

Mémoire de M2 :

Les livres ouverts en géométrie de contact

Ella Blair

encadré par Anne Vaugon et Frédéric Bourgeois

30 juin 2020

Table des matières

Introduction	4
1 Géométrie de contact et livres ouverts	7
1.1 Géométrie de contact	7
1.1.1 Variétés et sous-variétés de contact	7
1.1.2 Exemples classiques	8
1.1.3 Gray et Moser	10
1.1.4 Darboux et théorèmes de voisinages	12
1.1.5 Préréquis symplectiques	14
1.2 Livres ouverts	17
1.2.1 Livre ouvert concret	17
1.2.2 Livres ouverts abstraits	19
1.2.3 Lien entre les deux point de vue	22
2 Chirurgies en géométrie de contact	25
2.1 Twist de Dehn	26
2.2 Chirurgie et attachement d'anse	27
2.2.1 Modèles de voisinage d'une sphère isotrope	28
2.2.2 Attachement d'anse symplectique	30
2.2.3 Annulation d'anse symplectique	33
2.3 Chirurgie et livres ouverts	37
2.3.1 Chirurgie sous-critique dans la reliure	37
2.3.2 Chirurgie critique dans une page	38
2.3.3 Stabilisation	48
3 Les tores de contact	50

Introduction

La géométrie de contact établit un formalisme intéressant pour l'étude de différentes questions qui viennent de la physique. À titre d'exemple si l'on considère d'une part $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordonnée de position de n particules, $v = (v_1, \dots, v_n)$ coordonnée de vitesse de ces particules, l'espace des phases unitaire $\{(x, v), |v| = 1\}$ est une variété de contact. La géométrie de contact est en effet l'étude des variétés différentielles de dimension impaire, munies de champs d'hyperplans maximalement non intégrables, appelé structure de contact. Dans le cas de l'espace des phases unitaire, la structure de contact standard est le noyau de la 1-forme $\alpha_0 = \sum_1^n v_i dx_i$. Notons qu'il existe de nombreuses autres motivations à l'étude de variétés de contact. Notamment celles-ci apparaissent naturellement comme l'analogue en dimension impaire des variétés symplectiques, sont le bord de certaines variétés symplectiques. Ce point de vue sera particulièrement utile au cours de ce mémoire, quelques rappels seront donnés en 1.1.5, il peut être intéressant de se référer également à [3].

Mon mémoire de M1 portait sur les feuilletages de codimension une en dimension trois. Les feuilletages permettent en particulier de découper de manière adaptée l'étude d'une variété différentielle en l'étude sous-variétés de dimensions plus petites qui la décomposent. Dans le cadre d'une variété de contact en revanche un feuilletage n'est plus forcément l'objet le plus adapté. Si une structure de contact est un champ d'hyperplans maximalement non intégrables, un feuilletage lui est la donnée d'un champ d'hyperplans maximalement intégrable. L'objet de décomposition qui convient, est le livre ouvert. Sur une variété différentielle, un livre ouvert est la donnée d'une reliure (sous-variété de codimension deux), et de pages (ensemble de sous-variétés, à bord, de codimension un, difféomorphes). En dimension trois cette décomposition ressemble à un livre ouvert, c'est de cette image que la décomposition tient son nom.

En revanche sans hypothèse supplémentaire, bien que cette décomposition donne des informations sur la variété ambiante, elle ne permet pas de traduire des propriétés relatives à une structure de contact sur la variété. La définition de livre ouvert "adapté" d'Emmanuel Giroux apporte une réponse à cette question. On dit qu'un livre ouvert est adapté si les orientations données par la décomposition sur les pages et sur la reliure coïncident avec celles données par la structure de contact. Dans l'autre sens si ces conditions d'orientation entre livre ouvert et structure de contact sont vérifiées, on dit que la structure de contact est "portée" par le livre ouvert. Avec cette définition il est alors possible d'établir un dictionnaire entre les deux objets, et d'en déduire des informations sur la variété de contact en fonction des propriétés sur sa décomposition en livre ouvert.

Nous apporterons ici des pistes de réponses à la question suivante : à quoi peuvent ressembler les liens entre les livres ouverts et la géométrie de contact ? Après une discussion préliminaire sur ces deux objets, le coeur de ce travail

sera d'élucider un outil clé du dictionnaire livre ouvert/structure de contact : la stabilisation. Celle-ci est l'opération de chirurgies élémentaires successives qui apporte une réponse à la question suivante, puisqu'il est possible de modifier la structure de contact - par isotopie - sans toucher au livre ouvert adapté, que se passe-t-il dans l'autre sens ? La stabilisation permet de modifier le livre ouvert sans toucher à la structure de contact. Nous terminerons la discussion avec un exemple d'utilisation des livres en géométrie de contact, les tores de contact de Frédéric Bourgeois [2].

Remerciements

Ce travail a été effectué dans le cadre d'un stage de M2 entre Sorbonne Université et l'Université Paris Saclay, réalisé à distance due aux mesures sanitaires.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de mémoire et futurs directeurs de thèse Anne Vaugon et Frédéric Bourgeois, pour avoir accepté de m'encadrer, m'avoir proposé un projet aligné avec mes curiosités, ainsi que pour leur investissement hebdomadaire précieux au cours de ces 4 derniers mois. Le travail des 3 années à venir ne pourra être qu'enrichit par la possibilité de travail en personne!

Merci aussi à Frédéric Le Roux et Sobhan Seyfaddini pour leur soutien ces 3 dernières années.

J'adresse des remerciements particuliers à Patrick Massot pour ses belles images de visualisation de structures de contact, et pour avoir accepté de faire parti de mon jury aux cotés de Rémi Leclercq, que je remercie également.

Enfin, merci à mes parents, Lisa Momont et Jonathan MS Stricker, d'avoir rythmé et animé ces derniers mois particuliers, et aux dynamiciens du M2 pour leur camaraderie.

1 Géométrie de contact et livres ouverts

1.1 Géométrie de contact

1.1.1 Variétés et sous-variétés de contact

Commençons par poser les bases de la géométrie de contact.

Définition 1.1. Une *structure de contact* est une paire (M, ξ) avec M une variété de dimension impaire et ξ un champ d'hyperplans maximale non intégrable. Localement on peut écrire ξ comme le noyau d'une forme différentielle α , avec $\alpha \in \Omega^1(M)$, et alors la non-intégrabilité maximale se traduit par :

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$$

On appelle M *variété de contact*, ξ *structure de contact* et α *forme de contact*.

Sauf mention du contraire on notera par la suite M^{2n+1} , $n \in \mathbb{N}$, la variété de contact, ξ structure de contact et α forme de contact. On notera aussi $\Omega^1(M)$ l'espace des formes différentielles de degré 1 sur M .

Lemme 1.1. *Un champ de plan ξ peut-être écrit comme noyau d'une forme différentielle α globalement sur M ssi TM/ξ est orientable (i.e. ξ coorientable).*

Démonstration. Si on choisit une métrique riemannienne g sur M , et qu'on pose $\xi^{\perp g}$ le complémentaire orthogonal de ξ dans TM , alors $TM \cong \xi \oplus \xi^{\perp g}$ et $TM/\xi \cong \xi^{\perp g}$. Puisque TM/ξ est orientable, il existe X une section globale non nulle sur $\xi^{\perp g}$, et en posant $\alpha = g(X, \cdot)$ alors $\xi = \ker \alpha$.

Réciproquement si $\xi = \ker \alpha$ globalement on peut définir une section non nulle de $\xi^{\perp g}$ via les conditions $g(X, X) = 1$ et $\alpha(X) > 0$, avec un choix de métrique adapté

□

Remarque 1.1. $\widetilde{TM/\xi} = \{(x, o_x), x \in TM/\xi\}$, où o_x est une orientation locale sur x , muni de la projection sur la première coordonnée $p : \widetilde{TM/\xi} \mapsto TM/\xi$ est un revêtement à deux feuillets orientable. Via le choix d'une métrique riemannienne quelconque on peut étendre trivialement ce revêtement en \widetilde{M} à deux feuillets de M , tel que ξ soit coorientable. Ainsi dans la suite quitte à considérer \widetilde{M} plutôt que M et à pousser en avant via p , **on supposera que $\xi = \ker \alpha$ globalement.**

Définition 1.2. Soit $(M, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact coorientable. Alors :
— on définit le *champ de Reeb* R_α associé à α via les équations

$$(i) \iota_{R_\alpha} d\alpha \equiv 0 \text{ et } (ii) \alpha(R_\alpha) = 1$$

- Étant donné une orientation sur M on parle de forme de contact :
 - **positive** si α induit la même orientation que celle sur M
 - **négative** sinon.
- Deux variétés de contact (M_1, ξ_1) et (M_2, ξ_2) sont dites **contactomorphes** s'il existe un difféomorphisme $\Phi : M_1 \mapsto M_2$ tel que $d\Phi(\xi_1) = \xi_2$.
- Soit (W^{2n+2}, ω) une variété symplectique, un champ de vecteurs X est dit **de Liouville** si $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ (avec \mathcal{L} dérivée de Lie). Et par la formule de Cartan, sur toute hypersurface N de W transverse à X , $\alpha = i_X \omega$ est une forme de contact sur N .
- Soit (M, ξ) une variété de contact
 - Une variété de contact (M', ξ') avec M' sous-variété de M est un **sous-variété de contact** si $TM' \cap \xi|_{M'} = \xi'$
 - Une sous-variété L de (M, ξ) est une **isotrope** si $T_x L \subset \xi_x$ pour tout $x \in L$
- Pour $(M, \xi), (M', \xi')$, deux variétés des contact, on appelle contactomorphisme entre M et M' un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M'$ tel que

$$d\varphi(\xi) = \xi'$$

Proposition 1.1. *Si (M^{2n+1}, ξ) est une variété de contact et L une sous-variété isotrope alors $\dim L \leq n$.*

Preuve : Si on considère L une sous-variété isotrope de M , i l'inclusion de L dans M , comme $\xi = \ker \alpha$, alors $i^* \alpha = 0$ et $i^* d\alpha = 0$. Mais $(\xi_p, d\alpha_p)$ est un espace vectoriel symplectique, donc pour tout $p \in M$, $T_p L \subset (\xi_p, d\alpha_p)$ est lagrangien. Par les propriétés héritées par la géométrie symplectique :

$$\dim(T_p L) + \dim(T_p L^\perp) \leq \dim \xi_p,$$

donc $\dim(T_p L) \leq n$. □

Définition 1.3. Une sous-variété isotrope de dimension maximale est dite **legendrienne**

1.1.2 Exemples classiques

Afin de mieux comprendre les objets que nous allons manipuler voici quelques exemples de visualisation classiques. Le lecteur est invité à visualiser les exemples un et deux en dimension trois. Une bonne référence pour de telles visualisation se trouve sur [le site web de Patrick Massot](#).

Exemple 1.1. Sur \mathbb{R}^{2n+1} et coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ la 1-forme suivante est de contact :

$$\alpha_1 = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j$$

Exemple 1.2. Sur \mathbb{R}^{2n+1} et coordonnées polaires (r_j, φ_j) sur le plan (x_j, y_j) pour $j = 1 \dots n$, la 1-forme suivante est de contact :

$$\alpha_2 = dz + \sum_{j=1}^n (r_j^2 d\varphi_j) = dz + \sum_{j=1}^n (x_j dy_j - y_j dx_j)$$

Exemple 1.3. La structure de contact standard sur la sphère unitaire \mathbb{S}^{2n+1} dans \mathbb{R}^{2n+2} avec coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ est définie par :

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (x_j dy_j - y_j dx_j)$$

On peut aussi voir \mathbb{S}^{2n+1} comme la sphère unitaire dans \mathbb{C}^{n+1} avec structure complexe J . Alors

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \ker \alpha_0 = T\mathbb{S}^{2n+1} \cap J(T\mathbb{S}^{2n+1}) \\ \alpha_0 &= -rdr \circ J \end{aligned}$$

Exemple 1.4. En prenant la variété symplectique $(W = \mathbb{R}^{2n+2}, \omega = \sum_{j=1}^{n+1} dx_j \wedge dy_j)$ et le champ de Liouville

$$X = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (x_j \partial_{x_j} + y_j \partial_{y_j}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} r_j \partial_{r_j}$$

on récupère la structure de contact standard sur \mathbb{S}^{2n+1}

Fait 1.1. $(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_i)$ $i = 1, 2$ sont contactomorphes via

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) = \left(\frac{x_i + y_i}{2}, \frac{x_i - y_i}{2}, z + \frac{1}{2} \sum_j x_j y_j \right)$$

On appelle toute structure de contact contactomorphe à celles-ci **structure de contact standard**

Fait 1.2. Pour tout point $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ la variété de contact $(\mathbb{S}^{2n+1} \setminus \{p\}, \xi_0)$ est contactomorphe à la structure de contact standard sur \mathbb{R}^{2n+1} .

Exemple 1.5. Soit $M = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}P^n$ avec coordonnées cartésiennes (x_0, \dots, x_n) sur le facteur \mathbb{R}^{n+1} et $[y_0, \dots, y_n]$ sur le facteur $\mathbb{R}P^n$, alors le champ d'hyperplans :

$$\xi = \ker \left(\sum_{j=0}^n y_j dx_j \right)$$

est bien défini car α est définie à multiplication par facteur non nul. En effet il suffit de diviser la forme locale par y_k dans les cartes $y_k \neq 0$. Si n pair M n'est pas orientable et ξ n'est pas coorientable. Sinon M est orientable mais ξ n'est toujours pas coorientable.

1.1.3 Gray et Moser

Le théorème de Gray que nous allons énoncer à présent illustre la stabilité structurelle des variétés de contact fermées. Plus précisément nous allons montrer qu'il n'existe pas de déformation non triviale de la structure de contact.

Théorème 1.1 (Gray). *Soit M une variété lisse, fermée (compacte, sans bord) et $(\xi_t)_{t \in [0;1]}$ une famille lisse de structures de contact sur M . Alors il existe $(\psi_t)_{t \in [0;1]}$ famille de difféomorphismes de sorte que $d\psi_t(\xi_0) = \xi_t$ pour tout $t \in [0; 1]$*

Quitte à prendre un revêtement à deux feuillets supposons $\xi_t = \ker(\alpha_t)$. Cette démonstration utilise l'astuce de Moser, qui consiste à construire un symplectomorphisme ϕ , à partir du flot au temps 1 d'un champ de vecteurs X_t qui dépend du temps et vérifie une certaine équation différentielle à résoudre. Avant d'attaquer la preuve du théorème introduisons quelques lemmes préliminaires.

Lemme 1.2. *Soient*

- $(\psi_t)_{t \in [0,1]} \subset \text{Diff}(M)$
 - $(\xi_t = \ker \alpha_t)_{t \in [0,1]}$ une famille de structures de contact sur M ,
- alors $d\psi_t(\xi_0) = \xi_t \iff \exists \lambda_t : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de sorte que $\psi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$

Démonstration. Le diagramme suivant permet de visualiser les différents transports en jeu :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_t} & M \\ \psi_t^* \alpha_t \downarrow & & \downarrow \alpha_t \\ T^*M & \xleftarrow{d\psi_t^*} & T^*M \end{array}$$

Supposons que $\psi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$. Tout d'abord $\ker(\lambda_t \alpha_t) = \ker(\alpha_0) = \xi_0$ car $\lambda_t \neq 0$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \ker(\alpha_0) &= \ker((\psi^* \alpha_t)_p) \\ &= \ker(\alpha_{t, \psi_t(p)}(d\psi_{t,p} \cdot)). \end{aligned}$$

Donc $X \in \ker((\psi^* \alpha_t)_p) \iff d\psi_{t,p} \cdot X \in \ker((\alpha_t)_p)$, donc $d\psi_t(\xi_0) = \xi_t$.

