.
   (a) Démontrer l'existence de réels $\rho>0$ et $\Lambda>0$ tel que, pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$ et tout $r>0$

$$(0<r<\rho)\text{ et }(|\lambda|>\Lambda)\Longrightarrow\ (\forall\, i\in[\![1,n]\!]),(\forall\,\mu\in\Gamma_i(\lambda,r)),\ A+\lambda B-\mu I_n\text{ inversible.}$$

   (b) On note $R(\lambda,\mu)$ l'inverse de $A+\lambda B-\mu I_n$ lorsqu'il existe et on fixe $0<r<\rho$.
   Démontrer que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, la formule

$$\Pi_{j,r}(\lambda)=-\frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_j(\lambda,r)}R(\lambda,\mu)\,d\mu.$$

   définit une fonction holomorphe de l'ouvert $U_\Lambda=\{\lambda\in\mathbf{C}\,;|\lambda|>\Lambda\}$ dans $M_n(\mathbf{C})$.
   (c) Démontrer que, si en plus B est diagonalisable, chaque $\Pi_{j,r}(\lambda)$ admet une limite dans $M_n(\mathbf{C})$ lorsque $|\lambda|$ tend vers l'infini, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$.

5. On considère A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$. On suppose que $A+\lambda B$ est diagonalisable, pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$. Démontrer que A et B commutent.

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

OBJET DU PROBLÈME

L'objectif du problème, clairement énoncé dans le préliminaire, était d'établir dans une large mesure le théorème de Motzkin-Taussky (1952) :
Si A et B sont deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$ telles que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, la matrice $A+\lambda B$ est diagonalisable, alors A et B commutent.
Plus précisément, les parties **I** et **II** traitaient les cas $n=2$ et $n=3$, en étudiant des variantes pour d'autres corps que celui des nombres complexes. La partie **III** développait quelques questions en direction de ce résultat dans le cas $n \geqslant 1$. Elle ne fournissait pas une preuve complète de ce théorème, comme on peut la trouver par exemple dans [2], mais elle contenait néanmoins le début et la fin de la preuve, représentant déjà une difficulté honorable pour un problème d'agrégation.

Remarque 1 : la clé manquante pour une preuve complète est l'égalité admise des sous-espaces

$$E_{\mu_0}(A+\lambda_0 B) \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha=1}^{l} V_\alpha(0) \quad .$$

Dans l'énoncé, celle-ci sert à établir la question **III-B-3**, mais en réalité, il est plus naturel d'établir **III-B-3** et d'en déduire l'égalité des dimensions (voir [2]).

Remarque 2 : il faut faire attention que le théorème et le résultat admis réclament que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $A+\lambda B$ et B soient diagonalisables, contrairement à l'impression que pourrait donner l'énoncé. En effet, dans l'exemple suivant , on constate que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne commutent pas, alors que $A+\lambda B$ est diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Dans la partie **I-A**, on établit le résultat dans le cas $n=2$, et on étudie ce même résultat sur les corps $\mathbf{R}$ et $\mathbb{F}_p$.
Dans la partie **I-B**, on donne quelques applications de la réduction simultanée et on s'intéresse au sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$ constitué dont les éléments sont des matrices diagonalisables.
Dans la partie **II**, on établit le résultat dans le cas $n=3$.
Dans la partie **III-A**, on étudie des bases de noyau de matrices dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. On donne une expression intégrale des projecteurs spectraux de matrices dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$.
Dans la partie **III-B**, on établit dans un certain cadre le théorème de Motzkin-Taussky pour $n \geqslant 1$.

Les ingrédients pour ce problème faisaient intervenir :
• les notions de base de réduction d'endomorphismes, en particulier dans les corps $\mathbf{C}, \mathbf{R}$ et $\mathbb{F}_p$, réduction simultanée, décomposition de Jordan-Dunford, caractérisation de la diagonalisabilité dans $\mathbb{F}_p$, réduction de matrices symétriques réelles
• utilisation des résultants et discriminants, caractérisation des projecteurs de rang 1
• holomorphie, méromorphie, prolongement analytique, intégrale à paramètre de la variable complexe, théorème de Liouville.

Remarques générales sur les copies

La plupart des remarques des années précédentes restent valables et peuvent être lues avec profit par les candidats. Nous développerons cependant les points qui nous semblent plus particulièrement utiles pour les futurs candidats.

La clarté, la rigueur, la précision et la concision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation des copies. De nombreux candidats perdent des points précieux dans les questions les plus accessibles du problème par des défauts de rédaction.
L'utilisation des hypothèses données dans l'énoncé doit être signalée au moment opportun et non en vrac en début de question, afin de montrer l'articulation du raisonnement.
Il faut que les futurs candidats soient persuadés qu'ils ne perdront pas de temps ni de points, bien au contraire, en proposant une rédaction complète et rigoureuse des questions qu'ils auront résolues (tout en sachant rester concis...).

PARTIE I-A

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats. On est conduit à regretter un grand manque de rigueur et de soin dans un début de problème. Il est bon de rappeler qu'en début de problème, il convient de mettre l'accent sur le soin et la précision. Les débuts de problème ou de partie de problème sont des questions abordables pour la plupart des candidats. Il faut alors éviter par exemple d'affirmer que les propriétés à démontrer sont évidentes. Bien sûr, il ne s'agit pas non plus de trop détailler et de redémontrer des résultats de cours.
D'autre part, les problèmes d'agrégation sont volontairement de difficulté progressive et découpés en parties largement indépendantes pour permettre aux candidats de mettre en valeur leurs capacités. Si le grapillage est déconseillé, il est tout à fait possible qu'un candidat se sente peu à l'aise sur les notions développées dans une partie ou soit bloqué après une recherche sérieuse, lorsque la difficulté devient trop élevée. Le candidat a alors tout intérêt soit à regarder si les dernières questions de la partie, qui consistent souvent en une mise en application des résultats théoriques de la partie sur un exemple et sont abordables en admettant les résultats en question, lui semblent accessibles, soit à regarder si il se sent plus habile sur les parties suivantes. Malgré la progressivité du problème, les premières questions des parties sont à priori toujours de difficulté mesurée et peuvent être l'occasion pour un candidat de montrer ses capacités.

La question **I-A-1-a** a été traitée par la majorité des candidats. Par contre **I-1-b** a posé quelques difficultés, les réponses ont été souvent laborieuses, les candidats n'ayant pas pensé à l'utilisation d'un polynôme annulateur. En outre, certains candidats ne se relisent pas, en confondant $P(u(x))$ et $P(u)(x)$.
La question **I-A-2** nécessitait une récurrence soignée fournie clairement en indication par l'énoncé. Celle-ci n'a pas toujours été initialisée et le passage de n à $n+1$ n'est pas souvent clairement explicité. Le cas des homothéties, pourtant signalé a été oublié ou mal cerné par les candidats.
La question **I-A-3** n'a pas posé de difficultés mais a mis en évidence un grand manque de rigueur de la part des certains candidats, qui ont identifié matrice et application linéaire canoniquement associée. Á ce stade du problème, cela est très maladroit compte tenu des questions précédentes.
La question **I-A-4** a posé des difficultés à beaucoup de candidats. Un candidat à l'agrégation doit savoir que pour montrer qu'une propriété est fausse, il suffit d'exhiber un contre exemple. Ici, il suffisait de trouver deux matrices symétriques réelles de $M_n(\mathbf{R})$ qui ne commutent pas.
La question **I-A-5-a** a été traitée maladroitement, avec des confusions entre diagonale et diagonalisable.
La question **I-A-5-b** a été souvent traitée de manière trop calculatoire, alors qu'il suffisait de mettre en évidence un polynôme non constant.
La question **I-A-5-c** a été abordée mais le lien avec les questions précédentes a rarement été fait.
La question **I-A-6-a** pourtant classique a posé des difficultés, les ingrédients étant le morphisme de Frobenius et le petit théorème de Fermat.
La question **I-A-6-b** a été traitée par quelques candidats, qui ont su faire le lien avec la question précédente.
La question **I-A-6-c** a été très peu abordée. Toutefois, quelques candidats ont su dégagé que la discussion s'articulait autour du discriminant du polynôme caractéristique de $A+\lambda B$, à savoir si celui-ci est un carré dans $\mathbb{F}_p$.

PARTIE I-B

Cette partie a été abordée de manière significative par très peu de candidats. L'ingrédient de cette partie, qui était clairement donné par son titre, était la réduction simultanée d'une famille d'endomorphismes.
La question **I-B-1-a** a été traitée partiellement par les candidats. Beaucoup de candidats ont omis de préciser que dans $\mathbb{K}$, on a $1 \neq -1$ pour des raisons de caractéristique.
La question **I-B-1-b** a été traitée partiellement par les candidats. Beaucoup de candidats ont omis de donner un exemple de groupe G de cardinal 2^n, par exemple comme les matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux dans $\{\pm 1\}$.
La question **I-B-1-c** a été partiellement traitée par les rares candidats qui l'ont abordée. Il convient de rappeler qu'une condition suffisante pour que la somme de deux endomorphismes nilpotents soit encore nilpotente est que ceux-ci commutent.
Les questions **I-B-3** et **I-B-4** ont été abordées par assez peu de candidats. C'est dommage car celles-ci mettaient les candidats sur la piste pour répondre à la question **I-A-4**.

PARTIE II

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats, qui ont surtout traité les premières questions, les dernières étant un peu plus délicates. Cette partie utilisait les propriétés du résultant et du discriminant, notions clairement rappelées dans l'énoncé du problème.
La question **II-1** a été abordée par la majorité des candidats. Elle a mis en évidence un calcul de déterminant de taille 5, comportant suffisamment de zéros pour se ramener au calcul de deux déterminants de taille trois, dont le calcul était facile. Dans cette question très souvent abordée, on a observé des calculs longs et laborieux menés sans explication. On peut raisonnablement attendre qu'un candidat à l'agrégation sache calculer un déterminant de taille 3 en moins d'une page.
Signalons que quelques candidats ont utilisé la calculatrice et ont obtenu le résultat, sans rien expliquer. Bien entendu, ceux-ci ont été sanctionnés.
Les questions **II-2** et**II-3-b** ont posé des problèmes à bon nombre de candidats, qui ont cru nécessaire de rentrer dans les détails de calcul pénible, alors qu'il suffisait d'étudier qualitativement l'expression trouvée dans **II-1**.
La question **II-3-a** a aussi été traitée de manière maladroite. La plupart des candidats qui l'ont traitée, ont cru bon d'expliciter P_B pour en déduire le résultat, alors qu'une simple observation de multilinéarité fournissait immédiatement le résultat.
La question **II-4-a** a été traitée par quelques candidats, alors que **II-4-b** et **II-4-c** n'ont pas été abordées de manière significative.

PARTIE III-A

Cette partie a été abordée de manière significative par les meilleurs, l'analyse complexe ayant rebuté la majorité des candidats. Dans cette partie, le grapillage de point n'a pas été récompensé.
Le principe des zéros isolés a été correctement appliqué dans les meilleurs copies à la question **III-A-1**. On y trouve aussi des pistes très intéressantes pour la résolution de la question **III-A-2**.
Quelques candidats ont bien abordé la question **III-A-4-a**, en citant le théorème d'analycité des intégrales dépendant d'un paramètre. Cependant le théorème des résidus a été appliqué dans **III-A-4-b** comme si l'intégrande était à valeurs complexes.

PARTIE III-B

Cette partie a été très peu étudiée mais ceux qui l'ont abordée avec un minimum de raisonnement ont été bien récompensé, car celle-ci demandait d'assimiler les propriétés du préliminaire page 7.

Bibliographie

[1] T. S. Motzkin, O. Taussky : *Pairs of matrices with property* L. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 73, pp.108-114 (1952) et vol. 80 pp.387-401 (1955)

[2] T. Kato : *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1966).

3.3 Corrigé

Corrigé Problème

Théorème de Motzkin-Taussky

Partie I

I-A : Le sens direct et le cas $n = 2$

1-a Stabilité des sous-espaces propres. — Soit λ une valeur propre de v et $E_\lambda(v)$ le sous-espace propre associé. Les endomorphismes $v - \lambda Id_E$ et u commutent.
Donc $\mathrm{Ker}(v - \lambda Id_E) = E_\lambda(v)$ est stable par u, d'où le résultat.

1-b Les restrictions sont diagonalisables. — L'endomorphisme u laisse stable chaque sous-espace propre de v donc il induit sur chacun d'eux un endomorphisme. Comme u est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racine simple annulant u. Par restriction, ce polynôme annule chaque endomorphisme induit par u sur les sous-espaces propres de v, qui donc sont diagonalisables.

1-c Existence de $\mathscr{B}$. — Pour chaque $\lambda \in Sp(v)$, on considère $\mathscr{B}_\lambda$ une base de réduction de l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(v)$. L'endomorphisme v étant diagonalisable,

$$\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp(v)} \mathscr{B}_\lambda$$

est une base de E qui vérifie la propriété requise.

2 Généralisation. — On raisonne par récurrence sur l'entier $n = \dim E$.
Pour $n \leqslant 1$ le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n \geqslant 1$.
Considérons E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux.
Si cette famille ne contient que des homothéties, $\mathscr{B}$ une base quelconque de E vérifie la propriété requise et le résultat est vrai au rang $n+1$.
Sinon il existe $i_0 \in I$ tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie. Fixons λ dans $Sp(u_{i_0})$.
Pour tout $i \in I$, u_i est diagonalisable et commute avec u_{i_0} donc μ_i, la restriction de u_i à $E_\lambda(u_{i_0})$ constitue un endomorphisme diagonalisable de $\mathscr{L}(E_\lambda(u_{i_0}))$.
Alors $(\mu_i)_{i\in I}$ forme une famille d'endomorphismes diagonalisables de $\mathscr{L}(E_\lambda(u_{i_0}))$ qui commutent deux à deux. Comme les propriétés sur u_{i_0} assure $\dim E_\lambda(u_{i_0}) < \dim E$, il vient par hypothèse de récurrence l'existence de $\mathscr{B}_\lambda$ une base commune de réduction dans $E_\lambda(u_{i_0})$ de la famille $(\mu_i)_{i\in I}$.
L'endomorphisme u_{i_0} est diagonalisable donc $\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp(u_{i_0})} \mathscr{B}_\lambda$ est une base de E qui vérifie la propriété requise alors, d'où le résultat au rang $n+1$.
Il est donc vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3 $(a) \Rightarrow (b)$ dans MT$(n,\mathbb{K})$. — Considérons A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant l'hypothèse (a) dans $\mathbf{MT}(n,\mathbb{K})$. Introduisons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B dans $\mathbb{K}^n$. Ces endomorphismes commutent et sont diagonalisables.
Introduisons $\mathscr{B}$ une base commune de vecteurs propres à u et v.
Alors $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de $u + \lambda v$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
Il en découle que $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, d'où l'implication annoncée.

4 Étude de MT$(2,\mathbf{R})$. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ a lieu d'après ce qui précède. Cependant la réciproque est

fausse. Il suffit de prendre A et B symétriques réelles et qui ne commutent pas.
Par exemple, on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5-a Étude de MT(2, C), première étape. — Remarquons que le problème peut se résoudre à une classe de similitude près. On peut alors supposer que $B = \mathrm{Diag}(\alpha, \beta)$ où α et β sont des complexes. On ne restreint pas la généralité du problème en retranchant à B une matrice scalaire, ce qui permet de se ramener à $B = \mathrm{Diag}(\alpha, 0)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$, d'où ce premier point.

5-b Étude de MT(2, C), deuxième étape. — On peut alors se ramener par exemple au cas où $B = \mathrm{Diag}(1, 0)$. Montrons l'existence de $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $A + \lambda_0 B$ soit scalaire. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul sans finesse montre que le discriminant du polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ s'écrit

$$(\lambda + a - d)^2 + 4bc.$$

Il existe un complexe λ_0 qui annule ce discriminant. La matrice $A + \lambda_0 B$ est diagonalisable d'ordre 2 à valeur propre double donc c'est une matrice scalaire, d'où le résultat annoncé.

5-c MT(2, C) est vraie. — Ce qui précède montre que l'on peut se ramener au cas où $B = \mathrm{Diag}(\alpha, 0)$.
Si $\alpha = 0$, les matrices A et B commutent.
Sinon on peut se ramener au cas $\alpha = 1$; alors il existe $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $A + \lambda_0 B$ soit scalaire ce qui assure que A et B commutent. On en déduit que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ est vraie dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbf{C})$.

6-a CNS de diagonalisabilité dans $\mathbb{F}_p$. — Supposons $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ diagonalisable.
Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_p^n$ telle que $A = P^{-1}DP$.
On en déduit à l'aide du petit théorème de Fermat

$$A^p = P^{-1}D^pP = P^{-1}\mathrm{Diag}(\lambda_1^p, \cdots, \lambda_n^p)P = P^{-1}\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P = A.$$

Supposons réciproquement que $A^p = A$. Alors $X^p - X$ est un polynôme annulateur de A.
Le petit théorème de Fermat assure la relation

$$X^p - X = X(X-1)\cdots(X-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(X-k)$$

et donc A est annulé par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_p$.

Il en résulte que A est diagonalisable.

6-b Étude de MT(n, $\mathbb{F}_2$). — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ a lieu d'après ce qui précède.
Pour traiter la réciproque, considérons A et B des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_2)$ satisfaisant (b).
Le critère précédent permet de voir que A, B et $A + B$ sont des matrices de projections.
Il en découle

$$AB + BA = 0 \Longleftrightarrow AB = BA,$$

ce qui assure que l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbb{F}_2)$ est vraie.

6-c Étude de MT(2, $\mathbb{F}_p$). — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ a lieu d'après ce qui précède.
Pour traiter la réciproque, considérons A et B des matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{F}_p)$ satisfaisant (b).
On mène une étude analogue au cas complexe.
Il nous suffit de traiter le cas $B = \mathrm{Diag}(1, 0)$. Nous conserverons les notations de **I-A-5-b**.
Le discriminant du polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ vaut

$$(\lambda + a - d)^2 + 4bc$$

et c'est un carré dans $\mathbb{F}_p$, pour tout choix de λ dans $\mathbb{F}_p$.
Il en découle que la fonction polynôme définie sur $\mathbb{F}_p$ par

$$\lambda \mapsto (\lambda + a - d)^2 + 4bc$$

prend ses valeurs dans l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p$. Donc la fonction polynôme définie sur $\mathbb{F}_p$ par

$$\varphi : t \mapsto t^2 + 4bc$$

prend ses valeurs dans l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p$. En outre, on a

$$(\forall\,(t,t') \in \mathbb{F}_p^2),\ \ (t^2 + 4bc = t'^2 + 4bc) \Longleftrightarrow (t^2 = t'^2) \Longleftrightarrow (t = \pm t'),$$

et comme $p \geqslant 3$

$$\#\varphi(\mathbb{F}_p) = \frac{p+1}{2} = \#\{\text{carrés dans } \mathbb{F}_p\}.$$

Donc le discriminant s'annule dans $\mathbb{F}_p$ et on achève comme en **I-A-5-c**.

Partie I-B : Application de la réduction simultanée

1-a G est abélien de cardinal $\leqslant 2^n$. — On va raisonner sur les endomorphismes canoniquement associés dans $E = \mathbb{K}^n$. On considère alors $\mathscr{G}$ un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que :

$$(\forall\, u \in \mathscr{G}),\quad u^2 = Id_E.$$

Alors $\mathscr{G}$ est abélien (classique) et par suite possède pour éléments des symétries commutant deux à deux.
Remarque : Il est bien connu que $\#\mathscr{G}$ est une puissance de deux, mais ici ce n'est pas vraiment utile.
Le corps $\mathbb{K}$ étant de caractéristique différente de 2, ces éléments sont diagonalisables et il existe alors $\mathscr{B}$ une base de réduction simultanée de ces éléments. En particulier la matrice d'un élément quelconque de $\mathscr{G}$ dans cette base est de la forme

$$\mathrm{Diag}(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1).$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Il apparaît alors que G est un sous-groupe multiplicatif de

$$\Gamma_n = \{P\ \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)P^{-1}\ ; (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n\}$$

qui est naturellement isomorphe à $(\mathbb{F}_2^n, +)$. On en déduit que $\#G = 2^s$ où $s \in [\![0, n]\!]$ c'est à dire $\#G \leqslant 2^n$, ce qui établit le résultat.

1-b $GL_n(\mathbb{K}) \sim GL_m(\mathbb{K}) \Leftrightarrow n = m$. — Si $n = m$ on a clairement $GL_n(\mathbb{K})$ isomorphe à $GL_m(\mathbb{K})$.
Traitons la réciproque. Considérons φ un isomorphisme de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $GL_m(\mathbb{K})$.
En conservant la notation de la question précédente, $\Gamma'_n = \varphi(\Gamma_n)$ est un sous-groupe fini de $GL_m(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$(\forall\, M \in \Gamma'_n),\quad M^2 = I_m.$$

Il en résulte $\#\Gamma'_n \leqslant 2^m$ ou encore $2^n \leqslant 2^m$ c'est à dire $n \leqslant m$.
Les entiers naturels n et m jouant des rôles symétriques, il vient $n = m$ et le résultat annoncé.

2-a $\Phi_{A,0}$ est diagonalisable. — Introduisons pour $S \in M_n(\mathbf{C})$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(M_n(\mathbf{C}))$

$$L_S : M \mapsto SM.$$

On a clairement, pour tout $S \in M_n(\mathbf{C})$

$$L_S = 0 \Longleftrightarrow S = 0$$

puis pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$
$$P(L_S) = L_{P(S)}.$$
Ces propriétés assurent que S et L_S ont même polynôme minimal, pour tout $S \in M_n(\mathbf{C})$.
Donc A est diagonalisable si et seulement si $L_A = \Phi_{A,0}$ est diagonalisable, d'où le résultat.

2-b $\boldsymbol{\Phi_{A,B}}$ est diagonalisable. — Introduisons pour $S \in M_n(\mathbf{C})$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(M_n(\mathbf{C}))$
$$R_S : M \mapsto MS.$$
L'endomorphisme R_S jouit des mêmes propriétés que L_S et donc est diagonalisable si et seulement si S est diagonalisable, pour tout $S \in M_n(\mathbf{C})$.
Remarquons que pour tout $(S,T) \in M_n(\mathbf{C})^2$ les endomorphismes L_S et R_T commutent avec :
$$(\forall\, M \in M_n(\mathbf{C})),\ \ (L_S \circ R_T)(M) = (R_T \circ L_S)(M) = SMT.$$
Supposons A et B diagonalisables.
Alors L_A et R_B sont diagonalisables et commutent donc sont simultanément diagonalisables dans une base $\mathfrak{B}$ de $M_n(\mathbf{C})$. Cette base $\mathfrak{B}$ se trouve être également une base de réduction de l'endomorphisme $\Phi_{A,B} = L_A + R_B$, d'où le résultat.

