**M2 - Orsay , Mars 2007**

**E. Bouscaren**

# Introduction à la Théorie des modèles (Cours du 29 Mars07)

## 1 Premiers théorèmes de Löwenheim-Skolem et applications

On va voir que si une théorie a des modèles infinis. Elle a des modèles en chaque cardinalité infinie. On rappelle que la situation est différente pour les structures finies:

**Proposition 1** *Soit $L$ un langage fini, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $L$-structures élémentairement équivalentes. Si $M$, l'ensemble de base de $\mathcal{M}$ est fini, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont $L$-isomorphes.*

*Preuve*: On remarque tout de suite que si $M$ a $n$ éléments, alors $N$ aussi, par l'énoncé:

$$\exists v_1 \ldots \exists v_n \left( \left( \bigwedge_{1 \le i < j \le n} v_i \neq v_j \right) \wedge \left( \forall z \left( \bigvee_{1 \le i \le n} z = v_i \right) \right) \right).$$

Soit $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Soient $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $n$ symboles de variables, et $\Sigma(M)$ l'ensemble de $L$-formules, dont les variables sont parmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$, défini de la façon suivante:

$$\Sigma(M) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

avec :

– $A_1 = \{(c = v_i)\,;\, c$ symbole de constante tel que dans $M$, $c^M = a_i\}$

– $A_2 = \{(f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) = v_j\}$ pour $f$ symbole de fonction d'arité $k$ tel que dans $M$, $f^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_j$,

– $A_3 = \{R(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})\}$ pour $R$ symbole de relation d'arité $m$ tel que dans $M$, $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in R^M$,

– $A_4 = \{\neg R(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})\}$ pour $R$ symbole de relation d'arité $m$ tel que dans $M$, $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \notin R^M$.

L'ensemble de formules $\Sigma(M)$ est fini; soit donc $F$ la formule formée de la conjonction de toutes les formules de $\Sigma(M)$. Les variables libres de la formule $F$ sont exactement $\{v_1, \ldots, v_n\}$, et par construction, on a que

$$\mathcal{M} \models F(a_1, \ldots, a_n).$$

Donc

$$\mathcal{M} \models \exists v_1 \dots \exists v_n F(v_1, \dots, v_n)$$

et par hypothése,

$$\mathcal{N} \models \exists v_1 \dots \exists v_n F(v_1, \dots, v_n)$$

c'est-à-dire, il existe $b_1, \dots b_n$ dans $N$ tels que

$$\mathcal{M} \models F(b_1, \dots, b_n).$$

On définit alors une application $h$ de $M$ dans $N$ en posant $h(a_i) = b_i$ et on vérifie facilement que $h$ est bien un $\mathcal{L}$-isomorphisme. □

La **cardinalité du langage** $L$, notée $||L||$ est la cardinalité de l'ensemble des formules du langage $L$, et est donc égale à $sup(\aleph_0, ||\mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}||)$ (cardinalité de l'ensemble des suites finies de symboles du langage).
Voici une première application directe du critère de Tarski-Vaught:

## 1.1 Löwenheim-Skolem descendant

**Proposition 2** (Löwenheim-Skolem descendant) *Soient $L$ un langage, $\mathcal{M}$ une $L$-structure infinie et $X$ un sous-ensemble de $M$. Il existe $\mathcal{N}$ sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$, telle que :*
- $X \subseteq |\mathcal{N}|$
- $|\mathcal{N}|$ *est de cardinalité inférieure ou égale au sup de la cardinalité de $X$ et de $||L||$.*

*Preuve*: On construit $\mathcal{N}$ "à la main" - $X_0 = X$

- Pour construire $X_{n+1}$, on se donne une énumération de toutes les suites finies d'éléments de $X_n$, et de toutes les formules $\phi(v_0, \dots, v_1, v_n)$ du langage. Pour chaque suite $a = (a_1, \dots, a_n)$ et chaque formule $\phi(v_0, \dots, v_1, v_n)$ si $\mathcal{M} \models \exists v_0 \phi(v_0, a_1, \dots, a_n))$ on choisit un élément $m_{a,\phi} \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m_{a,\phi}, a_1, \dots, a_n))$ et on pose

$$X_{n+1} = X_n \cup \{m_{a,\phi} : \text{ pour } a \text{ suite finie et } \phi \text{ formule } \}.$$

On vérifie ensuite à l'aide du Critère de Tarski-Vaught que $N = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ est une $L$-sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$. □

**Corollaire 3** *(i) Si $T$ est une théorie dans un langage dénombrable, alors $T$ a un modèle dénombrable.*

*(ii) Soit $\mathcal{M}$ une $L$-structure de cardinalité supérieure ou égale à $||L||$. Alors pour chaque cardinalité $\beta$, $||L|| \leq \beta \leq card(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ a une $L$-sous-structure élémentaire de cardinalité égale à $\beta$.*