Réciproquement supposons $\xi_t = d\psi_t(\xi_0)$. Alors pour tout $p \in M$, puisque ψ_t est un difféomorphisme $(\alpha_0)_p$ et $(\psi_t^* \alpha_t)_p$ sont des formes linéaires $T_p M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de même noyau, elles sont donc proportionnelles i.e.

$$\forall p \in M, t \in [0, 1], \exists \lambda_{t,p} \neq 0, \lambda_{t,p} \alpha_{0,p} = \psi_t^* \alpha_t.$$

De plus, pour tout t λ_t est lisse. En effet si on ne considère que $\alpha_{0,p}|_{T_p M / \xi_0}$, alors $(\frac{1}{\alpha_{0,p}} \psi_t^* \alpha_t)|_{T_p M / \xi_0}$ est lisse en p , non nulle, et vaut λ_t . \square

Lemme 1.3. Soit α_t une famille de formes différentielles sur une variété M , ψ_t une isotopie de M , et X_t champ de vecteurs sur M tel que ψ_t est le flot de X_t i.e. $X_t \circ \psi_t = \frac{d}{dt} \psi_t$. Alors

$$\frac{d}{dt} \psi_t^* \alpha_t = \psi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \alpha_t + \dot{\alpha}_t)$$

Idée de preuve. Cette identité est vraie :

- pour les fonctions
- si ω et ω' vérifient (*) alors $\omega \wedge \omega'$ aussi
- si ω vérifie (*) alors $d\omega$ aussi
- localement les fonctions engendrent l'algèbre graduée des formes différentielles (par Poincaré) □

Preuve du théorème de Gray. Montrons désormais le théorème. On cherche $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ isotopie lisse de sorte que $d\psi_t(\xi_0) = \xi_t$ pour tout $t \in [0,1]$. Par les lemmes précédents, avec $\xi_t = \ker(\alpha_t)$ l'équation fonctionnelle à résoudre devient :

$$\psi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \alpha_t + \dot{\alpha}_t) = \dot{\lambda} \alpha_0 = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda_t} \psi_t^* \alpha_t \quad (1)$$

En posant $\mu_t = \frac{d}{dt} (\log(\lambda_t) \circ \psi_t^{-1})$, l'équation devient :

$$\psi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \alpha_t + \dot{\alpha}_t) = \psi_t^* (\mu_t \alpha_t) \alpha_0 \quad (2)$$

$$= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda_t} \psi_t^* \alpha_t \quad (3)$$

$$\iff \mathcal{L}_{X_t} \alpha_t + \dot{\alpha}_t = \mu_t \cdot \alpha_t \quad (4)$$

On veut résoudre cette équation en X_t , or $T_p M = \langle \mathbb{R}_{\alpha_t, p} \oplus \ker(\alpha_t, p) \rangle$ pour tout $p \in M$. Donc il existe $H_t \in \mathcal{C}^\infty$ de manière canonique, $Y_t \in \xi_t$ tels que $X_t = H_t \cdot R_{\alpha_t} + Y_t$ avec R_{α_t} le champ de Reeb.

Supposons qu'un tel X_t soit solution de l'équation différentielle, en injectant cette solution dans les égalités précédentes et en appliquant la formule de Cartan, alors

$$\begin{aligned} d\iota_{H_t \cdot R_{\alpha_t}} \alpha_t + \iota_{Y_t} d\alpha_t + \dot{\alpha}_t &= \mu_t \alpha_t \\ \iff dH_t + \iota_{Y_t} d\alpha_t + \dot{\alpha}_t &= \mu_t \alpha_t. \end{aligned} \quad (5)$$

Or à priori notre flexibilité sur X_t est grande, si on suppose de plus que $H_t = 0$, l'EDP précédente devient une équation algébrique

$$\iota_{Y_t} d\alpha_t + \dot{\alpha}_t = \mu_t \alpha_t \quad (6)$$

Par non dégénérescence de $d\alpha_t|_{\xi_t}$, à condition de pouvoir calculer μ_t explicitement, puisque ξ_t est en bijection avec son cotangent via

$$Y_t \mapsto i_{Y_t} d\alpha_t|_{\xi_t}$$

l'équation algébrique admet une unique solution Y_t .

De plus en injectant R_{α_t} dans (6), on peut calculer explicitement μ_t , en effet :

$$\mu_t = \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}).$$

Ainsi $X_t = Y_t$ est solution de $\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t + \dot{\alpha}_t = \mu_t\alpha_t$, en tout point sur les vecteurs de ξ_t , et par construction de μ_t aussi sur le champ de Reeb. Donc par linéarité, X_t vérifie (6) sur TM entier. Soit alors ψ_t le flot, complet puisque M fermée, associé à X_t . Enfin en intégrant (6) ce flot vérifie bien $\psi_t^*\alpha_t = \lambda_t\alpha_0$. \square

1.1.4 Darboux et théorèmes de voisinages

Le théorème de Gray et l'astuce de Moser ont permis d'établir une série de résultats à la fois sur la structure locale des variétés de contact, et sur leurs sous-variétés (isotropes et de contact). Les quelques théorèmes suivants en sont des exemples clés.

Théorème 1.2 (Darboux). *Soit $(M^{2n+1}, \xi = \ker(\alpha))$ une variété de contact, et $p \in M$. Alors il existe des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ sur un voisinage U de p tel que*

$$\alpha|_U = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j$$

Démonstration. L'outil clé de la preuve est encore l'astuce de Moser. Quitte à recomposer par des cartes locales on peut supposer $M = \mathbb{R}^{2n+1}$ et $p = 0$. Par des propriétés d'algèbre linéaire et par la forme normale des 2-formes différentielles dans \mathbb{R}^{2n+1} , on peut choisir une base de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ sur \mathbb{R}^{2n+1} telles que :

$$\begin{aligned} \cdot \quad & \alpha_p(\partial_z) = 1, \quad i_{\partial_z} d\alpha_p = 0 \\ \cdot \quad & \partial_{x_j}, \partial_{y_j} \in \ker(\alpha_p), \forall j \in 1 \dots n \text{ et } d\alpha_p = \sum dx_i \wedge dy_i \end{aligned}$$

On pose par ailleurs $\alpha_0 = dz + \sum x_j dy_j$ à partir des coordonnées ainsi définies, et $\alpha_t = (1-t)\alpha_0 + t\alpha$ pour $t \in [0, 1]$, alors $\alpha_{1,p} = \alpha_p$ et $d\alpha_{t,p} = d\alpha_p$ et sur un voisinage de p α_t est une forme de contact. Pour trouver un changement de base approprié, on applique l'astuce de Moser, et alors le théorème de Gray nous fournit une isotopie de contactomorphismes définis localement $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$. Quitte à recomposer par la carte locale du début, $x_j \circ \psi_1^{-1}, y_j \circ \psi_1^{-1}, z \circ \psi_1^{-1}$ sont des coordonnées locales adaptées. \square

Remarque 1.2. Il existe une version du théorème de Darboux plus générale qui permet d'obtenir α_t explicite en d'intégrant H_t sur des tubes de trajectoires de R_{α_t} .

Remarque 1.3. L'astuce de Moser est intéressante ici car elle permet de transformer la recherche d'un difféomorphisme ψ_1 en

- (1) la recherche d'une famille lisse de difféomorphismes (ψ_t)

↓

- (2) la recherche d'un champ de vecteurs associé via une EDP

↓

- (3) la recherche d'un champ de vecteurs associé via une équation algébrique.

Définition 1.4. Soit L une variété isotrope on appelle **fibré conforme symplectique normal**

$$CSN(M, L) = (TL)^{\perp d\alpha} / TL$$

Remarque 1.4. L'inclusion $TL \subset (TL)^{\perp d\alpha} \subset \xi|_L$ tient car L est isotrope donc $\alpha|_{TL} = 0$, et alors $d\alpha|_{TL} = 0$.

Théorème 1.3 (Voisinage isotrope). *Soit (M_i, ξ_i) , $i=0,1$, deux variétés de contact avec sous-variétés isotropes respectives L_i . Supposons qu'il existe un isomorphisme de fibré conforme symplectiques Φ , et un difféomorphisme ϕ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} CSN(M_1, L_1) & \xrightarrow{\Phi} & CSN(M_1, L_1) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ L_0 & \xrightarrow{\phi} & L_1 \end{array}$$

Alors ϕ s'étend en un contactomorphisme

$$\psi : \nu(L_0) \longrightarrow \nu(L_1)$$

entre voisinages normaux adaptés des L_i tel que $d\psi|_{CSN(M_0, L_0)}$ et Φ sont homotopes comme isomorphismes de fibrés normaux symplectiques.

Il existe une version forte de ce théorème (6.2.2 de [6]) qui dit que **si de plus $\xi = \ker(\alpha)$ globalement alors ϕ s'étend en un contactomorphisme ψ strict.**

Corollaire 1.1. *Deux sous-variétés legendriennes fermées difféomorphes ont voisinages isotropes contactomorphes.*

Démonstration. Soit L une sous variété legendrienne de (M, ξ) , alors $TL \subset TL^{\perp d\alpha}$ et $\dim(TL) = \dim(TL^{\perp d\alpha}) = n$. Donc

$$CSN(M^{2n+1}, L^n) = TL^{\perp d\alpha} / TL = 0$$

Ainsi pour toutes deux variétés legendriennes difféomorphes, puisque leur fibré conforme symplectique normal est trivial elles vérifient les hypothèses du théorème précédent et leur voisinages sont contactomorphes. \square

Exemple 1.6. Soit S^1 un noeud legendrien dans \mathbb{R}^3 , un modèle adapté de voisinage de S^1 , avec coordonnée θ sur \mathbb{S}^1 et coordonnées sur les tranches transverses de \mathbb{D}^2 , (x, y) , est :

$$\alpha = \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy)$$

Exemple 1.7. Soit $M = \mathbb{R}^{2n+1}$ avec coordonnées $(z^{(1)}, q^{(k)}, p^{(k)}, x^{(n-k)}, y^{(n-k)})$, et forme de contact $\alpha = dz + pdq + \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, et

$$\mathbb{S}^{k-1} = \{(0, q, 0, 0), |q|^2 = 1\}$$

sphère unité isotrope dans M , alors pour a, b, c réels positifs :

$$]-a, a[\times T_{\leq b}^* \mathbb{S}^{k-1} \times (]-c, c[)^{2n-k} \subset \left(\mathbb{R} \times T^* \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^{2(n-k)}, \alpha \right)$$

est un modèle de voisinage adapté à \mathbb{S}^{k-1} . Par les théorèmes de voisinages toute sphère isotrope \mathbb{S}^{k-1} à fibré conforme symplectique normal trivial a un voisinage contactomorphe à ce modèle.

Théoreme 1.4 (Voisinage de contact). *Soit (M_i, ξ_i) , $i=0,1$, deux variétés de contact avec sous-variétés de contact respectives (M'_i, ξ'_i) .*

Supposons qu'il existe un isomorphisme de fibré conforme symplectiques Φ , et un difféomorphisme ϕ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} CSN(M_0, M'_0) & \xrightarrow{\Phi} & CSN(M_1, M'_1) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (M'_0, \xi'_0) & \xrightarrow{\phi} & (M'_1, \xi'_1) \end{array}$$

Alors ϕ s'étend en un contactomorphisme

$$\psi : \nu(M'_0) \longrightarrow \nu M'_1 L_1$$

entre voisinages normaux adaptés des M'_i tel que $d\psi|_{CSN(M_0, M'_0)}$ et Φ sont homotopes comme isomorphismes de fibrés normaux symplectiques à automorphisme conforme prés.

Pour une preuve des théorèmes 1.3 et 1.4 le lecteur est invité à consulter [5] ou [6]

On considère par la suite (M, ξ) orientée, coorientée, et fermée

1.1.5 Préréquis symplectiques

La géométrie de contact peut-être vue comme l'homologue en dimension impaire de la géométrie symplectique. Même si les questions étudiées et les

applications différent, ils existent de nombreux ponts entre les deux domaines, il est utile à toute personne qui s'intéresse à la géométrie de contact de jongler entre le langage symplectique et le langage de contact. Voici quelques notions qui nous seront utiles dans notre contexte précis.

De contact à symplectique :

Définition 1.5. Une *variété symplectique* est une paire (W^{2n+2}, ω) , avec ω une deux forme fermée non dégénérée telle que ω^{n+1} est une forme volume sur W .

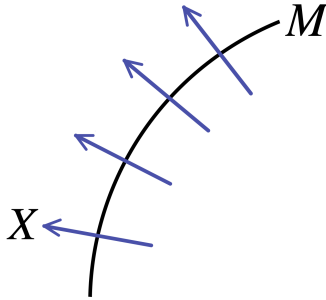
Définition 1.6. Soit (M^{2n+1}, ξ) de contact, $\xi = \ker(\alpha)$, sur $\mathbb{R} \times M$, on définit $\omega = d(e^t \alpha)$. Alors $(\mathbb{R} \times M, \omega)$ est symplectique appelée *symplectisation* de (M, α) .

Remarque 1.5. À symplectomorphisme près, la symplectisation dépend que de ξ et non de α , via le symplectomorphisme :

$$\begin{aligned} (M, \alpha) &\longrightarrow (M, \tilde{\alpha} = e^f \alpha) \\ (\mathbb{R} \times M, d(e^t \alpha)) &\longrightarrow (\mathbb{R} \times M, d(e^t \tilde{\alpha})) \\ (t, x) &\mapsto (t + f, x) \end{aligned}$$

De symplectique à contact :

Définition 1.7. Soit (W^{2n+2}, ω) symplectique, et M^{2n+1} une hypersurface de W . M est dite *convexe* s'il existe X champ de Liouville ($\mathcal{L}_X \omega = \omega$), défini au voisinage de M et transverse à M . Alors avec $\lambda = i_X \omega$, $\lambda|_M$ est une forme de contact sur M .



Exemple 1.8. Soit $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std} = \sum dx_i \wedge dy_i)$, et

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum x_i^2 + y_i^2 = 1\},$$

le champ de Liouville $X = \sum \frac{1}{2}(x_i \partial_{x_i} + y_i \partial_{y_i})$ induit une 1-forme de contact sur \mathbb{S}^{2n-1} $\alpha_{std} = \frac{1}{2} \sum (x_i dy_i - y_i dx_i)|_{\mathbb{S}^{2n-1}}$

Exemple 1.9. Soit (Σ, α) une variété de contact, alors $\Sigma \times \{0\} \subset \Sigma \times \mathbb{R}$ est de contact dans sa symplectisation via le champ de Liouville $X = \partial_t$.

Lemme 1.4. Soient $(W_1, \omega_1), (W_2, \omega_2)$ deux variétés symplectiques, avec champs de Liouville respectifs Y_1, Y_2 , puis M_1, M_2 deux hypersurfaces transverses à Y_1, Y_2 , avec alors $\beta_1 = i_{y_1}\omega_1, \beta_2 = i_{y_2}\omega_2$ structures de contact respectives, et enfin ϕ un contactomorphisme entre M_1 et M_2 . Alors ϕ s'étend en un symplectomorphisme $\Phi : \nu(M_1) \rightarrow \nu(M_2)$ en envoyant ligne de champ sur ligne de champ.

Pour une preuve de ce lemme le lecteur peut se référer à [5]

Proposition 1.2. En général si (W^{2n+2}, ω) symplectique compact, et M une hypersurface convexe compacte sans bord, alors M à un voisinage symplectomorphe à un voisinage de $M \times \{0\}$ dans sa symplectisation.

Démonstration. Soit X le champ de Liouville de W . M est trivialement contactomorphe à $M \times \{0\}$ dans la symplectisation $\mathbb{R} \times M$. Par le lemme 1.4, en envoyant les lignes de champ de X dans un petit voisinage de M sur les lignes de champ ∂_t (avec t la coordonnée de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} \times M$), on obtient le symplectomorphisme voulu. \square

Exemple 1.10. En reprenant l'exemple 1.8, le flot associé à X vérifie

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2}x_i, \dot{y}_i = \frac{1}{2}y_i,$$

$$\text{donc } x_i(t) = e^{\frac{t}{2}}x_i(0), y_i(t) = e^{\frac{t}{2}}y_i(0).$$

Si on considère le rayon $r = \sqrt{\sum(x_i^2 + y_i^2)}$ alors $r(t) = e^{\frac{t}{2}}$ et $t = \log(r^2)$. On a donc le symplectomorphisme :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2n-1}, d(e^t \alpha_{std})) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{2n} \setminus 0, \omega_{std}) \\ (t, p) &\mapsto e^{\frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

Définition 1.8. Introduisons d'autres objets qui seront utiles pour l'étude de la stabilisation des livres ouverts .