2-c Étude de la réciproque. — Supposons $\Phi_{A,B}$ diagonalisable.
Considérons la décomposition de Jordan-Dunford de A et B dans $M_n(\mathbf{C})$:
$$A = D_A + N_A \quad \text{et} \quad B = D_B + N_B,$$
où D_A, D_B sont diagonalisables et N_A, N_B sont nilpotentes dans $M_n(\mathbf{C})$ avec
$$D_A N_A = N_A D_A \quad \text{et} \quad D_B N_B = N_B D_B.$$
On peut écrire
$$\Phi_{A,B} = \Phi_{D_A,D_B} + \Phi_{N_A,N_B}.$$
L'endomorphisme Φ_{D_A,D_B} est diagonalisable d'après ce qui précède. Par ailleurs Φ_{N_A,N_B} est nilpotent comme somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent.
En outre on a
$$\begin{aligned}
\Phi_{D_A,D_B} \circ \Phi_{N_A,N_B} &= (L_{D_A} + R_{D_B}) \circ (L_{N_A} + R_{N_B}) \\
&= L_{D_A} \circ L_{N_A} + L_{D_A} \circ R_{N_B} + R_{D_B} \circ L_{N_A} + R_{D_B} \circ R_{N_B} \\
&= L_{N_A} \circ L_{D_A} + R_{N_B} \circ L_{D_A} + L_{N_A} \circ R_{D_B} + R_{N_B} \circ R_{D_B} \\
&= (L_{N_A} + R_{N_B}) \circ (L_{D_A} + R_{D_B}) \\
&= \Phi_{N_A,N_B} \circ \Phi_{D_A,D_B}
\end{aligned}$$
Les égalités du milieu découlant du fait des propriétés vues plus haut et que D_A et N_A puis D_B et N_B commutent. On en déduit que les endomorphismes Φ_{D_A,D_B} et Φ_{N_A,N_B} commutent et représentent la décomposition de Jordan-Dunford de $\Phi_{A,B}$. Cet endomorphisme étant diagonalisable, il vient par unicité de cette décomposition $\Phi_{N_A,N_B} = 0$.
La relation $\Phi_{N_A,N_B}(I_n) = 0$ fournit $N_B = -N_A$ et par suite N_A est dans le centre de $M_n(\mathbf{C})$.
La matrice N_A est donc scalaire nilpotente, ce qui assure $N_A = N_B = 0$ et les matrices A et B sont diagonalisables.

L'équivalence se trouve ainsi établie.
Remarque : Cette équivalence subsiste pour $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou un corps de caractéristique nulle.

2-d Éléments propres de $\boldsymbol{\Phi_{A,B}}$. — La matrice B étant diagonalisable, ${}^tB$ est diagonalisable.
Considérons $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des bases de vecteurs propres de A et ${}^tB$ associés respectivement aux

valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On notera P et Q les matrices de passage de la base canonique à chacune de ces bases.
Introduisons alors, pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$

$$M_{ij} = X_i{}^tY_j.$$

On a alors, pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$

$$\begin{aligned}\Phi_{A,B}(M_{ij}) &= AX_i{}^tY_j + X_i{}^tY_jB\\ &= AX_i{}^tY_j + X_i{}^t({}^tBY_j)\\ &= \lambda_iX_i{}^tY_j + \mu_jX_i{}^tY_j\\ &= (\lambda_i+\mu_j)M_{ij}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $M_{ij} = PE_{ij}{}^tQ$, pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, où $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la famille de matrices canoniques de $M_n(\mathbf{C})$. Comme $M\mapsto PM^tQ$ est un automorphisme de $M_n(\mathbf{C})$, il en résulte que $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ constitue une constitue une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$ associés aux valeurs propres $(\lambda_i+\mu_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

3-a $I_2\in V$. — Si I_2 n'était pas un élément de V, l'ensemble $M_2(\mathbf{R}) = \mathbf{R}I_2\oplus V$ serait constitué de matrices diagonalisables, ce qui est grossièrement faux. Donc I_2 est un élément de V.

3-b Adaptation de A et B. — Considérons A_1 une matrice non scalaire de V.
La matrice A_1 étant diagonalisable, en retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener au cas où A_1 admet 0 comme valeur propre simple. Elle est alors semblable à une matrice du type λA où λ est un réel non nul.
Il en résulte que V est conjugué à un hyperplan V' de $M_2(\mathbf{R})$ possèdant I_2 et A.
Considérons (I_2,A,B_1) une base de V' ; en combinant B_1 avec I_2 et A, on peut la ramener de la forme

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b\\ a & 0\end{pmatrix},$$

où (a,b) sont des scalaires réels. Cette matrice étant diagonalisable non nulle, elle vérifie $ab>0$ et donc est proportionnelle à une matrice du type $B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, avec $\omega = \sqrt{b/a}$.

En résumé V est conjugué à un hyperplan engendré par les matrices (I_2,A,B).

3-c V est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$. — Il suffit d'établir que $W = \mathrm{Vect}(I_2,A,B)$ est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$.
On utilise pour cela la matrice de dilatation $P = \mathrm{Diag}\,(\omega,1)$. On a

$$P^{-1}I_2P = I_2,\quad P^{-1}AP = A \quad\text{et}\quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & \omega\\ \omega & 0\end{pmatrix},$$

ce qui fournit $P^{-1}WP = S_2(\mathbf{R})$ et le résultat.

4 Généralisation pour $n=2$. — Un tel sous-espace vectoriel est de dimension $\leqslant 3$.
Le cas de la dimension 3 relève de ce qui précède.
En outre, le résultat est clair pour les espaces vectoriels de dimension $\leqslant 1$.
Considérons $V_1 = \mathrm{Vect}\,(M,N)$, un plan vectoriel de matrices diagonalisables.
Si $I_2\in V_1$, il s'écrit $\mathrm{Vect}(I_2,Q)$, où Q est une matrice non scalaire de V_1.
Introduisons P la matrice de passage de la base canonique vers une base de diagonalisation de Q.
Alors $P^{-1}V_1P$ est un sous-espace vectoriel de matrices symétriques, ce qui établit le résultat dans ce premier cas.
Si $I_2\notin V_1$ alors c'est un sous-espace vectoriel de l'hyperplan de matrices diagonalisables $\mathrm{Vect}\,(I_2,M,N)$ qui est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$. Ainsi V_1 est conjugué à un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbf{R})$, d'où le résultat.

Partie II : Le cas $n = 3$

1 Discriminant de $-X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. — On a successivement

$$\Delta(-X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma)=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 2\alpha & -3 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 2\alpha & -3 \\ \gamma & \beta & 0 & \beta & 2\alpha \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & -\alpha & -3 & 0 \\ \beta & \alpha & -2\beta & 2\alpha & -3 \\ \gamma & \beta & -3\gamma & \beta & 2\alpha \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -1 & -\alpha & -3 & 0 \\ \alpha & -2\beta & 2\alpha & -3 \\ \beta & -3\gamma & \beta & 2\alpha \\ \gamma & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}$$

et par suite

$$\Delta(-X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma)=\gamma\begin{vmatrix} -\alpha & -3 & 0 \\ -2\beta & 2\alpha & -3 \\ -3\gamma & \beta & 2\alpha \end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix} -1 & -\alpha & -3 \\ \alpha & -2\beta & 2\alpha \\ \beta & -3\gamma & \beta \end{vmatrix}$$

$$=-27\gamma^2-18\gamma\alpha\beta+\alpha^2\beta^2-4\alpha^3\gamma+4\beta^3$$

ce qui constitue le résultat.

2 Coefficient dominant demandé. — On a

$$P_{M+\lambda N}=\begin{vmatrix} m_1+\lambda s-X & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5-X & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9-X+\lambda \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un polynôme des variables X et λ dont le degré partiel par rapport à λ n'excède pas deux, le terme de degré deux en λ étant obtenu par le développement de

$$(m_1+\lambda s-X)(m_5-X)(m_9-X+\lambda).$$

Le coefficient de λ^2 est donc $s(m_5-X)$. Alors on peut écrire

$$P_{M+\lambda N}=-X^3+\alpha(\lambda)X^2+\beta(\lambda)X+\gamma(\lambda)$$

où $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$ sont des polynômes en λ dont seuls $\beta(\lambda)$ et éventuellement $\gamma(\lambda)$ contiennent un terme de degré deux en λ, puisque s est non nul. Il en résulte que le discriminant

$$-27\gamma^2(\lambda)-18\gamma(\lambda)\alpha(\lambda)\beta(\lambda)+\alpha^2(\lambda)\beta^2(\lambda)-4\alpha^3(\lambda)\gamma(\lambda)+4\beta^3(\lambda)$$

est de degré 6 en λ, le coefficient dominant étant donné par les termes $\alpha^2(\lambda)\beta^2(\lambda)+4\beta^3(\lambda)$.
Comme on a $\alpha(\lambda)=\mathrm{tr}(M+\lambda N)$, le coefficient de λ dans $\alpha(\lambda)$ vaut donc $s+1$.
Celui de λ^2 dans $\beta(\lambda)$ est $-s$. On en déduit que le coefficient de λ^6 est

$$s^2(s+1)^2-4s^3=(s(s-1))^2\neq 0,$$

d'où le résultat annoncé.

3-a Expression de $P_{B+\lambda Q}$. — On a successivement

$$\begin{aligned}
P_{B+\lambda Q} &= \begin{vmatrix} b_1-X & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5-X & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9+\lambda-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1-X & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5-X & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1-X & b_2 & 0 \\ b_4 & b_5-X & 0 \\ b_7 & b_8 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= -X^3+aX^2+bX+c+\lambda \begin{vmatrix} b_1-X & b_2 \\ b_4 & b_5-X \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

et donc en utilisant les hypothèses

$$P_{B+\lambda Q} = -X^3+(a+\lambda)X^2+(b-(b_1+b_5)\lambda)X+c.$$

3-b Recherche du coefficient dominant. — Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ s'écrit

$$-27\,c^2-18\,c\,(a+\lambda)\,(b-(b_1+b_5)\lambda)+(a+\lambda)^2(b-(b_1+b_5)\lambda)^2-4\,(a+\lambda)^3c+4\,(b-(b_1+b_5)\lambda)^3.$$

On voit alors que c'est un polynôme en λ dont le degré est donné par le terme médian qui est de degré 4 et dont le coefficient dominant est $(b_1+b_5)^2 \neq 0$.

4-a Premier résultat sur $\mathscr{F}$. — La matrice B est diagonalisable et les autres matrices de $\mathscr{F}$ sont, à une matrice scalaire près, proportionnelles à des matrices du type $A+\lambda B$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$, qui sont diagonalisables. Il en découle que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables de $M_3(\mathbf{C})$.
En outre, si $\dim \mathscr{F} < 3$, alors l'une des matrices A et B est combinaison linéaire de l'autre et de I_3 et dans ce cas elles commutent, d'où le résultat.

4-b Adaption de A et B. — Si A et B ont chacune des valeurs propres doubles, on leur retranche une matrice scalaire bien choisie et on obtient des matrices proportionnelles à des matrices de projection de rang 1. Dans ce cas, on peut donc se ramener au cas où A et B sont des matrices de projection de rang 1 et en conjuguant $\mathscr{F}$, à $A=\mathrm{Diag}(0,0,1)$ et B une matrice de projection de rang 1.

Sinon, ces matrices étant diagonalisables non scalaires, l'une d'elles, A pour se fixer les idées, n'admet que des valeurs propres simples. Si on lui retranche une matrice scalaire bien choisie, on est ramené à une matrice ayant 0 pour valeur propre simple et donc proportionnelle à une matrice admettant 0 et 1 comme valeurs propres simples puis en conjuguant $\mathscr{F}$, on est ramené au cas

$$A = \mathrm{Diag}(s,0,1),$$

où s est un complexe distinct de 0 et 1.
Le discriminant de $P_{B+\lambda A}$ est un polynôme de degré six en λ d'après la question **II-2**.
Ce polynôme admet donc une racine complexe λ_0. En particulier $B+\lambda_0 A$ est diagonalisable avec une valeur propre au moins double. Cette matrice n'étant pas scalaire, cette valeur propre est double et en retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener au cas où celle ci est 0 puis se ramener au cas où cette matrice est un projecteur de rang 1.
On peut donc par conjugaison supposer que $\mathscr{F}=\mathrm{Vect}(I_3,A,B)$ est de dimension 3 avec $A=\mathrm{Diag}(0,0,1)$.
Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}.$$

En retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener aux conditions requises dans **II-3-a**.

Si $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda A}$ est un polynôme de degré 4 en λ d'après **II-3-b** et alors il s'annule sur $\mathbf{C}$ en une valeur λ_1. La matrice $B + \lambda_1 A$ admet alors une valeur propre double et en retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener à une matrice proportionnelle à un projecteur de rang 1, puis à un projecteur de rang 1. On peut donc dans ce cas trouver un système (I_3, A, B) qui engendre $\mathscr{F}$ avec $A = \mathrm{Diag}(0,0,1)$ et B un projecteur de rang 1.

Si $b_1 + b_5 = 0$, on a avec les notations de **II-3**

$$P_{B+\lambda A} = -X^3 + (a+\lambda)\,X^2 + bX + c$$

et le discriminant s'écrit

$$-27\,c^2 - 18\,c\,(a+\lambda)\,b + (a+\lambda)^2 b^2 - 4\,(a+\lambda)^3 c + 4\,b^3.$$

Si on avait $b = c = 0$, on aurait $P_{B-aA} = -X^3$ et comme $B - aA$ est diagonalisable, cela conduirait à $B = aA$, ce qui est impossible.
On en déduit que le discriminant est un polynôme non constant en λ et donc s'annule sur $\mathbf{C}$.
On achève alors comme ci-dessus, ce qui établit cette étape.

4-c (*b*) ⇒ (*a*). — Introduisons l'espace $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(I_3, A, B)$. Ce qui précède montre qu'il suffit de traiter le cas où $\mathscr{F}$ est de dimension 3. Par conjuguaison, on peut se ramener au cas où $A = \mathrm{Diag}(0,0,1)$ et B est un projecteur de rang 1. Il suffit alors d'établir que A et B commutent.
Voici une méthode possible. On peut écrire

$$B = \begin{pmatrix} ux & vx & wx \\ uy & vy & wy \\ uz & vz & wz \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{tr}B = ux + vy + wz = 1$. On a $P_B = -X^2(X-1)$ et alors d'après **II-3-a**

$$P_{B+\lambda A} = -X^3 + (\lambda+1)X^2 + \lambda(wz-1)X.$$

Si on avait $wz = 1$, on aurait $P_{B-A} = -X^3$ et comme la matrice $B - A$ est diagonalisable, cela conduirait à $A = B$ ce qui est exclu. On a donc $wz \neq 1$.
On note par **II-3-b** que le discriminant s'écrit

$$(1+\lambda)^2((wz-1)\lambda)^2 + 4\,((wz-1)\lambda)^3 = (wz-1)^2\lambda^2(\lambda^2 + 2(2wz-1)\lambda + 1).$$

qui admet au moins une racine complexe non nul λ_2. La matrice $B + \lambda_2 A$ admet donc une valeur propre double d'où l'existence de $\mu \in \mathbf{C}$ tel que

$$B + \lambda_2 A - \mu I_3 = \begin{pmatrix} ux-\mu & vx & wx \\ uy & vy-\mu & wy \\ uz & vz & wz+\lambda_2-\mu \end{pmatrix}$$

soit de rang 1. Alors tous les déterminants d'ordre deux de cette matrice sont nuls.

En particulier

$$\begin{vmatrix} uy & vy-\mu \\ uz & vz \end{vmatrix} = \mu uz = 0$$

$$\begin{vmatrix} ux-\mu & wx \\ uy & wy \end{vmatrix} = -\mu wy = 0$$

$$\begin{vmatrix} vx & wx \\ vy-\mu & wy \end{vmatrix} = \mu wx = 0$$

$$\begin{vmatrix} ux-\mu & vx \\ uz & vz \end{vmatrix} = -\mu vz = 0$$

Supposons que μ soit nul. Alors la matrice $B+\lambda_2 A$ serait de rang 1.
Le complexe λ_2 étant non nul, il vient, en exprimant que chaque déterminant extrait d'ordre deux contenant le coefficient $wz+\lambda_2$ est nul,

$$ux = vx = uy = vy = 0.$$

Mais alors, on aurait $wz = 1$, ce qui est absurde.
Donc $\mu \neq 0$, ce qui fournit $uz = wy = wx = vz = 0$ et on vérifie que A et B commutent.

Partie III : Le cas général dans C

III-A : Bases holomorphes

1 Existence de ρ et de m. — Remarquons que chaque mineur de $M(z)$ est une fonction holomorphe de z sur Ω_0. Le principe des zéros isolés permet de voir que ces fonctions sont ou bien identiquement nulles, ou bien ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de l'origine.
Si elles sont toutes nulles, le résultat est clair. Sinon introduisons $\rho > 0$ tel que sur $\{z \in \Omega_0\ ; 0 < |z| < \rho\}$, les mineurs non identiquement nuls ne s'annulent pas. Sur cet ensemble, les matrices $M(z)$ ont un rang constant égale à l'ordre maximum des mineurs non nuls.
Il existe donc un entier naturel m tel que :

$$(\forall\, z \in \Omega_0),\quad (0 < |z| < \rho) \Longrightarrow (\dim V(z) = m).$$

2 Existence de $(\psi_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. — On va choisir $r = \rho$.
D'après la définition de r, sur l'ensemble $D_r\setminus\{0\}$, la matrice $M(z)$ est de rang $p = n-m$ et l'un des mineurs d'ordre p de $M(z)$ ne s'annule pas. (le cas $p = 0$ est aisé)
Nous supposerons que c'est le mineur principal d'ordre p, pour simplifier les notations.
On a alors sur $D_r\setminus\{0\}$, $(\forall\, \phi \in \mathbf{C}^n)$,

$$(\phi \in V(z)) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_{11}(z)\phi_1 + \cdots + m_{1n}(z)\phi_n = 0 \\ \vdots \\ m_{p1}(z)\phi_1 + \cdots + m_{pn}(z)\phi_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_{11}(z)\phi_1 + \cdots + m_{1p}(z)\phi_p = -(m_{1(p+1)}(z)\phi_{p+1} + \cdots + m_{1n}(z)\phi_n) \\ \vdots \\ m_{p1}(z)\phi_1 + \cdots + m_{pp}(z)\phi_p = -(m_{p(p+1)}(z)\phi_{p+1} + \cdots + m_{pn}(z)\phi_n). \end{array} \right.$$

Posons sur D_r,

$$U(z) = (m_{ij}(z))_{1\leqslant i,j\leqslant p} \quad \text{et} \quad S(z) = (m_{ij}(z))_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![(p+1),n]\!]}.$$

La matrice $U(z)$ est inversible sur $D_r\setminus\{0\}$ donc on a : $(\forall\, \phi \in \mathbf{C}^n)$,

$$(\phi \in V(z)) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = -(U(z))^{-1}S(z)\begin{pmatrix} \phi_{p+1} \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

Posons sur $D_r\setminus\{0\}$,

$$-(U(z))^{-1}S(z) = W(z) = (w_{ij}(z))_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,m]\!]}.$$

La fonction W est méromorphe sur D_r et admet 0 pour seul pôle éventuel, ceci en vertu des règles de calcul d'inversion de matrices.
En posant sur $D_r\setminus\{0\}$, la matrice par blocs

$$H(z) = \begin{pmatrix} W(z) \\ I_m \end{pmatrix} \in M_{nm}(\mathbf{C}),$$

il vient

$$V(z) = \left\{ H(z)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} ; (v_1,\cdots,v_m)\in\mathbf{C}^m \right\} = \mathrm{Vect}(\tilde\psi_1(z),\cdots,\tilde\psi_m(z)),$$

où $\tilde\psi_j(z)$ désigne le j-ième vecteur colonne de $H(z), 1\leqslant j\leqslant m$.
Pour $z\in D_r\setminus\{0\}$, la famille $(\tilde\psi_j(z))_{1\leqslant j\leqslant m}$ constitue une famille génératrice de $V(z)$ qui est de dimension m ; c'est donc une base de $V(z)$.
En outre ces fonctions sont méromorphes, non nulles sur D_r, avec 0 comme seul pôle éventuel.
Si on pose r_j l'ordre du pôle (resp. zéro) 0 dans $\tilde\psi_j$, la famille de fonctions $(\psi_j(z))_{1\leqslant j\leqslant m}$ définie par $\psi_j(z) = z^{r_j}\tilde\psi_j(z)$(resp. $z^{-r_j}\tilde\psi_j(z)$), pour $1\leqslant j\leqslant m$, se prolonge holomorphiquement en 0 et vérifie les propriétés requises.

3-a $V(0)$ est un espace vectoriel. — On garde les notations précédentes.
Nous allons établir que

$$V(0) = \mathrm{Vect}(\psi_1(0),\cdots,\psi_m(0)).$$

Considérons $a = a_1\psi_1(0)+\cdots+a_m\psi_m(0)$; ce vecteur est limite de la suite de terme général

$$a_1\psi_1(1/k)+\cdots+a_m\psi_m(1/k)\in V(1/k), \quad \text{pour } k \text{ assez grand,}$$

ce qui fournit $\mathrm{Vect}(\psi_1(0),\cdots,\psi_m(0))\subset V(0)$.
Pour l'inclusion inverse, considérons $\Psi_{m+1},\cdots,\Psi_n$ des vecteurs de $\mathbf{C}^n$ tels que

$$(\psi_1(0),\cdots,\psi_m(0),\Psi_{m+1},\cdots,\Psi_n)$$

forme une base de $\mathbf{C}^n$ et notons $\Lambda(z)$ la matrice de $M_n(\mathbf{C})$ dont les vecteurs colonnes sont

$$(\psi_1(z),\cdots,\psi_m(z),\Psi_{m+1},\cdots,\Psi_n), \text{ pour } z\in D_r.$$

La fonction $z\mapsto\det(\Lambda(z))$ est holomorphe sur D_r et ne s'annule pas sur un voisinage de l'origine.
Il existe alors $0<r'<r$ tel que $\Lambda(z)$ soit inversible sur $D_{r'}$.
Introduisons ξ un élément de $V(0)$. Il existe donc une suite $(z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $D_{r'}\setminus\{0\}$, de limite nulle et une suite de terme général

$$\xi_k = \xi_{1k}\psi_1(z_k)+\cdots+\xi_{mk}\psi_m(z_k)\in V(z_k)$$

de limite ξ. Remarquons que les suites $(\xi_{1k})_{k\in\mathbf{N}},\cdots,(\xi_{mk})_{k\in\mathbf{N}}$ sont convergentes.
En effet, $(\Lambda(z_k))_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers la matrice inversible $\Lambda(0)$.
On a donc

$$\xi_k=\Lambda(z_k)\begin{pmatrix}\xi_{1k}\\ \vdots\\ \xi_{mk}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\xi_{1k}\\ \vdots\\ \xi_{mk}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=(\Lambda(z_k))^{-1}\xi_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}(\Lambda(0))^{-1}\xi.$$

Si l'on pose $\nu_j=\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty}\xi_{jk}$, pour $1\leqslant j\leqslant m$, il vient

$$\xi_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\nu_1\psi_1(0)+\cdots+\nu_m\psi_m(0)=\xi,$$

ce qui assure que $\xi\in\mathrm{Vect}(\psi_1(0),\cdots,\psi_m(0))$. Il en résulte que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ qui est bien de dimension m, d'où le résultat dans ce cas.