**Applications**:

**Corollaire 4** *Soit $L$ un langage dénombrable et $T$ une théorie de $L$ dont tous les modèles dénombrables sont infinis et $L$-isomorphes. Alors la théorie $T$ est complète.*

*Preuve*: Soient deux modèles arbitraires $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ de $T$, on veut montrer qu'ils sont élémentairement équivalents. Par LWS descendant, chaque $\mathcal{N}_i$ a une sous tructure élémentaire dénombrable $\mathcal{M}_i$, qui est en particulier un modèle de $T$. Par l'hypothèse, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont isomorphes, donc certainement élémentairement équivalents , et par transitivité,

$$\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2 \equiv \mathcal{N}_2.$$

□

On peut ainsi montrer que les théories suivantes sont complètes:

– dans le langage $L_\emptyset$, réduit à l'égalité, la théorie $T_0 = \{\theta_n; n \geq 1\}$ où

$$\theta_n = \exists v_0 \ldots \exists v_n (\bigwedge_{0\leq i<j\leq n} v_i \neq v_j).$$

– dans le langage $L = \{R\}$, où $R$ est un symbole de relation binaire, la théorie des ordres denses sans extrémités.

– si $K$ est un corps fini, dans le langage avec un symbole de fonction unaire pour chaque élément de $K$ et une loi de groupe, la théorie des $K$espaces vectoriels infinis.

## 1.2 Modèles en chaque cardinalité

On peut maintenant, grâce au théorème de compacité, obtenir des modèles de cardinalités arbitrairement grandes:

**Utilisation des constantes**: La preuve de la proposition qui suit est typique des preuves que l'on fait lorsque l'on veut appliquer directement le théorème de compacité, sans refaire une construction par les ultraproduits. On est amenés à rajouter des symboles de constantes , puis à les enlever. Le jeu avec les constantes est un élément essentiel de la théorie des modèles et de l'utilisation du théorème de compacité. On le verra dans les sections suivantes avec la très importnate "Méthode des Diagrammes" qui permet de construire des extensions élémentaires.

**Lemme 5** *Si $T$ est une théorie de $L$ qui a un modèle infini, alors pour chaque cardinal $\kappa$, $T$ a un modèle de cardinalité supérieure ou égale à $\kappa$.*

*Preuve*: Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de *nouveaux* symboles de constantes, de cardinalité égale à $\kappa$, $\mathcal{D} = \{d_i : i < \kappa\}$. Soit $L_1 := L \cup \mathcal{D}$, le nouveau langage obtenu en rajoutant à $L$ ces nouveaux symboles de constantes. Soit $T_1 := T \cup \{d_i \neq d_j : 0 < i < j < \kappa\}$, ensemble d'énoncés du langage $L_1$ qui étend la théorie $T$.

Soit $F$ un sous-ensemble fini de $T_1$, alors il existe $n$ tel que

$$F \subset T \cup \{d_{i_1} \neq d_{i_2}, \ldots, d_{i_{n-1}} \neq d_{i_n}\}.$$

Par hypothèse, $T$ a un modèle $\mathcal{M}$ qui est infini. On choisit $m_1, \ldots, m_n$ distincts dans $|M|$. On va faire de $\mathcal{M}$ une $L_1$-structure en rajoutant , pour chaque symbole de constante $d_i$ une interprétation dans $\mathcal{M}$. On pose, pour $1 \leq j \leq n$, ${d_{i_j}}^{\mathcal{M}} := m_j$, pour $d \in \mathcal{D}$, $d$ différent de $d_{i_1}, \ldots d_{i_n}$ , on pose $d^{\mathcal{M}} := m_1$ (on peut choisir n'importe quel élément de $|\mathcal{M}|$, puisque l'ensemble d'énoncés $F$ ne dit rien sur $d$). Alors $\mathcal{M}$, en tant que $L_1$-structure est modèle de $F$.

Le théorème de compacité nous dit que $T_1$ a un modèle, $\mathcal{N}$, qui est donc en particulier un modèle de $T$. Dans la $L_1$-structure $\mathcal{N}$, les interprétations des constantes $d_i$, pour $i < \kappa$, doivent être deux à deux distinctes, donc $|\mathcal{N}|$ est de cardinalité au moins égale à $\kappa$. Maintenant on oublie la $L_1$-structure sur $\mathcal{N}$, on regarde $\mathcal{N}$ comme une $L$-structure. Elle reste modèle de $T$ et est bien de cardinal au moins $\kappa$. □

En utilisant le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, on peut être plus précis:

**Corollaire 6** (Löwenheim-Skolem ascendant) *Si $T$ est une théorie de $L$ qui a un modèle infini, alors $T$ a un modèle en chaque cardinalité $\kappa$ supérieure ou égale à la cardinalité du langage $L$.*

Preuve: On applique d'abord le lemme 5, qui donne un modèle $\mathcal{N}$ de cardinalité supérieure ou égale à $\kappa$. Si $\mathcal{N}$ est de cardinalité strictement supérieure à $\kappa$, soit $X \subset N$, un sous-ensemble de cardinalité égale à $\kappa$. Le corollaire 2 fournit alors une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ contenant $X$ et de cardinalité égale à $\kappa$.