- Une **variété de Liouville** est une variété symplectique $(W^{2n}, \omega = d\lambda)$ symplectique exacte munie d'un champ de Liouville X complet, de sorte que X est sortant le long du bord de W .
- Soit M une variété lisse, $f : M \mapsto \mathbb{R}$, on dit qu'un champ de vecteurs X est de **type gradient** pour f si $\mathcal{L}_X f > 0$ pour $p \notin \text{Crit}(f)$.
- Un **domaine de Liouville** $(W^{2n}, \omega = d\lambda)$ est une variété de Liouville, compacte, à bord.
- (W, ω) symplectique, $f : W \mapsto [0, +\infty]$ est **ω -convexe** s'il existe un champ de vecteurs sur M complet, de Liouville, de type gradient pour f .
- Une **variété de Weinstein** est une variété de Liouville (W^{2n}, ω, X) munie d'une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ lisse, propre, Morse et de type gradient pour f (ie $\mathcal{L}_X f > 0$ en dehors des points critiques de f). On dit aussi que f est Lyapounov pour X .

- (W, ω) de Weinstein est de **type fini** si $Crit(f)$ est fini
- Une variété de Weinstein K est dite **compacte** (ou **domaine**) si c'est une sous-variété plongée d'une variété de Weinstein de type fini (W, ω, X, f) telle que $K = f^{-1}([0, C])$, avec $C \in Reg(f)$.

Pour la suite on supposera de plus que les variétés de Weinstein que l'on considère sont de type fini. En pratique les variétés de Weinstein le sont, ainsi il arrive souvent à certains auteurs d'omettre cette condition quand elle est nécessaire.

Définition 1.9. Soit K une variété de Weinstein compacte. Pour C la plus grand valeur prise par f , on appelle $\Sigma = f^{-1}(C)$ le **bout convexe de W** .

Plus généralement pour (W, ω, X, f) Weinstein de type fini, pour tout $C \in \mathbb{R}_+$ tel que C est strictement plus grand que les valeurs critiques de f , $f^{-1}(C) = M$ est une hypersurface lisse et convexe car X est Liouville, donc transverse aux lignes de niveau de f et de type gradient pour f , donc $i_x \omega$ induit une structure de contact adaptée.

$f^{-1}([C, +\infty[)$ est symplectomorphe à la demi symplectisation de M , $(\mathbb{R}_+ \times M, \omega)$. On dit qu'on a "complété K " pour que X soit complet :

$$W = K \cup_M \mathbb{R}_+ \times M.$$

Exemple 1.11. Pour revenir sur l'exemple 1.8.

$$f : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum x_i^2 + y_i^2 = r^2 = e^t$$

est de Morse avec un seul point critique à l'origine, lisse, propre, Lyapounov pour X car X est radial. Donc $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std}, X, f)$ est Weinstein de type fini, et

$$\mathbb{R}^{2n} = B^{2n} \cup_{\mathbb{S}^{2n-1}} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{2n-1}$$

les bords de B^{2n} et de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{2n-1}$ se recollent bien de manière lisse.

1.2 Livres ouverts

Introduisons maintenant l'objet qui a motivé ce mémoire de M2, les livres ouverts adaptés. Afin de décrire la donnée d'une reliure B et de pages Σ sur la variété de contact deux approches sont possibles : le livre ouvert concret et le livre ouvert abstrait.

1.2.1 Livre ouvert concret

La première description revient à construire notre décomposition via la donnée de la reliure et d'une fibration sur le cercle dont les fibres forment les

pages et comment les numéroter. On appelle aussi parfois cette caractérisation "description différentielle".

Définition 1.10. Un *livre ouvert concret* sur M^{2n+1} est une paire (B, θ) avec :

- B une sous-variété de codimension 2 de M avec fibré normal trivial
- $\theta : M \setminus B \mapsto \mathbb{S}^1$ une fibration, telle que sur un voisinage épointé de la reliure $B \times \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$, avec φ coordonnée angulaire et r rayon sur \mathbb{D}^2 ,

$$\theta : (x, r, \varphi) \mapsto \varphi.$$

B est appelée *la reliure* du livre ouvert, les fibres de θ *les pages*.

Demander que B ait un fibré normal trivial nous permet de construire un voisinage tubulaire de B global.

Définition 1.11 (Giroux). Une 1-forme de contact positive α , sur M orientée est dite *portée par le livre ouvert* (B, θ) si α vérifie les conditions suivantes :

- α induit une structure de contact positive sur B .
- $d\alpha$ induit une structure symplectique positive sur chaque fibre de θ .

Un tel livre ouvert est lui dit *adapté*.

Lemme 1.5. Si B est une sous-variété connexe de contact de (M, ξ) . Une forme de contact α sur (M, ξ) est adaptée à un livre ouvert (B, θ) ssi le champ de Reeb R_α associé est positivement transverse aux fibres ie $d\theta(R_\alpha) > 0$

Démonstration. Si $(d\alpha)^n$ induit une orientation positive sur chaque fibre Σ de θ , alors $\forall x \in \Sigma$ on peut trouver $v_1, \dots, v_{2n} \in T_x \Sigma$ base positive telle que $i_{R_\alpha} v_1 \wedge v_{2n} \alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$. Puisque les fibre de θ et avec l'orientation induite par l'orientation de \mathbb{S}^1 fournit aussi une orientation de la variété, le champ de Reeb est positivement transverse aux fibres.

Réciproquement si R_α est positivement transverse aux fibres de θ alors on peut compléter $R_\alpha(x)$ par $v_1, \dots, v_n \in T_x \Sigma$ pour obtenir une base directe de $T_x M$ $i_{R_\alpha} \alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$ donc en particulier $d\alpha$ est symplectique positive sur les fibres. Et sur la reliure $B = \partial \Sigma$:

$$\begin{aligned} \int_B \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} &= \int_{\partial \Sigma} \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \\ &= \int_{\Sigma} d\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \text{ par Stokes} \\ &= \int_{\Sigma} (d\alpha)^n > 0 \end{aligned}$$

Donc α induit aussi une orientation positive sur la reliure. □

1.2.2 Livres ouverts abstraits

L'autre description de livre ouvert équivalente est celle de livre ouvert **abstraite** via la donnée cette fois ci des pages et d'une application, dite "monodromie", qui explicite comment recoller la première et la dernière page. On appelle aussi parfois cette caractérisation "description topologique".

Définition 1.12. Un **livre ouvert abstrait** est un triplet (Σ, λ, ψ) , avec $(\Sigma, d\lambda)$ un domaine de Liouville, et $\psi \in \text{Sympl}_c(\Sigma, d\lambda)$ un symplectomorphisme à support compact.

On construit la variété de contact qu'il décompose via d'une part la construction de $A_{(\Sigma, \psi)}$, avec une structure de contact canonique α , de l'autre B_Σ que nous expliciterons plus loin. On recollera ces deux morceaux via un contactomorphisme explicite qui nous permet de construire une structure de contact sur B_Σ , ce qui donne une structure de contact globale sur

$$M = A_{(\Sigma, \psi)} \cup_{\partial} B_\Sigma.$$

On note $\text{Open}(\Sigma, \psi)$ une décomposition par livre ouvert abstraite.

Proposition 1.3. $\text{Open}(\Sigma, \psi) = A_{(\Sigma, \psi)} \cup_{\partial} B_\Sigma$ admet une structure de contact globale.

Lemme 1.6. Soit $(\Sigma, d\lambda)$ une variété de Weinstein compacte, $\psi \in \text{Sympl}(\Sigma, d\lambda)$ avec $\psi|_{\partial\Sigma} = \text{id}$. Alors on peut isotoper ψ en $\hat{\psi}$ tel que $\hat{\psi}^*\lambda = \lambda - dh$ avec $h \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$

Démonstration. Posons $\mu = \psi^*\lambda - \lambda$. Puisque $d\lambda$ est une forme symplectique non dégénérée, il existe un unique champ de vecteurs Y tel que $i_Y d\lambda = -\mu$. Soit ϕ_t^Y le flot associé à Y . Alors

$$\mathcal{L}_Y d\lambda = di_Y d\lambda = -d\mu = 0,$$

$$\text{or } \mathcal{L}_Y d\lambda = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^Y d\lambda$$

$$\text{donc } \forall s, \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \phi_t^Y d\lambda = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_{t+s}^Y d\lambda = \phi_s^* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^Y d\lambda = 0.$$

Ainsi puisque $\phi_0 = \text{id}$, $\phi_t^{Y*} d\lambda = d\lambda$, ie ϕ_t^Y préserve $d\lambda$, et $\psi|_{\partial\Sigma} = \text{id}|_{\partial\Sigma}$ par hypothèse donc

$$\begin{aligned} \mu|_{\partial\Sigma} &= \psi^*\lambda|_{\partial\Sigma} - \lambda|_{\partial\Sigma} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda|_{\partial\Sigma}(Y|_{\partial\Sigma}, \cdot) = \mu|_{\partial\Sigma} = 0$. Par non-dégénérescence de $d\lambda$, $Y|_{\partial\Sigma} = 0$, et donc $\phi_t^Y|_{\partial\Sigma} = \text{id}$.

Posons $\hat{\psi} = \psi \circ \phi_1$, et plus généralement $\psi_t = \psi \circ \phi_t$. Alors $\psi_t|_{\partial\Sigma} = id$ et $\psi_t^* d\lambda = d\lambda$, donc ψ_t est bien un symplectomorphisme qui vaut l'identité près du bord de Σ . Il reste à trouver le bon $\hat{\psi}$ parmi les ψ_t tel que $\hat{\psi}^* \lambda = \lambda - dh$.

Remarquons que $\mathcal{L}_Y \mu = di_Y \mu = -d(d\lambda(Y, Y)) = 0$, donc par le même raisonnement que précédemment $\phi_t^{Y*} \mu = \mu$, ainsi

$$\begin{aligned} \psi_t^* \lambda - \lambda &= \phi_t^* \psi^* \lambda - \lambda \\ &= \phi_t^* (\psi^* \lambda - \lambda + \lambda) - \lambda \\ &= \phi_t^* (\mu + \lambda) - \lambda \\ &= \mu + \phi_t^* \lambda - \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_t^* \lambda - \lambda &= \int_0^t \frac{d}{ds} \phi_s^* \lambda \, ds \\ &= \int_0^t \phi_s^* \mathcal{L}_Y \lambda \, ds \\ &= \int_0^t \phi_s^* (i_Y d\lambda + di_Y \lambda) \, ds \\ &= \int_0^t \phi_s^* (-\mu) \, ds + \int_0^t \phi_s^* di_Y \lambda \, ds \\ &= -\mu \int_0^t ds + d \int_0^t \phi_s^* i_Y \lambda \, ds \\ &= -t\mu + dh, \text{ avec } h = \int_0^t \phi_s^* i_Y \lambda \, ds + 1 \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \end{aligned}$$

donc $\mu + \phi_1 \lambda - \lambda = dh$ et $\psi_t \lambda - \lambda = \mu + \phi_t \lambda - \lambda$, donc $\hat{\psi} := \psi_1$ est le difféomorphisme recherché, isotope à ψ via ψ_t . La normalisation de h en ajoutant un terme constant de 1, permet que sur $h_{\partial\Sigma} = 1$ et assurera un bon recollement pour la suspension dans la construction du livre ouvert. \square

Démonstration de la proposition. La première étape de la construction à partir de la donnée d'un livre ouvert abstrait est celle de la construction d'un tore de recollement avec (Σ, λ, ψ) ,

$$A_{(\Sigma, \psi)} = \Sigma \times \mathbb{R} / \sim, \text{ où } (x, \phi) \sim (\hat{\psi}(x), \phi + h(x)).$$

Ce quotient est muni de la 1-forme de contact $\alpha = \lambda + d\phi$, en effet

— La 1 forme $\alpha \in \Omega^1(\Sigma \times \mathbb{R})$ passe au quotient sur $A_{\Sigma, \hat{\psi}}$ puisque

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^* \lambda = \lambda + dh &\implies \hat{\psi}^* \alpha = \hat{\psi}^* \lambda + \hat{\psi}^* d\phi \\ &= \hat{\psi}^* \lambda + d\phi - dh \\ &= \lambda + dh + d\phi - dh \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

— Par ailleurs $\forall \phi \in \mathbb{S}^1$, $(d\lambda)^n$ est une forme volume sur $\Sigma \times \{\phi\} \subset A_{\Sigma, \hat{\psi}}$, donc

$$(\lambda \wedge (d\lambda)^n)|_{\Sigma \times \{\phi\}} = 0.$$

Or les $\Sigma \times \{\phi\}$ feuilletent $A_{\Sigma, \hat{\psi}}$ donc $\lambda \wedge d\lambda = 0$

— On a la forme volume

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

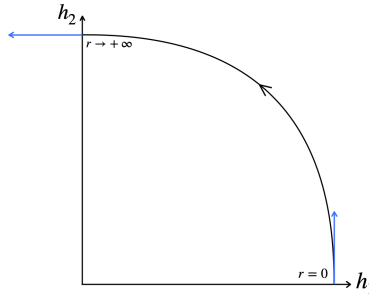
Puisque $\hat{\psi}$ est l'identité près du bord de Σ , un voisinage du bord ressemble à $] -\frac{1}{2}, 0] \times \partial\Sigma \times \mathbb{S}^1$ avec forme de contact $\alpha = e^r \lambda|_{\partial\Sigma} + d\phi$. On va recoller le bord de ce voisinage à $B_\Sigma = \partial\Sigma \times \mathbb{D}^2$.

Alors la variété de contact qui nous intéresse est $M = A_{(\Sigma, \hat{\psi})} \cup_{\Phi_{glue}} B_\Sigma$ avec

$$\Phi_{glue} : \begin{array}{ccc} \nu(\partial\Sigma) & \longrightarrow & \nu(\partial A_{\Sigma, \hat{\psi}}) \\ (x, r e^{i\phi}) & \mapsto & (\frac{1}{2} - r, x, \phi) \end{array}$$

Pour avoir une structure de contact β sur M il faut étendre celle qu'on a sur le tore de recollement, de manière compatible avec Φ_{glue} . Pour faire cela, tout d'abord prenons $\beta|_{\nu(\partial\Sigma)} = \Phi_{glue}^* \alpha|_{\nu(\partial A_{\Sigma, \hat{\psi}})} = e^{\frac{1}{2}-r} \lambda|_{\partial\Sigma} + d\phi$, pour étendre cette 1-forme à tout B , on cherche $\beta = h_1(r) \lambda|_{\partial\Sigma} + h_2(r) d\phi$ avec

$$\begin{cases} h_1(r) = e^{1-r}, h_2(r) = 1 & \text{au voisinage de } r = 1 \\ h_1(r) = C, h_2(r) = r^2 & \text{au voisinage de } r = 0. \end{cases}$$



□

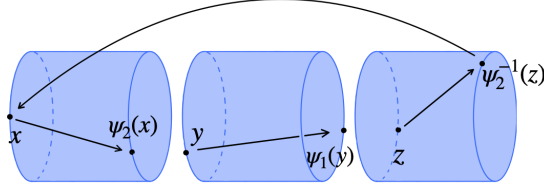
Remarque 1.6. Le livre ouvert correspondant qu'on a construit ne dépend que de la classe d'isotopie de ψ . En effet l'isotopie de ψ induit une homotopie de la structure de contact sur le tore de recollement via une isotopie de l'application de projection en question :

Soit $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie de monodromies données par le lemme 1.6 précédent, telle que $\psi_0 = \psi$. Soit $\pi_t : (\Sigma \times \mathbb{R}, \alpha = \lambda + d\phi) \longrightarrow (A_{\Sigma, \psi_t}, \alpha_t = \pi_t^*(\lambda + d\phi))$, et α_t la 1-forme de contact obtenue en passant α au quotient par π_t . Les A_{Σ, ψ_t} sont contactomorphes via le contactomorphisme

$$\begin{aligned} \Psi = \pi_0 \circ (\pi_t)^{-1} : A_{\Sigma, \psi_t} &\longrightarrow A_{\Sigma, \psi} \\ [x, \phi]_t &\mapsto [x, \phi]_0. \end{aligned}$$

Proposition 1.4. *Un livre ouvert abstrait est invariant par conjugaison et permutation cyclique des compositions de monodromies.*

Idée : Si ψ_1 et ψ_2 sont deux applications de monodromies adaptées au lemme 1.6. Pour voir que $Open(\Sigma, \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi_2^{-1}) = Open(\Sigma, \psi_1)$, la clé est de noter que le tore de recollement de $\psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ peut se voir comme 3 tores de recollement où on applique successivement chaque monodromie.