3-b Cas général. — Considérons $\phi_1,\cdots,\phi_m$ des fonctions holomorphes sur D_r, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, telles que pour tout $z\in D_r\setminus\{0\}$, les vecteurs $\phi_1(z),\cdots,\phi_m(z)$ engendrent $V(z)$ et $\phi_1(0),\cdots,\phi_m(0)$ soient non nuls. Nous allons construire $\psi_1,\cdots,\psi_m$ par récurrence.
Le vecteur $\phi_1(0)$ est non nul donc on peut poser $\psi_1=\phi_1$. Supposons que pour $k<m$, les fonctions $\psi_1,\cdots,\psi_k$ soient construites telles que $(\psi_1(0),\cdots,\psi_k(0))$ soit libre et

$$V(z)=\mathrm{Vect}\big(\psi_1(z),\cdots,\psi_k(z),\phi_{k+1}(z),\cdots,\phi_m(z)\big),\ \ \forall\, z\in D_r\setminus\{0\}.$$

Considérons pour $z\in D_r$, la matrice $A(z)$ de $M_{n(k+1)}(\mathbf{C})$ dont les colonnes sont respectivement

$$\psi_1(z),\cdots,\psi_k(z),\phi_{k+1}(z).$$

La matrice $A(z)$ est de rang $k+1$, pour z dans $D_r\setminus\{0\}$.
Donc l'un de ses mineurs d'ordre $k+1$ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de l'origine $D_{r''}\setminus\{0\}$ où $0<r''<r$. Nous supposerons que c'est le mineur obtenu avec les $k+1$ premières lignes pour simplifier les notations et le noterons $\varphi(z)$, pour $z\in D_{r''}$.
On a donc sur $D_{r''}$,

$$\varphi(z)=\det\big(\hat\psi_1(z),\cdots,\hat\psi_k(z),\hat\phi_{k+1}(z)\big)$$

où

$$\hat\psi_1(z),\cdots,\hat\psi_k(z),\hat\phi_{k+1}(z)$$

désignent les colonnes constituées des $k+1$ premières lignes de $\psi_1(z),\cdots,\psi_k(z),\phi_{k+1}(z)$.
Si $(\psi_1(0),\cdots,\psi_k(0),\phi_{k+1}(0))$ est libre, alors on peut prendre $\psi_{k+1}=\phi_{k+1}$.
Sinon supposons

$$\phi_{k+1}(0)=\lambda_1\psi_1(0)+\cdots+\lambda_k\psi_k(0).$$

Alors 0 est un zéro de φ et comme la fonction φ est holomorphe, non nulle sur $D_{r''}$, ce point a un ordre fini $s\geqslant 1$. La fonction définie sur $D_r\setminus\{0\}$ par

$$\Psi: z\mapsto\frac{1}{z}\big(\phi_{k+1}(z)-\lambda_1\psi_1(z)-\cdots-\lambda_k\psi_k(z)\big)$$

est holomorphe et se prolonge de manière holomorphe à l'origine.
En outre, on a pour tout $z\in D_r\setminus\{0\}$,

$$\mathrm{Vect}\big(\psi_1(z),\cdots,\psi_k(z),\phi_{k+1}(z)\big)=\mathrm{Vect}\big(\psi_1(z),\cdots,\psi_k(z),\Psi(z)\big).$$

Par ailleurs, avec des notations évidentes, on a sur $D_{r''}$

$$\varphi(z) = \det\big(\hat\psi_1(z),\cdots,\hat\psi_k(z), z\hat\Psi(z)\big) = z\,\underbrace{\det\big(\hat\psi_1(z),\cdots,\hat\psi_k(z),\hat\Psi(z)\big)}_{\theta(z)}$$

où θ est une fonction holomorphe sur $D_{r''}$.
Si $(\psi_1(0),\cdots,\psi_k(0),\Psi(0))$ est libre, on peut prendre $\psi_{k+1} = \Psi$.
Dans le cas contraire on recommence avec Ψ.
Á la j-ième étape de ce type, on met en évidence une fonction ϱ, holomorphe sur $D_{r''}$ telle que

$$\varphi(z) = z^j \varrho(z).$$

En particulier on a $j \leqslant s$; il existe donc une étape où la fonction Ψ obtenue est telle que

$$(\psi_1(0),\cdots,\psi_k(0),\Psi(0)) \quad \text{est linéairement indépendant.}$$

On choisit alors $\psi_{k+1} = \Psi$, ce qui montre le résultat au rang $k+1$ et achève la démonstration.
La question précédente permet de déduire que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m.

4-a Holomorphie de Π. — Ceci est une conséquence du théorème d'analycité des intégrales dépendant d'un paramètre.

4-b $\Pi(\lambda_0)$ est un projecteur. — Soit Q la matrice de passage de la base canonique à une base de réduction de $N(\lambda_0)$, obtenue en réunissant successivement une base de $E_{\mu_0}(N(\lambda_0))$ puis des autres sous-espaces propres.
On a donc

$$N(\lambda_0) = Q\ \mathrm{Diag}(\underbrace{\mu_0,\cdots,\mu_0}_{r\ \text{fois}},\mu_1,\cdots,\mu_s)Q^{-1}$$

où l'entier $r \geqslant 1$ désigne la multiplicité de la valeur propre μ_0 et $\mu_1,\cdots,\mu_s$ les autres valeurs propres de $N(\lambda_0)$, qui par hypothèse ne sont pas entourés par Γ.
Pour tout $\mu \in \Gamma$, on peut écrire

$$R(\lambda_0,\mu) = Q\ \mathrm{Diag}\big(\underbrace{1/(\mu_0-\mu),\cdots,1/(\mu_0-\mu)}_{r\ \text{fois}},1/(\mu_1-\mu),\cdots,1/(\mu_s-\mu)\big)Q^{-1}$$

Les hypothèses fournissent

$$-\frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma \frac{d\mu}{\mu_0-\mu} = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma \frac{d\mu}{\mu_i-\mu} = 0,\ \ 1 \leqslant i \leqslant s$$

et donc

$$\Pi(\lambda_0) = -\frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma R(\lambda_0,\mu)\ d\mu = Q\ \mathrm{Diag}\big(\underbrace{1,\cdots,1}_{r\ \text{fois}},0,\cdots,0\big)Q^{-1},$$

qui est bien la projection annoncée.

5 $\Pi(\lambda)$ est somme de projecteurs. — Cela s'obtient par un calcul analogue ou tout simplement en utilisant le théorème de Cauchy.

Partie III-B : Courbes spectrales

1 Expression de $d(x_0)$. — Notons $\mu_0,\mu'_0,\cdots,\mu_0^{(s)}$ les racines distinctes de P_{λ_0} et introduisons les points de $\mathscr{C}$

$$x_0 = (\lambda_0,\mu_0), x'_0 = (\lambda_0,\mu'_0),\cdots,x_0^{(s)} = (\lambda_0,\mu_0^{(s)}).$$

Considérons $d, d', \cdots, d^{(s)}$ l'ordre de multiplicité des racines $\mu_0, \mu_0', \cdots, \mu_0^{(s)}$ de P_{λ_0}, de telle manière à avoir sur $\mathbf{C}$

$$P_{\lambda_0}(\mu) = (\mu_0 - \mu)^d \times (\mu_0' - \mu)^{d'} \times \cdots \times (\mu_0^{(s)} - \mu)^{d^{(s)}}.$$

Appliquons les propriétés admises au voisinage des points $x_0, x_0', \cdots, x_0^{(s)}$.
Fixons $k \in [\![0, s]\!]$ et λ assez proche de λ_0. Considérons $(F_\alpha^{(k)}(\mathbb{D}))_{1 \leqslant \alpha \leqslant l^{(k)}}$ la famille de branches locales de $\mathscr{C}$ au voisinage de $x_0^{(k)}$ puis $e_\alpha^{(k)}$ et $d_\alpha^{(k)}$ les ramifications et les multiplicités associées, pour $\alpha \in [\![1, l^{(k)}]\!]$. D'après les hypothèses, il existe $e_\alpha^{(k)}$ points sur la branche $F_\alpha^{(k)}(\mathbb{D})$.
Nous les noterons

$$(\lambda, \mu_{1,\alpha,\lambda}^{(k)}), \cdots, (\lambda, \mu_{e_\alpha^{(k)},\alpha,\lambda}^{(k)}).$$

On peut alors écrire, pour λ assez proche de λ_0

$$P_\lambda = \prod_{k=0}^{s} Q_{\lambda,k} \quad \text{où} \quad Q_{\lambda,k}(\mu) = \prod_{\alpha=1}^{l^{(k)}} \prod_{i=1}^{e_\alpha^{(k)}} (\mu_{i,\alpha,\lambda}^{(k)} - \mu)^{d_\alpha^{(k)}}.$$

Chaque branche locale étant paramétrée par une fonction continue, on peut faire tendre λ vers λ_0, le long de chaque branche, ce qui donne $\mu_{i,\alpha,\lambda}^{(k)} \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} \mu_0^{(k)}$ et par suite

$$P_\lambda(\mu) \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} \prod_{k=0}^{s} (\mu_0^{(k)} - \mu)^{\sum_{\alpha=1}^{l^{(k)}} e_\alpha^{(k)} d_\alpha^{(k)}}.$$

On en déduit alors en particulier, la relation

$$d(x_0) = d = \sum_{\alpha=1}^{l} e_\alpha d_\alpha.$$

2 $e_\alpha = 1$. — Gardons les notations du début de cette partie.
La matrice $A + \lambda B$ étant diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on peut écrire

$$(\forall\, z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}),\ \dim V_\alpha(z) = d_\alpha \quad \text{et} \quad \dim E_{\mu_0}(A + \lambda_0 B) = d(x_0).$$

Par ailleurs, la relation

$$E_{\mu_0}(A + \lambda_0 B) = \sum_{\alpha=1}^{l} V_\alpha(0)$$

fournit

$$\dim E_{\mu_0}(A + \lambda_0 B) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{l} \dim V_\alpha(0).$$

Mais d'après ce qui a été obtenu en **III-A-3**, on a

$$(\forall\, \alpha \in [\![1, l]\!]), \quad \dim V_\alpha(0) = d_\alpha.$$

Il en résulte alors

$$d(x_0) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{l} d_\alpha$$

et par application de **III-B-1**

$$\sum_{\alpha=1}^{l} e_\alpha d_\alpha \leqslant \sum_{\alpha=1}^{l} d_\alpha.$$

Comme $e_\alpha \geqslant 1$, il vient $e_\alpha = 1$, pour tout $\alpha \in [\![1, l]\!]$.

3-a Construction des μ_i. — Considérons un point $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ de $\mathscr{C}$ et $F_\alpha(\mathbb{D})$ une branche locale en ce

point. D'après ce qui précède, on a $e_\alpha = 1$.
On en déduit que $f'_\alpha(0) \neq 0$ et que l'on peut appliquer à l'origine le théorème d'inversion locale.
Il existe alors un voisinage ω de l'origine dans $\mathbb{D}$ et Ω un voisinage de λ_0 tel que $z \mapsto f_\alpha(z)$ constitue un C^∞-difféomorphisme de ω sur Ω. Notons f_α^{-1} la réciproque de cette fonction sur Ω.
Cette fonction est holomorphe et l'on peut définir $\Theta = g_\alpha \circ f_\alpha^{-1}$, qui est holomorphe sur Ω.
Le graphe de Θ est contenu sur la branche $F_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathscr{C}$. Montrons que l'on peut prolonger Θ en une fonction entière dont le graphe est contenu dans $\mathscr{C}$.
La fonction Θ est développable en série entière au voisinage de λ_0. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que le rayon de convergence de cette série entière soit un réel $\varrho > 0$.
Elle définit une fonction holomorphe φ sur $D(\lambda_0, \varrho)$, le disque ouvert de convergence.
La fonction φ coïncide avec Θ sur un voisinage de λ_0. On a donc $P_\lambda(\varphi(\lambda)) = 0$ sur un voisinage de λ_0. La fonction

$$\lambda \mapsto P_\lambda(\varphi(\lambda)) = \det(A + \lambda B - \varphi(\lambda) I_n)$$

étant holomorphe sur $D(\lambda_0, \varrho)$, nulle sur un voisinage de λ_0, elle est donc nulle sur $D(\lambda_0, \varrho)$, ce qui assure que le graphe de φ est contenu dans $\mathscr{C}$.
Considérons λ_1 un point du cercle de convergence $\partial D(\lambda_0, \varrho)$.
Pour λ suffisamment proche de λ_1, le graphe de φ se trouve contenu sur l'une des branches locales au voisinage d'un point de $\mathscr{C}$ dont la première projection est λ_1 ; notons x_1 ce point et $G_\beta(\mathbb{D})$ cette branche locale.
Il existe de même une fonction Θ_1, holomorphe sur un voisinage Ω_1 de λ_1 dont le graphe est contenu sur la branche $G_\beta(\mathbb{D})$. La ramification le long de $G_\beta(\mathbb{D})$ étant égale à 1, les fonctions φ et Θ_1 coincïdent autour de λ_1 dans $D(\lambda_0, \varrho) \cap \Omega_1$.
La fonction Θ_1 permet donc de prolonger de manière holomorphe la fonction φ sur un disque ouvert centré en λ_1.
On peut alors recouvrir le cercle $\partial D(\lambda_0, \varrho)$ par un nombre fini de voisinage sur lequel φ admet un prolongement holomorphe. On voit alors qu'il existe $\varrho' > \varrho$ tel que sur $D(\lambda_0, \varrho')$, le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon ϱ', la fonction φ admet un prolongement holomorphe.
Ceci contredit la définition de ϱ, d'où l'absurdité.
On en déduit que φ est entière et constitue un prolongement de Θ qui, comme on l'a vu précédemment, a son graphe contenu dans $\mathscr{C}$.

On peut donc poser $\mu_1 = \varphi$ et avec les notations de **III-B-1**, en raisonnant sur chaque branche locale de chacun des points de $\mathscr{C}$

$$x_0 = (\lambda_0, \mu_0), x'_0 = (\lambda_0, \mu'_0), \cdots, x_0^{(s)} = (\lambda_0, \mu_0^{(s)}),$$

on mettrait en évidence n fonctions entières $\mu_1, \cdots, \mu_n$ dont la réunion des graphes est égale à $\mathscr{C}$, d'où le résultat.

3-b μ_i est affine. — Fixons un entier k dans $[\![1, n]\!]$. Choisissons sur $M_n(\mathbf{C})$ une norme N, subordonnée à une norme de $\mathbf{C}^n$. On a alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$

$$|\mu_k(\lambda)| \leqslant N(A + \lambda B) \leqslant N(A) + |\lambda| N(B).$$

La fonction μ_k est donc affine, d'après le théorème de Liouville, d'où le résultat.

4-a Détermination de ρ et Λ. — Les valeurs propres de $A + \lambda B - \mu I_n$ sont, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\mu_i(\lambda) - \mu = a_i + \lambda b_i - \mu, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

On veut établir l'existence de $\rho > 0$ et de $\Lambda > 0$ tel que : $(\forall\, r > 0), (\forall\, \lambda \in \mathbf{C})$

$$(0 < r < \rho) \text{ et } (|\lambda| > \Lambda) \Longrightarrow (\forall\, \theta \in [0, 2\pi]), (\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2),\ a_i + \lambda b_i - (a_j + \lambda b_j + re^{i\theta}) \neq 0.$$

Fixons (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$. Une petite discussion élémentaire permet de mettre en évidence l'existence de $\rho_{ij} > 0$ et de $\Lambda_{ij} > 0$ tels que : $(\forall\, r > 0), (\forall\, \lambda \in \mathbf{C})$

$$(0 < r < \rho_{ij}) \text{ et } (|\lambda| > \Lambda_{ij}) \Longrightarrow (\forall\, \theta \in [0, 2\pi]),\ a_i + \lambda b_i - (a_j + \lambda b_j + re^{i\theta}) \neq 0.$$

On obtient le résultat souhaité pour le choix de

$$\rho = \min_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \rho_{ij} \quad \text{et} \quad \Lambda = \max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \Lambda_{ij}.$$

4-b Holomorphie de $\Pi_{j,r}$. — Ceci est une conséquence du théorème d'analycité des intégrales dépendant d'un paramètre.

4-c $\Pi_{j,r}$ admet une limite en $+\infty$. — Fixons j dans $[\![1,n]\!]$. D'après la définition de ρ, le complexe $\mu_j(\lambda)$ est la seule valeur propre de $A+\lambda B$ entourée par $\Gamma_j(\lambda,r)$, pour tout $\lambda \in U_\Lambda$.
On en déduit que $\Pi_{j,r}(\lambda)$ est le projecteur spectral sur $E_{\mu_j(\lambda)}(A+\lambda B)$.
De la relation $A+\lambda B = \lambda(B+\lambda^{-1}A)$, on déduit que : $(\forall\, \lambda \in U_\lambda)$,

$$E_{\mu_j(\lambda)}(A+\lambda B) = E_{\lambda^{-1}\mu_j(\lambda)}(B+\lambda^{-1}A) = E_{(b_j+\lambda^{-1}a_j)}(B+\lambda^{-1}A)$$

et par suite que $\Pi_{j,r}(\lambda)$ est le projecteur spectral sur $E_{(b_j+\lambda^{-1}a_j)}(B+\lambda^{-1}A)$.
Il s'agit de montrer que $\Pi_{j,r}(1/s)$, le projecteur spectral sur $E_{(b_j+sa_j)}(B+sA)$, admet une limite lorsque s tend vers 0. Posons

$$\mathscr{C}' = \{(s,t)\in \mathbf{C}^2\,;\, P_{B+sA}(t) = \det(B+sA-tI_n) = 0\}.$$

Comme B est diagonalisable, l'ensemble $\mathscr{C}'$ a des propriétés analogues à $\mathscr{C}$; ce qui précède montre que $\mathscr{C}'$ est la réunion des graphes des applications affines

$$t_i(s) = b_i + sa_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

On a donc

$$P_B(t) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - t) = (t_0-t)^d \times (t_0'-t)^{d'} \times \cdots \times (t_0^{(k)}-t)^{d^{(k)}}$$

où $\{t_0, t_0', \cdots, t_0^{(k)}\}$ constitue l'ensemble des racines de P_B, de multiplicité respective $d, d', \cdots, d^{(k)}$.
Plaçons nous au voisinage de $y_0 = (0,t_0)$ dans $\mathscr{C}'$. Considérons $(G_\alpha(\mathbb{D}))_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$ la famille de branches locales en y_0 dont les multiplicités respectives sont $(d_\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$.
Il existe $i_\alpha \in [\![1,n]\!]$ tel que la branche $G_\alpha(\mathbb{D})$ soit paramétrée autour de l'origine par $(s, t_{i_\alpha}(s))$, pour tout $1\leqslant\alpha\leqslant l$. Introduisons alors pour $s\neq 0$ suffisamment proche de l'origine $W_\alpha(s)$, le noyau de $B+sA-t_{i_\alpha}(s)I_n$ et les sous-espaces vectoriels $W_\alpha(0)$ associés comme en **III-A-3**, pour tout $1\leqslant\alpha\leqslant l$.
Sur un voisinage épointé de 0, les sous-espaces vectoriels $(W_\alpha(s))_{1\leqslant\alpha\leqslant l}$ sont en somme directe.
Par ailleurs, la matrice B étant diagonalisable, on peut écrire

$$E_{t_0}(B) = \sum_{\alpha=1}^{l} W_\alpha(0).$$

Pour $s\neq 0$ assez proche de 0, on a $d(s, t_{i_\alpha}(s)) = d_\alpha$ et comme $B+sA$ est diagonalisable, il vient

$$\dim W_\alpha(s) = d_\alpha,$$

d'où par **III-A-3**

$$\dim W_\alpha(0) = d_\alpha,\ 1\leqslant\alpha\leqslant l.$$

Les questions **III-B-1** et **III-B-2** fournissent

$$d(y_0) = \sum_{\alpha=1}^{l} d_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{l} \dim W_\alpha(0).$$

La matrice B étant diagonalisable, on en déduit

$$\dim E_{t_0}(B) = \sum_{\alpha=1}^{l} \dim W_\alpha(0)$$

ce qui assure plus précisément la somme directe

$$E_{t_0}(B) = \bigoplus_{1\leqslant\alpha\leqslant l} W_\alpha(0).$$

On a vu dans **III-A-3-b**, qu'il existe d_α fonctions $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2}, \cdots, \psi_{\alpha d_\alpha}$, holomorphes sur un voisinage de 0 telles que

$$\Psi_\alpha(s) = \left(\psi_{\alpha 1}(s), \psi_{\alpha 2}(s), \cdots, \psi_{\alpha d_\alpha}(s)\right)$$

constitue une base de $W_\alpha(s), 1 \leqslant \alpha \leqslant l$.
Sur un voisinage épointé de l'origine, la famille $\mathscr{B}_0(s) = \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant l} \Psi_\alpha(s)$ constitue une base de $\bigoplus_{1\leqslant\alpha\leqslant l} W_\alpha(s)$, où chaque $W_\alpha(s)$ constitue un sous-espace propre de $B + sA$, pour $1 \leqslant \alpha \leqslant l$.
En outre $\mathscr{B}_0$ est holomorphe sur un voisinage de 0 avec $\mathscr{B}_0(0)$ qui constitue une base de $E_{t_0}(B)$.

En travaillant de manière analogue au voisinage des points $y_0' = (0, t_0'), \cdots, y_0^{(k)} = (0, t_0^{(k)})$ dans $\mathscr{C}'$, on met en évidence des fonctions $\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_k$, holomorphes au voisinage de l'origine.
La matrice $B + sA$ est diagonalisable, pour tout $s \in \mathbf{C}$; on a alors sur un voisinage de l'origine

$$\mathscr{B}(s) = \prod_{i=0}^{k} \mathscr{B}_i(s)$$

qui forme une base de vecteurs propres de $B + sA$ dans $\mathbf{C}^n$ et est une fonction holomorphe de s.
Notons $Q(s)$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}(s)$, pour s suffisamment proche de 0.
Alors $s \mapsto Q(s)$ est holomorphe sur un voisinage de 0, à valeurs dans $GL_n(\mathbf{C})$. En outre, sur un voisinage épointé de l'origine, la matrice

$$D(s) = Q^{-1}(s)\Pi_{j,r}(1/s)Q(s)$$

est diagonale, avec des coefficients diagonaux contenus dans $\{0,1\}$. Comme D est continue sur un voisinage épointé de l'origine, elle prend une valeur constante Δ_j.
On a donc sur un voisinage épointé de l'origine,

$$\Pi_{j,r}(1/s) = Q(s)\Delta_j Q^{-1}(s),$$

fonction qui admet clairement un prolongement holomorphe en 0, ce qui constitue le résultat.