## 1.3 Catégoricité et Théorème de Vaught

On peut généraliser le corollaire 4

**Définition**: Soient $L$ un langage, $T$ une théorie de $L$ et $\kappa$ un cardinal infini. On dit que la théorie $T$ est *$\kappa$-catégorique* si tous les modèles de $T$ de cardinalité $\kappa$ sont $L$-isomorphes.

Exemples:

- la théorie des ensembles infinis dans le langage $L_\emptyset$ réduit à l'égalité est $\kappa$-catégorique pour tout cardinal $\kappa$ infini.
- La théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément, dans le langage avec une relation binaire, interprétée par la relation d'ordre, est $\aleph_0$-catégorique ( $\aleph_0$ est la cardinalité des ensembles dénombrables.) mais n'est catégorique en aucun cardinal non dénombrable.
- Le type d'isomorphisme d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p$ (où $p = 0$ ou bien $p$ est un nombre premier) est déterminé par la cardinalité d'une base de transcendence sur le corps premier. Il suit que la théorie (dans le langage $L_{ANN}$) des corps algébriquement clos de caractéristique fixée $p$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique mais est $\kappa$-catégorique pour tout cardinal $\kappa$ non dénombrable.

Grâce aux théorèmes de Löwenheim-Skolem, on peut voir que si une théorie est catégorique en un cardinal, alors elle est complète:

**Proposition 7** (Théorème de Vaught) *Soient $L$ un langage et $T$ une théorie de $L$ dont tous les modèles sont infinis. Si $T$ est $\kappa$-catégorique pour un cardinal $\kappa$ supérieur ou égal à la cardinalité du langage $L$, alors $T$ est complète.*

*Preuve*: Soient deux modèles arbitraires $N_1$ et $N_2$ de $T$, on veut montrer qu'ils sont élémentairement équivalents. Soit $T_i$ la théorie complète de $\mathcal{M}_i$ , $T_i := \{\sigma \, : \, \sigma$ énoncé de $L$, $\mathcal{M} \models$

$\sigma\}$. Par LWS, $T_i$ a un modèle $M_i$ de cardinalité égale à $\kappa$, qui est élémentairement équivalent à $N_i$, et en partciluier un modèle de $T$. Par l'hypothèse, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont isomorphes, donc certainement élémentairement équivalents , et par transitivité,

$$\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2 \equiv \mathcal{N}_2.$$

□

On en déduit que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée $p$, dans le langage $L_{ANN}$, est une théorie complète.

Également que si $K$ est un corps infini (pas forcément commutatif) , la théorie des $K$-espaces vectoriels est une théorie complète.

(On a déjà vu que la théorie des ensembles infinis dans $L_\emptyset$, et la théorie des ordres denses sans extrémités, dans le langage avec une relation binaire, sont des théories complètes).

# 2 Méthode des diagrammes

En fait on souhaite obtenir, à partir d'une $L$-structure infinie quelconque, $\mathcal{M}$, des extensions élémentaires en chaque cardinalité supérieure à celle de $\mathcal{M}$.

Pour cela, on va appliquer la compacité mais à un langage enrichi.

Soient $L$ un langage, $\mathcal{M} =< |M|, ... >$ une $L$-structure.

**Définitions**:1. Soit $A \subset M$, on note $L(A)$ le langage $L \cup \{c_a; a \in A\}$ où chaque $c_a$ est un nouveau symbole de constante.

On enrichit canoniquement la $L$-structure $\mathcal{M}$ en une $L(A)$-structure en interprétant dans $\mathcal{M}$ chaque nouveau symbole de constante $c_a$ par l'élément $a$ lui-même. Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule de $L$ avec $n$ variables libres, on écrit $\phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, pour désigner l'énoncé de $L(A)$ obtenu en substituant à chaque occurence libre de la variable $v_i$ le symbole de constante $c_{a_i}$. Par définition de la satisfaction, il y a équivalence entre:

$$\mathcal{M} \models \phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \text{ en tant que } L(A)\text{-structure },$$

$$\text{et } \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ en tant que } L\text{-structure }.$$