Par ce modèle le recollement est invariant par permutation cyclique de la conjugaison, donc le livre ouvert est invariant par conjugaison.

1.2.3 Lien entre les deux point de vue

Le point de vue abstrait et le point de vue concret sont complémentaires. Intuitivement, il peut sembler clair qu'ils décrivent des situation similaires. Mais l'équivalence formelle n'est pas évidente.

D'une part un livre ouvert abstrait $Open(\Sigma, \psi)$ admet une structure de livre ouvert concret naturelle avec $B = \partial\Sigma \times \{0\}$ et

$$\begin{cases} \theta_1 : [x, t] \mapsto [t] & \text{pour } [x, t] \in A_{(\Sigma, \psi)} \\ \theta_2 : (p, r, \varphi) \mapsto \varphi & \text{pour } (p, r, \varphi) \in B_\Sigma. \end{cases}$$

Les applications θ_1 et θ_2 coïncident sur les bords communs de leurs ensembles de définition.

C'est dans le sens inverse que la construction nécessite plus de réflexion, par souci de concision nous n'inclurons qu'une brève discussion de ce point, mais le lecteur peut se référer aux lemmes 2.19 et 2.20 de [8], pour une construction plus explicite. En voici une discussion schématique.

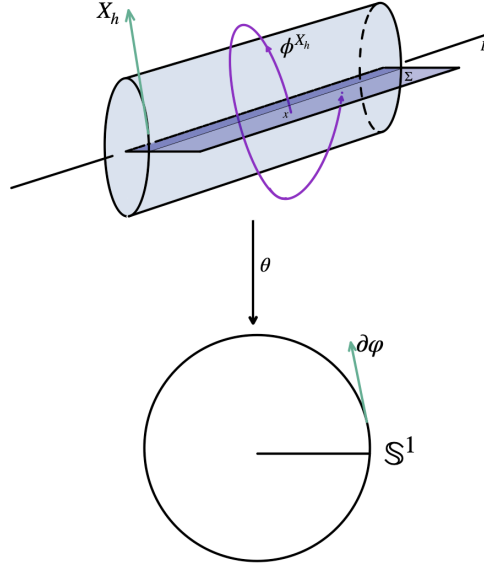
Soit (B, θ) un livre ouvert concret, si on considère $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la monodromie peut être construite comme une application de premier retour sur la page 0 du livre ouvert pour un champ bien choisi. Construisons un tel champ.

Par la définition 1.10, sur $B \times \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ θ est la projection sur la coordonnée angulaire φ de \mathbb{D}^2 . On peut donc choisir une métrique Riemannienne g telle que les fibres soient orthogonales au champ ∂_φ .

Si on étend cette métrique de manière quelconque sur le reste de la variété, on peut définir une connexion pour relever le champ de vecteurs tangent de $t \mapsto e^{it}$, ∂_φ , de \mathbb{S}^1 en un champ de vecteur X_h horizontal par

$$\begin{cases} Vert = & \{T_x \theta^{-1}(\varphi)\}_{\varphi \in \mathbb{S}^2, x \in \theta^{-1}(\varphi)} \\ Hor = & \{T_x \theta^{-1}(\varphi)^{\perp g}\}_{\varphi \in \mathbb{S}^2, x \in \theta^{-1}(\varphi)} \end{cases}$$

Près de la reliure $X_h = \partial_\varphi$ et **la monodromie est le flot du champ X_h au temps 2π .**



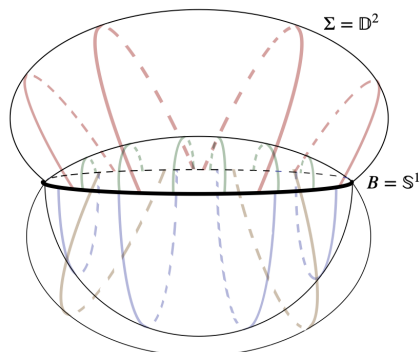
La monodromie précédente n'est par forcément un symplectomorphisme, c'est pourquoi les constructions des lemmes 2.19 et 2.20 de [8] sont cruciales. Dans ces lemmes, il faut d'abord opérer une déformation de la forme de contact pour avoir un plongement de $B \times \mathbb{D}^2$ adapté. C'est alors dans le cadre de cette nouvelle forme de contact qu'on relève le champ ∂_φ en X_h par un choix de connexion comme précédemment, mais sauf que cette fois ci le flot au temps 2π est aussi un symplectomorphisme.

Remarque 1.7. Le choix de ψ et non ψ^{-1} comme "monodromie" est une convention.

Exemple 1.12. Considérons la 3-sphère comme la sphère unité de \mathbb{C}^2 $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, munie de la 1-forme de contact $\alpha = r_1^2 d\varphi_1 + r_2^2 d\varphi_2$. Soit une première décomposition en livre ouvert adaptée avec reliure $B_0 = \{(z_1, z_2) : r_1 = 0\}$, cercle S^1 trivial, et fibration

$$\begin{aligned} \theta_0 : \quad \mathbb{S}^3 \setminus B_0 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) &\mapsto \varphi_1. \end{aligned}$$

les pages via θ_0 sont des disques \mathbb{D}^2 . La figure ci dessous représente une projection stéréographique de cette décomposition.



Soit ensuite le livre ouvert adapté avec reliure $B_1 = \{(z_1, z_2) : r_1 r_2 = 0\}$, qui correspond à deux cercles avec un enlacement de 1, avec fibration

$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad \mathbb{S}^3 \setminus B_1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) &\mapsto \varphi_1 + \varphi_2. \end{aligned}$$

les pages via θ_1 sont des anneaux. La monodromie associée au livre ouvert (B_0, θ_0) est l'identité du disque et celle du livre ouvert (B_1, θ_1) est un twist de Dehn de l'anneau (voir 2.1). En effet, ∂_{φ_2} est un champ de vecteurs défini sur $M \setminus B_0$ positivement transverse aux fibres de θ_0 . En considérant le page $\varphi_2 = 0$, le flot au temps 2π de ce champ de vecteurs est l'identité. Le deuxième livre ouvert est obtenu par une de "stabilisation" du premier que nous expliciterons plus tard.

2 Chirurgies en géométrie de contact

Les outils sont en place, et nous pouvons désormais avancer dans la seconde partie de ce mémoire consacrée à l'étude de différentes chirurgies dans le but de comprendre l'opération de *stabilisation* sur les livres ouverts. Plus précisément l'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.1 (Giroux). *Soit $M = \text{Open}(\Sigma, \psi)$ un livre ouvert abstrait. La stabilisation de M le long d'un disque lagrangien L qui borde une sphère lagrangienne ∂L dans $\partial\Sigma$ est contactomorphe à $\text{Open}(\Sigma, \psi)$*

Voici aussi quelques motivations pour la suites discussion.

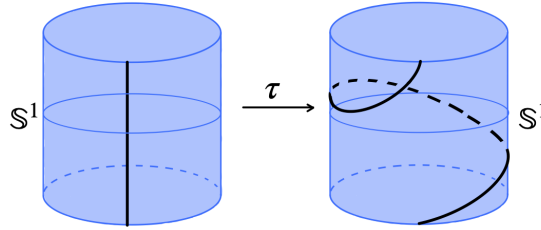
Théorème 2.2 (Giroux-Mohsen). *Toute structure de contact sur une variété fermée M est portée par un livre ouvert dont chaque fibre est une variété de Weinstein.*

Théoreme 2.3. *En dimension 3, deux structures de contact portées par un même livre ouvert sont isotopes, et deux livres ouverts adaptés à une même structure de contact ont des stabilisations isotopes. Plus précisément on a une bijection entre l'ensemble des structures de contact à isotopie près et l'ensemble des livres ouverts à stabilisation et isotopie près.*

La dimension 3 en particulier a fait l'objet de résultats importants, dans la suite nous nous intéresseront en revanche à $\dim(M) \geq 3$.

2.1 Twist de Dehn

Tout d'abord discutons d'un exemple important de monodromie qui apparaîtra dans la discussion à suivre : le twist de Dehn à droite généralisé. En effet le twist de Dehn à droite usuel, représenté ci-dessous, est un symplectomorphisme sur le cotangent du cercle \mathbb{S}^1 , ses puissances sont des représentants des classes d'isotopies des symplectomorphismes sur le cotangent du cercle. Mais il peut-être généralisé au cotangent de la sphère, et par le corollaire 1.1, au voisinage d'une sphère lagrangienne.



Pour construire le twist de Dehn généralisé on considère $T^*\mathbb{S}^n = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, |q| = 1 \text{ et } \langle q, p \rangle = 0\}$, muni de $\lambda_{can} = pdq = \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i$, et forme symplectique exacte $\omega_{can} = -d\lambda$. On considère $g^{\mathbb{S}^n}$ métrique ronde standard sur $T\mathbb{S}^n$, alors $g^{\mathbb{S}^n}$ fournit un isomorphisme entre $T\mathbb{S}^n$ et $T^*\mathbb{S}^n$ par non dégénérescence. Soit $\mu : (q, p) \mapsto |p|$ lisse sur $T\mathbb{S}^n \setminus T_0\mathbb{S}^n$, X_μ champ de vecteurs hamiltonien associé solution de

$$i_{X_\mu} \omega_{can} = d\mu \quad (7)$$

et ϕ_t^μ flot hamiltonien associé solution de

$$\frac{d}{dt} \phi_t^\mu(q, p) = X_\mu(\phi_t^\mu(q, p)) \quad (8)$$

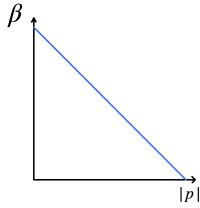
Théoreme 2.4 (4.3 de [3]). *Le flot hamiltonien associé à la fonction μ , ϕ^μ , coïncide avec le flot géodésique parcouru à vitesse constante. En particulier le flot géodésique est un symplectomorphisme.*

Théoreme 2.5. *Les géodésiques de \mathbb{S}^n parcourues à vitesse constantes sont les grands cercles d'équation $\gamma_{q,p} : t \mapsto \left(\cos(t)q + \frac{\sin(t)}{|p|}p, = |p|\sin(t)q + \cos(t)p \right)$*

Proposition 2.1. $\sigma_t = \phi_t^\mu : \begin{cases} T\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^n & \rightarrow T\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^n \\ (q, p) & \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & |p|^{-1}\sin(t) \\ -|p|\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \end{cases}$

σ_t peut-être étendue en $p = 0$ de manière lisse par $-Id$ sur la section nulle par l'expression explicite précédente.

Définition 2.1. Soit $\begin{cases} \beta(|p|) = 0 & |p| \gg 0 \\ \beta(0) = \pi \text{ et } g'_1(0) < 0 \end{cases}$.



Alors

$$\tau = \phi : (q, p) \mapsto \begin{cases} \sigma_{\beta(|p|)}(q, p) & (q, p) \in T_{\leq \epsilon}^* \mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^n \\ -(q, p) & (q, p) \in \mathbb{S}^n \end{cases}$$

est appelé **twist de Dehn à droite généralisé**. Il coïncide avec le twist de Dehn usuel pour $n = 1$.

Remarque 2.1. À isotopie près τ ne dépend pas du choix de β . On peut étendre τ à $T^*\mathbb{S}^n$ tout entier par l'identité.

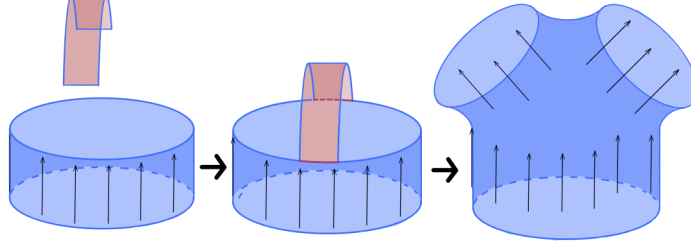
Récapitulatif : le twist de Dehn généralisé associé à $(q, p) \in T_{\leq \epsilon}^* \mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^n$ le flot géodésique partant de q dans la direction p (un grand cercle) parcouru à $|p|$ constant, pendant une distance $\beta(|p|)$, où β a le profil décrit précédemment. On étend cette application par l'antipode sur la section nulle \mathbb{S}^n , et par l'identité sur le reste de $T^*\mathbb{S}^n$

2.2 Chirurgie et attachement d'anse

En géométrie de contact on appelle chirurgie sur M^{2n+1} d'indice k le long de \mathbb{S} isotrope :

$$\tilde{M} = (M \setminus (\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{2n-k+1})) \cup_{\partial} (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{2n-k}).$$

À partir de là on peut toujours considérer un cobordisme entre M et \tilde{M} par l'attachement d'anse symplectique sur $W^{2n+2} = M \times [0, 1]$ un morceau de symplectisation de M , ie en recollant une copie de $\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{D}^{2n-k+1}$ (anse symplectique) le long d'un voisinage d'une sphère isotrope de dimension k , $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{2n-k} \times 1$. On appelle $\mathbb{D}^{k+1} \times 0$ le coeur de l'anse, il est lagrangien.



Plus précisément l'attachement d'anse symplectique le long d'une sphère isotrope à laquelle on s'intéresse été introduit par Weinstein [9]. Mais dans son modèle le bord de l'anse ressemble à des morceaux " $z^2 - w^2 = cte$ ", ce qui n'est pas pratique pour calculer le champ de Reeb. Nous allons donc considérer un modèle topologique d'anse équivalent, dit "plat", adapté au calcul du champ de Reeb ce qui sera utile pour la stabilisation ensuite.

Soit $(M, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact, S^k une sphère isotrope, à fibré normal trivialisé avec $CSN(M, S)$, trivialisé par η . Avant d'opérer les constructions pour la chirurgie, choisissons un modèle de voisinage adapté.