5 (*b*) ⇒ (*a*) dans MT(*n*, C). — Fixons j dans $[[1,n]]$; introduisons la fonction $\Pi_{j,r}$ précédente.
Nous allons établir que pour $r > 0$ assez petit, la fonction $\Pi_{j,r}$ se prolonge en une fonction entière.
On a $\mu_i : \lambda \mapsto a_i + \lambda b_i$, pour $i \in [[1,n]]$. Il est alors aisé de constater que les seuls points où l'on a un éventuel problème sont les complexes λ où le cercle $\Gamma_j(\lambda, r)$ rencontre une valeur propre de $A + \lambda B$.
Notons $\Upsilon(r)$ l'ensemble de ces complexes. On a précisément : $(\forall\, \lambda \in \mathbf{C})$,

$$\begin{aligned}\left(\lambda \in \Upsilon(r)\right) &\Longleftrightarrow \left((\exists i \in [[1,n]]),\ |\mu_i(\lambda) - \mu_j(\lambda)| = r\right)\\ &\Longleftrightarrow \left((\exists i \in [[1,n]]),\ |(a_i - a_j) + \lambda(b_i - b_j)| = r\right).\end{aligned}$$

Si $b_i = b_j$, pour tout $i \in [[1,n]]$, on a alors en prenant $r > 0$ assez petit, $\Pi_{j,r}$ entière.
Sinon pour $i \in [[1,n]]$ tel que $b_i \neq b_j$,

$$|(a_i - a_j) + \lambda(b_i - b_j)| = r \Longleftrightarrow \left|\lambda - \frac{a_j - a_i}{b_i - b_j}\right| = \frac{r}{|b_i - b_j|}.$$

On voit alors dans ce dernier cas, pour $r > 0$ assez petit, que $\Upsilon(r)$ est une réunion de cercles $\gamma_1(r), \cdots, \gamma_k(r)$ dont les centres ne dépendent pas de r et les rayons sont respectivement

$$\frac{r}{|b_{i_1} - b_j|}, \cdots, \frac{r}{|b_{i_k} - b_j|},$$

où
$$\{i_1, \cdots, i_k\} = \{i \in [\![1, n]\!] \, ; b_i \neq b_j\}.$$

Fixons un tel réel r ; considérons λ_0 un complexe de $\Upsilon(r)$, distinct des centres des cercles de $\Upsilon(r)$.
On peut alors trouver $0 < r' < r$ tel que λ_0 soit intérieur à la composante connexe non bornée de $\Upsilon(r')$.
Notons Ω et Ω' l'intérieur des composantes connexes non bornées respectives de $\Upsilon(r)$ et $\Upsilon(r')$.
On a bien sur $\Omega \subset \Omega'$; en outre $\Pi_{j,r}$ est holomorphe sur Ω et $\Pi_{j,r'}$ est holomorphe sur Ω'.
Comme pour λ complexe de module assez grand, $\Pi_{j,r}(\lambda)$ et $\Pi_{j,r'}(\lambda)$ représentent le projecteur spectral sur $E_{\mu_j(\lambda)}(A+\lambda B)$, les fonctions $\Pi_{j,r}$ et $\Pi_{j,r'}$ coincïdent à l'infini. On en déduit que ces fonctions coincïdent sur Ω. Ainsi $\Pi_{j,r'}$ constitue un prolongement holomorphe en λ_0 de la fonction $\Pi_{j,r}$.

Enfin, en chacun des centres des cercles de $\Upsilon(r)$, on prolonge $\Pi_{j,r}$ holomorphiquement, de la même manière que l'on a prolongé
$$s \mapsto \Pi_{j,r}(1/s)$$
en 0 dans la question précédente.
La fonction $\Pi_{j,r}$ peut être prolongée en une fonction entière qui admet une limite quand $|\lambda|$ tend vers l'infini. Elle est donc constante.
Ainsi ce résultat vaut pour chaque $\Pi_{j,r}, 1 \leqslant j \leqslant n$, en prenant $r > 0$ assez petit ; considérons alors λ et λ' deux complexes distincts de module suffisamment grand.
On sait que les ensembles
$$\{\Pi_{j,r}(\lambda) \, ; 1 \leqslant j \leqslant n\} \quad \text{et} \quad \{\Pi_{j,r}(\lambda') \, ; 1 \leqslant j \leqslant n\}$$
décrivent respectivement l'ensemble de tous les projecteurs spectraux de $A+\lambda B$ et de $A+\lambda' B$.
Les fonctions $\Pi_{j,r}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, étant constantes, on en déduit que les matrices $A+\lambda B$ et $A+\lambda' B$ ont les mêmes sous-espaces propres.
Il en résulte que ces matrices commutent et par suite que A et B commutent.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Notations, définitions et rappels

- Soient S^1 le cercle : $\{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$, D le disque : $\{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$. On note $\mathscr{C}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions continues de S^1 dans $\mathbf{C}$, $\mathscr{C}^*$ le groupe des inversibles de cette algèbre, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}$ qui ne s'annulent pas sur S^1. L'algèbre $\mathscr{C}$ est munie de la norme uniforme sur S^1, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}, \qquad |\varphi|_\infty = \max\left\{|\varphi(z)|\ ;\ z \in S^1\right\}.$$

- Si n est dans $\mathbf{Z}$, soit e_n l'élément de $\mathscr{C}$ défini par :

$$\forall z \in S^1, \quad e_n(z) = z^n.$$

- Si f est une fonction de S^1 dans $\mathbf{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \tilde{f}(t) = f(e^{it}).$$

  Selon l'usage, on identifie deux fonctions f_1 et f_2 de S^1 dans $\mathbf{C}$ telles que les fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ soient mesurables au sens de Lebesgue et coïncident sur le complémentaire d'une partie négligeable de $[-\pi,\pi]$. On note L^1 (resp. L^2) l'ensemble des (classes de) fonctions f de S^1 dans $\mathbf{C}$ telles que $\tilde{f}$ soit intégrable (resp. de carré intégrable) au sens de Lebesgue sur $[-\pi,\pi]$. Pour f dans L^1, soit :

$$\int f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{d}t.$$

  L'application qui à f dans L^1 associe $|f|_1 = \displaystyle\int |f|$ est une norme sur L^1.
- Si f est dans L^1, on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad \hat{f}(n) = \int f e_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

  On rappelle que $\hat{f}$ est nulle si et seulement si f est l'élément nul de L^1.
- Pour f_1 et f_2 dans L^2, on notera $\langle f_1, f_2\rangle = \displaystyle\int (\overline{f_1} \times f_2)$, définissant ainsi un produit scalaire hermitien sur L^2. La norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$ est notée $|\ |_2$. Si f est dans L^2, alors :

$$|f|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2\,\mathrm{d}t}.$$

– On rappelle que L^2 est contenu dans L^1, avec de plus :

$$\forall f \in L^2, \qquad |f|_1 \leqslant |f|_2.$$

– On rappelle également que L^2 est un espace de Hilbert complexe dont $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne.
– Si E est un espace vectoriel et F un sous-espace de E, on dit que F est de *codimension finie dans* E si et seulement si l'espace quotient E/F est de dimension finie. La dimension de E/F est alors appelée *codimension de* F *dans* E, notée $\operatorname{codim}_E(F)$.
On rappelle par ailleurs que tout supplémentaire de F dans E est isomorphe à E/F. Si G est un tel supplémentaire, F est donc de codimension finie dans E si et seulement si G est de dimension finie, et on a alors : $\operatorname{codim}_E(F) = \dim G$.
– Dans la fin de ces rappels, $(H, \langle\,,\,\rangle)$ est un espace de Hilbert complexe.
– Si V est un sous-espace de H, on note $V^\perp$ l'orthogonal de V ; le sous-espace $V^\perp$ est un supplémentaire de V dans H si et seulement si V est fermé dans H.
– On note $\mathscr{L}(H)$ la $\mathbf{C}$-algèbre des endomorphismes continus de H. Les éléments de $\mathscr{L}(H)$ sont appelés *opérateurs* de l'espace H. Si T_1 et T_2 sont dans $\mathscr{L}(H)$, on abrège $T_2 \circ T_1$ en T_2T_1. On note I l'identité de H, c'est-à-dire le neutre multiplicatif de $\mathscr{L}(H)$. L'algèbre $\mathscr{L}(H)$ est munie de la norme subordonnée définie par :

$$\forall T \in \mathscr{L}(H), \qquad \|T\| = \sup\left\{\frac{|T(x)|}{|x|},\ x \in H\setminus\{0\}\right\},$$

où $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ désigne la norme du vecteur x de H.
– Pour tout élément T de $\mathscr{L}(H)$ il existe un unique T^* dans $\mathscr{L}(H)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in H^2, \qquad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

– On rappelle enfin les relations suivantes, valables pour tout T de $\mathscr{L}(H)$:

$$\ker T^* = \operatorname{Im} T^\perp, \qquad \overline{\operatorname{Im} T^*} = \ker T^\perp.$$

Objectif du problème, dépendance des parties

– Le but du problème est d'associer à tout élément φ de $\mathscr{C}$ un endomorphisme continu T_φ d'un espace de Hilbert et d'étudier T_φ.

– La partie **I** démontre une formule de Jensen relative aux éléments de $H(D)$. La partie **II** détermine les composantes connexes par arcs de $\mathscr{C}^*$. La partie **III** introduit l'espace de Hardy H^2, la partie **IV** les opérateurs de Toeplitz T_φ. Les parties **V** et **VI** étudient respectivement les opérateurs compacts et les opérateurs de Fredholm d'un espace de Hilbert et appliquent les résultats obtenus aux T_φ ; elles aboutissent notamment à la caractérisation des φ de $\mathscr{C}$ tels que T_φ soit inversible.
– La partie **I** n'est utilisée que dans la partie **III**. La partie **II** n'est utilisée que dans la partie **VI**. La partie **III** n'est utilisée que dans la partie **IV**.

I. Formule de Jensen

1. (a) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Ecrire le polynôme $X^{2n} - 1$ comme produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbf{C}[X]$, puis de $\mathbf{R}[X]$.
En déduire, si r est dans $]1, +\infty[$, une expression simple de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - 2r\cos(k\pi/n) + r^2).$$

(b) Soit r dans $]1,+\infty[$. En utilisant éventuellement la question précédente, établir les égalités :

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos t+r^2)\,\mathrm{d}t = 2\pi\ln r,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|1-re^{it}\right|\right)\mathrm{d}t = 2\pi\ln r.$$

(c) Justifier l'existence de :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|1-e^{it}\right|\right)\mathrm{d}t,$$

puis montrer que cette intégrale est nulle.

(d) Soient a dans $\mathbf{C}^*$, r dans $\mathbf{R}^{+*}$ avec : $|a| \leqslant r$. Calculer l'intégrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|a-re^{it}\right|\right)\mathrm{d}t.$$

2. Ici, F est une fonction holomorphe sur D telle que $F(0) \neq 0$. On fixe r dans $]0,1[$ et on note $D_r = \{z \in \mathbf{C},\ |z| \leqslant r\}$. On rappelle (théorème des zéros isolés) que F n'a qu'un nombre fini de zéros comptés avec multiplicités dans D_r. On note $a_1,\ldots,a_p$ ces zéros comptés avec multiplicités.

   Montrer l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(|F(re^{it})|\right)\mathrm{d}t = \ln(|F(0)|) + \sum_{i=1}^{p} \ln\left(\frac{r}{|a_i|}\right).$$

   Indication. On pourra utiliser, sans démonstration, l'existence d'une fonction G holomorphe sur un voisinage de D_r telle que :

$$\forall z \in D_r, \qquad F(z) = \prod_{i=1}^{p}(z-a_i)\, e^{G(z)}.$$

   La formule précédente implique l'inégalité ci-après, utilisée en **III**.3.(c) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(|F(re^{it})|\right)\mathrm{d}t \geqslant \ln(|F(0)|).$$

II. Composantes connexes par arcs de $\mathscr{C}^*$

Si φ est dans $\mathscr{C}^*$, on appelle *relèvement de* φ toute application continue θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi\left(e^{it}\right) = e^{\theta(t)}.$$

L'ensemble des relèvements de φ est noté $R(\varphi)$.

1. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point, f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\forall t \in I, \qquad e^{f(t)} = e^{g(t)}.$$

   Montrer que la fonction $f-g$ est constante.

2. Soient φ dans $\mathscr{C}^*$, A dans $\mathbf{R}^{+*}$. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et k dans $\{0,\dots,n-1\}$, on note $u_{k,n}$ la fonction continue de $[-A,A]$ dans $\mathbf{C}^*$ définie par :

$$\forall t \in [-A,A], \qquad u_{k,n}(t) = \frac{\varphi\left(e^{i(k+1)t/n}\right)}{\varphi\left(e^{ikt/n}\right)}.$$

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe n dans $\mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\}, \quad \forall t \in [-A,A], \qquad \left|\varphi\left(e^{i(k+1)t/n}\right) - \varphi\left(e^{ikt/n}\right)\right| < \varepsilon.$$

   (b) Montrer qu'il existe n dans $\mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\}, \qquad \forall t \in [-A,A], \qquad \left|u_{k,n}(t) - 1\right| < 1.$$

   En déduire que pour tout k de $\{0,\dots,n-1\}$ il existe une fonction continue $v_{k,n}$ de $[-A,A]$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\forall t \in [-A,A], \qquad u_{k,n}(t) = e^{v_{k,n}(t)}.$$

   Indication. On rappelle qu'il existe une (unique) fonction continue L de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ dans la bande $\{z \in \mathbf{C},\ |Im\,(z)| < \pi\}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-, \qquad e^{L(z)} = z.$$

   (c) Montrer qu'il existe une fonction continue θ_A de $[-A,A]$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\forall t \in [-A,A], \qquad \varphi(e^{it}) = e^{\theta_A(t)}.$$

   (d) Conclure que $R(\varphi)$ n'est pas vide.

3. (a) Si φ est dans $\mathscr{C}^*$, θ dans $R(\varphi)$ et t dans $\mathbf{R}$, montrer que le réel

$$\frac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{2i\pi}$$

   est un entier relatif indépendant du couple (θ, t) de $R(\varphi) \times \mathbf{R}$. L'entier ainsi défini est appelé *degré de* φ et noté $\deg(\varphi)$.

   (b) Calculer le degré de φ dans les cas suivants :
      i) $\varphi = e_n$ où $n \in \mathbf{Z}$,
      ii) $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{C}^*$ (réponse en fonction des degrés de φ_1 et φ_2),
      iii) φ est un élément de $\mathscr{C}^*$ à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$.

   (c) Soient φ_1 et φ_2 dans $\mathscr{C}^*$ telles que : $|\varphi_1 - \varphi_2| < |\varphi_1|$. Montrer :

$$\deg(\varphi_1) = \deg(\varphi_2).$$

   Indication. On pourra considérer φ_2/φ_1.

   (d) Montrer que l'application deg qui à φ associe $\deg(\varphi)$ est continue sur $\mathscr{C}^*$ muni de la topologie provenant de la norme $|\ |_\infty$.

4. Pour n dans $\mathbf{Z}$, soit $\mathscr{C}_n^*$ l'ensemble des φ de $\mathscr{C}^*$ de degré n.
   Montrer que les $\mathscr{C}_n^*$ sont les composantes connexes par arcs de $\mathscr{C}^*$ (toujours muni de la topologie provenant de $|\ |_\infty$).

   Indication. Pour φ dans $\mathscr{C}_0^*$, on pourra considérer θ dans $R(\varphi)$ et, pour s dans $[0,1]$, H_s l'application définie sur S^1 par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad H_s(e^{it}) = e^{s\theta(t)}.$$

III. Espace de Hardy H^2

On note H^2 le sous-espace de L^2 constitué des f telles que :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}, \qquad \hat{f}(n) = 0.$$

1. Montrer que H^2 est un sous-espace fermé de L^2 dont $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne.

   Dans la suite, l'espace H^2 est muni de la structure d'espace de Hilbert induite par celle de L^2. On note Π le projecteur orthogonal de L^2 sur H^2.
   Si f est dans L^2, exprimer la décomposition de $\Pi(f)$ sur $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Soit f dans H^2. Justifier que le rayon de convergence de la série entière

   $$\sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)\, z^n$$

   est supérieur ou égal à 1.

   Pour z dans D, soit :

   $$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)\, z^n.$$

   Pour r dans $[0,1[$, soit f_r la fonction définie sur S^1 par :

   $$\forall z \in S^1, \qquad f_r(z) = F(rz).$$

   Prouver que $|f_r - f|_2$ tend vers 0 lorsque r tend vers 1.
3. Soit f un élément non nul de H^2. Le but de cette question est de démontrer que l'ensemble des t de $[-\pi,\pi]$ tels que $f(e^{it}) = 0$ est de mesure de Lebesgue nulle. Quitte à multiplier f par e_{-m} où m est le plus petit i de $\mathbf{N}$ tel que : $\hat{f}(i) \neq 0$, on peut supposer $\hat{f}(0) \neq 0$ et c'est ce qu'on fait désormais. On fixe ε dans $]0,1[$.

   (a) Montrer que $\ln(|f| + \varepsilon)$ appartient à L^1.

   (b) Si r est dans $[0,1[$, t dans $\mathbf{R}$, établir :

   $$\left|\ln\left(|f_r(e^{it})| + \varepsilon\right) - \ln\left(|f(e^{it})| + \varepsilon\right)\right| \leqslant \frac{|f_r(e^{it}) - f(e^{it})|}{\varepsilon}.$$

   (c) En utilisant l'inégalité obtenue à la fin de **I**, établir :

   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|f(e^{it})\right| + \varepsilon\right) \mathrm{d}t \geqslant \ln\left(\left|\hat{f}(0)\right|\right).$$

   (d) Conclure.

IV. Opérateurs de Toeplitz

Soit φ dans $\mathscr{C}$.

1. (a) Si f est dans H^2, vérifier que $\Pi(\varphi \times f)$ est un élément de H^2.

   Dans la suite, on note T_φ l'application de H^2 dans lui-même qui à f associe $\Pi(\varphi \times f)$. Il est clair que T_φ est un endomorphisme de H^2.

   Vérifier que T_φ appartient à $\mathscr{L}(H^2)$; T_φ est appelé *opérateur de Toeplitz* de symbole φ.

(b) Si i et j sont dans $\mathbf{N}$, exprimer $\langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle$ à l'aide de $\hat{\varphi}$.
L'application qui à φ associe T_φ est-elle injective ?

(c) Montrer la relation : ${T_\varphi}^* = T_{\overline{\varphi}}$.

2. On suppose que φ n'est pas l'application nulle. On fixe f dans $\ker T_\varphi$, g dans H^2, on pose : $u = \varphi \times f \times \overline{g}$.

(a) Montrer que u est dans L^1 et que $\hat{u}$ est nulle sur $\mathbf{N}$.

(b) On suppose désormais que g est dans $\ker T_\varphi^*$. En considérant $\overline{u}$, montrer que u est l'élément nul de L^1.

(c) Conclure en utilisant la question **III**.3 que l'un au moins des deux opérateurs T_φ et T_φ^* est injectif. Si T_φ n'est pas injectif, montrer que son image est dense dans H^2.

Dans les parties **V** *et* **VI**, $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *est un espace de Hilbert complexe. On adopte les notations rappelées au début du problème et on note B la boule fermée de centre* 0 *et de rayon* 1 *de H.*

V. Opérateurs compacts et opérateurs de Toeplitz

Un élément T de $\mathscr{L}(H)$ est dit *compact* si et seulement si $\overline{T(B)}$ est une partie compacte de H. On note $\mathscr{K}(H)$ l'ensemble des T de $\mathscr{L}(H)$ vérifiant cette propriété, $\mathscr{K}_0(H)$ l'ensemble des T de $\mathscr{L}(H)$ dont l'image est de dimension finie.

1. (a) Montrer que $\mathscr{K}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathscr{L}(H)$ contenant $\mathscr{K}_0(H)$.

(b) Montrer que $\mathscr{K}(H)$ est fermé dans $\mathscr{L}(H)$.

Indication. On rappelle qu'une partie X de H est d'adhérence compacte si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par une réunion finie de boules fermées de rayon ε.

2. Dans cette question, H est l'espace de Hilbert H^2, $\mathscr{P}$ le sous-espace de $\mathscr{C}$ engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

(a) Si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{P}$, montrer que $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\times\varphi_2}$ est dans $\mathscr{K}_0(H^2)$.

(b) Si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{C}$, montrer que $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\times\varphi_2}$ est dans $\mathscr{K}(H^2)$.

3. Soit K dans $\mathscr{K}(H)$.

(a) Montrer que $\ker(I+K)$ est de dimension finie.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}\,(I+K)$ est fermé dans H.
Indication. Soient y dans H adhérent à $\mathrm{Im}\,(K+I)$, $(x_n)_{n\geqslant O}$ une suite d'éléments de H telle que : $K(x_n)+x_n \to y$, et, pour tout n de $\mathbf{N}$, *x'_n la projection orthogonale de x_n sur $\ker(K+I)^\perp$. En raisonnant par l'absurde et en considérant $u_n = x'_n/|x'_n|$, montrer que $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Conclure.*

(c) Montrer que K^* appartient à $\mathscr{K}(H)$.
Indication. Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de B, Γ l'adhérence de $K(B)$ dans H, et, pour tout n de $\mathbf{N}$, *f_n la fonction de Γ dans* $\mathbf{C}$ *qui à x associe $\langle x_n, x\rangle$. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geqslant 0}$ d'entiers naturels telle que $\left(f_{n_k}\right)_{k\geqslant 0}$ converge uniformément sur Γ. En déduire que $\left(K^*(x_{n_k})\right)_{k\geqslant 0}$ converge dans H.*

(d) Montrer que $\mathrm{Im}\,(I+K)$ est de codimension finie dans H.

VI. Opérateurs de Fredholm et opérateurs de Toeplitz

Soit T dans $\mathscr{L}(H)$. On dit que T est de *Fredholm* si et seulement s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

i) l'espace $\ker T$ est de dimension finie,

ii) l'espace $\operatorname{Im} T$ est fermé et de codimension finie dans H.

On note $\mathscr{F}(H)$ l'ensemble des T de $\mathscr{L}(H)$ vérifiant ces propriétés. Si T est dans $\mathscr{F}(H)$ on appelle *indice de* T et on note $\operatorname{ind}(T)$ l'entier relatif :

$$\dim(\ker T) - \operatorname{codim}_H(\operatorname{Im} T).$$

On remarquera que si T est un élément inversible de $\mathscr{L}(H)$, alors T appartient à $\mathscr{F}(H)$ et a pour indice 0.