On appelle **langage associé à la $L$-structure** $\mathcal{M}$ le langage

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = L \cup \{c_m \ ; \ m \in M\}.$$

**Ensembles définissables à paramètres**:

Soient $L$ un langage et $\mathcal{M}$ une $L$-structure. Rappelons qu'un ensemble $E \subseteq |M|^n$ est $L$-**définissable** dans $\mathcal{M}$ s'il existe une formule $\phi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k)$ de $L$ et $b_1, \ldots, b_k \in |M|$ tels que

$$E = \{(a_1, \ldots, a_n) \in |M|^n \ ; \ \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_k)\}.$$

On dit alors que $E$ est définissable sur $\bar{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ou définissable à paramètres dans $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Si l'ensemble $\bar{b}$ est vide, on dit que $E$ est $L$-définissable sur vide (ou sans paramètres.

Si $A \subset |\mathcal{M}|$, $D$ est un sous-ensemble de $|\mathcal{M}|^n$ $L$-définissable à paramètres dans $A$ si et seulement si $D$ est un sous-ensemble de $|\mathcal{M}|^n$ $L(A)$-définissable sans paramètres (ou sur $\emptyset$).

On appelle **Diagramme** de $\mathcal{M}$, ou **Diagramme simple** de $\mathcal{M}$, la théorie suivante dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$:
$Diag(\mathcal{M}) = \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n})\ ;\ \phi(v_1, \ldots, v_n)$ formule sans quantificateurs de $L$ telle que $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)\}$.
On appelle **Diagramme élémentaire** de $\mathcal{M}$, la théorie suivante dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$:
$Diag_{el}(\mathcal{M}) = \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n})\ ;\ \phi(v_1, \ldots, v_n)$ formule de $L$ telle que $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)\}$.

**Proposition 8** *Soient $L$ un langage, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $L$-structures, et $h$ une application de $M$ dans $N$. On enrichit $\mathcal{N}$ en une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-structure en posant, pour chaque $m$ dans $M$, ${c_m}^{\mathcal{N}} = h(m)$.*
**1.** *$h$ est un $L$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ si et seulement si*

$$\mathcal{N} \models Diag(\mathcal{M}) \text{ en tant que } \mathcal{L}(\mathcal{M})\text{-structure.}$$

**2.** *$h$ est un $L$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, si et seulement si*

$$\mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M}) \text{ en tant que } \mathcal{L}(\mathcal{M})\text{-structure,}$$

*ssi $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalents pour le langage $L(\mathcal{M})$.*

On obtient immédiatement:

**Corollaire 9** *Soient $L$ un langage, $\mathcal{M}$ une $L$-structure, et $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-structure. On définit une application $h$ de $M$ dans $N$ en posant, pour tout élément $m$ de $M$, $h(m) = {c_m}^{\mathcal{N}}$. Alors:*

*1. Si $\mathcal{N}$ est modèle de $Diag(\mathcal{M})$, $h$ est un $L$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.*

*2. Si $\mathcal{N}$ est modèle de $Diag_{el}(\mathcal{M})$, alors $h$ est un $L$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.*

**Corollaire 10** *Soient $L$ un langage, $\mathcal{M}$ une $L$-structure et $T$ une théorie de $L$. Il existe un modèle $\mathcal{N}$ de $T$ et un $L$-plongement (respectivement un $L$-plongement élémentaire) de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ si et seulement si, dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, la théorie $T \cup Diag(\mathcal{M})$ (respectivement $T \cup Diag_{el}$) a un modèle.*

On peut maintenant appliquer le théorème de compacité.

**Proposition 11** *Soient $\mathcal{M}$ une $L$-structure, et $T$ une théorie de $L$. Alors $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de $T$ si et seulement si toute sous-structure finiment engendrée de $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de $T$.*

*Preuve*: Un sens est évident. Pour l'autre, supposons donc que toute sous-structure finiment engendrée de $\mathcal{M}$ peut se plonger dans un modèle de $T$. Pour plonger $\mathcal{M}$ tout entier dans un modèle de $T$ il faut et il suffit de montrer que $\Sigma = Diag(\mathcal{M}) \cup \mathcal{T}$ a un modèle, donc par le théorème de compacité, que tout sous-ensemble fini de $\Sigma$ a un modèle. Rappelons que $Diag(\mathcal{M})$ est l'ensemble des formules atomiques et négations de formules atomiques closes du langage $L(M)$ qui sont vraies dans $\mathcal{M}$. Un sous-ensemble fini $F$ de $\Sigma$ est donc inclus dans un ensemble de la forme

$$T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$$

où chaque $\psi_i$ est un énoncé atomique clos. Chaque $\psi_i$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de constantes du langage $\mathcal{L}(M)$. Soit donc $\{c_1, \dots, c_k\}$ l'ensemble fini des constantes qui apparaissent dans $\psi_1, \dots, \psi_k$. Soit $A$ la $L$-sous-structure de $\mathcal{M}$ engendrée par les éléments $\{{c_1}^M, \dots, {c_k}^M\}$. Alors $F$ est inclus dans $Diag(A) \cup T$ ($Diag(A)$ est le diagramme de la structure $A$ dans le langage $L(A)$). Par hypothèse, $\mathcal{M}$ lui même est un modèle de $Diag(A) \cup T$, donc on a bien montré que $F$ a un modèle. □