2.2.1 Modèles de voisinage d'une sphère isotrope

- Modèle 1 : Par le théorème 1.3 on peut trouver un plongement de contact strict qui dépend du choix de trivialisatation η :

$$\psi : (\nu(S), \alpha) \longrightarrow \left(\mathbb{R} \times T^*S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}, dt + pdq + \frac{1}{2}(xdy - ydx) \right).$$

Plus précisément on identifie $\nu(S)$ avec un voisinage de $\{0\} \times S^k \times \{0\}$ comme dans l'exemple 1.7. On appellera cette identification le **premier modèle de voisinage** d'une sphère isotrope (à fibré normal trivial). Afin de mieux contrôler la largeur de ce voisinage on peut l'élargir via le contactomorphisme non strict suivant :

$$\Phi_C : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times T^*S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times T^*S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)} \\ (t, q, p, x, y) & \mapsto & (Ct, q, Cp, \sqrt{C}x, \sqrt{C}y). \end{array}$$

Remarque 2.2. La trivialisatation du fibré normal de S , $\nu(S)$, ne dépend que de la trivialisatation η de $CSN(M, S^k)$. En effet T^*S^k n'est pas trivial

mais est stablement trivial, ie $\mathbb{R} \times T^*S^k$ est trivial, et par le théorème 2.27 de [5] on peut decomposer le fibré normal de S de manière canonique en 3 parties :

$$N(S) \cong TM|_S/\xi|_S \oplus \xi|_S/TS^\perp \oplus CSN(M, S).$$

La première composante est la composant normale à ξ , le champ de Reeb. La deuxième correspond au sous espace de ξ intégrable par rapport à la sous variété legendrienne S . La troisième est le reste de la décomposition de ξ . Ainsi

$$TM|_S/\xi|_S \oplus \xi|_S/TS^\perp \cong \mathbb{R} \times T^*S^k.$$

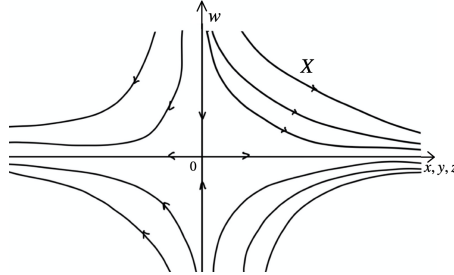
- *Modèle 2* : Le deuxième modèle que nous allons considérer est celui dans lequel nous allons nous placer pour effectuer la chirurgie d'anse. Considérons la variété symplectique $(\mathbb{R}^{2n+2}, \omega_0)$ avec coordonnées

$$(x^{(n-k)}, y^{(n-k)}, z^{(k+1)}, w^{(k+1)})$$

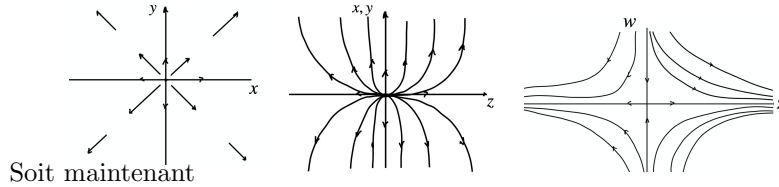
et champ de Liouville $X = \frac{1}{2}(x\partial_x + y\partial_y) + 2z\partial_z - w\partial_w$, alors

$$\phi_t^X(x, y, z, w) = (e^{\frac{1}{2}t}x, e^{\frac{1}{2}t}y, e^{2t}z, e^{-t}w).$$

Pour comprendre ce à quoi ce flot ressemble, on peut représenter celui ci en dimension 2 par les représentations ci dessous, le plus utile sera avec w en ordonnée et z en abscisse.



Et en décomposant 2 type de coordonnée à la fois on obtient les représentations ci dessous.



Soit maintenant

$$S_{-1} : \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid |w|^2 = 1\},$$

$$X \notin TS_{-1} = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_{w_1}, \partial_{w_k}, \frac{1}{w_{k+1}} \sum w_i \partial_{w_i} \rangle$$

donc S_{-1} est transverse au champ de Liouville, et X induit la forme de contact sur S_{-1}

$$\alpha = i_X \omega_0 = \frac{1}{2}(xdy - ydx) + 2zdw + wdz.$$

De plus $\mathbb{R} \times T^*S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$ est strictement contactomorphe à S_{-1} par

$$\psi_W : (t, q, p, x, y) \mapsto (x, y, tq + p, q).$$

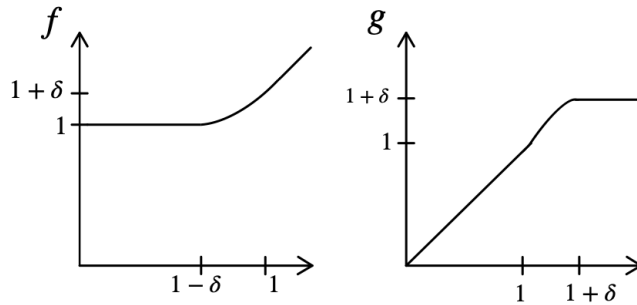
Si on pose $S'^k = \{(0, 0, 0, w) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid |w|^2 = 1\}$, alors $TS'^k / (TS'^k)^\perp = \langle \partial_x, \partial_y \rangle$ est trivial, et ainsi S'^k est isotrope dans S_{-1} avec fibré normal trivial, et représente la sphère isotrope S^k dans S_{-1} . On notera les deux S^k indifféremment.

Alors $\nu(S)$, le voisinage de $\{0\} \times S^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R} \times T^*S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$, et S_{-1} sont contactomorphes, non stricts, mais à multiplication par la constante C près. Pour avoir le contactomorphisme strict, (qui sera utile pour la suite), il suffit de prendre $C = 1$ et ne pas modifier la taille du voisinage de S_{-1} .

2.2.2 Attachement d'anse symplectique

Les voisinages sont en place, explicitons maintenant les chirurgies qui nous intéressent. Via un choix judicieux de C et Φ_C on peut supposer temporairement que la largeur du voisinage est plus grand que 1, définissons le profil de l'anse dans ce cadre. Soit $\delta > 0$ ("paramètre de lissage"), et f, g deux fonctions réelles telles que :

- f croissante sur $]1 - \delta, \infty[$
- $f(|w|) = 1$ pour $w \in [0, 1 - \delta]$, $f(|w|) = w + \delta$ pour $|w| > 1 - \frac{\delta}{2}$
- g croissante sur $]0, 1 + \delta[$
- $g(|z|) = z$ pour $|z| < 1$ et $g(|z|) = 1 + \delta$ pour $z > 1 + \delta$



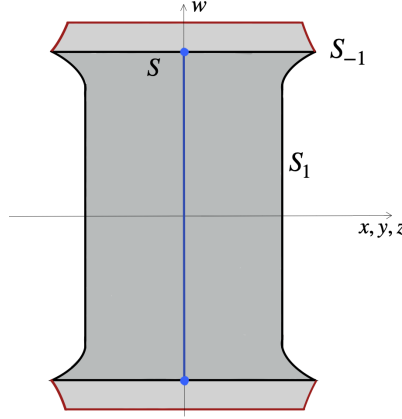
Définissons alors : $F(x, y, z, w) = -f(|w|^2) - g(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)$, F est une submersion car $f' > 0$ et $g' > 0$ et alors $S_1 = F^{-1}(0)$ hypersurface,

$$X.F = \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2z^2 \right) g' + w^2 f' > 0$$

donc S_1 est transverse à X donc de contact.

L'anse (H_{k+1}, ω_0) de dimension $2n + 2$ est l'ensemble des $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$ qui vérifient une des conditions suivantes :

- Il existe $t \in [0, 1]$, $\phi_t^X(p) \in \Phi_C(\nu(S))$
- Il existe $t_1 \geq 0$ et $t_2 \leq 0$ tels que $\phi_{t_2}^X(p) \in \Phi_C(\nu(S))$ $\phi_{t_1}^X(p) \in S_1$
- p est l'unique point critique de X (ici 0)



La chirurgie d'attachement d'anse symplectique consiste alors à attacher H_{k+1} à une variété symplectique au voisinage du bord convexe compacte M le long de la sphère isotrope S .

Soit $W = ([-1, 0] \times M, d(e^t \alpha))$ la symplectisation de M . Alors M est un bord convexe compacte dans bord de W . On considère maintenant l'application de recollement :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_C : [-1, 0] \times \nu(S) &\longrightarrow H_{k+1} \\ (t, p) &\mapsto \phi_t^X(\Phi_C(p)) \end{aligned}$$

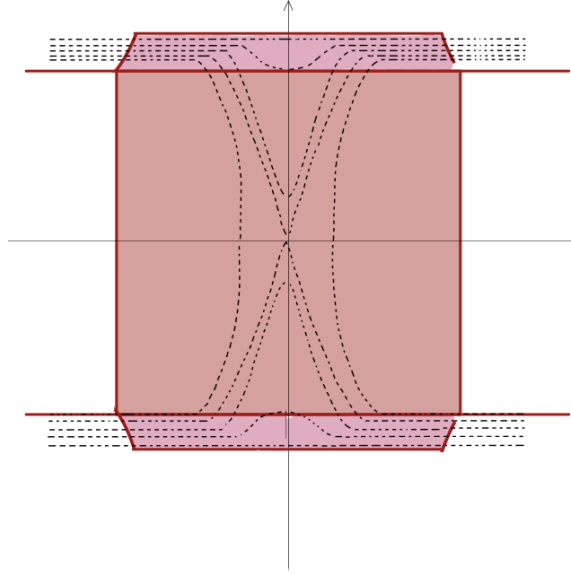
Cette application est aussi un symplectomorphisme par le lemme 1.4, et elle recolle la languette de l'anse avec le voisinage de la sphère isotrope dans W le long de la sphère via les ligne de champ.

On appelle alors *attachement d'anse symplectique le long de S* la variété

$$\widetilde{W} = W \cup H_{k+1} / \sim, \text{ avec } u \sim w \iff \widetilde{\Phi}_C \circ \psi|_{\partial}(u) = v.$$

Remarque 2.3. L'attachement d'anse apparaîtra dans 3 contextes : celui d'attachement dans la symplectisation de M , celui d'attachement sous-critique dans la reliure, et celui d'attachement critique dans une page. Dans le contexte de la symplectisation, toutes les informations nécessaires sont là, dans les deux autres il faut en plus s'assurer que f s'étende en une fonction de Morse sur l'anse i.e.

s'assurer que l'ajout d'anse à une variété Weinstein préserve le caractère Weinstein de la variété. Pour cela on peut isotoper f comme illustré dans la figure extraite de [8] suivante :



Champ de Liouville dans la anse

Ainsi on supposera parfois dans la suite que W est une variété de Weinstein compacte, avec bord convexe M par le lemme 1.2 les mêmes constructions tiennent toujours. La chirurgie est dite **sous-critique** si $\dim S < n$, et **critique** si $\dim S = n$.

Proposition 2.2. *Soit (M, α) une variété de contact et $(W = M \times [-1, 0], d(e^t \alpha))$ sa symplectisation compacte. Supposons qu'il existe*

$$i : S \longrightarrow M$$

un plongement d'une sphère de dimension k dans M le bord convexe de W avec $CSN(W, S)$ trivialisé par η . Alors on peut attacher une anse H_{k+1} à W le long de S avec framing η pour obtenir un cobordisme $(\widetilde{W}, \widetilde{\omega})$. De plus si (W, ω) admet une fonction ω -convexe alors $(\widetilde{W}, \widetilde{\omega})$ en admet une aussi.

On appelle alors **attachement d'anse sur $M \subset \partial W$ de contact**, la variété $\widetilde{M} = \partial \widetilde{W}$ le nouveau bord convexe obtenu après l'ajout d'anse. En dehors du voisinage de la sphère isotrope M n'est pas modifiée, mais l'attachement le long de S revient à retirer le voisinage S_{-1} et lui recoller S_1 .

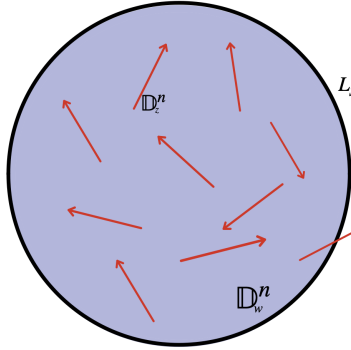
Remarque 2.4. La chirurgie d'attachement d'anse coïncide avec la chirurgie de contact classique le long d'une sphère de dimension k plongée dans M^{2n+1}

et tel que $S^k \times \mathbb{D}^{2n-k+1}$ soit à fibré normal trivial plongé dans M . En effet la chirurgie de contact le long de S^k est

$$M_{S^k} = (M \setminus S^k \times \mathbb{D}^{2n-k+1}) \cup_{\partial} \mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{2n-k}$$

Elle concide aussi avec l'attachement d'anse symplectique, en effet par le théorème de voisinage tubulaire $\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \cong T_{*\leq 1} \mathbb{D}^n$ représenté dans la figure ci dessous, et $\partial(\text{anse}) = \partial(\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n) \cong \partial(T_{*\leq 1} \mathbb{D}^n) = T_{*\leq 1}^* \mathbb{D}^n|_{\mathbb{S}^n} \cup_{\partial} T_1^* \mathbb{D}^n$ avec $\lambda = pdq + qdp$. On recolle l'anse symplectique le long de

$$T_{*\leq 1}^* \mathbb{D}^n|_{\mathbb{S}^n} = T^*S \oplus \nu(S) \cong \{((q, u), t) \in T^*S \times [-1, 1], \|u\|^2 + t^2 \leq 1\}.$$



Remarque 2.5. Dans M^3 , $k = 1$, on retrouve la chirurgie de Dehn le long d'un noeud legendrien où on retire un tore plein et on en recolle un autre tore plein le long du nouveau meridien, via la trivialisation.

2.2.3 Annulation d'anse symplectique

Le cas limite d'attachement d'anse correspond à l'attachement critique. À l'issue d'une chirurgie d'attachement d'anse, si la variété de contact obtenue possède d'autres sphères isotropes il est possible d'opérer d'autres attachements. Sous certaines conditions nous allons voir que ces opérations peuvent être amenées à se compenser.

Définition 2.2. Pour f une fonction de Morse et p un point critique on définit *l'indice de f en p* noté $ind_p(f)$ comme la dimension maximale d'un sous espace où la hessienne est définie négative. C'est aussi le nombre de valeurs propres négatives de f , ou encore la dimension du sous espace instable en p .

La construction qui va suivre repose sur le théorème d'annulation symplectique d'Eliashberg [4], le lemme suivant suffira, il nous permettra de montrer

que sous certaines hypothèse, deux attachements d'anse successifs peuvent finir par se compenser.

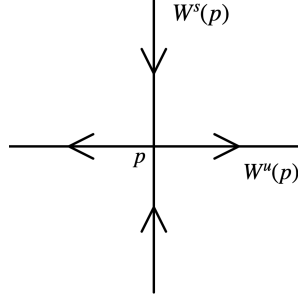
Lemme 2.1 (Eliashberg). *Soit (W, ω) une variété symplectique et f une fonction ω -convexe. Soit p et q deux points critiques non dégénérés de f et $d \in]f(p), f(q)[$. Supposons :*

- $ind_p(f) = ind_q(f) - 1$
- La sphère $S_q^- = W^s(q) \cap f^{-1}(d)$ intersecte $S^+(p) = W^u(p) \cap f^{-1}(d)$ transversalement en un unique point.

Alors les points critiques peuvent être annulés par une déformation ω -convexe de f dans un voisinage de $]f(p), f(q)[$

Remarque 2.6. $S_q^- = W^s(q) \cap f^{-1}(d)$ et $S^+(p) = W^u(p) \cap f^{-1}(d)$ sont bien des sphères. En effet les variétés stables et instables sont portées par le flot de X et X est transverse aux niveaux de f par construction.

Pour d assez proche de $f(p)$, on a des coordonnées (u, v) sur un voisinage de p adapté telles qu'on puisse décomposer le voisinage de p de manière canonique comme le schéma ci dessous.



- Si $d > f(p)$ alors $W_{loc}^u \cap f^{-1}(d) = \emptyset$ et $W_{loc}^s \cap f^{-1}(d) \neq \emptyset$ car $df.X > 0$ au voisinage de p épointé, et l'intersection non nulle est transverse car X transverse aux ligne de niveau de f et correspond alors à $\|u\|^2 = cte$.
- Si $d < f(p)$ l'inverse de produit et $W_{loc}^s \cap f^{-1}(d) = \|v\|^2 = cte$.

Donc localement ces intersections sont des sphères via des coordonnées locales adaptées. Ensuite on passe des coordonnées locales de W_{loc}^u et W_{loc}^s au cas général en transportant par le flot. Une sphère transportée par X sans rencontrer de points critiques reste une sphère, donc entre $f^{-1}(]f(p), f(q)[)$ on peut appliquer ce raisonnement. Dans la construction à venir cela sera plus explicite.

Soit $(W_1^{2n+2}, \omega_1, X_1, f_1)$ une variété de Weinstein et $M_1 \in \partial W_1$ un bord convexe de W_1 . Choisissons une fonction f_1 ω -convexe au voisinage du bord convexe et soit X_1 le champ de Liouville associé. Et soit enfin $S^{n-1} \subset M_1^{2n+1}$ est une sphère isotrope avec trivialisation η de $CSN(M_1, S)$, telle que de plus S^{n-1} est le bord d'un disque legendrien D_1 dans M_1 .

Objectif : Nous allons désormais expliciter deux attachements d'anse successifs sur $\overline{W_1}$, de sorte que la variété chirurgiée W_3 obtenue sera symplectomorphe à W_1 .

Premier attachement

Soit $(W_2, \omega_2, X_2, f_2)$ obtenue par attachement d'anse symplectique H_n le long de S^{n-1} , p l'unique point critique au milieu de l'anse, et $M_2 \in \partial W_2$ le nouveau bord convexe. On peut voir $H_n \subset \mathbb{D}^2 \times T^*D^n$ avec coordonnées adaptées $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(n)}, w^{(n)})$, ces notations sont alors cohérentes avec les précédentes et on appelle la copie de \mathbb{D}^n dans $T^*\mathbb{D}^n$ le coeur de l'anse. Considérons

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{D}^n \longrightarrow & \mathbb{D}^2 \times T^*D^n \\ w \mapsto & (f(|w|^2)x_0, 0, g(|w|^2).w) \text{ avec } x_0 = (1, 0) \in D^2. \end{cases}$$

Alors $D_2 = \phi(\mathbb{D}^n)$ est un disque dans S_1 dont le bord est une copie de S^{n-1} qui marque l'entrée dans le bord chirurgié. En effet ϕ pousse ce disque vers le bord de l'anse de sorte qu'il borde S^{n-1} le long duquel on a opéré le recollement dans M_1 de manière lisse (voir figure p. 45). Notons bien que le dessin ne comporte pas assez de dimensions pour illustrer que $\phi(\mathbb{D}^n) \subsetneq S_1$ puisque leurs dimensions respectives sont $2n+1$ et n . Par ailleurs $\alpha|_{D_2} = \frac{1}{2}xdy - ydx + 2zdw + wdz = 0$ donc D_2 est legendrien. .

Remarque 2.7. On appelle sphère ceinture la sphère $S_B = \{w = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Alors $S_B \pitchfork D_2$, $S_B \cap D_2 = (1, 0, 0, 0) = \phi(0)$. On pourra transporter cette construction le long d'un champ tant que celui-ci ne s'annule pas.

Deuxième attachement

On peut alors recoller D_1 legendrien (qui a été en partie coupé par l'attachement d'anse cf dessin) à D_2 legendrien ce qui nous donne une sphère S^n legendrienne. On opère alors un attachement d'anse critique H_{n+1} le long de S^n , on note $(W_3, \omega_3, X_3, f_3)$ la variété obtenue, q l'unique point critique de la nouvelle anse, M_3 le nouveau bord. Soit $d \in]f_3(p), f_3(q)[$.

Proposition 2.3. *Soit (W_1, ω_1) symplectique et (W_3, ω_3) obtenue comme précédemment. Alors la complétion de (Σ_1, ω_1) est symplectomorphe à la complétion de (W_3, ω_3) . En particulier M_1 est contactomorphe à M_3*

Avant d'attaquer la preuve, remarquons :

- d'une part $d > f(p)$, donc $W_{loc}^u \cap f^{-1}(d) = \{x^2 + y^2 + z^2 = cte\}$.
- d'autre part $d < f(q)$, donc $W_{loc}^s \cap f^{-1}(d) = \{w^2 = cte\}$.

Lemme 2.2. $S_q^- = W^s(q) \cap f_3^{-1}(d)$ et $S_p^+ = W^u(p) \cap f_3^{-1}(d)$ sont deux sphères qui s'intersectent transversalement en un point.

Démonstration du lemme 2.2. La sphère ceinture de H_n est la sphère

$$S_B = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = W^s(p) \cap f_3^{-1}(cte).$$

En transportant cette sphère par le flot de X_3 jusqu'à $f_3^{-1}(d)$, on obtient $S_p^+ = W^s(p) \cap f_3^{-1}(d)$.

Par ailleurs la sphère $S^n = \{|w'|^2 = 1, z' = 0\} = W^s(q) \cap f_3^{-1}(cte)$ dans H_{n+1} , et $D_2 \subset S^n$. En transportant cette sphère par le flot de X_3 , on obtient tous les $W^s(q) \cap f_3^{-1}(cte')$, si on transporte par ce flot jusqu'à $f_3^{-1}(d)$ on obtient aussi $S_q^- W^s(q) \cap f_3^{-1}(d)$.

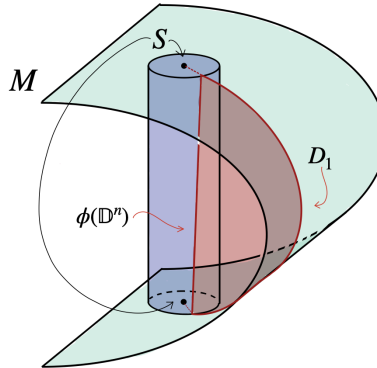
Ainsi par transport par X_3 entre q et p (car il n'y a pas d'autre point d'annulation de X_3 entre les deux), et la remarque 2.7 on a donc $S_p^+ \cap S_q^- = \{pt\}$. \square

Remarque 2.8. On pourrait de manière équivalente déduire de $S_2 \cap S_B = \{\phi(0)\}$ l'existence et l'unicité d'une ligne de champ allant de p à q et ainsi déduire l'intersection avec chaque ligne de niveau est réduite à un point.

Démonstration de la proposition 2.3. On déduit du lemme 2.2 que $\dim(W^u(q)) = \dim(W^u(p)) + 1$ et $S_q^- \cap S_p^+ = \{pt\}$, le lemme 2.1 s'applique et on peut déformer f_3 de manière ω -convexe en g_3 de sorte que p et q ne soient plus des points critiques. Ainsi $g_3 = f_3$ sur

$$\{f_3 < c = f_1(p) - \delta\},$$

et sur cet ensemble $f_3 = f_2 = f_1$. Donc $g_3 = f_1$ sur $\{g_3 < c\}$ et g_3 n'a plus de points critiques sur $\{g_3 \geq c\}$. On conclut que via un difféomorphisme de transport par le flot $\{g_3 \geq c\}$ ressemble à une symplectisation et W_3 est symplectomorphe à l'ajout d'une symplectisation positive sur W_1 . Et en particulier de cette discussion que M_1 est contactomorphe à M_3 . \square



2.3 Chirurgie et livres ouverts

Désormais revenons en aux livres ouverts, et voyons comment les opérations précédentes affectent la décomposition adaptée de la variété chirurgiée. Soient :

$$B^{2n-1} \subset \Sigma^{2n} \subset M^{2n+1} \subset W^{2n+2},$$

avec (M, α) une variété de contact compacte coorientée, $W = [0, 1] \times M$ son cobordisme symplectique, (B, α) une sous-variété de contact de codimension deux à fibré normal trivial, $(\Sigma, d\alpha, X, f)$ un domaine de Weinstein, et enfin $\psi \in \text{Symp}_c(\Sigma)$ comme dans le lemme 1.6 de sorte que

$$\text{Open}(\Sigma, \psi) \cong M$$

2.3.1 Chirurgie sous-critique dans la reliure

Considérons tout d'abord le cas d'une chirurgie sous-critique avec une sphère d'attachement dans la reliure.

Proposition 2.4. *Soit S une sphère isotrope de dimension k dans B , avec une trivialisaton η de $CSN(B, S)$. Soient $\tilde{B} \subset \tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$ les variétés obtenues après la chirurgie d'attachement sous-critique le long de S dans Σ . Alors*

$$\tilde{M} = \widetilde{\text{Open}(\tilde{\Sigma}, \psi)} \cong \text{Open}(\tilde{\Sigma}, \tilde{\psi}),$$

avec $\tilde{\psi}$ l'extension de ψ par l'identité sur l'anse.

Remarque 2.9. La trivialisaton nous donne un "framing" pour la chirurgie comme le suggère la figure ci dessous. En effet la chirurgie générale qu'on opère à lieu dans la trivialisaton du voisinage, la vraie chirurgie en revanche a lieu dans la variété d'origine.

Démonstration. La chirurgie a lieu dans un voisinage $B \times \mathbb{D}^2$ de la reliure, où on a supposé que $\psi|_{\nu(\partial\Sigma)} = Id$. Le cas général pourra donc se déduire du cas $\psi = Id$.

Supposons que $\psi = Id$, alors $B = \partial\Sigma$, et

$$M = \text{Open}(\Sigma, Id) = \Sigma \times \mathbb{S}^1 \cup_{\partial} \partial\Sigma \times \mathbb{D}^2 = \partial(\Sigma \times \mathbb{D}^2).$$

S est isotrope et trivialisable dans $B \subset M$. On peut considérer que la chirurgie a lieu dans M , en prenant $S_M = S \times \{0\} \subset \partial\Sigma \times \mathbb{D}^2$. Soit λ la forme de contact sur $\partial\Sigma$, (x, y) coordonnées sur \mathbb{D}^2 , alors $\lambda + xdy + ydx$ est une forme de contact sur le bon voisinage de B , et alors S_M est isotrope dans $\partial(\Sigma \times \mathbb{D}^2)$. De plus la trivialisaton η s'étend sur S_M par $\eta_M = \eta \oplus \langle \partial_x, \partial_y \rangle$. Dans ce cadre, on peut alors opérer une chirurgie de contact analogue à précédemment sur

$W = [0, 1] \times M$ (symplectisation compacte) le long de S_M dans $M \subset \partial W$. Alors on obtient \tilde{W} variété chirurgié avec nouveau bord chirurgié \tilde{M} . Par construction, puisque la chirurgie a lieu dans un voisinage de $\partial\Sigma \times \mathbb{D}^2$,

$$\tilde{M} = \partial(\tilde{\Sigma} \times \mathbb{D}^2) = \text{Open}(\tilde{\Sigma}, Id).$$

□

2.3.2 Chirurgie critique dans une page

Que se passe-t-il dans le cas limite, où la sphère d'attachement est de dimension n plongée dans une page du livre ouvert ?

Proposition 2.5. *Soit $n > 1$, $M^{2n+1} = \text{Open}(\Sigma, \psi)$ un livre ouvert abstrait, (B, θ) livre ouvert concret associé (2.19, [8]). Soit $L_S \subset \theta^{-1}(0)$ sphère lagrangienne à l'intérieur de la page 0 du livre ouvert. Soient enfin $\tilde{M} \subset \tilde{W}$ les variétés obtenues après chirurgie le long de L_S dans W symplectisation compacte de M . Alors*

$$\tilde{M} = \text{Open}(\tilde{\Sigma}, \psi) \cong \text{Open}(\Sigma, \psi \circ \tau_{L_S}),$$

avec τ_{L_S} le twist de Dehn défini en 2.1.

La construction 2.1 nécessite que L_S soit legendrienne pour que le twist de Dehn soit bien défini.

Lemme 2.3. *On peut supposer que L_S est legendrienne dans le livre ouvert en isotopant de la structure de contact, ce qui nous fournit un symplectomorphisme des pages et une conjugaison de la monodromie.*

Démonstration du lemme 2.3. Soit $(\Sigma, \omega = d\lambda)$, L_S lagrangienne donne lieu par les théorèmes de voisinages à $\nu(L_S) \cong T_{\leq 1}^* \mathbb{S}^n$ avec coordonnées (p, q) adaptées telles que $\lambda_{can} = pdq$ soit aussi une primitive de ω . Alors $d(\lambda - \lambda_{can}) = 0$, et puisque \mathbb{S}^n est un retract de $T_{\leq 1}^* \mathbb{S}^n$ et $n > 1$

$$H^1(\nu(L_S)) = H^1(T_{\leq 1}^* \mathbb{S}^n) = H^1(\mathbb{S}^n) = 0,$$

alors toute forme fermée dans le voisinage de L_S est exacte, et $\lambda - \lambda_{can} = dg$. Posons $\tilde{\lambda} = \lambda - d(\rho g)$ avec ρ qui vaut 1 au voisinage de L_S , et $\text{supp}(\rho) \subset \nu(L_S)$. Alors $d\tilde{\lambda} = d\lambda = \omega$. Dans $T^* \mathbb{S}^n$, L_S est la section nulle $\{p = 0\}$ et $\lambda_{can} = pdq$. Donc $\tilde{\lambda}_{L_S} = \lambda_{can}|_{L_S} = 0$ et $\tilde{\lambda} + dt$ de contact pour $M = \text{Open}(\Sigma, \psi) = \Sigma \times \mathbb{R} / \sim$. Donc L_S est dans $\ker(\tilde{\lambda} + dt)$, ie L_S est lagrangienne pour cette nouvelle structure de contact.

Donc L_S avec une telle structure est legendrienne. Il nous reste maintenant à isotoper $\tilde{\lambda}$ en λ . Posons : $\lambda_s = \lambda - s.d(\rho g)$. À t fixé, $d\lambda_s = \omega$ et $\lambda_s \wedge (d\lambda_s)^n = 0$,

donc $(dt + \lambda_s) \wedge (\omega)^n = dt \wedge (\omega)^n \neq 0$ et $dt + \lambda_s$ de contact.

On a une famille lisse de structures de contact $\xi_s = \ker(dt + \lambda_s)$, ainsi par Gray on a une isotopie

$$\psi_s : M \mapsto M, \psi_s^* \lambda_s = f(s) \lambda.$$

Par ailleurs pour tout s , avec $\alpha_s = dt + \lambda_s$ le champ de Reeb associé est $R_{\alpha_s} = \partial_t$. Or $\psi_s^* \alpha_s = f(s) \alpha$, donc $f(s) = 1$ pour tout s , ie le contactomorphisme donné par Gray est ici strict. Sur les pages α induit une forme symplectique α , et $\psi_s^* d\alpha_s = d\psi_s^* \alpha_s = d\alpha$. Donc les pages sont contactomorphes. La monodromie via le contactomorphisme ψ_s est alors $\psi_1 \circ \psi \circ \psi_1^{-1}$ qui est conjuguée à ψ via des symplectomorphismes à support compact (isotope aussi). \square

Remarque 2.10. Le résultat n'admet pas d'analogie en dimension 3, en revanche on peut toujours trouver un livre ouvert adapté tel que une sous-variété legendrienne repose dans une page [6].

Démonstration de la proposition 2.5. Soit $Open(\Sigma, \psi)$ livre ouvert abstrait, qui donne lieu à (M, ξ) variété de contact et (B, θ) avec $\theta : M \setminus B \rightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ livre ouvert concret. On a supposé que la sphère lagrangienne $L_S \in \theta^{-1}(0)$ page 0 du livre, et est legendrienne dans M. Avant d'opérer la construction de chirurgie discutons du voisinages de L_S .

Modèles de voisinages

Comme dans la discussion en 2.2, considérons tout d'abord le premier modèle de voisinage de L_S dans $\mathbb{R} \times T^*L_S$, en prenant un voisinage de la sphère de dimension n d'abord dans la page $\theta^{-1}(0)$, ie $\nu_\Sigma(L_S) \cong T_{\leq \epsilon}^* L_S$. Pour obtenir un voisinage normal dans M, on pousse ce voisinage le long du flot de Reeb $\phi_t^{R_\alpha}$, avec $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, et alors $\nu_M(L_S) \cong [-\epsilon, \epsilon] \times T_{\leq \epsilon}^* L_S$. Ainsi avec ce modèle de voisinage, puisque l'on est loin de la reliure, la fibration $\theta|_{\nu(L_S)}$ est la projection sur la première coordonnée en t , et chaque fibre de cette projection est une copie de $T_{\leq \epsilon}^* L_S$.

Pour travailler avec l'anse d'attachement il faut passer par le deuxième modèle de voisinage de la p.28, adapté à la chirurgie, via :

$$\psi_W : (t, q, p) \mapsto (tq + p, q)$$

$$\psi_W^{-1} : (z, w) \mapsto (\langle z, w \rangle, w, z - \langle z, w \rangle . w)$$

Alors, $\nu_{\mathbb{R}^{2n}}(L_S)$ est un petit voisinage de $\{z = 0\}$ dans la sphère $\{w^2 = 1\}$. Ainsi dans ce modèle la fibration θ est l'application $(z, w) \mapsto \langle z, w \rangle$.

Opérons maintenant chirurgie de contact le long de L_S comme dans les parties précédentes. Nous savons par la discussion en 2.2 à quoi la variété de contact chirurgiée \tilde{M} ressemble, intéressons nous désormais à la structure du livre ouvert sur cette chirurgie.

Étape 1 : Livre ouvert après chirurgie

Lemme 2.4. *Il existe un $N \in \mathbb{R}$ tel que $R_\alpha = N.X_F$.*

Démonstration. En effet, $X_F = \frac{\partial F}{\partial z} \partial_w - \frac{\partial F}{\partial w} \partial_z = 2g'z\partial_w + 2f'w\partial_z$ vérifie

$d\alpha(X_F) = 0$, il suffit de le renormaliser pour tomber sur le champ de Reeb.

□

Alors $R_\alpha(\langle z, w \rangle) = N.X_F(\langle z, w \rangle) = N(2g'|z|^2 + 2f'|w|^2) > 0$, et \langle, \rangle définit aussi un livre ouvert adapté sur S_1 suivant les notations des constructions précédentes, notons en revanche $\theta_r = \langle, \rangle|_{S_1}$.

Sur le bord du voisinage θ_r et θ coïncident car le bord n'a pas été affecté par la chirurgie (c'est là que S_1 et S_{-1} coïncident), on peut alors étendre θ_r en $\tilde{\theta} : \tilde{M} - K \mapsto \mathbb{S}^1$. Les fibres de $\tilde{\theta}$ sont toutes difféomorphes, et loin de $\nu(L_S)$ coïncide avec θ . Donc les pages du nouveau livre ouvert chirurgié sont toujours difféomorphes à Σ .

On peut ainsi considérer que **la chirurgie n'opère que sur la monodromie.**

Étape 2 : La monodromie

Cette partie propose une approche alternative à celle prise dans [8] sur les bases du modèle B-E-E (Bourgeois, Ekholm, Eliashberg).

Pour retrouver la monodromie à partir de la donnée du livre ouvert concret (B, θ) on peut opérer comme dans la partie 1.2.3, et avec les mêmes notations choisir une connexion telle que X_h soit un multiple du champ de Reeb loin de la reliure, en effet le champ X_h vérifie la première équation du champ de Reeb $d\alpha(X_h, \cdot)$, mais pas la condition de renormalisation. La monodromie est le flot de X_h au temps 2π , mais aussi, loin de la reliure, l'application de premier retour du champ de Reeb par rapport aux pages du livre ouvert adapté. L'holonomie est bien définie car le champ de Reeb est transverse aux pages.

La modification du flot, est localisée dans un petit voisinage tubulaire de L_S loin de la reliure, et peut-être ramené au changement de R_α dans notre voisinage.

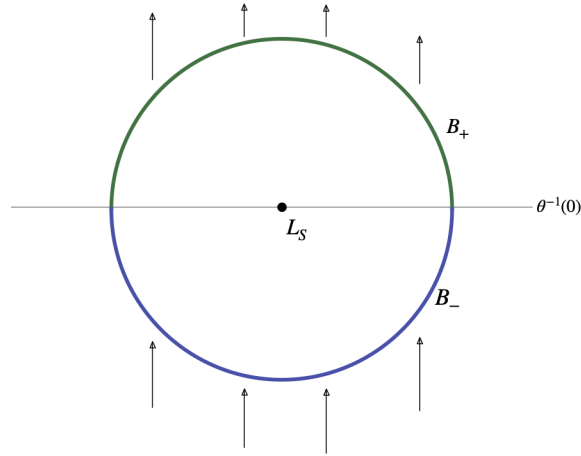
Dans le modèle de voisinage 1, avant la chirurgie $\alpha = \lambda + dt$ et $R_\alpha = \partial_t$. On peut considérer la chirurgie d'attachement d'anse à lieu dans un plus petit voisinage tubulaire de L_S dans $\nu(L_S)$, de la forme

$$\widetilde{\nu(L_S)} = \{(t, q, p) \in \nu(L_S), t^2 + p^2 \leq \delta < \epsilon\} \cong T_{\leq 1}^* \mathbb{D}_{L_S}^n.$$

En chaque point $q \in L_S$ on peut décomposer le bord de $T_q L_S \times [-1, 1] \cap \widetilde{\nu(L_S)}$ en un hémisphère inférieure $B_- = \{(t, q, p) \in \widetilde{\nu(L_S)}, t^2 + p^2 = \delta \text{ et } t < 0\}$ (telle que le flot de Reeb est entrant et un hémisphère supérieure

$$B_+ = \{(t, q, p) \in \widetilde{\nu(L_S)}, t^2 + p^2 = \delta \text{ et } t > 0\}$$

où le flot de Reeb est sortant.



La partie “entrante” correspond au passage dans la traduction de l’anse, et la partie “sortante” au retour au champ de Reeb initial.

Remarquons que le flot de Reeb dans ce voisinage fournit un symplectomorphisme à support compact entre chacun de ces hémisphères et $\nu|_{L_S}$.

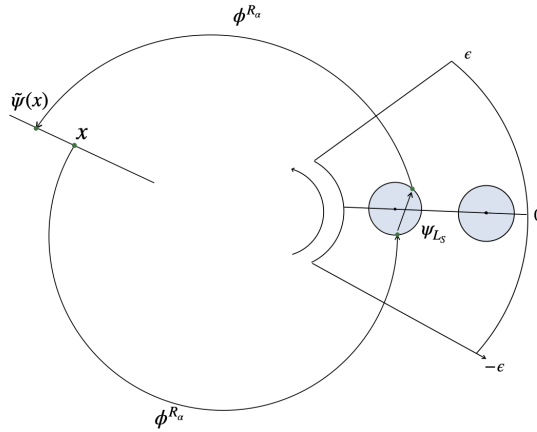
En effet, plus précisément pour $x \in M$, si le flot de Reeb partant de ce point intersecte le voisinage chirurgé on pose :

- le temps de parcours du flot de R_α pour aller de la page à laquelle x appartient à la page $-\epsilon$: s
- le temps que met le flot de Reeb pour parcourir un tour complet : T ,
- le numero de page auquel le flot entre dans la petite boule chirurgée : $-t$,
- et le temps de parcours du flot de Reeb pour aller de la page $-\epsilon$ à la page $-t$: u ,
- ψ_{L_S} le parcours du nouveau champ de Reeb dans l’anse, (on pose $\psi_{L_S} = id$ si le flot de Reeb de x n’intersecte pas le voisinage chirurgé.

Alors

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} &= \phi_{T-s-u}^{R_\alpha} \circ \phi_{L_S} \circ \phi_{s+u}^{R_\alpha} \\ &= \phi_{-s-u}^{R_\alpha} \circ \psi \circ \psi_{L_S} \circ \phi_{s+u}^{R_\alpha}, \text{ puisque } R_\alpha \text{ est indépendant du temps.}\end{aligned}$$

Alors la nouvelle monodromie est la monodromie d'origine composée avec un symplectomorphisme à support compact ψ_{L_S} , le tout conjugué par $\phi_{-s-u}^{R_\alpha}$. Or par 1.4, le livre ouvert abstrait est invariant par conjugaison, on peut donc supposer que la nouvelle monodromie est simplement l'ancienne conjuguée par ψ_{L_S} qui parcourt le nouveau champ de Reeb sur le tronçon chirurgical, et vaut l'identité ailleurs.

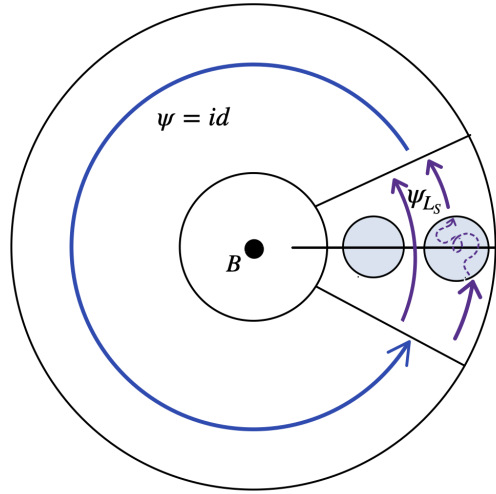


Par ailleurs le changement de monodromie ne dépend pas de L_S car on peut opérer un choix différent de sphère mais toutes les constructions restent contactomorphes puisque la chirurgie est faite en coordonnées locales, ce qui importe c'est que ce soit une sphère legendrienne, à quoi elle ressemble et dans quelle page importe peu.

Ainsi :

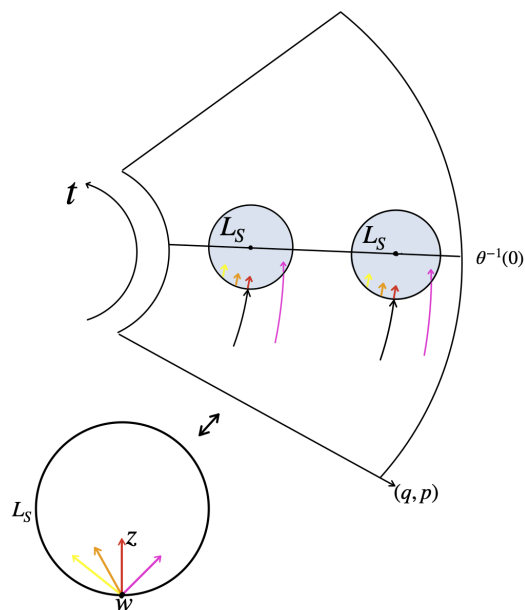
$$\widetilde{Open}(\Sigma, \psi) = Open(\Sigma, \psi \circ \psi_{L_S}).$$

Pour la suite de la discussion $\psi = id$, avec nouvelle monodromie ψ_{L_S} sera suffisant pour déduire le cas général.



On passe de l'attachement d'anse symplectique sur W à l'attachement d'anse de contact qui nous intéresse en regardant le bord le nouveau bord, i.e. S_1 . Par la discussion ci dessus on sait donc que le changement de monodromie est déterminé par le champ de Reeb sur S_1 . Mais cela reste abstrait, pour voir plus précisément à quoi la monodromie après chirurgie ressemble, nous allons opérer en 3 phases.

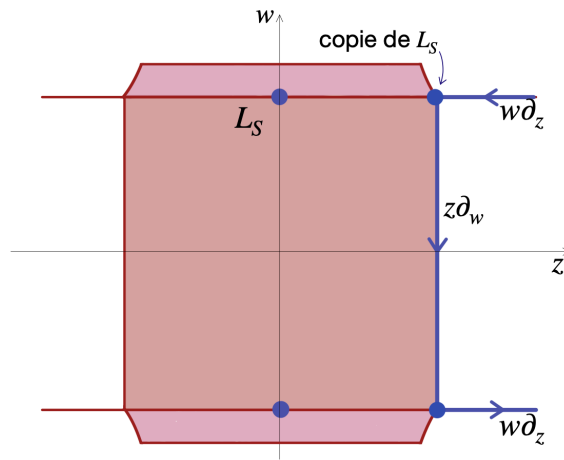
Phase 1 : cette étape s'opère dans le premier modèle de voisinage. Partons d'un point $(-\epsilon, q, p)$ dans l'intersection de notre voisinage avec la page $-\epsilon$. On suit ensuite le flot R_α dans le modèle du voisinage avant la chirurgie jusqu'à ce qu'il percute B_- dans le modèle 1. Ce qui nous importe donc ici est le point d'entrée (t, q, p) du flot de Reeb dans $B_u^- \subset \widetilde{\partial\nu(L_S)}$.



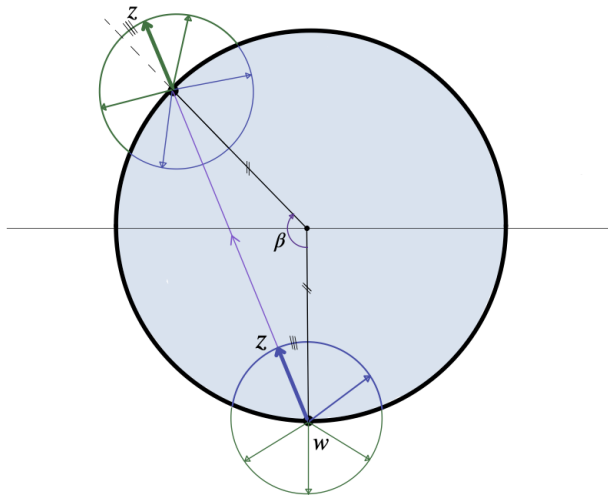
Phase 2 : Cette étape s'opère dans le deuxième modèle de voisinage, une fois qu'on entre dans l'anse, elle consiste à suivre le champ de Reeb en coordonnées (w, z) . L'entrée dans l'anse correspond à l'entrée dans S_1 . Le point clé de cette étape est de déterminer à quoi ressemble ce champ de Reeb dans S_1 . Par les constructions précédentes, on sait que celui ci coïncide avec X_F , mais pour rendre les constructions plus nettes opérons une hypothèse simplificatrice importante.

Supposons que le nouveau bord après chirurgie S_1 ressemble à sa partie plate $\{|z|^2 = 1\}$ partout.

Ainsi dans la boule où la chirurgie à eu lieu : $R_\alpha = z\partial_w$. Observons que dans le passage de la variété non chirurgiée à la variété chirurgiée on a interverti le rôle de z et w puisque sur S_{-1} , $R_\alpha = w\partial_z$, qui reflète l'inversion des rôles dans le recollement. Ci dessous l'anse dans la visualisation initiale du modèle 2 :



Ainsi dans la traduction par rapport au deuxième modèle. On entre dans l'anse via le point (z_0, w_0) avec $w \in L_S$ et $|z| = 1$ puisqu'on considère que l'anse est plate. On y entre avec champ de Reeb $z\partial_w$ avec z de module constant. Maintenant considérons la tranche de dimension 2 avec la géodesique de L_S partant de q avec vecteur z directeur. C'est là que la trajectoire du champ de Reeb en question aura lieu, en fonction de z et w d'entrée dans L_S , il suffit d'aller tout droit. Nommons β l'angle que z fait avec le centre du disque.



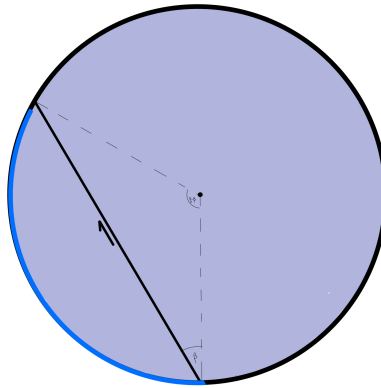
Le vecteur z d'entrée et de sortie est préservé au cours du parcours du flot

comme on peut voir dans le dessins par préservation des angles dans un triangle isocèle. Le recollement de l'anse avec la variété sur fait via l'identification dans le deuxième modèle.

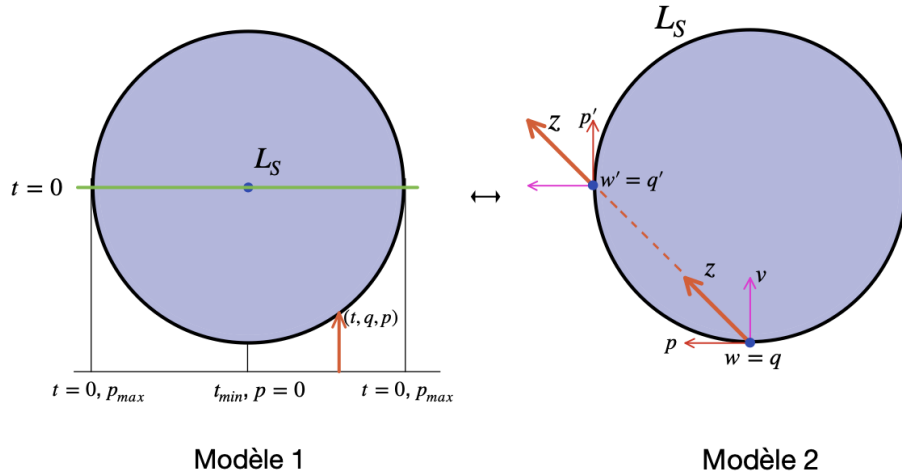
Mais alors qu'est ce qui a changé entre le point d'entrée de de sortie ?