1. (a) Soient V et W deux sous-espaces de H tels que $V \subset W$ et que V soit fermé et de codimension finie dans H. Montrer que W est fermé et de codimension finie dans H.
   (b) Soit T dans $\mathscr{L}(H)$. On suppose qu'il existe S_1 et S_2 dans $\mathscr{L}(H)$ tels que $K_1 = S_1 T - I$ et $K_2 = T S_2 - I$ appartiennent à $\mathscr{K}(H)$. Montrer que T est dans $\mathscr{F}(H)$.
2. Dans cette question, H est l'espace de Hilbert H^2, φ un élément de $\mathscr{C}^*$. Montrer que T_φ est dans $\mathscr{F}(H^2)$.

   Indication. On pourra utiliser les questions **V**.*2.(b),* **VI**.*1(b) et considérer la fonction* $1/\varphi$.
3. On se propose d'établir une réciproque de la question **VI**.1.(b) ci-dessus.

   Soit T dans $\mathscr{F}(H)$. On note T_0 l'application linéaire de $\ker T^\perp$ dans $\operatorname{Im} T$ obtenue en restreignant T à $\ker T^\perp$, P le projecteur orthogonal de H sur $\operatorname{Im} T$. Il est clair que T_0 est un isomorphisme de $\ker T^\perp$ sur $\operatorname{Im} T$. Or, tout isomorphisme linéaire continu d'un espace de Banach sur un autre est un homéomorphisme (théorème de Banach) ; il en résulte que T_0^{-1} est continu, ce que l'on ne demande pas de justifier davantage.

   Soit S l'élément $T_0^{-1} P$ de $\mathscr{L}(H)$. Reconnaître les éléments $ST - I$ et $TS - I$ de $\mathscr{L}(H)$ et montrer en particulier qu'ils appartiennent à $\mathscr{K}_0(H)$.

   Des questions **VI**.1.(b) et **VI**.3 il résulte qu'un élément de $\mathscr{L}(H)$ est dans $\mathscr{F}(H)$ si et seulement s'il est "inversible modulo $\mathscr{K}(H)$ " ou "inversible modulo $\mathscr{K}_0(H)$". Ceci prouve en particulier que si T_1 et T_2 sont dans $\mathscr{F}(H)$, $T_2 T_1$ est dans $\mathscr{F}(H)$, ce que l'on ne demande pas de justifier davantage.
4. Le but de cette question est d'établir que $\mathscr{F}(H)$ est ouvert dans $\mathscr{L}(H)$ et que la fonction ind est localement constante sur $\mathscr{F}(H)$.

   Soient T dans $\mathscr{F}(H)$, S dans $\mathscr{L}(H)$ telle que $K = ST - I$ et $L = TS - I$ soient dans $\mathscr{K}_0(H)$, J dans $\mathscr{L}(H)$ vérifiant : $\|J\| \times \|S\| < 1$.

   (a) Montrer qu'il existe K' et L' dans $\mathscr{K}_0(H)$ tels que :

   $$S(T+J) = (I+SJ)(I+K')\ ,\ \ (T+J)S = (I+L')(I+JS).$$

   En déduire que $T+J$ est dans $\mathscr{F}(H)$, ce qui justifie bien le caractère ouvert de $\mathscr{F}(H)$.
   Indication. On pourra utiliser la question **VI**.*1(b) et le fait que si U est un élément de $\mathscr{L}(H)$ tel que $\|U\| < 1$, alors $I+U$ est inversible dans l'algèbre $\mathscr{L}(H)$.*

   (b) On admet les deux résultats suivants, qui peuvent être prouvés de manière entièrement algébrique :

   i) si T_1 et T_2 sont dans $\mathscr{F}(H)$, alors : $\operatorname{ind}(T_2 T_1) = \operatorname{ind}(T_1) + \operatorname{ind}(T_2)$,

   ii) si K est dans $\mathscr{K}_0(H)$, $\operatorname{ind}(I+K) = 0$.

   Montrer que :

   $$\operatorname{ind}(T+J) = \operatorname{ind}(T).$$

   La fonction ind est donc localement constante sur $\mathscr{F}(H)$.

5. Dans cette question, H est l'espace de Hilbert H^2.
   (a) Montrer que si φ est dans $\mathscr{C}^*$, on a :
   $$\mathrm{ind}(T_\varphi) = -\deg(\varphi).$$
   (b) Si φ est dans $\mathscr{C}^*$, préciser la dimension de $\ker T_\varphi$ et la codimension de $\mathrm{Im}\ T_\varphi$ dans H^2.
   (c) Quels sont les éléments φ de $\mathscr{C}$ tels que T_φ soit un élément inversible de l'algèbre $\mathscr{L}(H^2)$?

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Epreuve d'Analyse et de Probabilités

Présentation du sujet

On adopte dans cette présentation les notations de l'énoncé.

Le but du problème est d'étudier les opérateurs de Toeplitz à symbole continu sur le cercle S^1. Ces opérateurs sont définis de la façon suivante. Notons L^2 l'espace de Hilbert constitué des (classes de) fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue sur S^1, H^2 le sous-espace fermé de L^2 formé des fonctions dont les coefficients de Fourier d'indice < 0 sont nuls (ou, de façon équivalente, dont l'extension de Poisson au disque unité est holomorphe), Π le projecteur orthogonal de L^2 sur H^2. Si φ est une fonction mesurable et bornée de S^1 dans $\mathbf{C}$, on note T_φ l'endomorphisme continu de H^2 défini par :

$$\forall f \in H^2, \qquad T_\varphi(f) = \Pi(f\varphi).$$

On dit que T_φ est l'*opérateur de Toeplitz de symbole* φ ; la matrice (infinie) de T_φ dans la base hilbertienne canonique de H^2 est :

$$\left(\hat{\varphi}(i-j)\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2},$$

formule qui montre en particulier que T_φ détermine φ (injectivité de la transformation de Fourier).

Les opérateurs de multiplication par une fonction bornée sur L^2 sont normaux et leur étude spectrale est simple. Il n'en va pas de même des opérateurs de Toeplitz. Dans le cas où le symbole φ est dans $\mathscr{C}$, auquel on se borne désormais, on peut cependant déterminer le spectre et le spectre essentiel de T_φ.

Théorème 1 *(i) Le spectre essentiel de T_φ, i.e l'ensemble des complexes λ tels que $T_\varphi - \lambda I$ ne soit pas un opérateur de Fredholm, est l'image de φ.*

(ii) Le spectre de T_φ est la réunion de l'image de φ et de l'ensemble des points λ de $\mathbf{C} \setminus \varphi(S^1)$ dont l'indice relativement à φ est non nul.

Le résultat final du problème est la caractérisation des symboles continus φ tels que T_φ soit inversible ; il est équivalent au point *(ii)* ci-dessus. Seule une partie de *(i)* est établie : si φ est dans $\mathscr{C}^*$, T_φ est de Fredholm, ce qui entraîne que le spectre essentiel de T_φ est contenu dans l'image de φ. La preuve de la réciproque n'est pas difficile, mais a été omise pour ne pas alourdir le sujet.

La démonstration du critère d'inversibilité proposée dans le problème est basée sur le théorème suivant.

Théorème 2 *Si φ ne s'annule pas, l'opérateur T_φ est de Fredholm et son indice est l'opposé du degré de φ.*

Ce résultat relie l'indice de l'analyse fonctionnelle et celui de la topologie. Les théorèmes 1 et 2 sont dûs à Gohberg et Krein (circa 1955) ; ils ont été obtenus de façon indépendante par d'autres auteurs (Widom, Devinatz).

La formulation et la démonstration des théorèmes 1 et 2 nécessitent quelques prérequis. Pour établir le théorème 2, il faut ainsi définir le degré d'une application continue de S^1 dans $\mathbf{C}^*$ (partie **II**), l'espace H^2 (partie **III**), les T_φ (partie **IV**), les opérateurs compacts (partie **V**), les opérateurs de Fredholm et leurs indices (partie **VI**). Il faut également disposer de quelques résultats de base : caractérisation des classes d'homotopie de S^1 par le degré, théorie élémentaire des opérateurs compacts (caractère d'idéal fermé, premières propriétés spectrales), caractérisation d'Atkinson des opérateurs de Fredholm comme opérateurs inversibles modulo les compacts, ouverture de l'ensemble des opérateurs de Fredholm, continuité de l'indice.

La preuve du théorème 2 se résume alors comme suit. On établit tout d'abord que si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{C}$, $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1\varphi_2}$ est compact ; cet opérateur est en fait de rang fini si φ_1 et φ_2 sont des polynômes trigonométriques, ce qui permet d'obtenir sa compacité dans le cas général par approximation. Ce point étant acquis, on voit aussitôt que si φ appartient à $\mathscr{C}^*$, $T_{1/\varphi}$ est un inverse de T_φ modulo les opérateurs compacts, donc que T_φ est de Fredholm. Par continuité de l'indice et homotopie, il suffit pour conclure de calculer l'indice de T_φ pour $\varphi = e_n$, $n \in \mathbf{Z}$; mais ce cas particulier est immédiat.

Il reste un peu de travail pour obtenir le critère d'inversibilité : en effet, un opérateur inversible est de Fredholm et d'indice nul, mais la réciproque est fausse. Pour les T_φ, on dispose cependant du résultat ci-après, dû à Coburn (1966).

Théorème 3 *Si φ n'est pas identiquement nul, l'un des deux opérateurs T_φ, T_φ^* est injectif.*

Combiné au théorème 2 et à un argument très simple, le théorème 3 fournit une preuve élégante de la caractérisation des opérateurs de Toeplitz inversibles.

La démonstration du théorème 3 est donnée dans la partie **IV**. Elle est fondée sur une propriété de rigidité remarquable des éléments de H^2, à savoir le cas particulier suivant du théorème des frères Riesz.

Théorème 4 *Si un élément f de H^2 s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive alors $f = 0$.*

Les éléments de H^2, valeurs au bord de certaines fonctions holomorphes, héritent donc d'une forme affaiblie du théorème des zéros isolés. Le théorème 4 est quant à lui démontré dans la partie **III**. L'outil essentiel de la démonstration est la classique formule de Jensen, établie dans la partie **I** et grâce à laquelle on montre en fait un résultat plus précis que le théorème 4 : si f est dans $H^2 \setminus \{0\}$, alors la fonction $\ln(|f|)$ est intégrable sur S^1.

Indiquons pour terminer une bibliographie sommaire.

Le théorème 2 est établi dans [1], [2], [3], [4]. Il est étendu aux opérateurs de Toeplitz matriciels dans [1] ; [1] et [2] appliquent le théorème 2 à la preuve d'un théorème de périodicité.

Les livres [2], [3], [4] contiennent tous les prérequis d'analyse fonctionnelle nécessaires à la preuve du théorème 2. Ils établissent notamment les deux résultats admis dans le texte : indice d'une composée, nullité de l'indice de $I + K$ si K est de rang fini. Ces deux points peuvent être établis de façon purement algébrique ; les preuves ne sont pas difficiles et ont été omises uniquement pour ne pas allonger déraisonnablement l'énoncé.

La caractérisation des opérateurs de Toeplitz inversibles est présentée dans [3], [4] et [5]. La preuve donnée dans [5] est particulièrement élémentaire et n'utilise pas les opérateurs de Fredholm.

On trouvera dans [3], [4] et [5] une étude plus approfondie de l'espace de Hardy H^2 et de ses analogues non hilbertiens H^1 et H^∞. Le chapitre 17 du classique [6] est une introduction très efficace à l'étude plus générale des espaces H^p. Toutes ces références proposent en outre une approche différente du théorème 4, basée sur la description, découverte par Beurling, des sous-espaces fermés de H^2 stables par le shift.

Enfin, [7] contient de nombreux renseignements historiques concernant les opérateurs compacts, les opérateurs de Fredholm, la théorie de l'indice et les opérateurs de Toeplitz.

Bibliographie

[1] M. Atiyah, *Algebraic Topology and operators in Hilbert space*, Lectures in Analysis, vol. 103, pp.101-121, Springer, 1969.

[2] B. Boos, D.D. Blecker, *Topology and Analysis. The Atiyah-Singer Index Formula and gauge Theoretic Physic*, Springer, 1985.

[3] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Second Edition*, Springer, 1998.

[4] P.D. Lax, *Functional Analysis*, Wiley, 2002.

[5] R.A. Martinez-Avendano, P. Rosenthal, *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert class*, Springer, 2007.

[6] W. Rudin, *Real and complex Analysis*, Third Edition, Mc-Graw-Hill, 1987.

[7] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, 2007.

Rapport sur la correction des copies

Généralités

Le problème abordait des thèmes variés : intégration, fonctions holomorphes, topologie, analyse hilbertienne et analyse fonctionnelle. Cette variété a permis à d'assez nombreux candidats de faire preuve de réelles qualités mathématiques. Dans une demi-douzaine de copies, le sujet est traité à moins de cinq sous-questions près. Dans leur grande majorité, les candidats se sont réellement confrontés aux parties **I** et **II**. Les parties **III**, **IV** et **V** ont été abordées de façon plus inégale et **VI** n'a réellement été entamée que dans très peu de copies.

Traiter correctement l'ensemble des parties **I** et **II** représentait une performance très convenable. Pour l'essentiel, ces deux parties relevaient du premier cycle universitaire. La correction a mis en évidence de nombreuses lacunes à ce niveau, dont certaines sont explicitées ci-dessous. Rappelons que la maîtrise des notions et techniques de base doit être un des objectifs essentiels de la préparation et que cette maîtrise inclut une capacité raisonnable à mettre en pratique lesdites notions et techniques.

La qualité de la rédaction est un élément important d'appréciation, particulièrement dans un concours de recrutement d'enseignants. Le jury a été surpris cette année par l'importante quantité de copies mal rédigées. Les énoncés non quantifiés, l'utilisation des quantificateurs comme abréviations, les phrases incomplètes ou incorrectes et une orthographe déficiente sont monnaie courante et évidememment pénalisés. Dans le même ordre d'idées, rappelons qu'il est très recommandé d'écrire lisiblement, de présenter les copies de façon agréable et de mettre en évidence les résultats en soulignant ou en encadrant.

Partie I

La question **I.1.**a) a donné lieu à des erreurs surprenantes : beaucoup de candidats ne semblent pas connaître les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ ou ne pas être capables de regrouper deux racines conjuguées.

Dans la question **I.1.**b), la convergence de la somme de Riemmann a rarement été justifiée.

La convergence de l'intégrale de **I.1.**c), immédiate, est souvent omise, fausse ou laborieuse. De nombreux candidats comprennent que la valeur de l'intégrale s'obtient par un passage à la limite, mais très peu donnent un argument complet. Dans les tentatives d'utilisation du théorème de convergence dominée, $\ln\left(|1-re^{it}|\right)$ est souvent seulement majoré.

La question **I.1.**d) a souvent été bien résolue.

Malgré l'indication, la question **I.2.** a rarement été traitée de façon satisfaisante ; parmi les arguments faux, relevons l'holomorphie du module d'une fonction holomorphe ! Notons aussi que le module de e^z donne souvent lieu à des erreurs.

Partie II

La question **II.1** a été bien traitée par un assez grand nombre de candidats.

Les questions **II.2.**a) et **II.2.**b) se sont avérées sélectives : de nombreuses copies montrent que l'argument essentiel (uniforme continuité, puis borne inférieure atteinte) est compris, mais la rédaction ne suit pas toujours.

La question **II.2.**c) a été souvent correctement résolue. En revanche, **II.2.**d) na été vue que par une poignée de candidats.

La question **II.3.**a) a été traitée en général ; beaucoup de candidats oublient cependant de vérifier une des deux indépendances demandées. Les questions **II.3.**b) et **II.3.**c) ont été résolues par d'assez nombreux candidats. En revanche, **II.4.**, but de cette partie, a rarement été complètement traitée.

Partie III

La question **III.1** a montré que la notion de convergence dans L^2 est en général mal comprise.

La première partie de **III.2** a mis en évidence une mauvaise compréhension de la notion de rayon de convergence d'une série entière : on trouve dans beaucoup de copies répondant à cette question la “vérification" de la convergence de la série pour tout z de module 1 ! La seconde partie de la question a été assez sélective ; certains candidats se sont appuyés sur les propriétés du noyau de Poisson, démarche un peu maladroite dans le cadre hilbertien mais dénotant des connaissances solides et bien comprises.

Les questions **III.3.**a) et **III.3.**b) découlaient d'inégalités élémentaires mais demandaient une certaine lucidité à ce stade du problème ; l'erreur signalée ci-dessus à propos de **I.1.**c) s'y est souvent retrouvée. Les deux questions finales de cette partie demandaient du soin et ont rarement été abordées.

Partie IV

La difficulté essentielle de cette partie consistait à comprendre la définition des opérateurs de Toeplitz ; beaucoup de candidats se sont contentés de répondre à **IV.1.**a), en général convenablement.

Partie V

Cette partie faisait établir ceux des résultats de base de la théorie de Riesz des opérateurs compacts utilisés dans **VI**. Sans doute à cause de son caractère classique, elle a été abordée substantiellement dans un nombre non négligeable de copies ; les questions traitées l'ont en général été correctement.

Partie VI

Seules les meilleures copies ont traité une proportion significative de cette partie, certaines allant, au prix de quelques imprécisions, jusqu'à l'avant dernière question du problème. La dernière question n'a jamais été résolue complètement.

4.3 Corrigé

Corrigé du problème

Partie I

I.1.a) Pour k dans $\{0,\dots,2n-1\}$, soit : $z_k = e^{ik\pi/n}$. On a :

$$X^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}(X-z_k).$$

Parmi les z_k, seuls $z_0=1$ et $z_n=-1$ sont réels, et, si $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a :

$$z_k=\overline{z_{2n-k}}.$$

Puisqu'un polynôme de degré 2 sans racine réelle est irréductible sur $\mathbf{R}$, on en déduit la décomposition sur $\mathbf{R}[X]$:

$$X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos(k\pi/n)X+1\right).$$

Par suite :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-2r\cos(k\pi/n)+r^2)=\ln\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right).$$

I.1.b) La relation :

$$\forall\, t\in\mathbf{R},\qquad 1-2r\cos t+r^2=|1-re^{it}|^2>0$$

montre que la fonction intégrée est bien définie et continue sur $[0,\pi]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence des sommes de Riemann, d'où :

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-2r\cos(k\pi/n)+r^2\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos t+r^2)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la relation obtenue dans la question précédente et la relation :

$$\frac{1}{n}\ln(r^{2n}-1)\underset{n\to 0}{\longrightarrow}2\ln r,$$

on a la première des égalités demandées.

En observant que :

$$|1-re^{it}|^2=1-2r\cos t+r^2,$$

on obtient, en utilisant la parité de la fonction intégrée :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(|1-re^{it}|\right)\mathrm{d}t=2\pi\ln r.$$

I.1.c) Pour t dans $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, le réel $|1-e^{it}|$ est >0. Et $\ln|1-e^{it}| \underset{t\to 0}{\sim} \ln|t|$, d'où l'intégrabilité de la fonction proposée (la fonction ln est designe constant au voisinage de 0).

Pour calculer l'intégrale, on fait tendre r vers 1^+ dans la question précédente. Le passage à la limite se justifie au moyen du théorème de convergence dominée et de l'inégalité :

$$\forall (r,t)\in]1,2]\times (]-\pi,\pi[\setminus\{0\}), \quad |\ln(|1-re^{it}|)| \leqslant \ln 3 + |\ln(|2\sin(t/2)|)|,$$

elle-même conséquence de l'encadrement :

$$\forall (r,t)\in]1,2[\times[-\pi,\pi], \qquad 4\sin^2(t/2)\leqslant 1-2r\cos t+r^2\leqslant 9.$$

La majoration est triviale, la minoration s'obtient en étudiant, à t fixé, la fonction $r\mapsto 1-2r\cos t+r^2$ sur $]1,2]$.

I.1.d) On écrit, pour t dans $[-\pi,\pi]$ tel que $re^{it}/a\neq 1$, l'égalité :

$$\ln\left(\left|a-re^{it}\right|\right)=\ln(|a|)+\ln\left(\left|1-\frac{re^{it}}{a}\right|\right).$$

Posant : $a=|a|e^{i\varphi}$ avec φ dans $\mathbf{R}$, on a :

$$\ln\left(\left|1-\frac{re^{it}}{a}\right|\right)=\ln\left(\left|1-\frac{re^{i(t-\varphi)}}{|a|}\right|\right).$$

Le réel $r/|a|$ étant $\geqslant 1$, les deux questions précédentes entraînent, compte-tenu de la 2π-périodicité de la fonction considérée :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(\left|1-\frac{re^{i(t-\varphi)}}{|a|}\right|\right)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(\left|1-\frac{re^{it}}{|a|}\right|\right)\mathrm{d}t=2\pi\ln\left(\frac{r}{|a|}\right).$$

En fin de compte :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(\left|a-re^{it}\right|\right)\mathrm{d}t=2\pi\ln r.$$

I.2. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, soit $H(\Omega)$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur Ω. Pour justifier l'existence de G (non demandée par l'énoncé), on utilise les deux résultats classiques suivants :

(i) si f est dans $H(\Omega)$ et nulle en $a\in\Omega$, il existe g dans $H(\Omega)$ telle que :

$$\forall z\in\Omega, \qquad f(z)=(z-a)g(z)\ ;$$

(ii) si Ω est simplement connexe alors pour toute f dans $H(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω, il existe g dans $H(\Omega)$ telle que :

$$\forall z\in\Omega, \qquad f(z)=e^{g(z)}.$$

On a alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(\left|F(re^{it})\right|\right)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,\left(G\left(re^{it}\right)\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{p}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(\left|re^{it}-a_i\right|\right)\mathrm{d}t.$$

L'holomorphie de G entraîne que G possède la propriété de valeur moyenne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G\left(re^{it}\right)\mathrm{d}t=G(0).$$

En prenant les parties réelles, il vient :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,\left(G\left(re^{it}\right)\right)\mathrm{d}t=2\pi\ \mathrm{Re}\,(G(0))=2\pi\ln\left(\frac{|F(0)|}{\prod_{i=1}^{p}|a_i|}\right),$$

formule que l'on pourrait déduire de façon équivalente du caractère harmonique de $\mathrm{Re}\,G$. Compte-tenu de **I.1.d)**, on en déduit la formule désirée.

Partie II

II.1. La fonction $f-g$ est à valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$ qui est une partie discrète de $\mathbf{C}$. Mais, puisque $f-g$ est continue, l'image de I par $f-g$ est un connexe de $\mathbf{C}$. Les parties connexes et discrètes de $\mathbf{C}$ étant les singletons, le résultat suit.

II.2.a) La fonction :

$$g\,:t\mapsto\varphi(e^{it})$$

est continue donc uniformément continue sur le compact $[-A,A]$. Si on choisit $\delta>0$ d'uniforme continuité de g relatif à ε puis n dans $\mathbf{N}^*$ tel que : $A/n<\delta$, le théorème des accroissements finis entraîne :

$$\forall\, t\in[-A,A],\qquad |e^{it/n}-1|\leqslant\frac{|t|}{n}\leqslant\frac{A}{n}$$

et la condition de l'énoncé est satisfaite.