**Exemple d'application: un groupe abélien est ordonnable si et seulement si il est sans torsion**

On rappelle qu'on appelle groupe (abélien) ordonné un groupe abélien $(G, +, 0)$ muni d'une relation d'ordre compatible c'est-à-dire telle que

$$\forall x \forall y \forall z \, (x \geq y \rightarrow x + z \geq y + z).$$

On dit qu'un groupe abélien est *ordonnable* si on peut le munir d'une relation d'ordre compatible.

Si $(G, +, 0, \leq)$ est un groupe ordonné, il est sans torsion, car, pour tout entier $n$, $nx \geq x$ si $x \geq 0$.

La proposition précédente nous permet de voir qu'un groupe est ordonnable ssi tous ses sous groupes finment engendrés le sont: en effet soit $L$ le langage habituel des groupes (abéliens) $\{+, -, 0\}$, et $T_0$ l'ensemble fini d'énoncés de $L$ dont les modèles sont exactement les groupes abéliens. Soit $L_1 = L \cup \{\leq\}$, le langage formé de $L$ et d'un nouveau symbole de relation binaire , noté $\leq$. Soit $T_1$ l'ensemble fini d'énoncés de $L_1$ dont les modèles sont exactement les groupes abéliens ordonnés. Si $G$ est un groupe abélien, $G$ est ordonnable si et seulement si il existe un groupe abélien ordonné $H$ et un $L$-plongement de $G$ dans $H$: si $G$ est ordonnable, on prend $G = H$; réciproquement, si il existe $f$ $L$-plongement de $G$ dans $H$, en posant dans $G$

$$x \leq y \text{ ssi } f(x) \leq f(y),$$

on obtient bien sur $G$ une relation d'ordre compatible. Par la proposition au-dessus, on a donc bien que $G$ est ordonnable ssi toutes ses $L$-sous-structures finiment engendrées le sont, c'est-à-dire ssi tous ses sous groupes finiment engendrés le sont. Maintenant, on s'est ramené à une question nettement plus simple: il suffit de montrer que si $G$ est un groupe sans torsion finiment engendré, il est ordonnable. Or un groupe finiment engendré sans torsion est libre, donc isomorphe à $(\mathbb{Z}^n, +)$ pour un certain $n$ (voir par exemple le livre d'algèbre de Lang), et $(\mathbb{Z}^n, +)$, muni de l'ordre lexicographique est un groupe ordonné.

**Proposition 12** *Soient $L$ un langage, $\mathcal{M}$ une $L$-structure infinie, et $\kappa$ un cardinal infini, supérieur ou égal au cardinal de $M$ et à $||L||$. Alors il existe $\mathcal{N}$, telle que $\mathcal{M} \preceq_L \mathcal{N}$ (c'est-à-dire qu'il existe un $L$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$) et $\mathcal{N}$ est de cardinalité égale à $\kappa$.*

Preuve: on applique le corollaire 6 au langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et à la théorie $Diag_{el}(\mathcal{M})$, puis la proposition 9.

Applications: - Extensions élémentaires “non-standards” des entiers.
- Extensions élémentaires de $\mathbb{R}$ non archimédiennes (voir section 4.2).

# 3 Retour sur le théorème de compacité

## 3.1 Rapport avec la compacité sur un espace topologique

Le théorème de compacité dit bien en fait qu'un certain espace topologique est compact. Rappel: Soit $L$ un langage, on rappelle qu'on a défini une théorie comme étant un ensemble d'énoncés qui a un modèle. On dira qu'une théorie $T$ est **maximale** si elle est maximale pour l'inclusion dans l'ensemble de toutes les théories de $L$, c'est-à-dire , si pour tout énoncé $\sigma$, $\sigma \in T$ ou bien $\neg\sigma \in T$. En particulier une théorie maximale est complète. Par le lemme de Zorn, toute théorie est contenue dans une théorie maximale.