Phase 3 : On sort de l'anse en un nouveau point (z, w') et par ψ_W^{-1} on repasse au premier modèle de voisinage, on suit alors à nouveau le flot de Reeb ∂_t jusqu'à la page ϵ , vu comme application de T^*L_S dans lui même, cela ne modifie pas la monodromie. Mais B_- est symplectomorphe à $T_{\leq \epsilon}^*L_S$, B_+ aussi. À l'extérieur de cette boule, la monodromie n'est pas modifiée. Ainsi le changement de monodromie ψ_{L_S} est l'application de B_- dans B_+ , vues comme symplectomorphes calculée par l'envoi de l'une sur l'autre via le champ de Reeb.

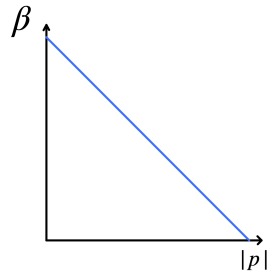
L'identification de la monodromie est donc l'application qui au point d'entrée dans l'anse associe le point de sortie. Voyons pourquoi on peut l'identifier à un twist de Dehn.



On part d'un point $(z, w) = (t, q, p)$ en entrant dans B_- au point de sortie on a préservé z , mais on a parcouru la géodésique définie par (z, w) . Or $z = tq + p$, et z ne change pas au cours du parcours de $z\partial_w$, or $|z|^2 = t^2 + |p|^2$, et t^2 en entrée est identique à t^2 en sortie par symétrie de la numérotation autour de 0. Par ailleurs β qui ne dépend que du module de p , puisque l'angle d'entrée de z ne dépend que du module de p , comme l'illustre la figure suivante.



La géodésique partant de q est parcourue à $|p|$ constant sur une longueur β , avec β ayant le profil ci dessous.



L'application qui au point d'entrée associe le point de sortie est l'antipode sur la section nulle $\{p = 0\}$, car on va tout droit dans le disque, et l'identité pour $|p|$ maximal car on effleure le bord de la tranche du voisinage sans entrer dedans, donc le champ de Reeb reste le même.

Et pour tout les cas intermédiaires on parcourt la géodésique pendant un temps $\beta(|p|)$. Le profil de $\beta(|p|)$ est identique à isotopie près à celui qu'on a défini pour le twist de Dehn généralisé sur une sphère Legendrienne. Donc la monodromie ψ_{L_S}

- est conjuguée, via les symplectomorphismes induits par les contactomorphismes strict à support compact qu'on a opérés successivement pour être dans les bons voisinage,
- cette conjugaison est isotopie à un twist de Dehn à droite généralisé.

Par invariance du livre ouvert abstrait par conjugaison et isotopie (par les discussions en 2.2), le changement de monodromie suite à l'attachement d'anse critique décrit est la composition par un twist de Dehn à droite τ_{L_S} (en tout cas

dans la même classe d'isotopie et de conjugaison qu'un twist de Dehn). Ceci repose sur l'approximation $S_1 = \{z^2 = 1\}$ en ignorant la partie courbée de l'anse. Mais par construction on peut choisir la taille de cette partie courbée arbitrairement petite, et donc tel que la monodromie obtenue est arbitrairement proche de la monodromie réelle. Ainsi en prenant ϵ et δ assez petit pour que ces deux monodromies soient isotopes, la monodromie après la chirurgie d'attachement d'anse critique le long de L_S est à conjugaison et isotopie près un twist de Dehn à droite. \square

2.3.3 Stabilisation

La partie 2.2 décrit une opération d'attachement successif d'anses, qui au niveau de la variété de contact se compensent, la 2.3 décrit elle deux cas particuliers d'attachements d'anse sur une variété de contact M : dans la reliure et dans une page, et comment ces opérations modifient le livre ouvert. Rassemblons toutes ces constructions.

Définition 2.3. Soit $M = Open(\Sigma, \psi)$ un livre ouvert abstrait comme avant. Soit $L \subset \Sigma$ un disque lagrangien de dimension n dans une page tel que $\partial L \subset \partial\Sigma$ est une sphère legendrienne dans la reliure. On appelle **stabilisation** de M le long de L :

$$\widetilde{M} = Open(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\psi} \circ \tau_{L_S})$$

Où \widetilde{M} est le livre ouvert obtenu par attachement d'anses successives :

- attache une n -anse le long de la reliure aux pages Σ pour obtenir $\widetilde{\Sigma}$, la nouvelle monodromie $\widetilde{\psi}$ se restreint à l'identité sur la n -anse et coïncide avec ψ ailleurs
- et $\widetilde{\psi} \circ \tau_{L_S}$ est la monodromie obtenue après deuxième attachement d'anse le long de L_S .

Théoreme 2.6 (Giroux). *La stabilisation d'un livre ouvert M le long d'un disque lagrangien L qui borde une sphère lagrangienne ∂L dans $\partial\Sigma$ est contactomorphe à M*

Démonstration. Soit $M^{2n+1} = Open(\Sigma, \psi)$ un livre ouvert de contact et L un disque lagrangien de dimension n dans une page qui borde une sphère legendrienne S dans la reliure. On attache une anse critique $k = n$ dans la reliure, vue comme sous-critique en étendant la trivialisaton, ce qui nous donne une page $\widetilde{\Sigma}$ et préserve la monodromie. Puis on opère successivement un attachement d'anse critique $n + 1$ comme dans 2.2, ce qui modifie la monodromie en la composant par un twist de Dehn à droite sur un voisinage de notre sphère legendrienne obtenue à partir de L et du coeur de la première anse, mais préserve les pages. Par les résultats d'annulation d'anse des deux discussions précédentes, la variété d'origine et la variété stabilisée sont contactomorphes. \square

Retour sur l'exemple de la sphère

Considérons $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum |z_i|^2 = 1\}$. À partir des applications holomorphes $\pi_1 : (z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto z_1$, et $\pi_2 : (z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto \sum z_i^2$, on définit les décompositions en livres ouverts associées $B_i = \pi_i^{-1}(0)$ et $\theta = \text{Arg}(\pi_i|_{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus B_i})$ pour $i = 1, 2$.

Alors $B_1 \cong \mathbb{S}^{2n-1}$ et $\theta^{-1}(\varphi) \cong \mathbb{D}^{2n} \cong T_{\leq 1}^* \mathbb{S}^n$; et $B_2 \cong T_1^* \mathbb{D}^n$, et $\theta_2^{-1}(\varphi) \cong T_{\leq 1}^* \mathbb{S}^n$.

Proposition 2.6. (B_2, θ_2) est la stabilisation de (B_1, θ_1) le long du bord de la section nulle de $T_1^* \mathbb{D}^n$

En effet si on considère $f : (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1$, alors

— $\text{Crit}(f) = \{0\}$, donc la reliure est

$$f^{-1}(0) = \mathbb{S}^{2n-1} = \{(0, z_2, \dots, z_{n+1}), \sum |z_j|^2 = 1\}$$

— On définit ainsi la fibration par

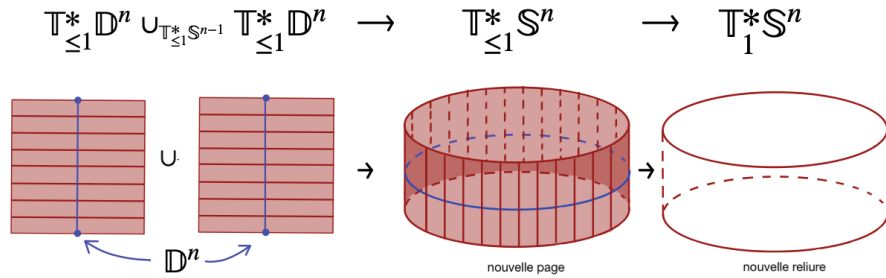
$$\begin{aligned} \theta = \text{arg}(f) : \mathbb{S}^{2n+1} - \mathbb{S}^{2n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\mapsto \text{arg}(z_1) \end{aligned}$$

$$\theta^{-1}(\varphi) = \{(re^{i\varphi}, z_2, \dots, z_{n+1}) \mid r \in [0, 1], \sum_{i=2}^{n+1} |z_i|^2 = 1 - r^2\}$$

$$\cong \mathbb{D}^{2n}$$

$$\cong T_{\leq 1}^* \mathbb{D}^n \text{ muni de } d\lambda = dp \wedge dq$$

Si on considère le disque Lagrangien $\mathbb{D}^n \cong \{0\} \times \mathbb{D}^n \subset T_{\leq 1}^* \mathbb{D}^n$, de bord la sphère legendrienne $\partial \mathbb{D}^n \cong \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \subset \text{Reliure}$.



Si on recolle les fibres comme dans la figure précédente la nouvelle page obtenue par le premier attachement d'anse est alors $T_{\leq 1}^* \mathbb{S}^n$ avec nouvelle reliure

$T_1^* \mathbb{S}^n$. Le deuxième attachement d'anse dans le livre ouvert transforme alors la monodromie du premier livre ouvert, l'identité, en un twist de Dehn à droite pour le deuxième livre ouvert. Ce qui coïncide avec la monodromie du livre ouvert donné par θ_2 ([1] pour plus de détails).

Remarque 2.11. La stabilisation d'une décomposition en livre ouverts adaptée sur une variété M^{2n+1} peut aussi être décrite par la somme connexe de la décomposition en livre ouvert et de la décomposition de la sphère \mathbb{S}^{2n+1} . En revanche en composant la monodromie par un twist de Dehn à gauche on n'obtiendrait plus une variété contactomorphe.

3 Les tores de contact

Pour clore notre discussion, étudions un résultat de Frederic Bourgeois [2] qui résout le problème d'existence de structure de contact sur les tores de dimensions impaires via une décomposition en livres ouverts, inspiré par une construction de Lutz de structures de contact \mathbb{T}^k invariantes [7].

Théorème 3.1 (Bourgeois). *Soit M^{2n-1} une variété de contact $2n - 1 \geq 3$. Alors la variété $\mathbb{T}^2 \times M^{2n-1}$ admet une structure de contact invariante sous l'action de \mathbb{T}^2 , et telle que $\{p\} \times M$ est une sous-variété de contact pour tout $p \in \mathbb{T}^2$*

Corollaire 3.1. *Le tore \mathbb{T}^{2n+1} admet une structure de contact.*

Démonstration. Sur le tore \mathbb{T}^3 :

$\xi = \ker(d\varphi + \cos \theta d\theta_1 - \sin \varphi d\theta_2)$ avec φ coordonnée sur \mathbb{S}^1 et (θ_1, θ_2) coordonnées sur \mathbb{T}^2 . Par récurrence sur le théorème précédent, \mathbb{T}^{2n+1} avec une structure de contact. \square

Preuve du théorème. Par le théorème d'existence de livres ouverts de contact compatible sur toute variété de contact [Grioux-Mohsen] on obtient une décomposition (B, θ) de M compatible à une 1-forme de contact β sur M .

Pour $n \geq 2$: Soit $\xi = \ker \alpha$ compatible à un livre ouvert (B, θ) sur M . Soit (r, φ) coordonnées polaires sur le facteur \mathbb{D}^2 du voisinage $B \times \mathbb{D}^2$ de B , tel que $\theta : (r, \varphi) \mapsto \varphi$. Soit ensuite ρ tel que

$$\begin{cases} \rho(r) = r & \text{au voisinage de } B \times \{0\} \text{ (i.e. } r=0) \\ \rho'(r) \geq 0 \\ \rho(r) = 1 & \text{au voisinage de } B \times \partial\mathbb{D}^2 \text{ (i.e. } r=1) \end{cases}$$

On étend ensuite ρ sur M entier de sorte que $\rho = 1$ sur $M \setminus B \times \mathbb{D}^2$. Posons :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

qui sont lisses sur M et coïncident avec les coordonnées cartésiennes usuelles au voisinage de $B \times \{0\}$ car $\rho = id$. Ainsi :

$$\begin{cases} x_1 dx_1 - x_2 dx_2 &= \rho^2 d\varphi \\ dx_1 \wedge dx_2 &= \rho d\rho \wedge d\varphi \end{cases}$$

Ces deux équations tiennent sur tout M :

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi d(\rho \sin \varphi) - \rho \sin \varphi d(\rho \cos \varphi) &= \rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi d\rho + \rho^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad - \rho \sin \varphi \cos \varphi d\rho \\ &= \rho^2 d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 &= d(\rho \sin \varphi) \wedge d(\rho \cos \varphi) \\ &= \rho \cos \varphi d\varphi \wedge \cos \varphi d\rho - \sin \varphi d\rho \wedge \rho \sin \varphi d\varphi \\ &= \rho \cos^2 \varphi d\varphi \wedge d\rho - \rho \sin^2 \varphi d\rho \wedge d\varphi \\ &= \rho d\rho \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Soient (θ_1, θ_2) coordonnées sur \mathbb{T}^2 . Posons alors sur $M \times \mathbb{T}^2$, $\tilde{\alpha} = x_1 d\theta_1 - x_2 d\theta_2 + \alpha$

Alors $d\tilde{\alpha} = dx_1 \wedge d\theta_1 - dx_2 \wedge d\theta_2 + d\alpha$ et

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \wedge (d\tilde{\alpha})^n &= n(d\alpha)^{n-1} \wedge (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \\ &\quad + n(n-1)\alpha \wedge (d\alpha)^{n-2} \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \\ &= (n(d\alpha)^{n-1} \wedge (\rho^2 d\varphi) \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2) \\ &\quad + (n(n-1)\alpha \wedge (d\alpha)^{n-2} \wedge (\rho d\rho \wedge d\varphi) \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2) \end{aligned}$$

La première parenthèse est une forme volume positive en dehors de $B \times \mathbb{T}^2$ nulle sur $B \times \mathbb{T}^2$, car $d\alpha$ est symplectique sur les feuilles, et la forme angulaire est non nulle long de B . La deuxième parenthèse est positive sur $M \times \mathbb{T}^2$ et strictement positive sur $B \times \mathbb{T}^2$, car α est une forme de contact positive sur B et par construction de (x_1, x_2) . Ainsi $\tilde{\xi} = \ker(\tilde{\alpha})$ structure de contact sur $M \times \mathbb{T}^2$, elle est \mathbb{T}^2 invariante car (x_1, x_2) sont indépendantes de (θ_1, θ_2) , et le tiré en arrière de α à une sous-variété $\{p\} \times M$ est α donc $\{p\} \times M$ est de contact. \square

Conclusion

Par la construction de la stabilisation d'un livre ouvert, puis la construction d'une structure de contact sur \mathbb{T}^{2n+1} , ce texte constitue un premier tour des horizons de l'intérêt des livres ouverts en géométrie de contact.

Par ailleurs dans le même article [7] qui fut à l'origine du théorème 3.1, Lutz introduit un objet qui est une généralisation des livres ouverts, les fibrations nouées. La suite de ce projet consistera à étendre autant que possible le dictionnaire livre ouvert/structure de contact en un dictionnaire fibration nouée/structure de contact.

Références

- [1] V. ARNOLD, *Some remarks on symplectic monodromy of milnor fibrations*, in The Floer memorial volume, Springer, 1995, pp. 99–103.
- [2] F. BOURGEOIS, *Odd dimensional tori are contact manifolds*, International Mathematics Research Notices, 2002 (2002), pp. 1571–1574.
- [3] A. CANNAS DA SILVA, *Lectures on symplectic geometry*, Springer, 2008.
- [4] K. CIELIEBAK AND Y. ELIASHBERG, *From Stein to Weinstein and back : symplectic geometry of affine complex manifolds*, vol. 59, American Mathematical Soc., 2012.
- [5] H. GEIGES, *Contact geometry*, Handbook of differential geometry, 2 (2006), pp. 315–382.
- [6] ———, *An introduction to contact topology*, vol. 109, Cambridge University Press, 2008.
- [7] R. LUTZ, *Sur la géométrie des structures de contact invariantes*, in Annales de l’institut Fourier, vol. 29, 1979, pp. 283–306.
- [8] O. VAN KOERT, *Lecture notes on stabilization of contact open books*, arXiv preprint arXiv :1012.4359, (2010).
- [9] A. WEINSTEIN ET AL., *Contact surgery and symplectic handlebodies*, Hokkaido Mathematical Journal, 20 (1991), pp. 241–251.