II.2.b) La fonction $|\varphi|$ est continue sur le compact S^1, à valeurs dans $\mathbf{R}^{+*}$. Elle atteint donc un minimum ε, lequel est >0. Si n est choisi comme dans la question précédente, on a, pour tout t de $[-A,A]$, tout k de $\{0,\dots,n-1\}$:

$$|u_{k,n}(t)-1|\leqslant\left|\frac{\varphi(e^{i(k+1)t/n})-\varphi(e^{ikt/n})}{\varepsilon}\right|<1.$$

Puisque $u_{k,n}$ est à valeurs dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1, lui-même contenu dans $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^-$, il suffit de poser $v_{k,n}=L\circ u_{k,n}$ pour répondre à la seconde partie de la question.

II.2.c) Posons :

$$v=\sum_{k=0}^{n-1}v_{k,n}.$$

Alors :

$$\forall\, t\in[-A,A],\qquad e^{v(t)}=\prod_{k=0}^{n-1}u_{k,n}(t)=\frac{\varphi(e^{it})}{\varphi(1)}.$$

Si α est un complexe tel que : $e^{\alpha}=\varphi(1)$, la fonction $\theta_A=v+\alpha$ vérifie la relation demandée.

II.2.d) Pour tout N de $\mathbf{N}^*$, on dispose donc d'une fonction continue θ_N de $[-N,N]$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant :

$$\forall\, t\in[-N,N],\qquad \varphi(e^{it})=e^{\theta_N(t)}.$$

La restriction de $\theta_{N+1}-\theta_N$ à $[-N,N]$ est constante d'après **II.1**. On peut donc, en ajoutant à θ_{N+1} une constante de $2i\pi\mathbf{Z}$ convenable, supposer que θ_N est restriction de θ_{N+1}. Ceci permet de définir de façon cohérente une fonction θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ par :

$$\forall\, N\in\mathbf{N}^*,\qquad \theta_{[-N,N]}=\theta_N.$$

Cette fonction est clairement un relèvement de φ.

II.3.a) La fonction :

$$t\mapsto\frac{\theta(t+2\pi)-\theta(t)}{2i\pi}$$

est continue à valeurs dans $\mathbf{Z}$ donc constante (**II.1**) d'où l'indépendance relativement à t. Puisque deux éléments de $R(\varphi)$ diffèrent d'une constante (**II.1**), on a l'indépendance relativement à θ.

II.3.b) L'application $t\mapsto int$ est un relèvement de e_n, donc le degré de e_n est n.

Si θ_i est, pour i dans $\{1,2\}$, un relèvement de φ_i, alors $\theta_1+\theta_2$ est un relèvement de $\varphi_1\times\varphi_2$, donc cette dernière application a pour degré $\deg(\varphi_1)+\deg(\varphi_2)$.

Si φ est à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$, la fonction :
$$t \mapsto L\Big(\varphi(e^{it})\Big)$$
est un relèvement 2π-périodique de φ, donc φ est de degré nul.

II.3.c) Par hypothèse, φ_2/φ_1 est à valeurs dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1, donc dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$, donc de degré nul. La conclusion résulte de la formule :

$$\deg(\varphi_2) = \deg(\varphi_1) + \deg(\varphi_2/\varphi_1).$$

II.3.d) Si φ_1 est dans $\mathscr{C}^*$, si ε est le minimum de $|\varphi_1|$ sur le compact S^1, alors $\varepsilon > 0$ et la question précédente assure que si φ_2 est un élément de $\mathscr{C}^*$ tel que : $|\varphi_2 - \varphi_1|_\infty < \varepsilon$, alors $\deg(\varphi_2) = \deg(\varphi_1)$. L'application deg est donc localement constante sur $\mathscr{C}^*$, c'est-à-dire continue.

II.4. Observons d'abord que la continuité du degré montre que deux éléments de $\mathscr{C}^*$ ayant des degrés distincts sont nécessairement dans deux composantes connexes par arcs distinctes de cet espace. D'autre part, grâce à la relation $\mathscr{C}_n^* = e_n \mathscr{C}_0^*$, il suffit de démontrer que $\mathscr{C}_0^*$ est connexe par arcs pour obtenir que tel est le cas de tous les $\mathscr{C}_n^*$ et établir ainsi le résultat demandé.
Variante : l'application deg étant un morphisme de groupes de $\mathscr{C}^*$ dans $\mathbf{Z}$, il suffit de prouver sa continuité en l'élément neutre de $\mathscr{C}^*$, laquelle découle de **II.3.**c).

Suivons à présent l'indication proposée par l'énoncé. Puisque φ est de degré nul, θ est 2π-périodique et l'application H_s est correctement définie pour tout s de $[0,1]$. On a :

$$H_0 = \varphi(1), \qquad H_1 = \varphi.$$

En observant que $(s,t) \mapsto H_s(t)$ est continue sur le compact $[0,1] \times S^1$ donc uniformément continue, on montre aisément que l'application :
$$\begin{array}{rccc} H : & [0,1] & \to & \mathscr{C}^* \\ & s & \mapsto & H_s \end{array}$$
est continue. La fonction constante e_0 et la fonction φ sont donc dans la même composante connexe par arcs de $\mathscr{C}^*$.

Partie III

III.1. Pour le premier point, il suffit d'établir que les formes linéaires

$$f \mapsto \hat{f}(n)$$

pour n dans $\mathbf{Z}$ sont continues sur L^2. Or l'égalité de Parseval implique que ces formes sont toutes de normes inférieures ou égales à 1 (en fait 1, bien sûr).

D'autre part, la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormée comme sous-famille de la famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. Et, pour f dans H^2, la décomposition de f sur la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ s'écrit $f = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)\, e_n$ (convergence dans L^2) d'où le caractère total de $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans H^2.

Enfin, Π induit l'identité sur H^2 et l'application nulle sur le supplémentaire orthogonal de H^2 dans L^2 ; de plus, $(e_n)_{n\leqslant -1}$ est une base hilbertienne de ce supplémentaire. Par suite :

$$\forall f \in L^2, \qquad \Pi(f) = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)\, e_n.$$

III.2. La justification est immédiate car la suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de carré sommable, en particulier bornée.

Grâce à la formule de Parseval :

$$|f_r - f|_2 = \sqrt{\sum_{n\geqslant 0} |\hat{f}(n)|^2 (1-r^n)^2}.$$

En majorant $(1-r^n)^2$ par 1 et en utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries, on en déduit la convergence demandée.

III.3.a) L'encadrement :

$$\forall x \geqslant 0, \qquad \ln\varepsilon \leqslant \ln(x+\varepsilon) \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$$

et l'appartenance de f à L^2 donc à L^1 montrent que $\ln(|f|+\varepsilon)$ est dans L^1.

III.3.b) Il suffit de remarquer que, grâce à l'inégalité des accroissements finis, la fonction ln est $(1/\varepsilon)$-lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$.

III.3.c) On a :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \qquad \ln\left(\left|f(re^{it})\right| + \varepsilon\right) \geqslant \ln\left(\left|f(re^{it})\right|\right).$$

En intégrant cette inégalité entre $-\pi$ et π et en tenant compte de l'inégalité vue à la fin de **I**, il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|f(re^{it})\right| + \varepsilon\right) \mathrm{d}t \geqslant \ln\left(\left|\hat{f}(0)\right|\right).$$

Pour obtenir l'inégalité demandée, il reste à faire tendre r vers 1^- en notant que f_r converge vers f dans L^2 et donc dans L^1, ce qui entraîne, via la question précédente, que $\ln(|f_r|+\varepsilon)$ tend vers $\ln\left(|f|+\varepsilon\right)$ dans L^1 lorsque r tend vers 1^-.

III.3.d) On applique le théorème de convergence monotone à la famille $(g_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ définie par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad g_\varepsilon(t) = \ln(|f(e^{it})| + \varepsilon).$$

Lorsque ε tend vers 0, les fonctions g_ε convergent simplement en décroissant vers la fonction g égale à $\ln(|f(e^{it})|)$ en tout t tel que $f(e^{it}) \neq 0$, à $-\infty$ en tout t tel que $f(e^{it}) = 0$. Puisque les intégrales des g_ε sont minorées indépendamment de ε par c), le théorème de convergence monotone assure l'intégrabilité de g, plus forte que le résultat demandé.

Partie IV

IV.1.a) D'abord, f est dans L^2, et φ dans L^∞, ce qui assure l'appartenance de $\varphi \times f$ à L^2 et la majoration :

$$|\varphi \times f|_2 \leqslant |\varphi|_\infty |f|_2.$$

D'autre part, Π applique L^2 dans H^2 et est de norme 1 en tant que projection orthogonale. On en déduit que $T_\varphi(f)$ est dans H^2 de norme au plus égale à $|\varphi|_\infty |f|_2$. Autrement dit, T_φ est dans $\mathscr{L}(H^2)$ de norme subordonnée majorée par $|\varphi|_\infty$.

IV.1.b) Puisque e_i est orthogonal à e_k si $k<0$, on a :

$$\langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle = \langle e_i, \varphi \times e_j\rangle.$$

Mais au sens de la convergence dans L^2, on a :

$$\varphi \times e_j = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{\varphi}(l)\, e_{j+l},$$

où on utilise la convergence L^2 de la série de Fourier de φ vers φ et la continuité sur L^2 de l'opérateur de multiplication par la fonction bornée e_j. On en déduit :

$$\langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle = \hat{\varphi}(i-j).$$

Puisque la transformation de Fourier est injective sur $\mathscr{C}$, ce calcul montre qu'il en est de même de $\varphi \mapsto T_\varphi$.

IV.1c) Si i et j sont dans $\mathbf{N}$, on a :

$$\langle T_\varphi^*(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, T_\varphi(e_j)\rangle = \hat{\varphi}(i-j),$$

mais aussi :

$$\langle T_{\overline{\varphi}}(e_i), e_j\rangle = \overline{\langle e_j, T_{\overline{\varphi}}(e_i)\rangle} = \overline{\hat{\overline{\varphi}}(j-i)} = \hat{\varphi}(i-j).$$

Puisque un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert est entièrement déterminé par l'image d'une base hilbertienne, la formule :

$$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$$

s'en déduit.

Il est possible de résoudre la question par un calcul direct, sans recours aux coefficients de Fourier.

IV.2.a) D'abord $\varphi \times f$ est dans L^2 comme produit d'un élément de L^2 par une fonction bornée, et u est dans L^1 comme produit de deux éléments de L^2.

Ensuite $v = \varphi \times f$ est dans l'orthogonal de H^2 dans L^2, donc ses coefficients de Fourier d'indices $\geqslant 0$ sont nuls. Puisque g est dans H^2, les coefficients de Fourier d'indices > 0 de $\overline{g}$ sont nuls. En écrivant v et g comme limites dans L^2 de leurs sommes partielles de Fourier, il s'ensuit (continuité du produit de $L^2 \times L^2$ dans L^1) que u est limite dans L^1 de polynômes trigonométriques à spectres contenus dans $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$. Par continuité de la transformation de Fourier de L^1 dans c_0, les coefficients de Fourier d'indices $\geqslant 0$ de u sont nuls.

IV.2.b) En utilisant la relation $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$ et une argumentation semblable à celle de a), on montre que les coefficients de Fourier d'indices $\geqslant 0$ de $\overline{u}$ sont nuls, donc que les coefficients de Fourier d'indices $\leqslant 0$ de u sont nuls. Finalement $\hat{u}$ est nulle et donc u est l'élément nul de L^1.

IV.2.c) Supposons que f et g soient des éléments non nuls de H^2. Alors f et g sont presque partout non nuls grâce à **III.3)**. Puisque φ n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses points de non annulation est de mesure > 0. La fonction u ne peut être presque partout nulle, ce qui contredit la question précédente.

On a ainsi prouvé que l'un au moins des deux opérateurs T_φ et T_φ^* est injectif. Or, l'injectivité de T_φ^* implique, via le résultat sur l'adhérence de l'image de l'adjoint rappelé en début d'énoncé et la formule : $({T_\varphi}^*)^* = T_\varphi$, la densité de l'image de T_φ dans H^2.

Partie V

V.1.a) Puisqu'une partie bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est relativement compacte, $\mathscr{K}(H)$ contient $\mathscr{K}_0(H)$, en particulier l'endomorphisme nul de H.

Soient T et T' dans $\mathscr{K}(H)$, U dans $\mathscr{L}(H)$. On a :

$$(T+T')(B) \subset T(B) + T'(B),$$

et un argument de double extraction assure que la somme de deux parties relativement compactes d'un espace normé est relativement compacte. Il s'ensuit que $T+T'$ est dans $\mathscr{K}(H)$.

Par ailleurs, si $r = \|U\|$, $U(B)$ est contenu dans rB, d'où : $TU(B) \subset rT(B)$. Il est clair que l'image d'une partie relativement compacte de H par une homothétie est relativement compacte, d'où l'appartenance de TU à $\mathscr{K}(H)$. Enfin, $UT(B)$ est contenu dans l'image par l'application continue U du compact $\overline{T(B)}$, donc est relativement compact.

V.1.b) Soient T dans $\mathscr{L}(H)$ adhérent à $\mathscr{K}(H)$, $\varepsilon > 0$, K dans $\mathscr{K}(H)$ tel que :

$$\|T-K\| \leqslant \varepsilon.$$

On recouvre $K(B)$ par un nombre fini de boules de H de rayon ε. Les boules centrées sur les mêmes points et de rayon 2ε recouvrent $T(B)$, ce qui établit la précompacité de cet ensemble et l'appartenance de T à $\mathcal{K}(H)$.

La question pouvait également être résolue par un argument diagonal.

V.2.a) Par bilinéarité, il suffit de traiter le cas où $\varphi_1 = e_m$ et $\varphi_2 = e_n$ avec m et n dans $\mathbf{Z}$. Or :

$$\forall k \geqslant -n, \qquad T_{e_{m+n}}(e_k) - T_{e_m} T_{e_n}(e_k) = 0.$$

Puisqu'un élément de H^2 est limite au sens L^2 de ses sommes partielles de Fourier, on en déduit que l'image de $T_{e_{m+n}} - T_{e_m} T_{e_n}$ est contenue dans le sous-espace de dimension finie engendré par les e_k pour $0 \leqslant k < -n$.

V.2.b) L'application qui à φ associe T_φ est linéaire continue (de norme majorée par 1) de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{L}(H^2)$. La multiplication est continue dans les deux algèbres de Banach $\mathscr{C}$ et $\mathscr{L}(H^2)$. Le théorème d'approximation de Weierstrass assure que l'espace $\mathscr{P}$ est dense dans $\mathscr{C}$. Il en résulte, grâce à **V.2.a)**, que si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathscr{C}$, $T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} - T_{\varphi_1 \times \varphi_2}$ appartient à l'adhérence de $\mathcal{K}_0(H^2)$ dans $\mathscr{L}(H^2)$ donc, d'après **V.1.b)**, à $\mathcal{K}(H^2)$.

V.3.a) On a :

$$\ker(K+I) \cap B \subset K(B).$$

On en déduit que la boule unité de $\ker(K+I)$ est compacte, ce qui amène la conclusion via le théorème de Riesz.

V.3.b) Suivons l'indication. On note d'abord que :

$$K(x'_n) + x'_n = K(x_n) + x_n.$$

Supposons maintenant (x'_n) non bornée. Quitte à extraire, on peut supposer :

$$|x'_n| \to +\infty,$$

ce qui entraîne :

$$K(u_n) + u_n \to 0.$$

La compacité de K donne une valeur d'adhérence v de $(K(u_n))$. Quitte à extraire à nouveau, on suppose $K(u_n) \to v$. Mais on a alors :

$$u_n \to -v \qquad \text{et} \qquad K(v) + v = 0.$$

Or, le vecteur v est unitaire et appartient au sous-espace fermé $\ker(K+I)^\perp$, d'où la contradiction désirée.

Il est maintenant aisé de conclure. Puisque (x'_n) est bornée, on peut, quitte à extraire, supposer que $(K(x'_n))$ converge. On en déduit que (x'_n) converge également et que la limite x' de (x'_n) vérifie $y = K(x') + x'$, d'où le résultat.

V.3.c) Par hypothèse, Γ est une partie compacte de H. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que les f_n sont toutes 1-lipschitziennes et bornées par le rayon d'une boule centrée sur 0 contenant Γ. La suite (f_n) est donc uniformément bornée et équicontinue sur le compact Γ ; grâce au théorème d'Ascoli, il existe une suite strictement croissante (n_k) d'entiers naturels telle que (f_{n_k}) converge uniformément sur Γ.

Pour montrer que $\left(K^*(x_{n_k})\right)$ converge dans H, on utilise le critère de Cauchy et l' égalité :

$$|f_{n_k} - f_{n_l}|_\infty = |K^*(x_{n_k}) - K^*(x_{n_l})|.$$

Cette dernière formule vient du fait que le premier membre de l'égalité est égal à :

$$\sup\left\{|\langle K(x), x_{n_k} - x_{n_l}\rangle| \; ; \; x \in B\right\},$$

donc à :

$$\sup\left\{|\langle x, K^*(x_{n_k}) - K^*(x_{n_l})\rangle| \; ; \; x \in B\right\} = \left|K^*(x_{n_k}) - K^*(x_{n_l})\right|.$$

V.3.d) L'espace $\mathrm{Im}(I+K)$ est fermé, donc supplémentaire dans H de son orthogonal. Cet orthogonal est le noyau de $I + K^*$, de dimension finie par les questions **V.3.a)** et **V.3.c)**.

Partie VI

VI.1.a) Munissons H/V de sa structure naturelle d'espace de Banach quotient et notons p la surjection canonique de H sur H/V. Alors p est continue et W est l'image réciproque par p de W/V qui est fermé dans H/V comme sous-espace de dimension finie. Le résultat suit.

VI.1.b) L'hypothèse entraîne que $\ker T \subset \ker(K_1 + I)$. La question **V.3.a)** montre alors que $\ker T$ est de dimension finie.

Il reste à vérifier que Im T est fermé et de codimension finie pour conclure. Or cet espace contient $\operatorname{Im}(I+K_2)$ qui est fermé et de codimension finie grâce aux questions **V.3 b)** et **V.3.d)**, d'où le résultat par **VI.1.a)**.

VI.2. Puisque T_{e_0} est l'identité de H^2, la question **V.2.b)** fournit :

$$(T_\varphi T_{1/\varphi} - I, T_{1/\varphi} T_\varphi - I) \in K(H^2)^2.$$

La question **VI.1.b)** montre que T_φ est de Fredholm.

VI.3. Soit x dans H. On écrit $x = u + v$ avec u dans $\ker T$ et v dans $\ker T^\perp$. Il vient :

$$ST(x) = T_0^{-1} P T(x) = T_0^{-1} P T(v) = T_0^{-1} T(v) = v.$$

Il en résulte que $ST - I$ est l'opposé du projecteur orthogonal de H sur $\ker T$.

Un calcul analogue établit que $TS - I$ est l'opposé du projecteur orthogonal de H sur Im $\mathrm{T}^\perp$, lequel est de dimension finie.

VI.4.a) On écrit :

$$S(T+J) = I + SJ + K$$

et on remarque que $I + SJ$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$, d'où :

$$S(T+J) = (I+SJ)(I + (I+SJ)^{-1}K) = (I+SJ)(I+K')$$

où $K' = (I+SJ)^{-1}K$ est bien dans $\mathscr{K}_0(H)$. Ceci se réécrit :

$$(I+SJ)^{-1} S(T+J) = I + K'.$$

Ainsi $T + J$ a un inverse à gauche modulo $\mathscr{K}_0(H)$, donc modulo $\mathscr{K}(H)$.

Un argument analogue permet de construire L', ce qui entraîne l'existence d'un inverse à droite modulo $\mathscr{K}(H)$ pour $T + J$. Il reste à utiliser **VI.1.b)** pour conclure.

VI.4.b) La caractérisation des éléments de $\mathscr{F}(H)$ explicitée après la question **VI.3** dans l'énoncé montre que S est de Fredholm. En utilisant les deux propriétés de l'indice admises dans l'énoncé et l'appartenance de K à $\mathscr{K}_0(H)$, il vient :

$$\operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(I+K) = 0.$$

Mais $I + SJ$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$, donc d'indice nul. Utilisant la première des deux relations établies en **VI.4.a)**, les propriétés admises de l'indice et l'appartenance de K' à $\mathscr{K}_0(H)$, on a :

$$\operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T+J) = 0$$

ce qui achève la démonstration.

VI.5.a) Commençons par étudier le cas : $\varphi = e_n$.

Si $n \leqslant 0$, T_{e_n} est surjectif (l'élément $\sum_{j\geqslant 0} c_j e_j$ de H^2 ayant pour antécédent $\sum_{j\geqslant 0} c_j e_{j+n}$). Son noyau est le sous-espace de dimension $-n$ engendré par $(e_j)_{0\leqslant j\leqslant -n-1}$. Donc l'indice de T_{e_n} est $-n$.

Si $n \geqslant 0$, T_{e_n} est injectif. Son image est le sous-espace fermé de codimension n constitué des f de H^2 telles que $\hat{f}$ s'annule sur $\{0,\dots,n-1\}$. Donc l'indice de T_{e_n} est $-n$.

La relation demandée est donc vraie si φ est l'un des e_n, $n \in \mathbf{Z}$. Le cas général s'obtient à l'aide de **II.4.** en notant que

$$\varphi \in \mathscr{C}^* \mapsto \operatorname{ind}(T_\varphi)$$

est continue comme composée de l'application 1-lipschitzienne

$$\varphi \in \mathscr{C}^* \mapsto T_\varphi \in \mathscr{F}(H^2)$$

et de l'application continue ind, tandis que deg est continue sur $\mathscr{C}^*$ par **II.3.c)**.

VI.5.b) Soit $n = \deg(\varphi)$. Les questions **IV.2.c)** et **VI.5.a)** montrent alors que si $n \leqslant 0$ (resp. $n \geqslant 0$), T_φ est surjectif et a un noyau de dimension $-n$ (resp. est injectif et a une image de codimension n).

VI.5.c) Si φ est dans $\mathscr{C}^*$, la question précédente montre que T_φ est inversible si et seulement si φ est de degré 0. Reste à voir que l'inversibilité de T_φ implique l'appartenance de φ à $\mathscr{C}^*$. Or, si φ s'annule en un point de S^1, on construit facilement une suite (f_n) d'éléments de $\mathscr{P}$ unitaires pour la norme $|\ |_2$ et telle que $(f_n\varphi)_{n\geqslant 0}$ tende vers 0 pour cette même norme (prendre des fonctions supportées par des voisinages de plus en plus petits d'un point d'annulation de φ et les approcher par des polynômes trigonométriques). Quitte à multiplier f_n par e_{m_n} avec m_n assez grand, on peut supposer que f_n est dans H^2. On en déduit aussitôt que T_φ n'est pas inversible.

Conclusion : T_φ est inversible si et seulement si φ appartient à $\mathscr{C}^*$ et est de degré nul.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique.