Soit $S(L)$ l'ensemble des théories maximales de $L$. On considère, pour chaque énoncé $\sigma$ de $L$, le sous-ensemble $< \sigma >$ de $S(L)$

$$< \sigma > := \{T \in S(L) \, : \sigma \in T\}.$$

Alors les $< \sigma >$ forment une base d'ouverts-fermés pour la topologie dont les fermés sont les sous-ensembles de la forme $< \Sigma > := \{T \in S(L) \, ; \Sigma \subset T\}$, pour $\Sigma$ un ensemble d'énoncés (éventuellement infini) de $L$.

Le fermé $< \Sigma >$ est vide ssi $\Sigma$ n'a aucun modèle. Si $\sigma$ est un énoncé $< \sigma >$ est un ouvert-fermé (son complémentaire est égal à $< \neg\sigma >$).

**Proposition 13** *L'espace topologique $S(L)$ est compact totalement discontinu.*

*Preuve*: $S(L)$ est bien totalement discontinu puisqu'on a exhibé une base d'ouverst-fermés. La topologie est séparée (= Hausdorff): en effet si $T_1$ et $T_2$ sont deux théories maximales distinctes, alors il existe un énoncé $\sigma$ de $L$ tel que $\sigma \in T_1$ et $\neg\sigma \in T_2$.

Maintenant supposons que $S(L) = \bigcup_{i \in I} U_i$, où les $U_i$ sont des ouverts. On peut supposer que les $U_i$ sont des ouverts de base, donc de la forme $< \sigma_i >$, pour $\sigma_i$ énoncé de $L$. Donc toute théorie maximale de $L$ contient l'un des $\sigma_i$. Il suit que l'ensemble $\Sigma = \{\neg\sigma_i\}$ n'a aucun modèle. Par le théorème de compacité, il y a un sous ensemble fini de $\Sigma$ qui n'a pas de modèle. Donc il existe $J$ fini tel que $\{\neg\sigma_j \, : j \in J\}$ n'a aucun modèle; mais alors $S(L)$ est déjà recouvert par la réunion finie d'ouverts $\bigcup_{j \in J} < \sigma_j >$. $\square$

## 3.2 Compacité pour les formules avec des variables libres

Nous avons toujours énoncé le théorème de compacité pour des ensembles d'énoncés, c'est-à-dire de formules sans variables libres, mais l'utilisation des constantes nous permet de l'appliquer aux ensembles de formules avec des variables libres.

**Proposition 14** *Soit $L$ un langage, $T$ une théorie de $L$ et $\{\phi_i(v_1, \ldots, v_n) : i \in I\}$, un ensemble de formules de $L$ dont les variables libres sont parmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Supposons que, pour chaque sous-ensemble fini $J$ de $I$, il existe un modèle de $T$, $\mathcal{M}_J$, tel que $\mathcal{M}_j \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \wedge_{j \in J} \phi_j(v_1, \ldots, v_n)$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M}$ de $T$ et une suite $a_1, \ldots a_n$ d'éléments de $\mathcal{M}$ tels que pour chaque $i \in I$, $\mathcal{M} \models \phi_i(a_1, \ldots, a_n)$.*

*Preuve*: On considère le langage $L' = L \cup \{c_1, \ldots c_n\}$, où chaque $c_j$ est un nouveau symbole de constante. Soit $T'$ l'ensemble d'énoncés suivants de $L'$:

$$T' := T \cup \{\phi_i(c_1, \ldots, c_n) : i \in I\}.$$

Soit $F$ un sous-ensemble fini de $T'$, alors il existe $J \subset I$, $J$ fini tel que $F \subset T \cup \{\phi_j(c_1, \ldots, c_n) : j \in J\}$. Soit $\mathcal{M}_J$ le modèle de $T$ tel que

$$\mathcal{M}_j \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \wedge_{j \in J} \phi_j(v_1, \ldots, v_n).$$

Soit $m_1, \ldots m_n \in \mathcal{M}_J$ tels que $\mathcal{M}_J \models \phi_j(m_1, \ldots, m_n)$ pour chaque $j \in J$. On enrichit la $L$-structure $\mathcal{M}_J$ en une $L'$-structure, en interprétant le symbole de constante $c_k$ par l'élément $m_k$. Alors $\mathcal{M}_j$ est un modèle de $F$. Donc par compacité, $T'$ a un modèle $\mathcal{M}$, qui est une $L'$-structure. Si $a_k \in \mathcal{M}$ est l'interprétation du symbole de constante $c_k$ dans $\mathcal{M}$, on a bien que, pour chaque $i \in I$

$$\mathcal{M} \models \phi_i(a_1, \ldots, a_n).$$

On considère maintenant $\mathcal{M}$ comme une $L$-structure, et $\mathcal{M}$ est bien le modèle de $T$ cherché. $\square$

