FEUILLE D'EXERCICES

1. Notions de base.

Exercice I.1.: (le nombre de classes de conjugaison tend vers l'infini). Soit N un entier naturel. Montrer qu'il existe un nombre fini de groupes finis ayant moins de N classes de conjugaison.

(indication: on écrira la formule des classes pour l'action de G par conjugaison sur lui-même).

Exercice I.2.: (p-Sylow du groupe symétrique) Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

1) Montrer que le produit en couronne itéré $C_r = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \int ... \int \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec r termes) est naturellement isomorphe au p-Sylow du groupe symétrique $\mathcal{S}_{p^r}$.

2) En écrivant $n = \overline{a_k ... a_0}$ en base p, et en décomposant n en a_k parties à p^k éléments, a_{k-1} parties à p^{k-1} éléments, ...etc, a_1 parties à p éléments, montrer que le p-Sylow de $\mathcal{S}_n$ est isomorphe au produit direct $(C_k)^{a_k} \times ... \times (C_1)^{a_1}$.

Exercice I.3.: Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 300 (indication : étudier les p-Sylow).

Exercice I.4.: (nombre minimal de générateurs) Montrer que tout groupe fini G peut être engendré par une partie de cardinal $\leq \frac{\log |G|}{\log 2}$. Cette borne est-elle atteinte pour certains groupes ?

Exercice I.5.: (groupe infini simple) Montrer qu'il existe un groupe de type fini infini et simple (utiliser le lemme de Zorn). Remarque : $PSL_d(\mathbb{Q})$ est simple infini mais pas de type fini.

Date: Janvier 2009.