5.1 Organisation des épreuves

Les modalités, mises en place depuis le concours 2001, ont cette année encore donné entière satisfaction et sont reconduites pour la session 2010. Elles sont décrites ci-après de manière détaillée, prenant en compte l'expérience acquise.

Pour les candidats de l'option D, des changements de modalités sur les leçons de mathématiques sont intervenus en 2009. Ces candidats tirent maintenant un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre, d'analyse et de probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours.

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plait.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc. pour qu'il soit le plus lisible possible.
Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat.

5.1.1 Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 8 minutes maximum, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. La formalisation mathématique doit être soignée et l'utilisation des symboles mathématiques correcte. Le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale. ***Le plan doit être maîtrisé***, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes, les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que ce plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois il peut être utile d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin !

Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos.

Le plan est malheureusement rarement commenté. Le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Si le candidat énonce un théorème particulièrement difficile, il faut qu'il soit *contextualisé* en montrant comment il répond à des questions naturelles de la théorie ou en donnant des applications internes ou externes de la théorie dont il est issu.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans, disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés, ne constitue pas un travail suffisant de préparation. L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. Le hors sujet est lourdement sanctionné.

À la fin de cette présentation, le jury peut questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé, s'il présente un développement non maîtrisé ou mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins.* Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Le candidat doit préciser ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre. Il dispose de 15mn (maximum) pour mener à bien ce développement. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat demandera aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur le déroulement de la preuve et l'intervention pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou étapes de ce dernier. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter et il est utile de préciser ses notations !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc.* La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explications convaincantes.

Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins souvent possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement son sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement son niveau. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiate. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury. La qualité du dialogue est aussi un élément d'appréciation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Le candidat doit être conscient que s'il met un énoncé dans son plan il doit se préparer à des questions élémentaires et à des calculs éventuels sur ce point. Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose. La qualité du dialogue instauré entre le jury et le candidat, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit pendant ce temps sont des éléments importants de notation.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants.

5.1.4 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports des quatre dernières années. Les commentaires sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques supplémentaires concernant certaines leçons de la session 2009. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des 40 titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A,B, C, en algèbre et analyse.

Leçons d'Algèbre et Géométrie

Les leçons de géométrie sont systématiquement évitées. C'est bien anormal pour de futurs professeurs qui auront à enseigner la géométrie. La notion de propriété universelle échappe à la quasi-totalité des candidats, ce qui signifient qu'ils ne comprennent pas clairement le pourquoi du passage au quotient, des anneaux de polynômes, anneaux de fractions *etc.* C'est inquiétant.

La leçon 115 ne sera plus proposée à la session 2010.

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Des exemples de nature différente doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel, sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas.

103 - Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient. Les candidats parlent de groupes simples et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Il faudrait savoir par exemple que
- tout morphisme de source un groupe simple est soit injectif soit trivial ;
- dans un groupe simple, toute réunion de classes de conjugaison non triviale engendre le groupe (par exemple les éléments de la forme x^2yx) ;
- tout morphisme d'un groupe G vers un groupe abélien se factorise *via* $G^{ab} := G/D(G)$.

La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée il faut savoir la définir proprement.

104 - Groupes finis. Exemples et applications. Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon.

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Certains candidats proposent donc en développement que $\mathrm{Int}(\mathscr{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_n)$, $n \neq 6$. Il serait alors utile de savoir qu'en général $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ et que $\mathrm{Out}(\mathscr{S}_6) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Les applications ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers.

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Il faut savoir réaliser S_n dans $GL(n,\mathbf{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

107 - Sous-groupes finis de $O(2,\mathbf{R})$ et de $SO(3,\mathbf{R})$. Cette leçon est certes relativement fermée, mais elle permet d'illustrer les notions de groupes finis et d'action sur un espace vectoriel. Elle illustre de manière élémentaire le lien profond entre groupe et géométrie. Préparer cette leçon constitue un bon investissement pour un futur enseignant de lycée. Il faut déduire de l'étude des sous-groupes finis de $SO(3,\mathbf{R})$ la nature des sous-groupes finis du groupe affine en dimension 3. Il faut réfléchir au groupe des applications affines qui préservent un parallélépipède.

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes.

109 - Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Cette leçon classique demande toutefois une préparation minutieuse. Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.

110 - Nombres premiers. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation. Il faut savoir si 89 est un nombre premier ! Attention aux choix des développements, ils doivent être pertinents.

111 - Anneaux principaux. Applications. Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $K[X]$, accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent.

112 - Corps finis. Applications. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis ne doivent pas être négligées. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.

113 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications. Les propriétés des polynômes cyclotomiques doivent être énoncées. Leur irréductibilité sur $\mathbf{Z}$ doit être maîtrisée. Il est tout à fait possible de parler d'exponentielle complexe, de théorème du relèvement ou de séries de Fourier tout en veillant à rester dans le contexte de la leçon.

114 - Anneau des séries formelles. Applications. C'est une (nouvelle) leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications.

116 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications. Les applications ne concernent pas que les corps finis.

117 - Algèbre des polynômes à n indéterminées. Polynômes symétriques. La leçon ne peut se concentrer exclusivement sur les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbf{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple. Il est indispensable de savoir démontrer que le lieu des zéros d'un polynôme non-nul de $\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n$.

Les applications aux quadriques, aux relations racines cœfficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe $GL(n,\mathbf{R})$ sur les polynômes de degré inférieur à 2.

Il faut connaître la structure de l'anneau des polynômes symétriques et quelques critères de divisibilité dans les anneaux pour répondre à l'irréductibilité du déterminant.

Les candidats semblent ignorer la propriété universelle des anneaux de polynômes ou, lorsqu'ils la mentionnent, sont incapables de s'en servir pour construire des morphismes d'anneaux (*e.g.* $\mathbf{C}[X,Y]/\langle Y^2-X\rangle \simeq \mathbf{C}[T]$ ou la construction des k-morphismes $K \to \overline{k}$ pour une extension algébrique K/k).

118 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension en algèbre et en géométrie. C'est une leçon transversale nouvelle.

119 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices. C'est une nouvelle leçon, qui préfigure de futures leçons sur les actions linéaires de groupes (finis) sur des espaces vectoriels.

120 - Dimension d'un espace vectoriel, rang. C'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats. Il faut absolument la préparer avec méthode. Énormément de candidats ont déçu le jury sur cette leçon. Nombre d'entre eux n'ont pas été capable de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ?

121 - Matrices équivalentes. Matrices semblables. Les opérations sur les lignes et colonnes doivent figurer dans le plan. On pourra utilement dissocier les opérations sur les lignes de celles sur les colonnes. Rappelons que $A = PB$ est équivalent au fait que A et B ont même noyau ; la notion de matrices échelonnées interviendra utilement dans cette leçon. L'extension des opérations au cas des anneaux principaux est délicate, alors que le cas des anneaux euclidiens suffit largement au niveau de l'Agrégation. Les candidats sont encouragés à présenter des applications de la réduction des matrices plutôt que la théorie elle-même ; ils peuvent par exemple étudier quelques équations portant sur une matrice. Il est également suggéré de regarder, sur le corps des réels ou des complexes, les propriétés topologiques d'une classe d'équivalence ou de similitude de matrices. Le jury aimerait avoir quelques applications de la classification des matrices semblables.

123 - Déterminant. Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leurs places dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux et pas uniquement l'extraction d'un résultat du plan. Les interprétations géométriques du déterminant sont fondamentales.

124 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme. Comme chaque année, les candidats ne prêtent pas attention au libellé du sujet. Cette leçon est clairement différente de la leçon 129. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de cette algèbre $K[u]$. Le jury ne souhaite pas avoir un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.

125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études de cas détaillées sont les bienvenues.

126 - Endomorphismes diagonalisables. Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice.

127 - Exponentielle de matrices. C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse.

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ doit être connue. Les groupes à 1-paramètre peuvent trouver leurs places dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n,\mathbf{R})$. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique.

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'Agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité.

128 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents. Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan à l'aide des noyaux itérés.

129 - Algèbre des polynômes d'un endomorphisme. Ce n'est pas une leçon sur la réduction. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Les candidats doivent connaître sans hésiter la dimension de l'algèbre $\mathbf{K}[f]$. Les propriétés globales pourront être étudiées (dimension, commutant). Il faut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Les candidats peuvent présenter des conditions caractérisant les polynômes en f parmi tous les endomorphismes. L'aspect *applications* est trop souvent négligé.

130 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes. C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes.

131 - Formes quadratiques. Orthogonalité, isotropie. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

Notons que le théorème de Chevalley-Warning ne constitue pas un bon développement dans les leçons sur les formes quadratiques, sa preuve délicate dans le cadre des polynômes homogènes, devient assez triviale en degré 2.

132 - Formes linéaires et hyperplans. Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au cœur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse *etc.*. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon : proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé !

Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

135 - Isométries. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3. La classification des isométries en dimension 2 ou 3 est exigible. Théorème de décomposition commutative. En dimension 3 : déplacements (translation, rotations, vissage) ; antidéplacements (symétries planes, symétries glissées, et isométrie négative à point fixe unique).

136 - Coniques. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives. Les applications à la trajectoire des planètes doivent être connues et les candidats doivent s'interroger sur la présence d'objets quadratiques dans le monde réel !

139 - Applications des nombres complexes à la géométrie. Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. C'est le moment de remettre à plat la notion d'angle !

Le théorème des zéros de Hilbert et le théorème d'intersection de Bézout ne sont pas des théorèmes de nature "complexe" ; ils sont valables sur des corps algébriquement clos en toute caractéristique.

Les premières applications des nombres complexes en géométrie algébrique sont très au delà du niveau de l'Agrégation.

140 - Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte ! Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique. L'intérêt pratique des méthodes présentées doit être expliqué. Le théorème de Rouché n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée. Il est important de le replacer dans le contexte des opérations.

141 - Utilisation des groupes en géométrie. C'est une leçon transversale et difficile. On ne peut prétendre avoir une bonne note si elle n'est pas préparée.

145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux et simplifie bien souvent les problèmes de convergence. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités !

146 - Résultants de deux polynômes, applications à l'intersection de courbes ou de surfaces algébriques. C'est une leçon nouvelle qui reprend des éléments du programme 2009. Le jury ne souhaite pas voir une leçon théorique, ni un cours de géométrie algébrique qui dépasserait évidemment les attendus du programme.

148 - Formes quadratiques réelles. La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

149 - Groupes finis de petit cardinal. Après avoir cité rapidement les théorèmes fondamentaux sur les groupes, la leçon doit se concentrer sur les exemples. Les développements ne peuvent pas porter sur les théorèmes généraux. C'est une leçon bien distincte de la leçon *Groupes finis*.

Leçons d'Analyse et Probabilités

Le jury considère que le chapitre des probabilités à vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant en mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques. Il y a cinq leçons de probabilités qui peuvent se traiter à un niveau raisonnable. Les leçons de probabilités sont encore rarement choisies par les candidats. Le jury encourage les candidats à faire ce choix.

Généralement, le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon. Par exemple justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

Voici quelques points plus spécifiques.

203 - Utilisation de la notion de compacité. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale, sans proposer des exemples significatifs d'utilisation .

204 - Connexité. Bien distinguer sur des exemples, connexité et connexité par arcs.

205 - Espaces complets. Le théorème de Baire trouvera évidemment sa place.

206 - Théorèmes de points fixes. Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples.

207 - Prolongement de fonctions. Les questions liées au prolongement analytique font partie de la leçon.

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Par contre, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats.

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. On attend des applications en géométrie différentielle. Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

215 - Applications différentiables. Il est judicieux que les candidats aient une vision à peu près claire de ce qu'est la différentielle d'une fonction et soient capables de définir la notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Il faut savoir si une fonction dont les dérivées partielles sont continues est différentiable et il faut surtout savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction.

217 - Sous variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples. Cette leçon est nouvelle et ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstrait. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations ...) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de $\mathbf{R}^3$, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques.

Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

218 - Applications des formules de Taylor. Il faut connaître sans hésitations les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a des applications en géométrie et probabilités. On peut penser comme application à la méthode de Laplace, du col ou de la phase stationnaire.

Ne pas oublier les formules avec reste intégral.

219- Problèmes d'extremums. Bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence).

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Le lemme de Grönwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mis en œuvre sur des exemples concrets.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général on peut évoquer les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

223 - Convergence des suites numériques. On peut évoquer la construction de $\mathbf{R}$ à partir des suites de Cauchy.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. L'étude des suites homographiques pose des problèmes si on se restreint à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Il est préférable de passer sur la droite projective.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Un candidat qui indique dans son plan que l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^0$, nulle part dérivables contient un G_δ-dense de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ doit pouvoir donner une telle fonction, ou du moins indiquer un principe de sa construction. Par ailleurs un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Le jury souhaiterait que les candidats illustrent leurs propos et raisonnements sur les fonctions convexes par des dessins clairs. Il n'est pas déraisonnable de parler de fonctions à variation bornée.

Le théorème sur l'existence des limites (à gauche ou à droite) d'une fonction monotone est souvent mal énoncé.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. Le jury demande que les candidats ne confondent pas équivalents et développements asymptotiques, par exemple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}$$

en lieu et place de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.

234 - Espaces L^p. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$).

235 - Suites et séries de fonctions intégrables. Bien lire l'énoncé ! Il faut savoir illustrer sur des exemples l'utilité de l'hypothèse de domination pour la convergence dominée et les théorèmes de permutation séries-intégrales. Il faut aussi proposer des suites de fonctions qui convergent au sens L^1 sans converger presque partout. Beaucoup trop de candidats pensent que l'étude des séries se limite à l'étude des suites, oubliant la structure vectorielle sous-jacente.

236 - Calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles. Il est souhaitable que les candidats précisent le cadre théorique de l'intégration qu'ils considèrent lors de leur leçon. Il ne faut pas exclure le recours à la variable complexe.

238 - Méthodes de calcul approché d'intégrales. Il faut connaître les majorations d'erreurs de chaque méthode proposée et connaître l'origine de ces majorations.

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Si l'équation de la chaleur (en dimension 1) a pour origine la physique, sa résolution mathématique via la transformation de Fourier ne dispense pas le candidat de conserver une certaine rigueur mathématique. La validité de la formule $\mathscr{F}(f')(x) = ix\mathscr{F}(f)(x)$, l'existence du produit de convolution doivent être convenablement circonscrits.

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples. Le jury s'étonne que des candidats considèrent des suites de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie. Cela entraîne des questions sur la nécessité de l'hypothèse de complétude. D'autre part les candidats ont-ils déjà manipulé beaucoup de séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie ?

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Ne pas confondre $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{i}{2}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$. Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe !

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications Les différents types de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet etc...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier.

5.2 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le nouveau programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette nouvelle organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

5.3 Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique

Cette épreuve a évolué cette année : la liste des leçons a été refondue. Essentiellement, les leçons de *programmation* (langages typés, sémantique, typage, compilation) ont été retirées de la liste ainsi que certaines leçons élémentaires d'*algorithmique*. Par contre, la liste de leçons a été raffinée en ce qui concerne la *logique*, en particulier son application aux preuves de programme. Nous espérons que ces modifications contribueront à faciliter la tâche des préparateurs en recentrant les sujets sur 4 domaines bien identifiés : algorithmique, calculabilité et complexité, langages et automates, logique et preuves.

De manière générale, le jury a plutôt été heureusement surpris par la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans la bonne focalisation des présentations. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants mais le niveau est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes.

Organisation de la leçon- Une tentation bien compréhensible pour les candidats est de *mathématiser* les sujets de leçons en oubliant l'aspect informatique. Ainsi, sur le sujet *Langages algébriques*, il était tentant de faire une leçon contrée sur un aspect théorique unique comme le Lemme d'itération d'Ogden, en oubliant complètement les aspects plus concrets de ce domaine et ses multiples applications, par exemple à l'analyse syntaxique et aux compilateurs.

Les candidats de niveau moyen ont en effet souvent montré des connaissances assez solides pour les résultats théoriques, mais par contre un manque de réflexion manifeste en ce qui concerne leurs applications et exemples concrets de mise en oeuvre.

Le jury tient donc à rappeler qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes.

– À quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
– La complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Interaction avec le jury- Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, cette interaction ne prend habituellement pas la forme d'un exercice d'application. Il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances ! À lui de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Organisation de l'épreuve de modélisation

Depuis la session 2006 incluse, deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Le jury apprécie en effet que le candidat reste honnête quant à sa compréhension du texte, plutôt que de se lancer dans une présentation des parties du texte qu'il ne comprend absolument pas. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Le jury aura le texte sous les yeux, mais vous devez considérer qu'il ne l'a pas lu.*

Plus précisément, le jury s'attend à ce que le candidat dégage une problématique, en s'inspirant du texte, pour mettre en valeur sa maturité mathématique et ses connaissances. L'interrogation dure une heure, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter (le jury dispose d'écrans de contrôle reproduisant celui du candidat). Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Il appartient au candidat de discuter la mathématisation du problème, en particulier d'expliquer les hypothèses faites lors de la modélisation ou du traitement du modèle, de critiquer ou d'améliorer le modèle, du point de vue de l'adéquation à la réalité, de la généralité, de la rigueur, de la simplicité du traitement mathématique subséquent...

Le jury n'ayant *a priori* pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`.

Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants...) soient présentées, mais *il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation.* Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire et le jury appréciera un regard critique du candidat sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut en revanche devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve.

Les suggestions sont facultatives et ne sont là que pour guider la réflexion du candidat sur des points significatifs du texte, ou des exemples utilisables. Certaines d'entre elles sont conçues pour permettre au candidat de comprendre le problème, de «rentrer» dans le modèle.

S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du texte sont très appréciées. Lorsqu'une démonstration est ébauchée dans le texte, le candidat peut choisir de la compléter. Il est alors particulièrement apprécié que le candidat précise les point mathématiques nécessaires pour une démonstration rigoureuse. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels. Cependant le candidat ne doit pas oublier qu'il s'agit d'une épreuve de l'agrégation externe de mathématiques, et qu'un exposé ne comportant aucun argument mathématique précis est vivement déconseillé.

Un travers à éviter à tout prix : la paraphrase linéaire du texte sans aucun apport personnel du candidat, ni mise en perspective, agrémentée de la recopie de toutes les formules rencontrées.

Recommandations du jury

Le jury attache un intérêt particulier à l'effort de modélisation (qu'on peut définir comme le passage du « concret » aux mathématiques), à la mise en perspective des applications présentées, ainsi qu'aux illustrations permises par les moyens informatiques mis à disposition des candidats.

Le principal travers observé chez les candidats est la répétition linéaire du texte, y compris des passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, dans cette épreuve comme dans les autres, est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'*aucun développement n'est attendu.* Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés, mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner seulement les grandes lignes.

Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle.

Sur le plan

Il est conseillé aux candidats de présenter un plan *succinct* de leur exposé, précisant les moments où ils comptent présenter leurs simulations informatiques. Ceci permet au jury de guider les candidats dans leur gestion du temps.

Sur la présentation

Nous rappelons ici que l'agrégation est un concours visant à recruter des *enseignants.* Ainsi seront appréciés une bonne gestion du tableau, un exposé clair et pédagogique, et une bonne capacité à effectuer des calculs analytiques clairs, corrects et lisibles.

6.2 Utilisation de l'outil informatique

Le jury observe avec plaisir une utilisation plus pertinente de l'outil informatique, due certainement à une meilleure préparation des candidats.

Il est attendu du candidat un commentaire sur les résultats de sa simulation (résultats numériques ou graphiques), mais aussi du code mis en œuvre. Le jury regrette toutefois l'utilisation parfois abusive de « boîtes noires » de simulation au sein de leur programme, qui peuvent être source d'incompréhension sur les sorties.

Rappelons que le candidat ne doit pas avoir peur de présenter un programme non abouti. Le jury est sensible à la démarche employée.

D'un point de vue purement pratique, il est dommage de voir des candidats gênés durant l'épreuve de modélisation tout simplement parce qu'ils ne savent pas sauvegarder leur travail sur fichier, certains -rares heureusement- fermant directement l'application en ignorant les messages d'avertissement du logiciel utilisé et perdant ainsi tout ce qu'ils ont fait. Rappelons à ce sujet que le site du jury de l'agrégation décrit dans ses pages les logiciels utilisés et propose des outils pour qu'un candidat puisse se familiariser avec l'environnement proposé (voir http ://agreg.org/Agreg/installation.html).

6.3 Option A : probabilités et statistiques

L'exposé doit être un dosage dynamique entre preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponse aux questions et mise en lumière de connaissances.

Connaissance du programme

Lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur *la totalité du programme*. En particulier, il est possible que le jury pose des questions de nature statistique pour des textes à coloration probabiliste et inversement. Un nombre croissant de textes mêlent d'ailleurs les deux aspects. Le jury encourage donc les candidats et les préparateurs à tenir compte de l'ensemble du programme. Encore trop de candidats ont du mal à formaliser précisément des notions qui font partie du programme de l'option.

Probabilités

- La loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale sont des points fondamentaux en probabilités comme en statistiques. Il convient d'en connaître les hypothèses précises, et de ne pas confondre les différents types de convergence.
- Les propriétés fondamentales des chaînes de Markov sont souvent mal connues : classification des états, conditions de convergence vers la loi stationnaire (apériodicité), etc. Les candidats gagneraient à utiliser plus souvent une représentation graphique des chaînes de Markov manipulées.
- Il est souvent très utile d'interpréter la notion d'espérance conditionnelle en termes de projecteur orthogonal.
- Les théorèmes du programme sur la convergence des surmartingales positives ne sont pratiquement jamais employés, alors qu'ils permettent des démonstrations convaincantes et simples dans de nombreux modèles.

Statistiques.

- Les notions élémentaires de statistique paramétrique ne sont pas toujours clairement définies. Les candidats doivent connaître les problématiques d'estimation (notion de biais et de consistance) et de test d'hypothèses.

- Le jury a observé ces dernières années une amélioration sur la connaissance des principes de construction d'un intervalle de confiance.
- Les candidats sont souvent rebutés par le modèle linéaire gaussien. Celui-ci est pourtant couramment utilisé dans différents modèles.
- Dans le cadre des tests d'adéquation, les candidats ont du mal à motiver le choix du test qu'ils proposent (chi-2, Kolmogorov-Smirnoff, ...).

Illustrations informatiques

- Le jury attend des candidats qu'ils accompagnent leurs illustrations informatiques d'explications d'au moins deux ordres : d'une part sur la nature de ce qui est montré (que sont ces nombres ? Qu'y a-t-il en abscisse et en ordonnée dans ce graphique ? Quelles données ont permis de réaliser cet histogramme ?) et d'autre part sur les aspects mathématiques qu'elles illustrent (par exemple une convergence presque sûre, une convergence en loi, l'adéquation d'une loi empirique à un résultat théorique).
- Les illustrations informatiques sont souvent une occasion propice à l'utilisation de tests ou d'intervalles de confiance, pour vérifier que les résultats expérimentaux sont conformes aux résultats théoriques. Sans attendre un développement systématique à ce sujet, le jury apprécie que le candidat mette en valeur sa connaissance de ces outils et précise par exemple si l'écart entre des valeurs empiriques et des valeurs théoriques lui paraît acceptable ou non.
- Les candidats dont les programmes informatiques ne sont pas aboutis ou ne produisent pas les résultats escomptés sont néanmoins invités à expliquer leur démarche et ce qu'ils envisageaient de mettre en oeuvre pour illustrer le texte. Le jury signale que Matlab, Scilab ou Octave sont particulièrement adaptés à cette épreuve.