**Remarques:** En termes de sous-ensembles définissables, la proposition ci-dessus permet de voir que: si $\mathcal{M}$ est une $L$-structure, si $(D_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles définissables de $|\mathcal{M}|^n$ qui a la propriété de l'intersection finie, (c'est-à-dire telle que pour tous $i_1, \ldots, i_k \in I$ , $k \geq 1$, $D_{i_1} \cap \ldots \cap D_{i_k} \neq \emptyset$), alors $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire $\mathcal{N}$ dans laquelle l'intersection dela famille $(D_i)_{i \in I}$ est non vide.
*Attention* la proposition ne dit pas que c'est dans la structure $\mathcal{M}$ elle-même que l'intersection de la famille $(D_i)_{i \in I}$ est non vide, mais dans une extension. En effet, considérez par exemple le cas de $K = \overline{\mathbb{Q}}$, clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, dans le langage des anneaux. Soit $(P_k(X)_{k \in \mathbb{N}})$ une énumération de tous les polynômes non nuls à une variable à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Alors pour tout $m$, pour tous $k_1, \ldots, k_m$, on peut trouver dans $K$ un élément tel que $P_{k_1}(x) \neq 0 \wedge \ldots \wedge P_{k_m}(x) \neq 0$. En revanche un élément tel que, pour tout $k$, $P_k(x) \neq 0$, doit être transcendant sur $\mathbb{Q}$, et ne peut donc pas exister dans $K$, mais seulement dans une extension de $K$.

# 4 Exemples Divers

## 4.1 Ensembles définissables

**Proposition 15** *Si $E$ est définissable au-dessus de $\{b_1, \ldots, b_n\}$, alors $E$ est laissé globalement fixe par tout $L$-automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe $b_i$ pour tout $i$. (c'est-à-dire: si $h$ est un $L$-automorphisme de $\mathcal{M}$ tel que $f(b_i) = b_i$ pour chaque $i$, alors pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in E$ si et seulement si $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in E$.)*

Attention , la réciproque n'est pas vraie: il ne suffit pas d'être laissé fixe par tout $L$-automorphisme de $\mathcal{M}$ pour être définissable. Par exemple, toute réunion infinie d'ensembles définissables est laissée fixe par tout automorphisme. De même pour toute intersection infinie d'ensembles définissables. Et ces ensembles ne sont pas nécessairement définissables.

De plus certaines structures n'ont aucun automorphisme non trivial (on dit qu'elles sont rigides). Tout sous-ensemble est alors laissé fixe par le seul automorphisme existant, l'identité. Pourtant dans ces structures il n'est pas nécessairement vrai que tout sous-ensemble est définissable. Par exemple la structure $\mathcal{M}_0 =< \mathbb{R}, 0, 1, +, -, ., <>$ est rigide. Mais on peut montrer que les seuls sous-ensembles définissables sur vide de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_0$ sont les intervalles à extremités rationnelles ou $+\infty$ ou $-\infty$, et les ensembles finis de points rationnels.

## 4.2 Un exemple d'application des diagrammes: Les réels non-standards

On rappelle qu'un corps $K$ muni d'une relation d'ordre $\leq$ totale est un **corps ordonné** si:

– $(K, +)$ est un groupe ordonné, c'est-à-dire, pour tous $x, y, z$ dans $K$, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;

– pour tous $x, y, z$ dans $K$, si $z \geq 0$ et $x \leq y$, alors $x.z \leq y.z$.

Soit $L$ le langage des anneaux ordonnés, $L = \{0, 1, +, -, ., \leq\}$ et $T_1$ l'ensemble fini d'énoncés qui axiomatisent les corps ordonnés.

On dit qu'un corps ordonné $K$ est **archimédien** si pour tout $x$ dans $K$, il existe un entier $n$ tel que $x < n$. (On note $n$ le terme clos du langage $1 + \ldots + 1$, $n$ fois).

Considérons $\mathbb{R}$, les réels, comme $L$-structure. Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien et a la propriété que tout sous-ensemble non vide majoré a une borne supérieure.

On considère le langage $L(\mathbb{R}) \cup \{c\}$ où $c$ est un nouveau symbole de constante qui n'est pas dans $L(\mathbb{R})$. Soit $\Sigma = Diag_{el}(\mathbb{R}) \cup \{c > n; n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble d'énoncés est finiment satisfaisable car tout sous-ensemble fini peut être satisfait dans $\mathbb{R}$ lui-même: un ensemble fini $F \subset \Sigma$ ne fait intervenir qu'un nombre fini d'énoncés de la forme $\{c > n\}$, Soit $m$ un entier plus grand que ce nombre fini de $n$, alors en interprétant la constante $c$ par $m$, on fait de $\mathbb{R}$ un modèle de $F$.

Donc par le théorème de compacité, $\Sigma$ a un modèle $K$, dans lequel il existe un élément $a$, l'interprétation de la constante $c$, qui est plus grand que tous les entiers. $K$ est alors une extension élémentaire du corps réel clos $\mathbb{R}$ (pour le langage $L_O$ et est non archimédien.

Soit maintenant $K$ un modèle quelconque de $\Sigma$. On a donc $\mathbb{R} \preceq_L K$, c'est-à-dire qu'il existe un plongement élémentaire de $\mathbb{R}$ dans $K$. On note encore $\mathbb{R}$ la sous-structure élémentaire de $K$ qui est $L$-isomorphe à $\mathbb{R}$ (cela revient à supposer que le plongement élémentaire est en fait l'inclusion, pour simplifier les notations). Soit $a$ donc l'interprétation de la constante $c$ dans $K$, alors pour tout élément $r \in \mathbb{R}$, on a que $a > r$.

(1) Le sous-ensemble $\mathbb{R}$ est majoré dans $K$ mais n'a pas de borne supérieure: en effet $\mathbb{R}$ est majoré par $a$, mais pour tout $b$ majorant $\mathbb{R}$, alors $b/2$ majore aussi $\mathbb{R}$ et est strictement inférieur à $b$.

(2) Dans $K$, tout sous-ensemble $L$-définissable de $K$ qui est non vide et qui a un majorant, a une borne supérieure: soit $\phi(v, \bar{w})$ une formule de $L$, $\bar{b}$ un uple d'éléments de $K$, et

$$E = \{a \in K; K \models \phi(a, \bar{b})\}.$$

Supposons que $E$ est non vide et est majoré. Donc

$$K \models \exists v\, \phi(v, \bar{b}) \wedge \exists y \forall z\, (\phi(z, \bar{b}) \rightarrow z \leq y).$$

Soit $\psi(y, \bar{w})\ :\ \forall z\, (\phi(z, \bar{w}) \rightarrow z \leq y)$.

Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble majoré non vide a une borne supérieure. C'est en particulier vrai pour les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}$ donc

$$\mathbb{R} \models \forall \bar{w}\, [(\exists z\, \phi(z, \bar{w}) \wedge \exists y\, (\psi(y, \bar{w}))) \rightarrow (\exists v\, (\psi(v, \bar{w}) \wedge \forall x(\psi(x, \bar{w}) \rightarrow v \leq x)))].$$

Puisque $\mathbb{R} \preceq_L K$, le même énoncé est vrai dans $K$, et doit être vrai en particulier pour $\bar{w} = \bar{b}$. Or cet énoncé dit exactement que puisque $E$ est majoré, il doit avoir un plus petit majorant (c'est $v$).

(3) Conséquence: Le sous-ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas définissable dans $K$. Sinon, par (2) il devrait avoir une borne supérieure.

## 4.3 Un théorème de théorie des modèles "pure"

Juste pour donner un exemple de théorème de théorie des modèles "pure" qui n'est pas seulement une application quasi directe du théorème de compacité, voici un résultat dû a M.Morley en 1965, et qui a marqué le début du développement moderne de la théorie des modèles, et dont on peut donner un énoncé précis (mais pas la preuve).

**Théorème 16** *Soit $L$ un langage dénombrable et $T$ une théorie de $L$ qui est $\kappa$-catégorique pour* **un** *cardinal $\kappa$ non dénombrable. Alors $T$ est $\kappa$-catégorique pour* **tout** *cardinal $\kappa$ non dénombrable.*

Pour démontrer ce théorème, on montre en fait que dans tout modèle de la théorie $T$, on peut définir une notion d'indépendance qui se comporte comme les notions classiques d'indépendance linéaire (dans les espaces vectoriels) ou algébrique (dans les corps). Cette notion d'indépendance a les bonnes propriétés pour entraîner que deux ensembles indépendants maximaux (les "bases") ont même cardinalité. On montre ensuite que tout modèle de $T$ est déterminé, à isomorphisme près, par la cardinalité d'une base, comme les espaces vectoriels ou les corps algébriquement clos (avec la cardinalité d'une base de transcendance sur le corps premier).

L'exemple des ordres denses sans extrémités, théorie dont tous les modèles dénombrables sont isomorphes, mais qui a beaucoup de modèles non isomorphes en chaque cardinalité non dénombrable montre que l'hypothèse de non dénombrabilité dans le théorème est nécessaire.

# 5 Suggestions Exposés?

- (exposé?) Applications des ultraproduits: Cones asymptotiques (Gromov, Van den Dries-Wilkie, Kramer-Tent "Asymptotic cones and ultrapowers of Lie groups" Bulletin of symbolic Logic 10 (2004) 175-185)
- (exposé?) démonstration du théorème de Nori et autres par Hrushovski-Pillay
- (exposé?) les corps réels clos ou les structures 0-minimales.