Modélisation

Il est rappellé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter.
Soulignons enfin que le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte.

6.4 Option B : Calcul scientifique

En préambule, il convient de souligner que durant l'épreuve de modélisation le candidat bénéficie d'une grande liberté pour organiser sa présentation. L'exploitation de cette liberté est un critère discriminant de l'évaluation. En particulier la gestion du temps et des priorités, l'aptitude à distinguer entre des points techniques relativement mineurs ou des calculs de simple routine et des arguments plus fins et la mise en évidence des enjeux abordés dans le texte permettent d'évaluer la maturité mathématique des candidats et leur capacité de synthèse. Le jury apprécie la faculté à organiser la présentation autour d'un plan cohérent, clairement annoncé ainsi que l'usage judicieux de l'outil informatique qui peut être exploité à tout moment pour corroborer une intuition ou illustrer un énoncé. Le candidat doit aussi être en mesure de trouver le juste équilibre entre la discussion, parfois formelle, d'éléments de modélisation et le développement de raisonnements mathématiques rigoureux, appuyés sur des énoncés précis. Tant la paraphrase du texte que le hors sujet, marqué par exemple par une longue digression virant à la leçon sur un outil abordé dans le texte, sont fortement pénalisés. On peut aussi recommander de ne traiter de façon fouillée qu'une partie du texte, convenablement choisie, plutôt que de tenter, vainement, de convaincre le jury que tous les aspects du texte ont été compris.

Le jury se réjouit de la qualité d'ensemble des illustrations informatiques présentées dans cette option, très rares étant maintenant les candidats qui esquivent cet aspect de l'épreuve. On rappelle qu'aucune dextérité de programmation n'est exigée, l'essentiel étant la pertinence de la simulation et la richesse des commentaires auxquels elle donne lieu. Les candidats dont les programmes informatiques ne sont pas aboutis ou ne produisent pas les résultats escomptés sont néanmoins invités à expliquer leur démarche et ce qu'ils envisageaient de mettre en oeuvre pour illustrer le texte. Ces simulations sont aussi une occasion d'aborder les méthodes numériques : si l'usage des routines de calcul des logiciels fournis est fortement encouragé — Matlab, Scilab ou Octave étant particulièrement adaptés à cette épreuve — le jury réclame fréquemment des détails sur les principes et les propriétés des méthodes numériques du programme (résolution de systèmes linéaires ou non, recherche de valeurs propres, résolution d'EDO, intégration numérique,...).

A l'issue de la session 2009 le jury souhaite préciser ses attentes sur certains éléments du programme :

Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.

Des progrès ont pu être observés quant à l'analyse des EDO (existence de solutions, estimations, passage du local au global...). Cependant les candidats restent encore fragiles sur ce point du programme. Les questions de nature qualitative sont mal maîtrisées, trop de candidats semblent répugner à tracer le moindre portrait de phase. Les problématiques de stabilité locale, motivées par une étape de linéarisation, donnent lieu à des développements souvent laborieux. La résolution explicite d'équations élémentaires du 1er et du 2nd ordre (équations à variables séparées, équations linéaires du 2nd ordre par exemple) ne devrait être qu'une formalité surmontée avec aisance.

Schémas numériques pour les équations différentielles.

Bien qu'il s'agisse d'un point central du programme de l'option, maintes fois évoqué dans les rapports des précédentes éditions du concours, l'analyse de schémas numériques est très insuffisamment maîtrisée. La majorité des candidats se montre incapable d'énoncer correctement les définitions de consistance, stabilité, convergence et de préciser les liens entre ces notions, quand bien même le jury limite ses questions aux simples schémas d'Euler. Ces insuffisances sont régulièrement sanctionnées. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution au temps t_n, l'incapacité à relier le paramètre n et le pas Δt témoignent souvent d'une compréhension déficiente du sujet. Le jury est aussi surpris que les candidats confondent d'une part la modélisation, c'est-à-dire la mise en équations d'un problème motivé par une application, et d'autre part l'écriture et la mise en œuvre d'un schéma numérique apte à résoudre ce problème.

Intégration numérique.

Le jury s'étonne que nombre de candidats définissent l'ordre d'une méthode d'intégration numérique comme étant le degré des polynômes pour lesquels la formule d'approximation est exacte mais se révèlent totalement incapables de relier cette information à la qualité de l'approximation de la méthode correspondante.

Algèbre linéaire.

Les raisonnements basés sur des méthodes de réduction ou l'exploitation du théorème de Jordan ont bloqué des candidats. La notion de rayon spectral intervient dans de multiples situations et les candidats devraient mieux connaître le rôle du conditionnement d'une matrice. Le jury attend aussi un minimum de connaissances sur les méthodes numériques de résolution des systèmes linéaires, directes ou itératives, et de recherche de valeurs propres (méthode de la puissance en particulier). Enfin, la manipulation par blocs de matrices peut se révéler utile.

Optimisation.

Beaucoup de candidats ont les plus grandes difficultés à reconnaître au détour de certains textes l'application de résultats de base sur la minimisation de fonctionnelles convexes. L'optimisation sous contrainte semble faire l'objet d'une impasse à peu près totale et le théorème des extrema liés, partie intégrante du programme général du concours, est méconnu.

Equations aux dérivées partielles.

Des notions de base sur les équations classiques (linéaires) en dimension 1 — ondes, chaleur, transport, équations elliptiques — doivent être connues. Le candidat doit être capable d'évoquer les caractéristiques propres à ces équations, le comportement qualitatif de leurs solutions. Il est aussi utile de connaître des méthodes de résolution exacte de ces problèmes : méthode de caractéristiques, série ou transformée de Fourier, intégration directe... ainsi que des notions de base sur leur approximation par différences finies (consistance, conditions de stabilité, convergence). Aucune connaissance des notions de solutions faibles, ni des espaces fonctionnels liés à la théorie des distributions n'est attendue des candidats. Le jury déplore les fréquentes confusions entre problème aux limites et problème de Cauchy.

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

Il convient d'abord de se féliciter du fait que, dans l'ensemble, le traitement de l'épreuve par les candidats progresse, au moins dans la forme. En contrepartie, à plusieurs reprises, on a pu voir des candidats reprendre des développements de leçons d'algèbre ou d'analyse, impliquant des digressions n'ayant souvent qu'un rapport assez lointain avec le texte. Si une telle digression peut être admise dans le cas où elle se raccorde clairement au texte et est synthétique et de courte durée, elle n'en reste pas moins relativement éloignée de l'esprit de l'épreuve.

En contrepartie, les candidats se saisissent toujours aussi peu des « perches » tendues dans les textes : énoncés sans démonstrations, affirmations volontairement non justifiées sont répétées souvent sans même un regard critique. Les résultats obtenus dans les textes ne sont que rarement commentés par les candidats, là où le jury apprécierait une prise de recul, ou un retour au problème initial.

Remarques spécifiques de l'option C

De manière générale, les remarques des années passées continuent de s'appliquer. La théorie des corps finis est toujours inégalement assimilée par les candidats, et année après année un pourcentage non négligeable de candidats ne parvient toujours pas à décrire $\mathbb{F}_4$. On voit aussi de nombreux candidats effectuer leurs calculs dans $\mathbf{Z}$ sur le système de calcul formel de leur choix, en espérant que le résultat obtenu est le même que sur le corps fini dans lequel ils devraient travailler ; si cela peut arriver, procéder ainsi est en général inefficace et parfois faux (calcul du noyau d'une matrice, par exemple...).

Si des progrès ont été faits sur la théorie de l'élimination et l'utilisation du résultant, ses limites (corps non algébriquement clos, « points à l'infini ») sont toujours assez mal connues des candidats, même de façon informelle.

La question des complexités (là encore, toujours conformément au programme, dans un sens informel) ne semble toujours pas naturelle pour beaucoup de candidats. Il serait bon que soient connues et comprises quelques complexités de base, soit les opérations arithmétiques élémentaires (algorithmes naïfs), l'algorithme d'Euclide (coût en opérations binaires, au-delà du nombre d'étapes) ou algorithme du pivot de Gauss. Il est à noter que ce dernier est toujours aussi méconnu des candidats comme outil effectif de résolution de nombreux problèmes d'algèbre linéaire...

Enfin, concernant les codes correcteurs, la quasi-totalité des candidats interrogés sur ce sujet sont capables de disserter longuement sur des généralités les concernant, tout en étant incapable d'expliquer par quel procédé on passe d'un message quelconque à un élément du code (linéaire en pratique), et inversement.

6.6 Option D : modélisation et analyse de systèmes informatiques

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

Exposé des motivations Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Exercice de programmation informatique Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

Cette présentation au jury doit être faite que le programme *fonctionne* — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

6.6.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

Installation technique Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury dispose d'écrans de contrôle pour suivre la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

Présentation du programme D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage utilisé et de l'environnement de programmation utilisé. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code, que le jury peut lire lui-même sur les écrans de contrôle. Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

Choix des données d'exécution Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.

Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

Choix du langage Le candidat choisit son langage. Cette année, nous n'avons pratiquement pas vu de programmes en Java. Les candidats se partagent équitablement entre Caml et C (en fait, ils utilisent dans le langage C les extensions C++ admises par le compilateur `gcc`). Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés (C, Caml ou Java) : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Matlab, etc.)

Style de programmation La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

Entrées-sorties Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *intéractives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

Assertions de correction Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

Cas de la programmation C Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doit retourner la valeur `()` du type `unit`.

Organisation de la préparation Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'épreuve au sein des 4 heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

Respect de la spécification Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante ! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Matlab par exemple.

Chapitre 7

Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C)

Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2,\mathbf{R})$ et de $\mathrm{SO}(3,\mathbf{R})$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

109 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

110 Nombres premiers. Applications.

111 Anneaux principaux. Applications.

112 Corps finis. Applications.

113 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

114 Anneau des séries formelles. Applications.

115 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

116 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

117 Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.

118 Exemples d'utilisation de la notion de dimension en algèbre et en géométrie.

119 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

120 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

121 Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

---

123 Déterminant. Exemples et applications.

---

124 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

125 Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

---

126 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

---

127 Exponentielle de matrices. Applications.

---

128 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

129 Algèbre des polynômes d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

130 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

133 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

135 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

---

136 Coniques. Applications.

---

137 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

---

138 Homographies de la droite projective complexe. Applications.

---

139 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

140 Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

---

141 Utilisation des groupes en géométrie.

---

144 Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

---

145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

146 Résultant de deux polynômes, applications à l'intersection de courbes ou de surfaces algébriques.

---

148 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

---

149 Groupes finis de petit cardinal.

Leçons d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

---

202 Exemples de parties denses et applications.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

204 Connexité. Exemples et applications.

---

205 Espaces complets. Exemples et applications.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

216 Étude métrique des courbes. Exemples.

---

217 Sous variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

225 Étude locale de surfaces. Exemples.

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

235 Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

238 Méthodes de calcul approché d'intégrales.

238b Méthodes de calcul approché d'intégrales et d'une solution d'une équation différentielle.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 Transformation de FOURIER, produit de convolution. Applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

242 Utilisation en probabilités de la transformation de FOURIER ou de LAPLACE et du produit de convolution.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

---

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

---

250 Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.

---

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

Chapitre 8

Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique

Leçons de mathématiques pour l'informatique

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

109 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

110 Nombres premiers. Applications.

---

112 Corps finis. Applications.

---

116 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

120 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

121 Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

---

123 Déterminant. Exemples et applications.

---

124 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

128 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

133 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

137 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

---

139 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

140 Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

---

141 Utilisation des groupes en géométrie.

---

145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Transformation de FOURIER, produit de convolution. Applications.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

Leçons d'informatique

901 Exemples de structures de données et de leurs applications.

---

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

---

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

---

904 Problèmes NP-complets : exemples

---

905 Parcours de graphes : exemples et applications.

---

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

---

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

---

908 Automates finis. Exemples et applications.

---

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

---

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

---

911 Automates à pile. Exemples et applications.

---

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

---

913 Machines de Turing. Applications.

---

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

---

915 Classes de complexité : exemples.

---

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

---

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

---

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

---

919 Unification : algorithmes et applications.

---

920 Réécriture et formes normales.

---

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

---

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

---

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

---

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

---

925 Graphes : représentations et algorithmes.

---

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

---

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Chapitre 9

Annexe 3 : Le programme 2009 - 2010

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

9.1 Programme du tronc commun

Dans les paragraphes I à V qui suivent, tous les corps sont supposés commutatifs.

9.1.1 Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie (exemple $\mathbf{K}^n$). Existence de bases, de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de GAUSS. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

   Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de DUNFORD. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

9.1.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

9.1.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

   Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.
5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de BÉZOUT. Anneaux euclidiens. Algorithme d'EUCLIDE. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $K[X]$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'EISENSTEIN.
6. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de GAUSS, systèmes linéaires...

7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de NEWTON. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

9.1.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de SYLVESTER. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{C})$.

9.1.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.
   Projection sur un convexe fermé.
2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.
3. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements et antidéplacements. Décomposition commutative en une translation et une isométrie à point fixe (forme dite réduite). Exemple de générateurs du groupe des isométries : décomposition en produit de réflexions.
4. Espace affine euclidien de dimension 2.
   Classification des isométries.
   Similitudes directes et indirectes.
   Groupe des isométries laissant stable une partie du plan. Polygones réguliers.
   Relations métriques dans le triangle.
   Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

5. Espace affine euclidien de dimension 3.
   Rotations. Vissages. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.
6. Coniques et quadriques. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.
   Classification des coniques.
   Intersection de quadriques et résultant.
   Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

9.1.6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels
   Le corps **R** des nombres réels. Topologie de **R**. Sous-groupes additifs de **R**. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de **R**. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de **R**. Parties connexes de **R**.
   Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.
2. Fonctions définies sur une partie de **R** et à valeurs réelles
   (a) Continuité Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.
   Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.
   (b) Dérivabilité
   Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.
   Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.
   Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de LEIBNITZ. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG.
   Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.
3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives
   Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, positivité. Sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.
4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.
5. Suites et séries de fonctions
   Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.
   Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.
6. Fonctions usuelles
   Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

7. Convexité

   Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.
8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.
9. Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.
10. Méthodes d'approximation

    Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.
11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de PICARD, méthode de NEWTON. Estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.
12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

9.1.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

   Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

   Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

   Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

   Développement en série entière des fonctions usuelles.
2. Fonctions d'une variable complexe

   Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

   Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

   Formules de CAUCHY. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

   Singularités isolées. Séries de LAURENT. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

   Suites et séries de fonctions holomorphes.

9.1.8 Calcul différentiel

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

   Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

   Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.
2. Fonctions différentiables

   Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

   Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

   Matrice jacobienne. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG.

   Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.

   Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

3. Équations différentielles

   Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

   Portrait de phase, comportement qualitatif.

   Systèmes différentiels linéaires.

   Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

9.1.9 Calcul intégral et probabilités

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.
2. Intégration

   Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$: inégalités de MINKOWSKI, HÖLDER et JENSEN. Théorème de FUBINI.

   Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

   Convolution. Régularisation et approximation par convolution.
3. Analyse de FOURIER

   Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de DIRICHLET et de FEJER. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

   Transformée de FOURIER d'une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE.

   Formule d'inversion. Transformée d'un produit de convolution. Théorie L^2 : formule de PLANCHEREL.
4. Probabilités.

   Définition d'un espace de probabilité. Variables aléatoires, lois de probabilité d'une variable aléatoire, fonction de répartition. Indépendance d'une famille d'événements, de tribus ou de variables aléatoires.

   Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles.

   Exemples de lois : loi de BERNOULLI, loi binomiale, loi de POISSON, loi uniforme, loi normale, loi exponentielle.

   Fonction caractéristique et transformée de LAPLACE, applications à la somme de variables aléatoires indépendantes, lien avec la convolution.

   Probabilités conditionnelles : définition, théorème de BAYES.

   Convergence de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p , presque partout, en loi.

   Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAIMÉ-TCHEBYSCHEV. Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

9.1.10 Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques

   Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

   Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

Produit fini d'espaces métriques.

Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

2. Espaces vectoriels normés sur **R** ou **C**.

   Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

   Applications linéaires continues, norme.

   Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace BANACH.

   Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ ; théorème d'ASCOLI.

   Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3. Espaces de HILBERT

   Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

   Dual d'un espace de HILBERT.

   Cas des espaces L^2.

   Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

9.1.11 Géométrie différentielle

Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: position par rapport au plan tangent.

Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés).

9.2 Épreuves écrites

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres I à XI ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres I à XI ci-dessus.

9.3 Épreuves orales

Les candidats ont le choix entre quatre options :
Option A : probabilité et statistiques
Option B : calcul scientifique
Option C : algèbre et calcul formel
Option D : informatique

9.3.1 Épreuves orales des options A, B, C

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres I à XI ci-dessus.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

9.3.2 Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

Le corpus des logiciels disponibles est constitué de Maple, Mathematica, MuPAD, Matlab, Scilab, Octave, R, Maxima, Axiome, Giac/Xcas, Pari/GP, Gap.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique
   Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.
2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.
3. Validation et précision des résultats
   Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.
   Précision du schéma numérique d'EULER explicite à pas constant.
   Moyenne et variance empiriques.
   Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calculs de volumes).
4. Moindres carrés linéaires (sans contrainte).

9.3.3 Programme spécifique de l'option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 9. 4 , loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages …
2. Convergence presque sûre. Lemme de BOREL-CANTELLI. Loi forte des grands nombres.

3. Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états fini. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème de la limite centrale admis).

   Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.

   Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation, des théorèmes de convergence presque sûre et L^2, des martingales à temps discret.

4. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de COCHRAN. Théorème de la limite centrale dans $\mathbf{R}^n$, Utilisation du lemme de SLUTSKY. Définition et calcul d'intervalles de confiance.

   Lois Gamma. Définition de l'estimation du maximum de vraisemblance.

5. Tests sur un paramètre. Tests du χ^2. Fonction de répartition empirique et tests de KOLMOGOROV-SMIRNOV (population de taille finie et comportement asymptotique). Exemples d'utilisation.

   Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression simple ou multiple, exemples d'utilisation.

   Simulation de variables aléatoires.

   Fonctions génératrices. Processus de vie et de mort.

9.3.4 Programme spécifique de l'option B.

1. Résolution de systèmes d'équations linéaires ; définition du conditionnement. Factorisation LU.

   Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.

   Recherche des valeurs propres : méthode de la puissance.

   Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de NEWTON : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.

2. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

3. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques.

   Aspects numériques du problème de CAUCHY. Méthodes d'EULER explicite et implicite : consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de RUNGE-KUTTA 4.

4. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

   Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

   Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

   Équations elliptiques.

   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.

5. Optimisation et approximation

   Interpolation de LAGRANGE.

   Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de LAGRANGE. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.

   Méthode des moindres carrés et applications.

9.3.5 Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.

2. Algorithmes algébriques élémentaires.
   Exponentiation ($n \mapsto a^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), algorithme d'EUCLIDE étendu.
   Test de primalité de FERMAT.
3. Matrices à coefficients dans un corps.
   Méthode du pivot de GAUSS, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.
   Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de HAMMING binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.
   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.
   Évaluation (schéma de HORNER), interpolation (LAGRANGE, différences finies).
   Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.
   Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le cas le pire. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

9.4 Épreuves de l'option D : informatique

1re Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres I à XI ci-dessus. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

2e Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 4 ci-après.

3e Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 4 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

9.4.1 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implantation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de DIJKSTRA, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison O, Θ et Ω. Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de HOARE, induction structurelle.
5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de DIJKSTRA. Arbres couvrants : algorithmes de PRIM et de KRUSKAL. Fermeture transitive.

9.4.2 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de KLEENE.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'OGDEN. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

9.4.3 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'ACKERMAN.
2. Définitions des machines de TURING. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de RICE. Réduction de TURING. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de TURING non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de COOK.

9.4.4 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de NEWMAN, algorithme de complétion de KNUTH-BENDIX.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Chapitre 10

Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie – Tome 1B - Fonctions numériques – Tome 2 - Suites et séries numériques – Tome 3 - Analyse fonctionnelle – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C – in Java – in ML	CAMBRIGDE

ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I – Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre – 2. Analyse – 3. Compléments d'analyse – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCES
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 – Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	MASSON

AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 – Tome 2	MASSON
BHATIA R.	Matrix Analysis	SPRINGER
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL

BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie – Index – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	SPRINGER

BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes – 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN

CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	WILEY INTERSCIENCE
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 – Analyse 3	MASSON
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 – Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON

COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 – Volume 2	JOHN WILEY
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD

DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne – Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année – Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	WILEY
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES **HIRZEBRUCH** **KOECHER** **LAMOTKE, MAINZER** **NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT**	Les Nombres	VUIBERT
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES

EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 – Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 – Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI

FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 – Tome 2	DUNOD
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	FREEMAN
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON

GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 – Tome 2 – Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle – Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre – Tome 2 - Topologie et analyse réelle – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – Tome 4 - Géométrie affine et métrique – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre – Analyse	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 – Volume 2 – Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY

HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I – Tome II	FREEMAN AND CO
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	DUNOD
KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms – Volume 2 : Seminumerical algorithms – Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography quantite1	
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE

KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 – Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF

LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie – Tome 3 : Intégration et sommation – Tome 4 : Analyse en dimension finie – Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 – Tome 2 - Algèbre et géométrie – Tome 3 - Analyse 1 – Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre – Tome 1 pour A-A' : Algèbre – Tome 2 : Analyse – Tome 3 : Géométrie et cinématique – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT

LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales – 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 – Using Matlab version 6 – Statistics Toolbox – Using Matlab Graphics	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés – Tome 3 : Exercices et corrigés – Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONA S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD

MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2	PUF
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – Exercices d'analyse MPSI – Exercices d'analyse MP – Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 – Tome 2	VUIBERT

NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OŔOURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	– Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	PEARSON EDUCATION
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard . . . Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d’Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d’Algèbre	ENSJF

PERRIN D.	Mathématiques d'école	CASSINI
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PETROVŠEK **WILF** **ZEILBERGER**	A=B	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I – Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational géométrie - an introduction	SPRINGER
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre – 2- Algèbre et applications à la géométrie – 3- Topologie et éléments d'analyse – 4- Séries et équations différentielles – 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES

ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY

SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle – II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse – Tome 1 – Tome 2	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 – Analyse 4	ELLIPSES
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	DOVER
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL

STROUSTRUP B	Le langage C++	Pearson Education
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algè bre	Dunod
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire

TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	SEUIL
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions – II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	HERMANN
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL, ATTALI **COLLET, GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques – Analyse – Arithmétique – Géométrie – Probabilités	VUIBERT
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS

YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON