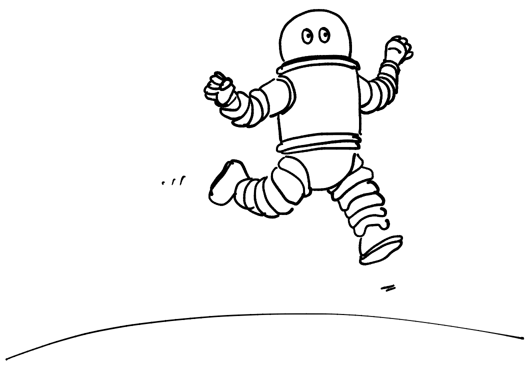
Théorie des distributions, analyse de Fourier

et un peu d'analyse fonctionnelle



Master 1 Maths

Université Paris-Saclay

D. Hulin 2024–25

Table des matières

Bibliographie

J.M.Bony, Cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier

L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators (vol. 1)

R. Strichartz, A guide to distribution theory and Fourier transforms

C'est un plaisir de remercier Thomas Letendre pour son minutieux travail de relecture et ses nombreux commentaires concernant les versions intermédiaires de ce texte... sans oublier Blanche Buet, notre autre complice pour cet enseignement.

1. Préliminaire

L'objectif de ce cours est de dégager quelques outils pour l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP), en nous interrogeant notamment sur les problèmes d'existence et de regularité des solutions. Les méthodes utilisées relèveront pour l'essentiel de techniques d'analyse fonctionnelle.

Nous porterons une attention particulière au laplacien. En tant qu'opérateur invariant par isométries, il n'est pas surprenant de le voir apparaître lorsqu'on modélise des situations issues de la physique (voir 9.C). De plus, de notre point de vue de mathématicien, il a le bon goût d'être un opérateur elliptique... et c'est le plus simple d'entre eux (voir 9.B).

A Introduction

A.1 Solutions faibles

L'exemple le plus élémentaire pour motiver la notion de solution faible est donné par l'équation de transport $\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0$ avec une donnée initiale imposée $u(0, x) = u_0(x)$, où u est une fonction de deux variables (la première variable représentant le temps, la seconde étant une variable d'espace). Lorsque la donnée initiale u_0 est de classe C^1, on vérifie facilement que l'unique solution de classe C^1 de ce problème est la fonction définie par $u : (t, x) \mapsto u_0(x - t)$.

Lorsque la donnée initiale u_0 est simplement supposée continue, et non plus dérivable, la fonction définie par $u : (t, x) \mapsto u_0(x - t)$ répond à la même contrainte "physique" que dans le cas régulier, à savoir que chaque fonction $u_t : x \mapsto u_0(x-t)$ est obtenue en translatant la condition initiale u_0 par t. On aimerait pouvoir dire que u est encore solution de l'équation de transport, cette fois-ci en un sens "faible" - à définir.

Un autre exemple est donné par l'équation de Poisson, que nous allons illustrer en électrostatique. Si ρ est une distribution de charges, elle génère un potentiel V. Lorsque ρ est bien régulière, le potentiel V est de classe C^2 et ces deux quantités sont reliées par l'équation de Poisson

$$\Delta V = -\rho/\varepsilon \tag{1.1}$$

où la constante ε est la permitivité du milieu, et où l'opérateur Δ est le laplacien défini (dans $\mathbb{R}^3$) par $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial^2/\partial x_j^2$.

Il se peut maintenant que la distribution de charges ne soit pas définie par une fonction régulière, mais qu'elle soit par exemple supportée par une sphère (ρ est alors une mesure surfacique), ou par un segment (ρ est alors une mesure linéique), ou encore par un nombre fini de points (ρ est alors une combinaison linéaire de masses de Dirac). Dans ce cas, le système physique existe encore bel et bien (au moins idéalement...) et cette nouvelle distribution de charges engendre encore un potentiel V, qui ne sera plus de classe C^2 mais qui sera toujours solution de l'équation de Poisson (1.1) - de nouveau en un sens "faible". Nous donnerons un sens précis à cette notion de solution faible en 3.12.

Partant de ce constat que le monde des fonctions régulières est trop étriqué on va l'étendre en introduisant ces nouveaux objets que sont les distributions pour, notamment, être capable de dériver une distributions autant de fois qu'on voudra – et obtenir de nouveau une distribution. Cette démarche est semblable à celle de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. On va cette fois-ci rajouter aux fonctions continues juste ce qu'il faut pour obtenir un ("le plus petit", voir la remarque 4.17 ainsi que le corollaire 8.46) espace stable par dérivation. Une fonction localement intégrable, ou bien une mesure de Radon (c'est-à-dire une mesure borélienne localement finie), définiront toutes deux des distributions (voir la section 2.C).

A.2 Distributions

On pensera aux distributions comme à des "fonctions généralisées". Considérons en effet les fonctions (usuelles) avec un oeil de physicien.

On se donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, que l'on peut supposer continue. Il faut penser que f est une donnée observable : il peut s'agir de

— la température en chaque point
— la vitesse du vent
— ... ou encore d'une *distribution* de charges : eh oui, la terminologie vient de là !

On ne peut prétendre connaître f point par point. La détermination de f se fait en effet par le biais d'un instrument de mesure qui occupe un certain volume ; aussi précis soit-il, il ne nous donnera accès qu'à des moyennes locales $\int f\varphi$ de f. Laissons maintenant le mathématicien reprendre le dessus. Ce qui nous intéressera sera la forme linéaire

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \mapsto \int f\varphi \in \mathbb{C}$$

associée à la fonction f, où l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions tests constitué des fonctions de classe C^∞ et à support compact (voir 1.17). Cet objet T_f sera notre premier exemple de distribution (voir la proposition 2.16) !

B Fonctions différentiables, formules de Taylor

On commence par des rappels minimalistes concernant les fonctions de plusieurs variables, avec notamment les formules de Taylor. On suppose connue la notion de différentiabilité (à tous ordres) pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Les fonctions seront d'emblée supposées à valeurs complexes : on n'y échappe pas lorsqu'on aborde l'analyse de Fourier.

Dans tout ce texte, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ sera muni d'une norme, dont le choix importe peu (sauf aux chapitres 8 et 10). On pourra systématiquement supposer que c'est la norme euclidienne canonique.

Notation 1.1 On notera $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $(x_1, \ldots, x_d)$ les coordonnées du point $x \in \mathbb{R}^d$ dans cette base. Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq d$ et un point $a \in \Omega$, la dérivée partielle de f au point a dans la direction de e_j, si elle existe, est définie par

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_j) - f(a)) \, .$$

Définition 1.2 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est de classe C^n (pour $n \in \mathbb{N}$) si ses dérivées partielles d'ordre au plus n existent et sont continues. Cette fonction est de classe C^∞ lorsqu'elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Pour une fonction régulière, l'ordre des dérivées partielles n'importe pas.

Lemme 1.3 de Schwarz. *Pour $f \in C^2(\Omega)$ et $1 \leq j, k \leq d$, on a l'égalité*

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f \, .$$

Forts de propriété (qui se décline pour les dérivées partielles d'ordre supérieur), on se contentera de considérer les dérivées partielles d'ordre supérieur suivantes.

Notation 1.4 Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on note, lorsque c'est défini :

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_d^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} f \, .$$

L'ordre de cette dérivée partielle est la longeur $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$ du multi-indice.

Les différentes formules de Taylor (Taylor-Young, Taylor-Lagrange et Taylor avec reste intégral) sont de plus en plus précises quant à l'évaluation du reste, mais de plus en plus exigeantes quant à la régularité de la fonction à laquelle on peut les appliquer : on n'a rien sans rien... Citons les pour mémoire.

Proposition 1.5 *Soient $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Soient $n \in \mathbb{N}$, et $b \in \Omega$ un point tel que $[a, b] \subset \Omega$. Lorsque c'est défini, on écrit*

$$f(b) = S_n(b) + R_n(b)$$

$$\textit{où} \quad S_n(b) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D_a^k f \cdot (b - a)^k \, .$$

On a noté $D_a^k f \in L_k((\mathbb{R}^d)^k, \mathbb{C})$ la différentielle d'ordre k de f au point a (c'est une application k-linéaire symétrique de $(\mathbb{R}^d)^k$ dans $\mathbb{C}$).
Dans cette décomposition de $f(b)$, la somme $S_n(b)$ doit être considérée comme la partie "significative", et $R_n(b)$ comme un "reste" que l'on cherche à estimer.

1. **Taylor-Young.** *Si f est supposée n fois différentiable au point a, alors*

$$R_n(b) = o(\|b - a\|^n) \, .$$

2. **Taylor-Lagrange.** *Si f est supposée $(n+1)$ fois différentiable sur l'ouvert Ω et si $\sup_{x\in[a,b]} \|D^{n+1}f(x)\| \leq M$, alors on majore le reste par*
$$|R_n(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\|b-a\|^{n+1}\,.$$
3. **Taylor reste intégral.** *Si f est supposée de classe C^{n+1} sur l'ouvert Ω, on a une expression explicite du reste :*
$$R_n(b) = \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n D^{(n+1)}_{a+t(b-a)}f\cdot(b-a)^{(n+1)}\,dt\,.$$

Rappelons que la notation de Landau $R(x) = o(\|x\|^n)$ signifie que le ratio $R(x)/\|x\|^n$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$. On a convenu de noter $D^k_af\cdot h^k = D^k_af(h,\cdots,h)$. La norme de l'application k-linéaire D^k_xf est définie par
$$\|D^k_xf\| = \sup\{|D^k_xf(h_1,\cdots,h_k)|\,,\ \text{avec } h_j\in\mathbb{R}^d \text{ de norme 1 pour } 1\leq j\leq k\}\,.$$

Lorsqu'on utilisera la formule de Taylor, on veillera à utiliser l'expression la plus simple du reste - en fonction de nos besoins : on évite de s'encombrer de précisions inutiles (et donc nuisibles). Pour une fonction de classe C^∞ (ce qui sera le cas pour l'essentiel des fonctions que nous fréquenterons), les formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange sont conséquence de la formule avec reste intégral. Nous nous contentons donc ici de prouver cette dernière, en commençant par la dimension 1.

Lemme 1.6 Taylor avec reste intégral en dimension 1
Pour $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1}, on a l'égalité
$$g(1) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

L'hypothèse "$g : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1}" signifie que g s'étend en une fonction de classe C^{n+1} définie sur un voisinage ouvert de $[0,1]$.
Preuve On prouve cette égalité par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il s'agit du théorème fondamental de l'analyse,
$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)\,dt\,.$$
Le résultat suit alors d'une intégration par parties, qui donne l'égalité :
$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(t)\,dt &= \Big[\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}g^{(n+2)}(t)\,dt\\ &= \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1}g^{(n+2)}(t)\,dt\,.\end{aligned}$$
□

Preuve de la formule de Taylor avec reste intégral, dimension d
On applique la formule de Taylor à la fonction d'une variable réelle définie par $g : t\in[0,1] \mapsto f(a+t(b-a)) \in \mathbb{C}$ en observant que, pour $0 \leq k \leq n+1$ et $t \in [0,1]$, on a l'égalité
$$g^{(k)}(t) = D^k_{(a+t(b-a))}f\cdot(b-a)^k\,.$$
□

Il est indispensable de savoir également exprimer la formule de Taylor en termes de dérivées partielles (corollaire 1.9). On utilisera les notations suivantes.

Notation 1.7 Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.

Lemme 1.8 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, supposée k fois différentiable. Pour $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^d$, on a l'égalité*

$$\frac{1}{k!} D_a^k f \cdot h^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) h^\alpha \,.$$

Preuve C'est un petit exercice de dénombrement. Il s'agit de savoir, pour chaque multi-indice α de longueur k, combien de fois le terme $\partial^\alpha f(a) h^\alpha$ va apparaître lorsqu'on développe $D_a^k f \cdot h^k$. Autrement dit, de combien de façons peut-on colorier k cases avec d couleurs, chaque couleur numérotée $1 \leq j \leq d$ servant à colorier α_j cases : il faut choisir α_1 cases parmi k (soit $\frac{k!}{\alpha_1!(k-a_1)!}$ choix), puis α_2 cases parmi les $k - \alpha_1$ restantes (soit $\frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-a_1-a_2)!}$ choix) etc... d'où

$$\frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \, \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{k-\alpha_1-\cdots-\alpha_{d-1}!}{\alpha_d!(k-\alpha_1-\cdots-\alpha_d)!} = \frac{k!}{\alpha!}$$

tels coloriages, puisque $k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. Le résultat suit. □

Corollaire 1.9 *Pour $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}(\Omega)$ et un segment $[a, b] \subset \Omega$, on a*

$$f(b) = \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(b-a)^\alpha + (n+1) \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^n \, \partial^\alpha f(a+t(b-a)) \, dt \,.$$

C Convolution des fonctions

Pour définir le produit de convolution, on doit être sur un groupe muni d'une mesure invariante par les translations. Ici, ce sera $(\mathbb{R}^d, +)$ muni de la mesure de Lebesgue.

Notation 1.10 Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de classe C^k qui sont à support compact (voir si besoin 1.16 pour la notion de support).

Théorème 1.11 *Soit $1 \leq p < \infty$. On munit l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ de la norme définie par $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p)^{1/p}$.*

1. *Pour $t \in \mathbb{R}^d$ l'opérateur de translation par t est défini, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par $\tau_t f : x \mapsto f(x-t)$. Alors $\tau_t : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ est bien défini, et c'est une isométrie.*
2. *L'espace $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$.*
3. *Les translations sont continues dans $L^p(\mathbb{R}^d)$:*
   pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ l'application $t \in \mathbb{R}^d \mapsto \tau_t f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue.

Preuve 1. Conséquence de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation. Ce point persiste pour $p = \infty$, contrairement aux deux autres assertions.

2. Cette assertion est une conséquence de la régularité de la mesure de Lebesgue (c'est un résultat un peu fin) [1]. Ce fait est le point de départ de la plupart des résultats qui suivent concernant la convolution (à commencer par le point 3.).

3. Soit en un premier temps $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$. Cette fonction est uniformément continue et toutes les fonctions translatées $\tau_t\varphi$, pour $|t| \leq 1$, sont à support dans un même compact de $\mathbb{R}^d$. Il suit que $\|\tau_t\varphi - \varphi\|_p \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Soient maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. D'après 2., il existe $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ avec $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. Nous venons de montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\|\tau_t\varphi - \varphi\|_p \leq \varepsilon$ lorsque $|t| \leq \eta$. Il suit alors de l'inégalité triangulaire, et de ce que chaque translation $\tau_t : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ est une isométrie, que $\|\tau_t f - f\|_p \leq 3\varepsilon$ lorsque $|t| \leq \eta$. □

Définition 1.12 Convolution *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurables. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose que la fonction $t \in \mathbb{R}^d \mapsto f(t)g(x-t) \in \mathbb{C}$ est intégrable, ou bien que les deux fonctions f et g sont à valeurs positives (ou bien sont à valeurs dans $[0, \infty]$). La convolée de f et g au point x est alors définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\, dt\,.$$

Proposition 1.13 *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurables. Soit $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $(f * g)(x)$ est défini, alors $(g * f)(x)$ est également défini et on a l'égalité $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.*
   De plus si f est nulle en dehors de A et g est nulle en dehors de B alors la convolée $f * g$ est définie en dehors de $A + B$ et y est nulle.
2. $\mathbf{C_c^0} * \mathbf{C_c^0}$: *Pour $f, g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ continues à supports compacts, la convolée $f * g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est également continue à support compact.*
3. $\mathbf{C_c^k} * \mathbf{L^1_{loc}}$: *Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, la convolée $f * g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$. Cette convolée est de classe C^k et on a pour tout $|\alpha| \leq k$ l'égalité $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$.*
4. $\mathbf{L^p} * \mathbf{L^q}$: *Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ deux exposants conjugués : $1/p + 1/q = 1$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, la convolée $f * g$ est définie en tout point, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Si de plus $1 < p, q < \infty$, alors $f * g$ tend vers 0 à l'infini.*
5. $\mathbf{L^1} * \mathbf{L^1}$: *Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la convolée $f * g$ est définie presque partout. De plus, on a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.*

5. (bis) $\mathbf{L^1} * \mathbf{L^p}$: *Soient $1 \leq p < \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est définie presque partout, avec $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.*

Ébauche de preuve

1. Utiliser la formule du changement de variable.

Si $f * g(x) \neq 0$, c'est qu'il existe au moins un $t \in \mathbb{R}^d$ avec $f(t) \neq 0$ et $g(x-t) \neq 0$, soit $t \in A$ et $x - t \in B$, et donc $x \in A + B$.

2. Élémentaire.

3. Cela résulte des théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégrale. Donnons quelques détails. Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}\,(f) \subset B(0, R)$. Soit $M > 0$. Montrons que $f * g$ est C^k sur $B(0, M)$.

---

1. Voir par exemple le polycopié Donjons et dragons

La fonction $F : (t,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto f(x-t)g(t) \in \mathbb{C}$ est de classe C^k par rapport à la variable x avec, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq k$, l'égalité $\partial_x^\alpha F(t,x) = (\partial^\alpha f)(x-t)\, g(t)$. Pour $|x| < M$, on aura donc la domination (uniforme en x)

$$|\partial_x^\alpha F(t,x)| \leq \|\partial_x^\alpha f\|_\infty \, |g(t)| \mathbb{1}_{B(0,R+M)}$$

par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (comme produit de $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ par la fonction indicatrice d'une partie bornée de $\mathbb{R}^d$). Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique donc pour montrer, par récurrence sur $|\alpha|$, que $f * g$ est de classe C^k... et que l'on peut dériver aux ordres au plus k sous le signe intégrale.
4. Le fait que $f * g$ soit partout définie et bornée suit de l'inégalité de Hölder.

Supposons $p < \infty$ (sinon, on a $q < \infty$). Pour $x, h \in \mathbb{R}^d$, l'inégalité de Hölder donne la majoration

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \leq \|\tau_{-h} f - f\|_p \|g\|_q \,,$$

d'où l'uniforme continuité de $f * g$.

La dernière assertion est conséquence de la densité de $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans chacun des deux espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^q(\mathbb{R}^d)$, puisque p et q sont tous deux supposés finis, et de ce qu'une limite uniforme de fonctions continues à supports compacts dans $\mathbb{R}^d$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini.
5. Commencer par le cas où f et g sont à valeurs positives, en utilisant Fubini-Tonelli.
5 bis. Commencer par le cas où f et g sont à valeurs positives, et utiliser l'inégalité de Hölder pour la mesure à densité $|f(t)|dt$. □

Même si l'on ne se servira pas ici de cette notion en toute généralité, rappelons ce qu'est une approximation de l'unité (voir également les suites régularisantes en 1.19).

Définition 1.14 Approximation de l'unité *Une approximation de l'unité est une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions $h_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que :*

1. *chaque fonction h_n est à valeurs positives, et d'intégrale égale à 1,*
2. *la masse des fonctions (h_n) se concentre autour de l'origine : pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \int_{\|x\|\leq\delta} h_n(t)\, dt = 1$.*

Proposition 1.15 *Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une approximation de l'unité.*

1. *Soit $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$. La suite des convolées $(h_n * \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ lorsque $n \to \infty$.*
2. *Soient $1 \leq p < \infty$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $h_n * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout n, et $\|h_n * f - f\|_p \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Ebauche de preuve 1. C'est une conséquence de ce qu'une fonction $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue et bornée.

2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. La proposition 1.13 assure que $h_n * f$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a, puisque $\int_{\mathbb{R}^d} h_n(y)\, dy = 1$, l'égalité

$$(f * h_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-y) - f(x)\big) h_n(y)\, dy \,.$$

On utilise alors l'inégalité de Hölder pour la mesure $h_n(y)\,dy$ (de masse totale 1). Il vient

$$|(f * h_n)(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \, h_n(y)\,dy\,.$$

On obtient ensuite en intégrant en x et en utilisant Fubini-Tonelli,

$$\|f * h_n - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p \, h_n(y)\,dy\,.$$

On conclut alors en utilisant la continuité des translations dans L^p (théorème 1.11), le fait que $\|\tau_y f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, et la définition d'une approximation de l'unité. □

D Fonctions tests, suites régularisantes, fonctions plateaux

Les fonctions tests joueront un rôle central dans ce cours. Commençons par rappeler la notion de support d'une fonction continue.

Définition 1.16 *Soit X un espace métrique, et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Le support de f est l'adhérence*

$$\mathrm{supp}\,(f) = \overline{\{x \in X\,,\; f(x) \neq 0\}} \subset X\,.$$

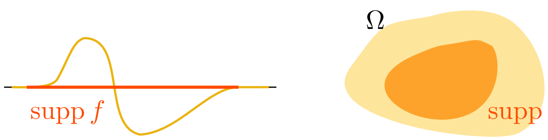
Autrement dit, le support de f est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f s'annule.

Définition 1.17 Fonction test *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.*

Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction test si elle est de classe C^∞ sur Ω, et si son support est une partie compacte de Ω.

On note $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions tests sur Ω.

Dire que le support de φ est un compact de Ω signifie que φ est nulle au voisinage du bord de Ω.



Support d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – Support d'une fonction test

Il n'est pas complètement évident qu'il existe des fonctions tests non triviales. Prouvons le.

Lemme 1.18 *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$ et avec* $\mathrm{supp}\,(\rho) \subset B(0,\varepsilon)$.

Preuve La condition $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$ s'obtiendra facilement par renormalisation, on l'oublie donc. Soit g la fonction définie par

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}\,.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée j-ième s'écrit $g^{(j)}(t) = P_j(1/t)e^{-1/t}$ pour $t > 0$, où P_j est un polynôme. Il suit que $g^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$).

On va montrer, par récurrence sur k, que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, avec $g^{(j)}(0) = 0$ pour $0 \leq j \leq k$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Supposons la propriété acquise à l'ordre k. Les taux d'accroissements de $g^{(k)}$ en l'origine vérifient

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{g^{(k)}(t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{P_k(1/t)e^{-1/t}}{t} = 0\,,$$

ce qui assure que $g^{(k)}$ est dérivable en 0 avec dérivée nulle. Ainsi, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il nous suffit alors d'introduire la fonction $\rho : x \in \mathbb{R}^d \mapsto g(\varepsilon^2 - \|x\|^2) \in [0, \infty[$ qui est de classe C^∞, à valeurs positives et non identiquement nulle. □

Nous ferons dans ce cours un usage immodéré des suites régularisantes.

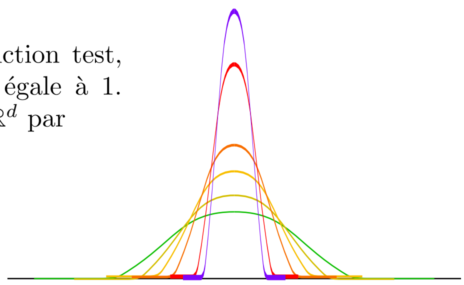
Définition 1.19 Suite régularisante *Une suite régularisante est une suite de fonctions* $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *(pour* $n \in \mathbb{N}^*$*) positives, d'intégrales égales à* 1 *et dont les supports vérifient* $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset B(0, \varepsilon_n)$ *où* $\varepsilon_n \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

Il s'agit donc d'une approximation de l'unité constituée de fonctions tests, dont le support se resserre autour de l'origine. Nous utiliserons systématiquement des suites régularisantes construites par le procédé ci-dessous : inutile d'aller chercher plus loin.

Exemple 1.20 Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction test, que l'on suppose positive et d'intégrale égale à 1. Alors la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$$

est une suite régularisante.



L'intérêt d'une suite régularisante réside en ce qu'elle nous permet d'approcher une fonction intégrable par des fonctions régulières.

Proposition 1.21 *Soient* $1 \leq p < \infty$*, une fonction* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite régularisante. Alors* $f * \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, et lorsque* $n \to \infty$ *on a* $\|f - f * \rho_n\|_p \to 0$.

Preuve On note que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Le résultat est alors conséquence immédiate des propositions 1.13 et 1.15. □

Nous avons montré plus haut qu'il existe des fonctions tests non triviales. A vrai dire, il en existe même beaucoup ! En effet :

Corollaire 1.22 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert. Soit* $1 \leq p < \infty$*. Alors le sous-espace* $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *est dense.*

Nous utiliserons dans la preuve le résultat suivant, dont ce n'est pas la dernière apparition.

Lemme 1.23 *Si $K \subset \Omega$ est une partie compacte de l'ouvert Ω, la distance $d(K, {}^c\Omega) = \inf\{d(a,x) \mid a \in K,\ x \in {}^c\Omega\}$ est strictement positive.*

Preuve La fonction $a \in K \mapsto d(a, {}^c\Omega) \in [0, \infty[$ est continue, donc elle atteint son minimum en un point du compact K. Ce minimum est non nul car la distance d'un point à une partie fermée (ici ${}^c\Omega$) n'est nulle que si ce point appartient au fermé. □

Preuve du corollaire 1.22 Soit $f \in L^p(\Omega)$. Ecrivons $\Omega = \cup_{\ell \in \mathbb{N}^*} K_\ell$ où les

$$K_\ell = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, {}^c\Omega) \geq 1/\ell \text{ et } \|x\| \leq \ell\} \tag{1.2}$$

constituent une suite croissante de parties compactes de Ω.
Le théorème de convergence dominée assure que la suite $(f\mathbb{1}_{K_\ell})$ (on tronque f par une fonction indicatrice) converge vers f dans L^p.

Soit alors $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante. Lorsque n est assez grand, on aura $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, 1/(2\ell))$ et donc le support

$$\operatorname{supp}((f\mathbb{1}_{K_\ell}) * \rho_n) \subset K_\ell + \overline{B}(0, 1/(2\ell)) \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, {}^c\Omega) \geq 1/(2\ell)\} \subset \Omega$$

de la convolée $(f\mathbb{1}_{K_\ell}) * \rho_n$ sera un compact (en tant que partie fermée d'une somme de deux compacts) inclus dans Ω. On conclut avec la proposition 1.21. □

Remarque 1.24 Exhaustion compacte La famille de compacts $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ (1.2) utilisée dans la preuve du corollaire 1.22 est une exhaustion de l'ouvert Ω par des compacts : c'est une famille croissante de compacts telle que $\cup_{\ell\in\mathbb{N}^*} K_\ell = \Omega$, et avec plus précisément $K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1}$. Cette dernière propriété assure que tout compact $L \subset \Omega$ est inclus dans l'un des K_ℓ, ce qui sera important dans d'autres contextes (par exemple au corollaire 7.9).

Nous définissons maintenant les fonctions plateaux (appelées fonctions cut-off en anglais). Elles permettront de tronquer des fonctions régulières, tout en préservant leur régularité.

Définition 1.25 δ-voisinage d'une partie

Soient $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie et $\delta > 0$. Le δ-voisinage (fermé) de A est la partie définie par

$$\mathcal{V}_\delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, A) \leq \delta\}\,.$$

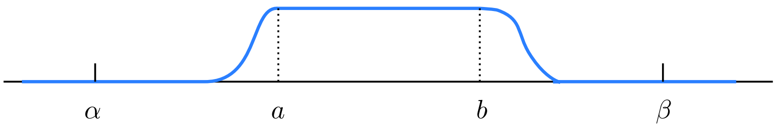
Lemme 1.26 *Si $K \subset \mathbb{R}^d$ est un compact de $\mathbb{R}^d$, et si $\delta > 0$, le δ-voisinage fermé $\mathcal{V}_\delta(K)$ de K est encore une partie compacte de $\mathbb{R}^d$.*

Preuve En effet, $\mathcal{V}_\delta(K)$ est borné (comme K) et est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$ car défini par une condition fermée – la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto d(x, K)$ étant continue et l'inégalité dans la définition étant une inégalité large. □

Corollaire 1.27 Fonction plateau (ou cut-off)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $K \subset \Omega$ une partie compacte de Ω.
Il existe une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur K et $0 \leq \chi \leq 1$ partout.

Soit $\delta > 0$. On peut même supposer que $\operatorname{supp}\chi \subset \mathcal{V}_\delta(K)$.



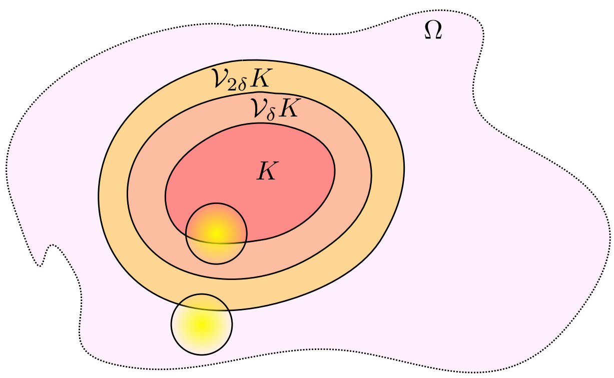
Fonction plateau pour $K = [a, b] \subset \Omega =]\alpha, \beta[$

Preuve On construit χ par régularisation de la fonction indicatrice d'un petit voisinage de K. Par compacité de $K \subset \Omega$, on a $d(K, {}^c\Omega) > 0$ (lemme 1.23). Soit donc $\delta > 0$ tel que $2\delta < d(K, {}^c\Omega)$, de sorte que $\mathcal{V}_{2\delta}(K) \subset \Omega$.

On choisit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans la boule $\bar{B}(0, \delta)$, positive et d'intégrale égale à 1, et l'on définit χ comme la convolée $\chi = \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\delta(K)} * \rho$. La proposition 1.13 assure que χ est bien définie et qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. Observons que, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(x) = \int_{\bar{B}(x,\delta)} \mathbb{1}_{\mathcal{V}_\delta(K)}(x - t)\, \rho(t)\, dt \qquad (*)$$

est obtenue comme un moyenne, pondérée par ρ, des valeurs prises par la fonction $\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\delta(K)}$ sur la boule $\bar{B}(x, \delta)$.



Construction d'une fonction plateau pour K

Supposons $x \notin \mathcal{V}_{2\delta}(K)$. On a alors $d(x, K) > 2\delta$, donc la boule $\overline{B}(x, \delta)$ ne rencontre pas $\mathcal{V}_\delta(K)$. Autrement dit la fonction $\mathbb{1}_{\mathcal{V}_\delta(K)}$ est identiquement nulle sur $\overline{B}(x, \delta)$. Il suit alors de (*) que $\chi(x) = 0$. On a donc montré que le support de χ vérifie $\operatorname{supp} \chi \subset \mathcal{V}_{2\delta}(K) \subset \Omega$.

Si maintenant $x \in K$, la boule $\overline{B}(x, \delta)$ est incluse dans $\mathcal{V}_\delta(K)$ et, dans ce cas, il suit de (*) que $\chi(x) = 1$. $\square$

Remarque 1.28 Troncature et régularisation

L'air de rien, nous avons introduit dans les pages qui précèdent deux techniques récurrentes en théorie des distributions :

• *Troncature :* il s'agit de tronquer une fonction en la multipliant par une fonction indicatrice (s'il n'y a pas de régularité en jeu), ou bien par une fonction plateau (s'il l'on veut conserver de la régularité). Ceci permet de récupérer une fonction à support compact.

• *Régularisation :* il s'agit de convoler une fonction par une fonction régulière... pour la régulariser.

E Savoir-faire

Bien souvent, une démonstration commencera par une idée qui sera mise en oeuvre par le biais d'estimations élémentaires. Si cette partie “technique” de calculs vous semble compliquée, vous perdrez de vue l'essentiel - c'est-à-dire l'idée... ce qui serait bien dommage et peu productif.

Il est donc conseillé de s'exercer dès maintenant à démontrer les assertions élémentaires suivantes, qui seront utiisées par la suite.

Exercice 1.29 Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto x^\alpha f(x) \in \mathbb{C}$ est bornée
2. pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto x^\alpha f(x) \in \mathbb{C}$ tend vers 0 à l'infini
3. pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^n f(x)$ est bornée
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^n f(x)$ tend vers 0 à l'infini.

Exercice 1.30 Laplacien d'une fonction radiale.

On travaille sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction radiale, c'est-à-dire que $f(x) = g(\|x\|)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, où $g :]0, \infty[\to \mathbb{C}$. On note $r : x \mapsto \|x\|$.

Montrer que f est de classe C^2 si et seulement si g est de classe C^2 et qu'on a alors l'égalité

$$\Delta f = g''(r) + \frac{d-1}{r} g'(r)\,,$$

où le laplacien est défini par $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Exercice 1.31 Intégration en coordonnées sphériques.

On rappelle (voir la proposition 11.20) qu'il existe une mesure borélienne $d\sigma$ sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ de $\mathbb{R}^d$ euclidien pour laquelle on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(ru)\, r^{d-1} dr\, d\sigma(u)$$

pour tout fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^d$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Retrouver la formule d'intégration en polaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. On revient à d quelconque.
   (a) Montrer que $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^a\, dx < \infty$ ssi $a > -d$.
   (b) Montrer que $\int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^a\, dx < \infty$ ssi $a < -d$.

2. Distributions

Nous introduisons la notion de distribution, puis nous donnons une panoplie de premiers exemples. Comme auparavant, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

A Distributions

Notation 2.1 Pour un compact $K \subset \Omega$, on note

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,|\, \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$$

le sous-espace constitué des fonctions tests de support inclus dans K. On a donc l'égalité

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \text{ compact de } \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)\,.$$

Définition 2.2 *Une distribution T est une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que :*

> *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une constante $c > 0$ (qui dépendent de K) avec, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, la majoration*
>
> $$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty\,. \tag{2.1}$$
>
> *On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur l'ouvert Ω.*

Remarque 2.3 Les notations $\langle T, \varphi \rangle$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont, à dessein, évocatrices de la dualité.

L'expression $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ désigne la norme sup.

Dans la condition (2.1), on se préoccupe de chaque compact séparément.

Exemple 2.4 Pour une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, l'expression $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$ définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nous reviendrons au paragraphe 2.C.1 sur cet exemple fondamental.
Sur $\mathbb{R}$, les expressions $\varphi \mapsto \varphi(0)$, $\varphi \mapsto \varphi'(0)$, ou encore $\varphi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ définissent des distributions.
Sur $\mathbb{R}^2$, l'expression $\varphi \mapsto (\partial^2\varphi/\partial x \partial y)(0) - \int_{B(0,1)} \varphi$ définit une distribution.

Les questions de topologie seront évoquées dans l'annexe 12.B.1. Nul besoin de s'en préoccuper pour comprendre le cours. Cependant, il est bon d'avoir en tête la signification heuristique de la condition (2.1).

La topologie qu'il est naturel de mettre sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions tests sur l'ouvert Ω est compliquée : on ne l'évoquera pas, et cela ne nous manquera pas.

Par contre cet espace s'écrit comme la réunion $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_K \mathcal{D}_K(\Omega)$, la réunion portant sur toutes les parties compactes de Ω. Il est naturel de munir chaque $\mathcal{D}_K(\Omega)$ de la "topologie de la convergence uniforme sur K de chacune des dérivées" (exemple 12.10.3). Pour cette topologie, une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ converge si et seulement si chacune de ses fonctions dérivées converge uniformément sur K (et donc sur Ω).

On peut alors reformuler la définition (2.1) : une distribution est une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ dont la restriction à chaque sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ (pour $K \subset \Omega$ compact) est continue (exercice 12.16).

Comme dit plus haut, la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas simple à appréhender (et elle n'est pas métrisable). Nous nous contenterons de définir ses suites convergentes.

Définition 2.5 *Soient $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour $n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :*

1. les supports restent dans un compact fixe de Ω :
   il existe un compact $K \subset \Omega$ avec $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. il y a convergence uniforme de chaque dérivée :
   pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2.6 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction test. Montrer les assertions suivantes :

1. On a $\lim_{h\to 0} \tau_h \varphi = \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit $(e_j)_{1\leq j\leq d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour $1 \leq j \leq d$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi - \tau_{te_j}\varphi}{t} = \partial_j \varphi \,,$$

   la convergence ayant lieu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

La proposition suivante exprime qu'une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si elle est séquentiellement continue.

Proposition 2.7 *Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. On a l'équivalence : T est une distribution si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ lorsque $n \to \infty$.*

Preuve Le sens direct découle immédiatement des définitions.

Passons à la réciproque, et supposons que la forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ ne soit pas une distribution. Il existe donc un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on puisse trouver une fonction $\varphi_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ avec

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| > n \sup_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty \,.$$

En particulier, $\langle T, \varphi_n \rangle$ est non nul, et on peut donc renormaliser la fonction φ_n en introduisant $\psi_n = \varphi_n / \langle T, \varphi_n \rangle \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

On a donc $\langle T, \psi_n \rangle = 1$ pour tout n, tandis que la suite (ψ_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$: en effet, les supports des ψ_n restent dans le compact fixe K et on a, pour tout multi-indice $|\alpha|$,

$$\|\partial^\alpha \psi_n\|_\infty = \frac{1}{|\langle T, \varphi_n \rangle|} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty \leq 1/n \quad \text{dès que } n \geq |\alpha|.$$

La forme linéaire T n'est donc pas séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

B Ordre d'une distribution

Dans la définition 2.2, l'entier k dépend a priori du compact K. Lorsqu'il n'en dépend pas, on dit que la distribution est d'ordre fini. Sinon, on dit que T est d'ordre infini.

Définition 2.8 **Ordre d'une distribution** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution d'ordre fini. L'ordre de T est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel, pour tout compact $K \subset \Omega$, on puisse trouver une constante c_K avec*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \quad \textit{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega). \tag{2.2}$$

Exemple 2.9 Soit $p \in \mathbb{N}$. L'expression $\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(p)}(0)$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre exactement p.

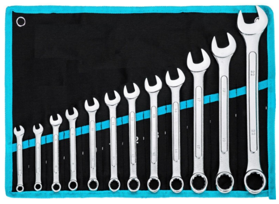
Preuve On vérifie immédiatement que T est une distribution d'ordre au plus p.

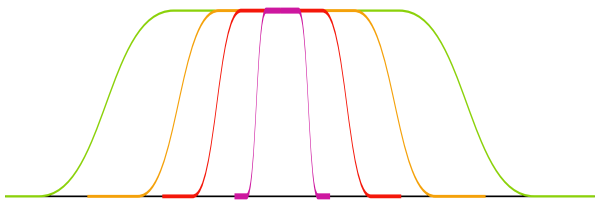
Supposons $p \in \mathbb{N}^*$. Nous voulons montrer que T n'est pas d'ordre inférieur ou égal à $p - 1$: il s'agit donc de construire une famille de fonctions tests, de supports dans un compact fixe K, et qui ne satisfont pas de majoration (2.2) avec $k = p - 1$. Tout se passe au voisinage de l'origine.

Considérons la fonction $e_p : x \mapsto x^p$: elle vérifie $e_p^{(p)}(0) = p! \neq 0$ tandis que ses dérivées d'ordre au plus $p - 1$ s'annulent en l'origine. Nous allons donc introduire une suite de fonctions (φ_n) obtenues en tronquant e_p par des fonctions plateaux bien choisies de support se concentrant autour de l'origine.

Fixons une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0 et avec, par exemple, $\operatorname{supp} \chi \subset [-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on introduit la fonction $\chi_n : x \mapsto \chi(nx)$: la fonction χ_n vaut encore 1 sur un voisinage de l'origine, avec maintenant $\operatorname{supp} \chi_n \subset [-1/n, 1/n]$.

L'intérêt de cette construction des χ_n est qu'elle fournit des troncatures pour lesquelles on dispose d'estimées “ standard” $\|\chi_n^{(j)}\|_\infty = n^j\, \|\chi^{(j)}\|_\infty$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. Imaginez qu'il s'agit de votre kit de bricolage préféré !





Les troncatures χ_n

Soit donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n = \chi_n\, e_p$. On prétend que $\langle T, \varphi_n \rangle = \varphi_n^{(p)}(0) = p!$ tandis que $\sup\big(\|\varphi_n\|_\infty, \ldots, \|\varphi_n^{(p-1)}\|_\infty\big) \to 0$ si $n \to \infty$ (ce qui montrera bien que T n'est pas d'ordre $p-1$ puisque toutes les χ_n sont à support dans le même compact $[-1, 1]$).
La formule de Leibniz donne en effet, pour $0 \le j \le p-1$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} C_j^i\, (\chi_n)^{(j-i)}(x)\, (e_p)^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{j} c(i,j)\, n^{j-i}\, \chi^{(j-i)}(nx)\, x^{p-i}\,,$$

les $c(i,j)$ étant des constantes indépendantes de n.
Puisque $\operatorname{supp} \chi \subset [-1, 1]$, il existe donc des constantes c_j et C_j indépendantes de n pour lesquelles

$$\|\varphi_n^{(j)}\|_\infty \le c_j \sum_{i=0}^{j} n^{j-i} (1/n)^{p-i} \le C_j\, n^{j-p} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$ car $j \le p-1$, ce qui achève la preuve. □

Exercice 2.10 1. (a) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $k \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout multi-indice $|\alpha| \le k$, une fonction localement intégrable $f_\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que l'expression $\varphi \mapsto \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega f_\alpha \partial^\alpha \varphi$ définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre au plus k.

(b) Déterminer l'ordre des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ respectivement définies par $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(2)}(x)\, dx$ et $\varphi \mapsto \int_{[0,\infty[} \varphi^{(2)}(x)\, dx$.

2. Montrer que $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n) \in \mathbb{C}$ définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre infini.

3. Démontrer que $T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(x, y, 0)\, dxdy \in \mathbb{C}$ définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ d'ordre 2.

La notion d'ordre est importante. En effet, on va voir qu'une distribution d'ordre k s'étend naturellement en une forme linéaire sur l'espace fonctions à support compact qui ne sont que de classe C^k, et pas C^∞.

Définition 2.11 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}^k(\Omega) = C_c^k(\Omega)$ - soit*

$$\mathcal{D}^k(\Omega) = \{\psi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \psi \textit{ est } C^k \textit{ et } \operatorname{supp}\psi \subset \Omega \textit{ est compact}\}.$$

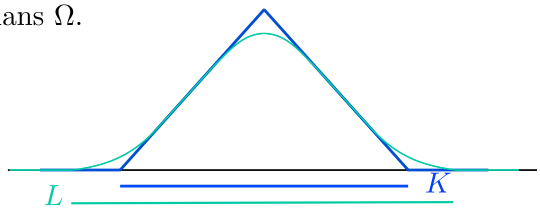
Proposition 2.12 *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre au plus k.*

Alors T admet un unique prolongement à $\mathcal{D}^k(\Omega)$ en une forme linéaire "continue" $\tilde{T} : \mathcal{D}^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ i.e. telle que, pour tout compact $K \subset \Omega$, on puisse trouver une constante a_K avec

$$|\langle \tilde{T}, \psi \rangle| \leq a_K \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty \quad \textit{pour toute } \psi \in \mathcal{D}_K^k(\Omega). \qquad (2.2)\text{bis}$$

Remarque 2.13 Si l'on prend la peine de définir la topologie de $\mathcal{D}^k(\Omega)$, on constate que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}^k(\Omega)$ est dense. Il s'agit donc dans cette proposition de prolonger une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel dense (ici, dans un cadre non normable). Voir le théorème 4.11 pour le cadre normé.

Preuve • Soient $K \subset \Omega$ un compact et $\psi \in \mathcal{D}_K^k(\Omega)$. On va définir $\langle T, \psi \rangle$ en approchant ψ par des fonctions de $\mathcal{D}_L(\Omega)$, où $L \subset \Omega$ est un voisinage compact de K dans Ω.



Approcher une fonction de $\mathcal{D}_K^0$ par une fonction de $\mathcal{D}_L$

Supposons en effet que l'on dispose d'une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}_L(\Omega)$ telles que la suite (φ_n) converge uniformément, ainsi que ses dérivées d'ordre au plus k, vers ψ (c'est-à-dire qu'on a convergence des (φ_n) vers ψ dans l'espace $\mathcal{D}_L^k(\Omega)$). Si un prolongement $\tilde{T}$ de T tel que dans l'énoncé existe, on aura

$$|\langle \tilde{T}, \psi \rangle - \langle T, \varphi_n \rangle| = |\langle \tilde{T}, \psi - \varphi_n \rangle| \leq a_L \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \psi - \partial^\alpha \varphi_n\|_\infty \to 0 .$$

Ceci assure l'unicité du prolongement $\tilde{T}$, et nous fournit également une piste pour sa construction. L'hypothèse que T est d'ordre k, soit (2.2), assure en effet que la suite $(\langle T, \varphi_n \rangle)$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge.

On va donc vouloir définir $\langle \tilde{T}, \psi \rangle$ comme la limite $\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle$. Il faut au préalable vérifier que cette limite est indépendante de la suite (φ_n) choisie.

• Soient donc (φ_n^1) et (φ_n^2) deux telles suites, à supports respectifs dans deux voisinages compacts L_1 et L_2 de K dans Ω. On observe qu'on a l'égalité des limites $\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n^1\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n^2\rangle$: raisonner sur la suite obtenue en alternant un terme de (φ_n^1) puis un terme de (φ_n^2), qui est à support dans le compact $L = L_1 \cup L_2 \subset \Omega$ et converge maintenant vers ψ dans $\mathcal{D}_L^k(\Omega)$.

• On peut maintenant définir $\langle \tilde{T}, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle$ comme la valeur commune de cette limite pour les suites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, dont le support reste dans un compact L de Ω, et qui convergent vers ψ dans $\mathcal{D}_L^k(\Omega)$. Il reste à vérifier qu'il existe de telles suites (φ_n), et que $\tilde{T}$ ainsi définie est bien linéaire continue.

• Soient donc $0 < \delta < d(K, {}^c\Omega)$ et $L = \mathcal{V}_\delta(K) \subset \Omega$, le δ-voisinage fermé de K : c'est un voisinage compact de K inclus dans Ω.

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction test positive, d'intégrale égale à 1, et de support $\operatorname{supp}\rho \subset B(0,\delta)$. Soit la suite régularisante définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $\rho_n : x \mapsto n^d\rho(nx)$.

Pour $\psi \in \mathcal{D}_K^k(\Omega)$, on introduit la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $\varphi_n = \rho_n * \psi$. Les propositions 1.13, 1.15 et 1.21 assurent que les fonctions φ_n appartiennent toutes à l'espace $\mathcal{D}_L(\Omega)$, et que la suite (φ_n) converge vers ψ dans l'espace $\mathcal{D}_L^k(\Omega)$.

• L'application $\tilde{T} : \mathcal{D}^k(\Omega) \to \mathbb{C}$ que l'on vient de définir est linéaire (car $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est linéaire, et chaque convolution $\psi \mapsto \rho_n * \psi$ est linéaire). De plus, $\tilde{T}$ vérifie (2.2)bis, avec une constante $a_K = c_L$ qui ne dépend que du voisinage compact $L \subset \Omega$ de K choisi, et pas de la fonction $\psi \in \mathcal{D}_K^k(\Omega)$. □

C Exemples

C.1 Distribution associée à une fonction localement intégrable

On a dit que la notion de distribution généralisait celle de fonction. On va préciser cette affirmation.

Définition 2.14 *Soient $1 \le p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On note $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont localement de puissance p-ième intégrable, i.e. dont la restriction à tout compact $K \subset \Omega$ appartient à $L^p(K)$. L'espace $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est constitué des fonctions mesurables localement bornées, i.e. dont la restriction à tout compact de Ω est essentiellement bornée.*

Exercice 2.15 Pour $1 \le r \le p \le \infty$, montrer l'inclusion $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Proposition 2.16 *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ une fonction localement intégrable.*

1. *L'expression*
$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f\varphi \in \mathbb{C}$$
définit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0 sur Ω.

2. *L'application* $j : f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *est une application linéaire injective.*

Remarque 2.17 L'application j réalise l'espace $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On identifiera donc par la suite toute fonction localement intégrable $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec la distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qu'elle définit.

On notera indifférement, pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi \in \mathbb{C}\,.$$

Preuve 1. Soit $K \subset \Omega$ un compact. On note $\|f\|_{L^1(K)} = \int_K |f|$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ l'expression suivante est bien définie, avec la majoration

$$|\int_\Omega f\varphi| = |\int_K f\varphi| \le \|f\|_{L^1(K)}\|\varphi\|_\infty\,,$$

ce qui assure que $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution d'ordre 0.

2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $T_f = 0$. On veut montrer que f est la fonction nulle. On va procéder par troncature et régularisation.

• On commence par tronquer. Soit $\Omega = \cup_{\ell\in\mathbb{N}^*} \nearrow K_\ell$ une exhaustion de Ω par des compacts (voir la remarque 1.24). Soit, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, une fonction plateau $\chi_\ell \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\chi_\ell = 1$ sur K_ℓ (corollaire 1.27).

• Prolongeons $\chi_\ell f$ par 0 hors de Ω. On va montrer que chaque fonction $\chi_\ell f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est nulle, il suivra que f est nulle.

Soit donc $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante (1.19) de sorte que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\rho_n * (\chi_\ell f) - (\chi_\ell f)\|_1 \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (proposition 1.13). Or, on a pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ l'égalité

$$\begin{aligned}\rho_n * (\chi_\ell f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x-y)\ (\chi_\ell f)(y)\ dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\ [\rho_n(x-y)\ \chi_\ell(y)]\ dy\\ &= \langle T_f, y \mapsto \rho_n(x-y)\ \chi_\ell(y)\rangle = 0\end{aligned}$$

(noter en effet que la fonction $y \mapsto \rho_n(x-y)\ \chi_\ell(y)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$). □

C.2 Distributions positives

Proposition 2.18 Mesures de Radon positives
Soit m une mesure de Radon positive sur Ω, c'est-à-dire une mesure borélienne $m : \mathcal{B}or(\Omega) \to [0,\infty]$ localement finie.

1. *L'expression*

$$T_m : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dm(x) \in \mathbb{C}$$

définit une distribution $T_m \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0 sur Ω.

2. *L'application $j : m \mapsto T_m$ est injective.*

Ebauche de preuve 1. La première assertion est immédiate puisque, pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, l'intégrale ci-dessus est bien définie, avec $|\langle T_m, \varphi\rangle| \leq m(K)\, \|\varphi\|_\infty$.

2. L'injectivité de l'application j est conséquence de la régularité des mesures de Radon. [1] $\square$

Exemple 2.19 Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ une fonction positive localement intégrable. La mesure à densité correspondante, définie pour tout borélien $B \subset \Omega$ par

$$m(B) = \int_B f(x)dx\,,$$

est une mesure de Radon, et on a l'égalité $T_m = T_f$.

Exemple 2.20 Soit $x_0 \in \Omega$. L'application d'évaluation au point x_0 définie par

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \varphi(x_0) \in \mathbb{C}$$

est la distribution associée à la masse de Dirac δ_{x_0} au point x_0 (mesure de masse totale 1 telle que $\delta_{x_0}(x_0) = 1$).

Exercice 2.21 Montrer que la masse de Dirac δ_{x_0} n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

On observe que les distributions associées aux mesures de Radon positives sont d'un type très particulier. En effet :

Définition 2.22 Distribution positive *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite "positive" si elle prend des valeurs positives sur les fonctions tests positives, i.e. si lorsque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifie $\varphi \geq 0$ on a $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$.*

Remarque 2.23 Attention à bien lire la définition précédente. Une forme linéaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui ne prend que des valeurs positives est la forme linéaire nulle.

Exemple 2.24 La distribution T_m associée à une mesure de Radon positive est une distribution positive.

Réciproquement, on a le résultat suivant (dont la démonstration demande un peu d'énergie [2]).

Théorème 2.25 de représentation de Riesz (positif) *Une distribution positive $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ provient d'une unique mesure de Radon sur Ω.*

Nous nous contenterons de prouver l'assertion suivante.

Lemme 2.26 *Une distribution positive est d'ordre 0.*

1. Voir par exemple le polycopié Donjons et dragons
2. Ibid.

Preuve Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution positive. Soit $K \subset \Omega$ un compact, et soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau avec $\chi = 1$ sur K. Puisque $0 \leq \chi \leq 1$, on a $\langle T, \chi \rangle \geq 0$.
Supposons en un premier temps $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ à valeurs réelles, de sorte que

$$-\|\varphi\|_\infty \chi \leq \varphi \leq \|\varphi\|_\infty \chi$$

et donc, par positivité de T,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \langle T, \chi \rangle \, \|\varphi\|_\infty \, .$$

Si maintenant $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ est à valeurs complexes, on la décompose en $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ de sorte qu'en vertu du cas précédent :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &\leq |\langle T, \varphi_1 \rangle| + |\langle T, \varphi_2 \rangle| \\ &\leq \langle T, \chi \rangle \, (\|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty) \leq 2 \, \langle T, \chi \rangle \, \|\varphi\|_\infty \, . \end{aligned}$$

On a donc bien T d'ordre 0. □

C.3 Distributions d'ordre 0

Rappelons qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui est d'ordre 0 se prolonge en une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}^0(\Omega) = C_c^0(\Omega)$. A titre culturel, mentionnons que le théorème de représentation de Riesz permet alors de montrer le résultat suivant.

Théorème 2.27 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0. Il existe des mesures boréliennes positives $(m_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sur Ω, qui prennent des valeurs finies sur les parties compactes de Ω, et pour lesquelles on a l'égalité*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int \varphi \, dm_1 - \int \varphi \, dm_2 + i\Big(\int \varphi \, dm_3 - \int \varphi \, dm_4\Big)$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Si l'on impose de plus une condition de minimalité dans cette décomposition, la famille $(m_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est unique.

C.4 La distribution valeur vp $(1/x)$

Nous introduisons maintenant un exemple de distribution qui va nous sortir de la routine, contrairement aux exemples précédents (distributions associées à une fonction, ou bien à une mesure, ou encore les exemples de l'exercice 2.10) qui ne nous surprenaient guère.

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ est définie presque partout et elle est mesurable mais, n'étant pas intégrable au voisinage de l'origine, elle ne définit pas d'emblée une distribution sur $\mathbb{R}$. On va cependant être capable de lui associer une distribution, appelée valeur principale de $1/x$ et notée $\mathrm{vp}\,(1/x)$; nous verrons plus tard que cette distribution apparaît naturellement comme la dérivée, au sens des distributions bien sûr, de la fonction localement intégrable définie par $x \mapsto \log|x|$ (voir l'exercice 3.8).

Proposition 2.28 La valeur principale $\mathrm{vp}\,(1/x)$. *L'expression*

$$\langle \mathrm{vp}\,(1/x), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

définit une distribution d'ordre 1 *sur* $\mathbb{R}$.

Preuve Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit $R_0(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$. L'inégalité des accroissements finis (ou, ce qui revient au même, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0) s'écrit $|R_0(x)| \leq \|\varphi'\|_\infty\, |x|$.

Supposons $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-M, M]$. L'imparité de la fonction $x \mapsto 1/x$ donne, pour tout $0 < \varepsilon < M$:

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx \\
&= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} \frac{R_0(x)}{x}\, dx \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{-M}^{M} \frac{R_0(x)}{x}\, dx\,,
\end{aligned}$$

la fonction $x \mapsto \frac{R_0(x)}{x}$ étant bornée, donc intégrable au voisinage de l'origine.

L'application $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle \mathrm{vp}\,(1/x), \varphi \rangle \in \mathbb{C}$ est donc bien définie et elle dépend linéairement de φ avec, lorsque $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-M, M]$, la majoration

$$|\langle \mathrm{vp}\,(1/x), \varphi \rangle| \leq (2M)\, \|\varphi'\|_\infty\,.$$

Il suit que $\mathrm{vp}\,(1/x)$ est bien une distribution d'ordre au plus 1. Le fait que $\mathrm{vp}\,(1/x)$ ne soit pas d'ordre 0 est laissé en exercice au lecteur. □

Remarque 2.29 Dans la définition de $\mathrm{vp}\,(1/x)$, il est crucial d'utiliser des domaines d'intégration $\{|x| \geq \varepsilon\}$ symétriques par rapport à l'origine.

Exercice 2.30 La distribution $\mathrm{vp}\,(1/x)$ provient-elle d'une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$? Provient-elle d'une mesure signée (comme au théorème 2.27) ?

D Comment vivre avec les distributions ?

Maintenant que nous savons ce qu'est une distribution, il va falloir en faire quelque chose !

Il faudra commencer par définir des opérations sur les distributions. Ce sera l'objet du chapitre 3 en ce qui concerne les opérations élémentaires (et notamment la dérivation des distributions). La convolution sera étendue aux distributions au chapitre 7. Enfin nous introduirons la transformée de Fourier d'une distribution au chapitre 8.

Ces opérations seront *naturelles* : on partira de la définition classique pour une fonction (que ce soit la dérivation, la convolution ou la transformée de Fourier) et on l'exprimera d'une façon qui ait encore *naturellement* un sens lorsqu'on remplace cette fonction par une distribution. Il faudra ensuite intuiter des propriétés, puis les démontrer. On sera de nouveau guidés par le principe suivant :
si une propriété est satisfaite par les fonctions régulières, et si on peut donner *naturellement* un sens à cette propriété lorsqu'on remplace les fonctions par des distributions, alors cette propriété reste vraie dans ce cadre plus large.

Les occurrences de ce principe de *naturalité* seront bien souvent repérées par le signe

3. Opérations sur les distributions

On a vu en 2.C.1 que l'espace vectoriel des fonctions régulières, mettons de classe C^∞, se réalise comme un sous-espace de l'espace des distributions. On va voir que l'on peut essentiellement faire subir aux distributions tout ce que l'on peut faire subir à ces fonctions.

A Premières opérations

Les définitions de conjugaison, multiplication, dérivation, ou d'invariance des distributions sont basées sur le principe de naturalité.

A.1 Restreindre

On commence par le plus simple. Pour deux ouverts $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$, on a une inclusion naturelle $\mathcal{D}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\Omega_2)$: prolonger une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ par 0 pour obtenir une fonction de $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ (c'est-à-dire une forme linéaire "continue" sur $\mathcal{D}(\Omega_2)$, voir (2.1)) se restreint donc à $\mathcal{D}(\Omega_1)$ en une distribution $T_{|\Omega_1} \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$.

L'opération de restriction $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2) \mapsto T_{|\Omega_1} \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ des distributions étend l'opération de restriction des fonctions. En effet, si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_2)$ sa restriction $g = f_{|\Omega_1}$ est a fortiori localement intégrable sur Ω_1 et il est immédiat que $(T_f)_{|\Omega_1} = T_g$.

Exemple 3.1 La restriction à $\mathbb{R}^*$ de la distribution $\mathrm{vp}\,(1/x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est la distribution associée à la fonction localement intégrable $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$.

A.2 Conjuguer

De même que l'on sait conjuguer une fonction, on saura conjuguer une distribution.

Commençons par étudier le cas d'une distribution associée à une fonction localement intégrable $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. La fonction conjuguée de f est encore localement intégrable donc définit une distribution, et l'on a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ les égalités

$$\langle T_{\bar f}, \varphi \rangle = \int \bar f \varphi = \overline{\int f \bar\varphi} = \overline{\langle T_f, \bar\varphi \rangle}\,.$$

On est donc naturellement amenés à définir la conjuguée $\bar{T}$ d'une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par l'expression

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \bar{\varphi} \rangle} \,.$$

On vérifie très facilement que $\bar{T} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et qu'elle définit une distribution $\bar{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ du même ordre que T.

L'application $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto \bar{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Par construction, l'opération de conjugaison $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto \bar{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ étend la conjugaison des fonctions $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mapsto \bar{f} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (à travers l'identification de $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ avec $T_f \in \mathcal{D}'(I)$).

A.3 Multiplier par une fonction régulière

De même que l'on sait multiplier une fonction par une autre fonction, on saura multiplier une distribution par une fonction régulière.

Commençons par étudier le cas d'une distribution associée à une fonction localement intégrable $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si $g \in C^\infty(\Omega)$ est une fonction régulière, on a encore $fg \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Et pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a encore $g\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ainsi que l'égalité

$$\langle T_{fg}, \varphi \rangle = \int (fg)\, \varphi = \int f\, (g\varphi) = \langle T_f, g\varphi \rangle \,.$$

On est donc naturellement amenés à définir le produit gT d'une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par une fonction régulière $g \in C^\infty(\Omega)$ par l'expression

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En appliquant la formule de Leibniz au produit $g\varphi$, on vérifie que $gT : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire et qu'elle définit une distribution d'ordre au plus égal à celui de T.

L'opération $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto gT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de multiplication d'une distribution par la fonction régulière g étend la multiplication par g des fonctions, soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mapsto fg \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

B Dériver une distribution

On sait dériver les fonctions régulières (mettons de classe C^1). Par le même cheminement que dans les alinéas précédents, nous allons en déduire comment définir naturellement la dérivée d'une distribution.

On commence par le cas de la dimension 1, peut-être plus rassurant, même si le cas de la dimension quelconque n'est pas plus compliqué.

B.1 Dériver en dimension 1

Soint $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Commençons par nous intéresser à une distribution définie par une fonction régulière $f \in C^1(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$. Cette fonction admet une dérivée $f' \in C^0(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$, qui définit elle-même une distribution. On a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, les égalités

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_I f'(t)\varphi(t)\, dt = -\int_I f(t)\varphi'(t)\, dt = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

après intégration par parties puisque φ est à support compact dans I.

On est donc amenés à définir la dérivée d'une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}'(I)$ comme suit.

Proposition 3.2 Dérivée d'une distribution
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on pose

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \,.$$

Cette expression définit une distribution $T' \in \mathcal{D}'(I)$.
L'application $T \in \mathcal{D}'(I) \mapsto T' \in \mathcal{D}'(I)$ est linéaire. De plus, si T est d'ordre au plus k, alors T' est d'ordre au plus $k+1$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit de même la dérivée p-ième de T par

$$\langle T^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle T, \varphi^{(p)} \rangle \,.$$

Preuve Vérifications élémentaires. □

Remarque 3.3 Toute fonction $f \in L^1_{\text{loc}}$ admet une dérivée faible (aussi appelée dérivée au sens des distributions) : il s'agit de la distribution $(T_f)'$, obtenue comme dérivée de la distribution T_f associée à f. On sait donc maintenant dériver toutes les fonctions (localement intégrables) !

Nous reviendrons lors de la proposition 4.15 sur l'ordre de la dérivée d'une distribution.

Remarque 3.4 Lorsque $f \in C^1(I)$, sa dérivée faible est la distribution $T_{f'}$ associée à sa fonction dérivée (au sens usuel, ou fort) $f' \in C^0(I)$. Autrement dit, on identifie la dérivée faible d'une fonction régulière avec sa dérivée usuelle.
En d'autres termes, l'opération de dérivation $T \in \mathcal{D}'(I) \mapsto T' \in \mathcal{D}'(I)$ est par construction cohérente avec la dérivation $f \in C^1(I) \mapsto f' \in C^0(I)$.

Exercice 3.5 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* et de classe C^1 par morceaux. Montrer l'égalité $(T_f)' = T_{f'}$.
Attention, voir la formule des sauts 4.20 lorsque l'on cherche à dériver une fonction C^1 par morceaux, mais non continue.

Proposition 3.6 *La dérivation des distributions est une propriété locale : pour $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}$ deux ouverts et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, on a*

$$(T_{|\Omega_1})' = (T')_{|\Omega_1}$$

i.e. la dérivée de la restriction est égale à la restriction de la dérivée.

Preuve Immédiat en revenant aux définitions. □

Exercice 3.7 Montrer les propriétés suivantes.

1. Lorsque $f \in C^1(I)$, on a $(T_f)' = T_{f'}$.
2. La dérivée k-ième de la masse de Dirac au point x_0 est définie, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par $\langle \delta_{x_0}^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(x_0)$.
3. La dérivée de la fonction de Heaviside $H = \mathbb{1}_{[0,\infty[}$ est $H' = \delta_0$.
4. La formule de Leibniz reste valable pour le produit d'une fonction régulière et d'une distribution : pour $g \in C^\infty(I)$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$, on a $(gT)' = g'T + gT'$ et, plus généralement $(gT)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j g^{(k-j)} T^{(j)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D'après la proposition 3.6, on s'attend à ce que la dérivée faible de la fonction $x \mapsto \log|x|$ coïncide sur $\mathbb{R}^*$ avec la fonction $x \mapsto 1/x$, et à ce que la dérivée de la distribution $\mathrm{vp}\,(1/x)$ coïncide sur $\mathbb{R}^*$ avec la fonction $x \mapsto -1/x^2$. On ne sera donc pas surpris des résultats de l'exercice suivant.

Exercice 3.8 Valeur principale et partie finie

1. (a) Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \log|x| \in \mathbb{R}$ est localement intégrable.
   (b) Montrer l'égalité $(\log|x|)' = \mathrm{vp}\,(1/x)$, où l'expression "$(\log|x|)'$" représente la dérivée faible de cette fonction.
2. Montrer que $(\mathrm{vp}\,(1/x))' = -\mathrm{Pf}\,(1/x^2)$, où la distribution "partie finie de $1/x^2$" est définie pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \mathrm{Pf}\,(1/x^2), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(\frac{-1}{x^2} \right) \varphi(x)\, dx + \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\,.$$

   On obtient $\mathrm{Pf}\,(1/x)^2$ en ne gardant que la "partie finie" d'une intégrale divergente.

B.2 Dériver en dimension supérieure

Maintenant qu'on a compris le principe on peut dériver, autant de fois qu'on veut, une distribution en dimension quelconque. Grâce au lemme de Schwarz 1.3 qui permet d'échanger les dérivées partielles d'une fonction test, et donc d'une distribution, on se contente de la définition suivante.

Définition 3.9 Dérivée d'une distribution, dimension d

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on définit, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle\,.$$

Proposition 3.10 *L'expression ci-dessus définit une distribution* $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *d'ordre au plus égal à* $\mathrm{ordre}\,(T) + |\alpha|$.
Lorsque $f \in C^k(\Omega)$ *avec* $k \geq |\alpha|$*, on a l'égalité* $\partial^\alpha(T_f) = T_{\partial^\alpha f}$ *(i.e. la dérivée faible coïncide avec la dérivée usuelle).*

Preuve La première assertion est immédiate en revenant aux définitions. On prouve la seconde par récurrence sur $|\alpha|$. Il suffit de traiter le cas où $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$. On a alors, avec le théorème de Fubini (qui s'applique car on intègre un produit de fonctions continues dont l'une est à support compact) et par intégration par parties (le terme de bord étant nul car $\operatorname{supp}\varphi$ est compact) :

$$\begin{aligned}
\langle T_f, \partial_1\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 \dots x_n)\, \partial_1\varphi(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1 \dots x_n)\, \partial_1\varphi(x_1 \dots x_n)\, dx_1\right] dx_2 \dots dx_n \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x_1 \dots x_n)\ \varphi(x_1 \dots x_n)\, dx_1\right] dx_2 \dots dx_n \\
&= -\langle T_{\partial_1 f}, \varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

□

Exercice 3.11 Formule de Leibniz
Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $g \in C^\infty(\Omega)$. Montrer, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, l'égalité

$$\partial^\alpha(gT) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta\, (\partial^{\alpha-\beta} g)\, \partial^\beta T\,,$$

où $\beta \leq \alpha$ si et seulement si $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ pour $1 \leq j \leq d$, et $C_\alpha^\beta = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.
On pourra procéder par récurrence sur la longueur $|\alpha|$.

Maintenant que nous savons dériver des distributions, et les multiplier par des fonctions régulières, nous pouvons définir la notion de solution faible d'une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire.

Définition 3.12 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert,* $k \in \mathbb{N}$*, ainsi que des fonctions* $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *pour* $|\alpha| \leq k$*. Soit* $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *est solution faible de l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} f_\alpha\, (\partial^\alpha T) = S$$

lorsqu'elle satisfait cette équation aux sens des distributions.

C Distributions invariantes

Plutôt que de définir l'action d'un difféomorphisme sur une distribution, ce qui n'est véritablement utile que lorsqu'on fait de l'analyse globale et qu'on veut travailler sur des variétés, nous nous contenterons d'introduire les distributions invariantes (ou presque) par des transformations élémentaires : symétries, translations, isométries et homothéties.

Comme plus haut, nous commencerons par exprimer l'invariance d'une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ "par dualité", c'est-à-dire en considérant la distribution T_f associée.

C.1 Distributions paires, ou impaires

Notation 3.13 Pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on introduit la fonction symétrisée définie par $f^\vee : x \mapsto f(-x)$.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, le changement de variable $x \mapsto -x$ donne l'égalité

$$\langle f^\vee, \varphi \rangle = \int f(-x)\, \varphi(x)\, dx = \int f(x)\, \varphi(-x)\, dx = \langle f, \varphi^\vee \rangle \,.$$

Cela nous suggère la définition suivante.

Définition 3.14 *La symétrisée $T^\vee \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est définie, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, par*

$$\langle T^\vee, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^\vee \rangle \,.$$

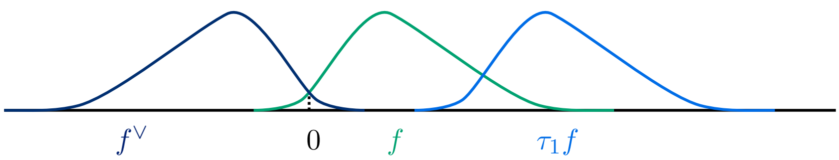
On dit que la distribution T est paire (resp. impaire) si $T^\vee = \varepsilon T$, où $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$).

On observe que, par injectivité de l'application $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \to T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la fonction f est paire (resp. impaire) si et seulement la distribution associée T_f est paire (resp. impaire).

C.2 Distributions invariantes par translation

Notation 3.15 Pour une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et un vecteur $h \in \mathbb{R}^d$, on introduit la translatée de la fonction f par h, définie par

$$\tau_h f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h) \in \mathbb{C}\,.$$



Symétrisée et translatée d'une fonction

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, le changement de variable $x \mapsto x - h$ donne l'égalité

$$\langle T_{\tau_h f}, \varphi \rangle = \int f(x-h)\varphi(x)\, dx = \int f(x)\varphi(x+h)\, dx = \langle T_f, \tau_{-h}\varphi \rangle\,.$$

Définition 3.16 *La translatée $\tau_h T$ de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par le vecteur $h \in \mathbb{R}^d$est définie, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, par*

$$\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle\,.$$

On dit que la distribution T est invariante par translation par h lorsque $\tau_h T = T$ ou, de façon équivalente (!), si l'on a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_h \varphi \rangle$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Par injectivité de l'application $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \to T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la fonction f est invariante par translation par h si et seulement la distribution associée T_f l'est.

C.3 Distributions invariantes par rotation

Dans cet alinéa, on suppose que $\mathbb{R}^d$ est muni de la structure euclidienne standard. On dit que la fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$ est invariante par rotations si on a, pour toute $A \in O(d)$, l'égalité $f(Ax) = f(x)$. C'est le cas si et seulement si il existe une fonction continue $h : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ avec $f(x) = h(\|x\|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x : la valeur de f au point x ne dépend que de sa distance à l'origine.

Pour $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$, $A \in O(d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ le changement de variables $x \mapsto Ax$ (dont le déterminant jacobien vaut $\det A = \pm 1$) donne

$$\langle T_{f \circ A}, \varphi \rangle = \int f(Ax)\varphi(x)\, dx = \int f(x)\varphi(A^{-1}x)\, dx = \langle T_f, \varphi \circ A^{-1} \rangle\,.$$

Définition 3.17 *On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est invariante par rotation si on a l'égalité*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ A \rangle$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et toute rotation $A \in O(d)$.

Par injectivité de l'application $f \in C^0(\mathbb{R}^d) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la distribution T_f est invariante par rotation si et seulement si la fonction f l'est.

C.4 Distributions homogènes

Dans cet alinéa on travaille sur $\Omega_0 = \mathbb{R}^d$ ou bien sur $\Omega_0 = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Notation 3.18 Pour une fonction continue $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ et un réel $t > 0$ on introduit la fonction
$$f_t : x \in \Omega_0 \mapsto f(tx) \in \mathbb{C}\,.$$

Définition 3.19 *Une fonction continue $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ est homogène de degré $a \in \mathbb{R}$ si on a l'égalité $f_t = t^a f$ pour tout $t > 0$, i.e. si*
$$f(tx) = t^a\, f(x)$$
pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \Omega_0$.

Pour $f \in C^0(\Omega_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ et $t > 0$, le changement de variables $x \mapsto tx$ donne les égalités
$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx = t^d \int f(tx)\varphi(tx)\,dx = t^d\,\langle T_{f_t}, \varphi_t\rangle\,.$$
L'injectivité de l'application $f \in C^0(\Omega_0) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ assure que la fonction f est homogène de degré a si et seulement si on a l'égalité
$$\langle T_f, \varphi\rangle = t^{d+a}\,\langle T_f, \varphi_t\rangle$$
pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 3.20 *La distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ est homogène de degré $a \in \mathbb{R}$ si on a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, l'égalité*
$$\langle T, \varphi\rangle = t^{d+a}\,\langle T, \varphi_t\rangle\,.$$

Exemple 3.21 Si la fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$ est homogène de degré a, alors T_f est également homogène de degré a.

La masse de Dirac en l'origine $\delta_0 \in \mathbb{R}^d$ est homogène de degré $-d$.

Le résultat élémentaire suivant nous sera bien utile.

Lemme 3.22 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ une distribution homogène de degré a.*

Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ la distribution $\partial^\alpha T$ est homogène, de degré $a - |\alpha|$.

Preuve Il suffit de prouver le résultat lorsque α est un multi-indice de longueur 1. Soit donc $1 \le j \le d$. Rappelons que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ et $t > 0$ on a introduit la fonction $\varphi_t : x \mapsto \varphi(tx)$, avec $(\partial_j \varphi_t)(x) = t\,(\partial_j\varphi)(tx)$ c'est-à-dire $\partial_j(\varphi_t) = t\,(\partial_j\varphi)_t$.

Il vient donc, pour notre distribution homogène T de degré a, et toute fonction test φ, les égalités :

$$\begin{aligned}\langle \partial_j T, \varphi\rangle &= -\langle T, \partial_j \varphi\rangle \\ &= -t^{d+a}\langle T, (\partial_j\varphi)_t\rangle \\ &= -t^{d+a-1}\langle T, \partial_j(\varphi_t)\rangle \\ &= t^{d+a-1}\langle \partial_j T, \varphi_t\rangle\,. \end{aligned} \qquad \square$$

Nous raisonnerons “par homogénéité” pour obtenir, essentiellement sans calculs, des résultats non triviaux (théorème 6.20 et exercice 7.21).

D Suites de distributions

D.1 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 3.23 *Soient $T, T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($n \in \mathbb{N}$). On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsqu'on a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\,.$$

Il s'agit de la convergence simple de la suite d'applications $T_n : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ vers l'application $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. (Dans ce contexte d'applications linéaires, on parle également de convergence faible-$*$. Voir l'exemple 12.10.7a.)

Exemple 3.24 La distribution valeur principale de $1/x$ (proposition 2.28) est définie comme limite d'une famille de fonctions localement intégrables :

$$\mathrm{vp}\,(1/x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x}\mathbb{1}_{^c[-\varepsilon,\varepsilon]} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 3.25

1. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, démontrer l'égalité $T = \lim_{h\to 0} \tau_h T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit $(e_j)_{1\le j\le d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour $1 \le j \le d$, démontrer que
$$\lim_{t\to 0} \frac{T - \tau_{te_j} T}{t} = \partial_j T$$
dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. (On se souviendra de l'exercice 2.6).
3. Démontrer l'égalité $\delta_0' = \lim_{n\to\infty} n(\delta_0 - \delta_{1/n})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. Soit (T_n) une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que chacune de ces distributions est d'ordre au plus k, et que la suite (T_n) converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. La distribution T est-elle encore d'ordre au plus k ?

Définition 3.26 *La suite de fonctions localement intégrables (f_n) converge au sens des distributions vers la fonction localement intégrable f lorsque la suite de distributions (T_{f_n}) converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Lemme 3.27 *Soient $f, f_n \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ($n \in \mathbb{N}$). On suppose que la suite (f_n) converge vers f dans L^1_{loc}, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1(K)} = 0$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Alors on a convergence de (f_n) vers f au sens des distributions.*

Preuve La preuve, élémentaire, est laissée au lecteur. □

La réciproque du lemme 3.27 est fausse, comme en atteste l'exemple suivant.

Exemple 3.28 Soit la suite $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{inx} \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) de fonctions localement intégrables. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

La convergence de cette suite vers 0, au sens des distributions, n'est autre que le lemme de Riemann-Lebesgue (intégrer par parties). Et l'on observe, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, que $\|f_n\|_{L^1(K)} = m(K) \not\to 0$ lorsque K n'est pas négligeable.

Nous montrons maintenant que, dans le contexte des distributions, on peut échanger sans vergogne limite et dérivation : fabuleux, non ?

Proposition 3.29 *Soient $d \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions convergeant dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors :*

1. *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*
2. *Pour toute fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ on a $fT_n \to fT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve 1. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha \varphi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle\,.$$

2. De même

$$\langle fT_n, \varphi\rangle = \langle T_n, f\varphi\rangle \to \langle T, f\varphi\rangle = \langle fT, \varphi\rangle\,.$$ □

Exercice 3.30 Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction test positive et d'intégrale égale à 1, et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$ la suite régularisante associée.

1. Montrer que la suite $(T_{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la masse de Dirac δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Nous supposons maintenant que $d = 1$. Montrer que la suite $(T_{\rho_n'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

D.2 Le théorème de Banach-Steinhaus

La version élémentaire du théorème Banach-Steinhaus, pour un espace de Banach, affirme que la limite simple d'une suite de formes linéaires continues définies sur un espace de Banach est une forme linéaire (pas de surprise ici) qui reste continue (là, on est priés de s'extasier, car on sait bien qu'en général la continuité n'est pas conservée par limite simple). C'est le théorème 12.3, qui découle du théorème de Baire 12.1.

Ici nous sortons de ce cadre élémentaire, la topologie de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'étant pas métrisable, et a fortiori pas normable. Néanmoins, l'énoncé se transpose : rappelons en effet qu'il faut penser à une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ comme à une forme linéaire "continue" sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Théorème 3.31 de Banach-Steinhaus pour les distributions
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω.
On suppose que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une application (linéaire) $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

La preuve sera donnée en appendice, voir le corollaire 12.26.

E Support et support singulier d'une distribution

E.1 Localisation

On va voir que – tout comme une fonction – une distribution est connue lorqu'elle est connue localement (rappelons que l'on sait déjà restreindre une distribution). Pour montrer cette propriété, on utilise les partitions de l'unité. Puisque nous ne voulons manipuler que des fonctions régulières, nous choisirons des partitions de l'unité de classe C^∞.

Proposition 3.32 Partition de l'unité C^∞.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. Soient $V_j \subset \Omega$, pour $1 \leq j \leq n$, des ouverts recouvrant K. Il existe des fonctions $g_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour $1 \leq j \leq n$, avec $\operatorname{supp} g_j \subset V_j$ et $0 \leq g_j \leq 1$, et telles que

$$\textstyle\sum_{j=1}^n g_j(x) = 1 \text{ pour tout } x \in K.$$

On verra que ces partitions de l'unité ("unité" signifiant ici la fonction constante égale à 1) permettent de recoller les morceaux d'une distribution. Il va être bien commode de se reposer sur le lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.33 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des nombres complexes. On pose $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2(1 - f_1)$, … jusqu'à $g_n = f_n(1 - f_1) \ldots (1 - f_{n-1})$. On a alors*

$$\sum_{j=1}^{n} g_j = 1 - (1 - f_1) \ldots (1 - f_n)\,.$$

En particulier (et c'est cela qui nous importera) si l'un des f_j vaut 1, la somme $\sum_{j=1}^n g_j$ vaut 1.

Preuve La preuve se fait par récurrence sur n. Il est judicieux d'introduire les produits $p_k = (1 - f_1) \ldots (1 - f_k)$, en notant que $g_n = f_n\, p_{n-1}$.

Pour $n = 1$ l'assertion se réduit à l'identité $f_1 = 1 - (1 - f_1)$. Supposons l'assertion acquise au rang $n-1$. On a alors

$$\sum_{j=1}^{n} g_j = (1 - p_{n-1}) + g_n = 1 - p_{n-1} + f_n p_{n-1} = 1 - p_n \,. \qquad \square$$

Preuve de la proposition On commence par décomposer le compact en une réunion $K = \cup_{j=1}^{n} K_j$, avec $K_j \subset V_j$ compact pour $1 \leq j \leq n$. Pour cela :

- Pour chaque point $x \in K$, on choisit un rayon $r_x > 0$ et un indice $j_x \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\overline{B}(x, r_x) \subset V_{j_x}$.
- On extrait du recouvrement de K par les ouverts $B(x, r_x)$ (x décrivant K) un recouvrement fini $K \subset \cup_{x \in A} B(x, r_x)$ associé à une partie finie $A \subset K$.
- Le compact K est l'union, pour $1 \leq j \leq n$, des compacts $K_j \subset V_j$ où :

$$K_j = \left(\bigcup_{a \in A \,,\, j_a = j} \overline{B}(a, r_a) \right) \cap K \,.$$

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on choisit une fonction plateau $\chi_j \in \mathcal{D}(V_j)$ associée à $K_j \subset V_j$, et donc avec $\chi_j = 1$ sur K_j (corollaire 1.27). Le lemme précédent, avec $f_j = \chi_j$, fournit des fonctions $g_j \in \mathcal{D}(V_j)$, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, avec $0 \leq g_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{n} g_j = 1$ sur $K = \cup_{j=1}^{n} K_j$. $\square$

Corollaire 3.34 Principe de localisation

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $(V_j)_{j \in J}$ des ouverts tels que $\Omega = \cup_{j \in J} V_j$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que chaque restriction $T_{|V_j} = 0$. Alors $T = 0$.

2. Soient, pour chaque $j \in J$, une distribution $T_j \in \mathcal{D}'(V_j)$. On suppose que la condition de compatibilité (nécessaire) suivante est satisfaite :

$$\textit{pour tous } j, k \in J, \textit{ on a l'égalité } (T_j)_{|V_j \cap V_k} = (T_k)_{|V_j \cap V_k} .$$

Alors il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec, pour tout $j \in J$, $T_{|V_j} = T_j$.

Autrement dit, lorsqu'on connaît une distribution localement... on la connaît.

Preuve 1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et notons $K \subset \Omega$ le support de φ. Le compact K est recouvert par un nombre fini des ouverts (V_j), mettons $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Pour une partition de l'unité associée $(g_j)_{1 \leq j \leq n}$, on aura

$$\varphi = \varphi \, (\sum_{j=1}^{n} g_j) = \sum_{j=1}^{n} (g_j \varphi) \,,$$

avec $\mathrm{supp}\,(g_j \varphi) \subset V_j$. L'hypothèse assure alors que $\langle T, g_j \varphi \rangle = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$, et donc que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

2. L'unicité de T découle de 1. Nous ne démontrons pas l'existence (dont nous ne nous servirons pas). La preuve relève du même cercle d'idées. $\square$

E.2 Support et support singulier

Le principe de localisation va nous permettre d'introduire deux notions fondamentales : le support, et le support singulier d'une distribution.

Définition 3.35 Support d'une distribution
Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le complémentaire, dans Ω, du plus grand ouvert $V \subset \Omega$ sur lequel T s'annule.
C'est une partie fermée $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ *de* Ω.

Le principe de localisation 3.34 assure l'existence de ce plus grand ouvert, réunion de tous les ouverts de Ω sur lesquels T s'annule.

Exemple 3.36 Le support de $\delta_{x_0}^{(k)}$ est le singleton $\{x_0\}$.

Exercice 3.37 Montrer que, lorsque $f \in C^0(\Omega)$, on a égalité des supports de f et de la distribution associée T_f, soit

$$\operatorname{supp}(T_f) = \operatorname{supp} f\,.$$

Exercice 3.38

1. Montrer que l'expression $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0)\,dx$ définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer le support de T. La distribution T provient-elle d'une fonction localement intégrable $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$?
3. Déterminer la distribution $T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ associée à la fonction localement intégrable $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times\{0\}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 3.39 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ et α un multi-indice. On a les inclusions :*
1. $\operatorname{supp}(fT) \subset \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(T)$.
2. $\operatorname{supp}(\partial^\alpha T) \subset \operatorname{supp} T$.

Preuve Conséquence immédiate des définitions. □

Remarque 3.40 Lorsque $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut avoir $\varphi \equiv 0$ sur le support de T, mais cependant $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$. Considérer, en dimension 1, $T = \delta'(0)$ et une fonction test telle que $\varphi(0) = 0$ mais avec $\varphi'(0) \neq 0$.

Par contre, on a :

Proposition 3.41 *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ont leurs supports disjoints, soit* $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, *alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Preuve Soit l'ouvert $V = {}^c\operatorname{supp} T$. Par hypothèse, $\operatorname{supp}\varphi \subset V$. Comme la restriction de T à V est nulle, la conclusion suit. □

Définition 3.42 Support singulier d'une distribution
Le support singulier de T est le complémentaire du plus grand ouvert $V \subset \Omega$ en restriction auquel T est définie par une fonction de classe C^∞.

Il faut vérifier l'existence de ce plus grand ouvert. Soit $(U_j)_{j\in J}$ la collection de tous les ouverts de Ω sur lesquels T est définie par une fonction régulière $f_j \in C^\infty(U_j)$. La proposition 2.16 (injection de L^1_{loc} dans $\mathcal{D}'$) assure que, pour tous $j, k \in J$, les fonctions f_j et f_k coïncident sur l'intersection $U_j \cap U_k$. Les fonctions (f_j) se "recollent" donc pour définir une fonction $f \in C^\infty(V)$, où $V = \cup_{j\in J} U_j$. Le corollaire 3.34 assure alors que la restriction $T_{|V}$ est la distribution associée à la fonction $f \in C^\infty(V) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(V)$. Par construction, l'ouvert $V \subset \Omega$ est le plus grand ouvert sur lequel T est définie par une fonction C^∞.

Exercice 3.43 Montrer que le support singulier d'une distribution est inclus dans son support.

Exemple 3.44 On a les égalités $\mathrm{supp}\,(\delta_0) = \mathrm{supp\,sing}\,(\delta_0) = \{0\}$, tandis que $\mathrm{supp}\,(\mathrm{vp}\,(1/x)) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{supp\,sing}\,(\mathrm{vp}\,(1/x)) = \{0\}$.

4. Distributions en dimension 1

La théorie des distributions en dimension 1 n'est pas notre motivation essentielle. En effet, les distributions sont surtout utiles dans la mesure où elles fournissent des outils pour l'étude des équations aux dérivées partielles, et donc en dimension supérieure.

Notre objectif principal dans les deux chapitres qui suivent est de nous familiariser dans le cadre rassurant de la dimension 1 avec des notions, des techniques ou des principes que nous déclinerons par la suite en dimension quelconque.

Dans tout ce chapitre, $I \subset \mathbb{R}$ désignera un intervalle ouvert.

A Primitives

A.1 Existence de primitives

Tout comme une fonction continue, une distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ admettra une primitive, unique à constante près ! On rappelle (une dernière fois ?) qu'une fonction localement intégrable $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ est toujours identifiée à la distribution $T_f \in \mathcal{D}'(I)$ qui lui est associée (proposition 2.16).

Définition 4.1 *La distribution $S \in \mathcal{D}'(I)$ est primitive de $T \in \mathcal{D}'(I)$ lorsque $S' = T$.*

Remarque 4.2 Dire que S est primitive de T, c'est dire que l'on a

$$\langle S, \varphi' \rangle = -\langle S', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}'(I)$. Une primitive de T (s'il en existe) est donc connue sur l'ensemble

$$H = \{\psi \in \mathcal{D}(I) \mid \text{il existe } \varphi \in \mathcal{D}(I) \text{ avec } \psi = \varphi'\} \subset \mathcal{D}(I)\,.$$

Or une fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ admet pour primitive une fonction de $\mathcal{D}(I)$ (c'est-à-dire que, parmi ses primitives, il en est une dont le support est un compact de I) si et seulement si $\int_I \psi = 0$ et, dans ce cas, une telle primitive est unique : c'est la fonction définie par $x \in I \mapsto \int_{\inf I}^x \psi(t)\,dt \in \mathbb{C}$.

L'ensemble $H \subset \mathcal{D}(I)$ est donc un hyperplan, noyau de la forme linéaire

$$\langle \mathbb{1}, \cdot \rangle : \psi \in \mathcal{D}(I) \mapsto \int_I \psi \in \mathbb{C}$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur I, et la distribution associée.

Commençons par un énoncé intermédiaire.

Lemme 4.3 *Soit $S \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $S' = 0$. Alors S est (définie par) une fonction constante.*

Preuve L'hypothèse $S' = 0$ signifie qu'on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\langle S, \varphi' \rangle = -\langle S', \varphi \rangle = 0\,.$$

ou encore, que la restriction à l'hyperplan $H = \mathrm{Ker}\,(\langle \mathbb{1}, \cdot \rangle)$ de la forme linéaire S est nulle. Il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $S = c\,\langle \mathbb{1}, \cdot \rangle$, autrement dit S est associée à la fonction constante $c\mathbb{1}$ égale à c. $\square$

Proposition 4.4 *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ admet, à constante additive près, une unique primitive $S \in \mathcal{D}'(I)$.*

Preuve L'assertion d'unicité suit du lemme 4.3.

Construisons maintenant une primitive pour T. Pour cela, choisissons une fonction $\rho \in \mathcal{D}(I)$ d'intégrale égale à 1, c'est-à-dire telle que $\langle \mathbb{1}, \rho \rangle = 1$. Tant qu'à faire, nous supposerons ρ à valeurs positives de sorte que $\|\rho\|_1 = 1$. Nous allons utiliser la décomposition en somme directe $\mathcal{D}(I) = H \oplus \mathbb{C}\,\rho$: la primitive S cherchée est connue sur H, on la prolonge à $\mathcal{D}(I)$ en décidant que $\langle S, \rho \rangle = 0$. Autrement dit :

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. La fonction $\varphi - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \rho \in H = \mathrm{Ker}(\langle \mathbb{1}, \cdot \rangle) \subset \mathcal{D}(I)$ est d'intégrale nulle, elle admet donc une unique primitive à support compact dans I que l'on notera $\mathcal{P}(\varphi) \in \mathcal{D}(I)$. Posons

$$S : \varphi \in \mathcal{D}(I) \to -\langle T, \mathcal{P}(\varphi) \rangle \in \mathbb{C}\,. \tag{4.1}$$

L'application S est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(I)$.

Soit $[a, b]$ un compact de I contenant $\mathrm{supp}\,\rho$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_{[a,b]}(I)$, on a également $\mathcal{P}(\varphi) \in \mathcal{D}_{[a,b]}(I)$, avec pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\|\mathcal{P}(\varphi)\|_\infty \le \|\varphi - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \rho\|_1 \le 2\,(b-a)\,\|\varphi\|_\infty \tag{4.2}$$

$$\|(\mathcal{P}(\varphi))^{(j+1)}\|_\infty = \|\varphi^{(j)} - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \rho^{(j)}\|_\infty \le \|\varphi^{(j)}\|_\infty + (b-a)\|\rho^{(j)}\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty\,.$$

Il suit que S, comme T, est une distribution.

Enfin $S' = T$, puisqu'on a $\mathcal{P}(\varphi') = \varphi$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et donc :

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle = \langle T, \mathcal{P}(\varphi') \rangle = \langle T, \varphi \rangle\,. \qquad \square$$

A.2 Exemples de primitives

A. "Primitive" d'une fonction localement intégrable

Les guillemets dans le titre signifient que l'on s'intéresse aux primitives (ou aux dérivées) au sens des distributions. Voir l'encadré en fin de paragraphe.

Proposition 4.5 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$.*
Soit $x_0 \in I$. Les primitives de T_f sont les distributions sur I associées aux fonctions continues $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,dt + c$, où $c \in \mathbb{C}$ est une constante.

On se permet ici d'utiliser une notation "à la Riemann". Il faut comprendre que $\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \varepsilon \int_{[x_0,x]} f(t)\,dt$ avec $\varepsilon = 1$ si $x \geq x_0$ et $\varepsilon = -1$ si $x \leq x_0$.

Preuve Le théorème de convergence dominée assure que la fonction définie par $F : x \in I \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,dt \in \mathbb{C}$ est continue. D'après la proposition 4.4, il suffit de montrer que la distribution associée T_F vérifie $(T_F)' = T_f$.

Soit $K = [a, b] \subset I$ un segment. Quitte à ajouter une constante à F, on supposera que $x_0 = a$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(I)$, on estime en appliquant le théorème de Fubini à la fonction intégrable $\Phi : (x,t) \in [a,b]^2 \mapsto \varphi(x) f(t) \mathbb{1}_{\{t \leq x\}} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\langle (T_F)', \varphi \rangle &= -\langle T_F, \varphi' \rangle \\
&= -\int_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_a^b \varphi'(x) \left(\int_a^x f(t)\,dt \right) dx \\
&= -\int_a^b f(t) \left(\int_t^b \varphi'(x)\,dx \right) dt \\
&= \langle T_f, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

L'intégrabilité de Φ est justifiée en passant par Fubini-Tonelli : élémentaire et laissé au lecteur. $\square$

Remarque 4.6 Avec les notations ci-dessus, on a montré que $(T_F)' = T_f$. On exprime cette égalité en disant que "la dérivée au sens des distributions de F est la fonction f". Attention, ceci ne préjuge pas de savoir si la fonction F admet, ou pas, des dérivées ponctuelles et – si oui – de savoir si celles-ci sont égales à f. On peut néanmoins s'interroger sur ce point.

Supposons pour simplifier que l'on considère des fonctions intégrables f sur I (et pas seulement localement intégrables).

Leurs primitives $F : x \to \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ sont alors des fonctions "absolument continues", c'est-à-dire qui vérifient la condition suivante (plus forte que la continuité) :

pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si les intervalles $[a_i, b_i] \subset I$ sont d'intérieurs deux à deux disjoints, alors

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon\,.$$

Soit $F : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On a les équivalences suivantes (mais il s'agit d'un résultat bien plus délicat que celui de la proposition 4.5) :

1 la fonction $F : I \to \mathbb{C}$ est absolument continue
$\Leftrightarrow$ 2 la distribution T_F a pour dérivée T_f, où f est une fonction intégrable
$\Leftrightarrow$ 3 La fonction F est dérivable presque partout, sa dérivée f (définie p.p.) est intégrable, et on a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$ pour tous $a, b \in I$.

B. Primitive d'une distribution d'ordre 0

Proposition 4.7 *Soit* T *une distribution d'ordre* 0*. Ses primitives sont des fonctions localement bornées.*

On pourrait démontrer ce résultat en utilisant le théorème de représentation de Riesz 2.25. On obtiendrait alors un résultat plus fin, à savoir que les primitives de T sont des fonctions "à variation bornée" (voir page 48). On va choisir de se passer de ce théorème un peu délicat et utiliser plutôt la proposition 4.8 et le théorème 4.11 (qui ont tous deux un intérêt intrinsèque).

Proposition 4.8 *L'injection naturelle* $L^\infty([a,b]) \hookrightarrow (L^1([a,b]))'$ *est une surjection, et elle est isométrique.*

Preuve Pour $g \in L^\infty([a,b])$, l'inégalité de Hölder assure que l'application

$$\Lambda_g : h \in L^1([a,b]) \to \int gh \in \mathbb{C}$$

est bien définie, linéaire de norme $\|\Lambda_g\| \leq \|g\|_\infty$. On vérifie que $\|\Lambda_g\| = \|g\|_\infty$ en testant la forme linéaire Λ_g sur la suite de fonctions définies pour n grand par $h_n = \frac{\overline{g}}{|g|} \mathbb{1}_{A_n}$, où $A_n = \{x\,,\ |g(x)| \geq \|g\|_\infty - 1/n\}$. L'application linéaire $g \in L^\infty([a,b]) \to \Lambda_g \in (L^1([a,b]))'$ étant isométrique, elle est a fortiori injective.

Nous allons maintenant montrer que l'application $g \mapsto \Lambda_g$ est surjective. Soit donc $\Lambda : L^1([a,b]) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Puisque $[a,b]$ est de mesure finie, on a une injection continue $L^2([a,b]) \hookrightarrow L^1([a,b])$. Il suit que Λ se restreint à $L^2([a,b])$ en une forme linéaire continue.

Le théorème de représentation de Riesz (la version hilbertienne) assure l'existence d'une fonction $g \in L^2([a,b])$ telle qu'on ait $\Lambda(h) = \int gh$ pour toute $h \in L^2([a,b])$.

Montrons que cette fonction g appartient en fait à l'espace $L^\infty([a,b])$ des fonctions (essentiellement) bornées. On disposera alors de deux formes linéaires continues $\Lambda : L^1([a,b]) \to \mathbb{C}$ et $I : h \in L^1([a,b]) \to \int gh \in \mathbb{C}$ qui coïncident sur une partie dense de $L^1([a,b])$, à savoir $L^2([a,b])$. On aura donc l'égalité $\Lambda = I$, d'où la surjectivité de j.
Pour cela on introduit l'ensemble $B_n = \{x \in [a,b]\,,\ |g(x)| \geq n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, et l'on montre que $\lambda_1(B_n) = 0$ lorsque $n > \|\Lambda\|$ (λ_1 désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). En effet B_n est mesurable. Donc la fonction définie par $h_n = \frac{\overline{g}}{|g|}\mathbb{1}_{B_n} \in L^2([a,b]) \subset L^1([a,b])$ vérifie $\int |h_n| = \lambda_1(B_n)$ et

$$\Lambda(h_n) = \int gh_n = \int |g|\mathbb{1}_{B_n} \geq n\,\lambda_1(B_n)$$

tandis que

$$|\Lambda(h_n)| \leq \|\Lambda\|\ \|h_n\|_1 = \|\Lambda\|\,\lambda_1(B_n)\,. \qquad \square$$

Exercice 4.9 Reprendre la preuve précédente pour montrer que l'application

$$f \in L^q([a,b]) \mapsto \left[g \in L^p([a,b]) \mapsto \int fg \in \mathbb{C}\right] \in (L^p([a,b]))'$$

est un isomorphisme isométrique lorsque $1 \leq p \leq 2$ et $1/p + 1/q = 1$.

Remarque 4.10 Les résultats de la proposition 4.8 et de l'exercice 4.9 sont des cas particuliers de l'isomorphisme isométrique naturel $(L^p(X))' \simeq L^q(X)$ entre le dual de l'espace $L^p(X)$ et l'espace $L^q(X)$ lorsque $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ et l'espace mesuré X est σ-fini.

Par contre, le dual de $L^\infty(X)$ est “beaucoup plus gros” que $L^1(X)$.

Le résultat suivant est fondamental. Nous l'énonçons ici dans le cadre normé que nous allons utiliser. Voir cependant la remarque 2.13.

Théorème 4.11 Prolongement des applications linéaires continues.
Soient $F \subset E$ un sous-espace vectoriel dense d'un espace vectoriel normé E et G un espace de Banach.

Alors toute application linéaire continue $\lambda : F \to G$ admet un unique prolongement en une application linéaire continue $\Lambda : E \to G$ (de même norme que λ).

Preuve Si $\lambda : F \to G$ se prolonge continûment en $\Lambda : E \to G$, on a l'égalité $\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(y_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(y_n)$ pour tout $x \in E$ et toute suite (y_n) de F convergeant vers x. Ceci assure l'unicité d'un tel prolongement.

Montrons en l'existence. Lorsque la suite (y_n) d'éléments de F converge vers $x \in E$, la suite (y_n) est de Cauchy. L'application λ, étant linéaire et continue, est lipschitzienne. La suite image $(\lambda(y_n))$ est alors de Cauchy dans G complet, donc converge.

On vérifie que la limite ne dépend pas de la suite (y_n) choisie pour approcher x (intercaler par exemple les termes de deux telles suites). On tient donc notre prolongement Λ. Et les inégalités $|\lambda(y_n)| \leq \|\lambda\| \|y_n\|$ pour tout n passent à la limite et donnent $|\Lambda(x)| \leq \|\lambda\| \|x\|$: c'est la continuité de l'application linéaire Λ. □

Remarque 4.12 Le théorème de Hahn-Banach affirme que toute *forme* linéaire continue $\lambda : F \to \mathbb{C}$, définie sur un sous-espace vectoriel F (que l'on ne suppose pas dense) de l'espace vectoriel normé E, se prolonge à E en une forme linéaire continue. On peut même choisir un prolongement de même norme que celle de λ.

Il existe par contre des applications linéaires continues $\lambda : F \to G$, définies d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ (non dense) d'un evn et à valeurs dans un espace de Banach G, et qui ne se prolongent pas continûment à E.

Preuve de la proposition 4.7

On reprend les notations de la preuve de la proposition 4.4 (existence de primitives). Soit T notre distribution d'ordre 0. On a vu qu'une primitive particulière S de T est donnée, pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, par l'expression

$$\langle S, \varphi \rangle = -\langle T, \mathcal{P}(\varphi) \rangle \,.$$

Soit $[a,b] \subset I$ un segment contenant le support de ρ. Puisque T est d'ordre 0, il existe une constante c pour laquelle

$$|\langle S, \varphi \rangle| = |\langle T, \mathcal{P}(\varphi) \rangle| \leq c \, \|\mathcal{P}(\varphi)\|_\infty$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_{[a,b]}(I)$, avec

$$\|\mathcal{P}(\varphi)\|_\infty \leq \|\varphi - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \rho\|_1 \leq 2 \, \|\varphi\|_1 \,.$$

Le théorème 4.11 et le corollaire 1.22 assurent alors que la forme linéaire $S : \mathcal{D}_{[a,b]}(I) \to \mathbb{C}$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $L^1([a,b])$, qui provient donc d'après la proposition 4.8 d'une unique fonction $g_{[a,b]}$ mesurable bornée sur $[a,b]$. En faisant varier le segment $[a,b]$, on obtient par recollement de ces fonctions $g_{[a,b]}$ une fonction mesurable $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(I)$ localement bornée sur I, qui représente S. □

Fonctions à variation bornée

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour une subdivision

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

du segment $[a,b]$, la variation de f selon σ est

$$V_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| .$$

On dit que f est à variation bornée lorsque sa variation totale $V(f) = \sup_\sigma V_\sigma(f) < \infty$ est finie, le sup étant pris sur toutes les subdivisions. Une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$ est à variation bornée, puisque $V(f) \leq \int_a^b |f'(t)|\, dt$.

Dans les deux exercices suivants, on étudie la dérivée d'une fonction qui n'est pas à variation bornée. Comme attendu (voir page 46), cette dérivée n'est pas d'ordre 0.

Exercice 4.13 Soit $f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}]}$.

1. Dessiner le graphe de f. Montrer que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ n'est pas à variation bornée.
2. Déterminer la dérivée de la restriction $(T_f)_{|\mathbb{R}^*}$.
3. Constater que $(T_f)' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas une distribution d'ordre 0.

Exercice 4.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x\sin(1/x)$ lorsque $x > 0$.

1. Montrer que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ n'est pas à variation bornée.
2. Déterminer la dérivée de la restriction $(T_f)_{|\mathbb{R}^*}$ à $\mathbb{R}^*$.
3. (a) Montrer que $\int_1^\infty \frac{\cos^2 y}{y} dy = +\infty$.
   (b) Démontrer que la distribution définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction $x \mapsto (1/x)\cos(1/x)$ ne se prolonge pas en une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre 0. On pourra la tester sur des fonctions $x \mapsto \chi(x)\cos(1/x)$, pour des fonctions plateaux $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ bien choisies.
4. Montrer enfin que $(T_f)' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas une distribution d'ordre 0.

B Ordre et dérivée d'une distribution

Si l'on combine les propositions 4.7 et 4.5, on conclut qu'une distribution d'ordre 0 est la dérivée seconde d'une fonction continue. Que dire d'une distribution d'ordre quelconque ?

Proposition 4.15 *Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$.*

La distribution T est d'ordre 0 si et seulement si T' est d'ordre 0 ou 1.

La distribution T est d'ordre $k \geq 1$ si et seulement si T' est d'ordre $k+1$.

Donc la distribution T est plus régulière que sa dérivée T'... ce qui est dans l'ordre des choses. Observer que la dérivée d'une distribution d'ordre 0 peut encore être d'ordre 0 (par exemple si $T = T_f$ pour une fonction f de classe C^1 !)

Preuve • La majoration $\text{ordre}(T') \leq \text{ordre}(T) + 1$ est immédiate.

• On reprend de nouveau les notations de la proposition 4.4. On a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, l'égalité

$$-\langle T', \mathcal{P}(\varphi)\rangle = \langle T, (\mathcal{P}(\varphi))'\rangle = \langle T, \varphi - \langle \mathbb{1}, \varphi\rangle\, \rho\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \langle \alpha\mathbb{1}, \varphi\rangle$$

où $\alpha = \langle T, \rho\rangle$. En ajoutant une constante à T, ce qui ne changera pas son ordre, on peut supposer que $\alpha = 0$. Supposons que la dérivée T' soit d'ordre au plus ℓ. Soit $[a,b] \subset I$ un segment contenant le support de ρ. il existe une constante c pour laquelle

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T', \mathcal{P}(\varphi)\rangle| \leq c \sum_{j=0}^{\ell} \|(\mathcal{P}(\varphi))^{(j)}\|_\infty$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_{[a,b]}(I)$. Les estimées (4.2) assurent que que la restriction de T à $\mathcal{D}_{[a,b]}(I)$ est d'ordre 0 lorsque $\ell = 0$, et d'ordre au plus $\ell - 1$ lorsque $\ell \geq 1$.
On a donc $\text{ordre}(T') = \text{ordre}(T) + 1$ lorsque $\text{ordre}(T) \geq 1$, et $\text{ordre}(T') \leq 1$ lorsque $\text{ordre}(T) = 0$.

□

Corollaire 4.16 *Une distribution d'ordre fini k est égale à une dérivée (d'ordre $k+2$) d'une fonction continue.*

Preuve Conséquence des propositions 4.15 et 4.7. □

Remarque 4.17 Puisqu'une distribution est localement d'ordre fini (revoir la définition (2.1)), elle est donc localement égale à une dérivée de fonction continue. Ce corollaire est un théorème de structure. Il n'est pas d'une grande utilité en pratique, mais c'est lui qui motive l'assertion à l'emporte-pièce selon laquelle l'espace des distributions est le plus petit espace contenant les fonctions continues, et stable par dérivation.

Exercice 4.18 Montrer que δ_0' est d'ordre exactement 1, puis retrouver avec la proposition 4.15 le fait que chaque $\delta_0^{(k)}$ est d'ordre exactement k.

Corollaire 4.19 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, ainsi que des fonctions $a_j, f \in C^\infty(I)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Les "solutions faibles" $T \in \mathcal{D}'(I)$ (c'est-à-dire les solutions au sens des distributions) de l'EDO linéaire*

$$T^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{(j)} = f \qquad (\star)$$

sont les fonctions de classe C^∞ qui sont solutions classiques (ou fortes).

Preuve Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ une solution de $(\star)$. Comme la régularité de T est une propriété locale et que toute distribution est localement d'ordre fini (définition (2.1)), on peut supposer que $T^{(n)}$ est d'ordre fini. On va montrer qu'alors $T^{(n)}$ est d'ordre 0. Supposons en effet par l'absurde que $T^{(n)}$ soit d'ordre $k \geq 1$. Dans ce cas la proposition 4.15 assure que la distribution $T^{(n)} = f - \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{(j)}$ est d'ordre inférieur ou égal à $k-1$, d'où une contradiction.

On ne s'arrête pas en si bon chemin.

Puisque $T^{(n)}$ est d'ordre 0, la proposition 4.7 assure que les dérivées d'ordre au plus $n-1$ de T sont chacune définies par une fonction L^∞_{loc} - donc sont a fortiori définies par des fonctions localement intégrables. Il en va donc de même pour que la distribution $T^{(n)} = f - \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{(j)}$ elle-même.

Le même procédé assure alors, avec la proposition 4.5, que $T^{(n)}$ est définie par une fonction continue puis, en itérant le même raisonnement, que $T^{(n)}$ est définie par une fonction C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. $\square$

La preuve précédente est une preuve par “bootstrap” : à chaque étape, on montre que la régularité de T est meilleure que celle qu'on a obtenue à l'étape précédente.

C La formule de sauts en dimension 1

On cherche maintenant à dériver, au sens des distributions, une fonction de classe C^1 par morceaux qui présente des discontinuités isolées. L'opération de dérivation étant locale, on se permettra de ne considérer qu'une seule singularité.

Proposition 4.20 Formule des sauts 1D

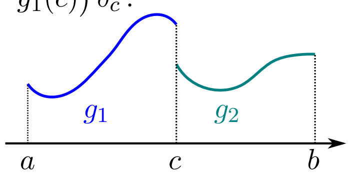
Soit $c \in]a,b[$. On se donne deux fonctions $g_1 \in C^1(]a,c])$ ainsi que $g_2 \in C^1([c,b[)$, et la fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(]a,b[)$ définie par

$$f(x) = g_1(x) \text{ si } a < x < c, \text{ et } f(x) = g_2(x) \text{ si } c < x < b.$$

La dérivée de la distribution associée T_f est donnée par l'expression

$$(T_f)' = g_1' \,\mathbb{1}_{]a,c[} + g_2' \,\mathbb{1}_{]c,b[} + \big(g_2(c) - g_1(c)\big)\,\delta_c\,.$$

On exprime parfois l'égalité précédente sous la forme



$$f' = \{f'\} + \big(f(c^+) - f(c^-)\big)\,\delta_c\,,$$

où f' désigne la dérivée de f au sens des distributions (i.e. de f identifiée à la distribution T_f qu'elle définit), et $\{f'\}$ désigne sa dérivée “au sens fonction” (là où elle est définie, i.e. sauf en c). Le terme complémentaire $\big(f(c^+) - f(c^-)\big)\,\delta_c$ fait intervenir le saut de la fonction f en la discontinuité.

Noter que g_1 (resp. g_2) admet, par hypothèse, une dérivée à gauche (resp. à droite) en c avec g_1' et g_2' continues sur leurs intervalles respectifs de définition $]a, c]$ et $[c, b[$. La fonction $\{f'\}$ est donc localement intégrable.

Exemple 4.21 Lorsque f est de classe C^1 sur $]a, b[$, on retrouve le fait que la dérivée faible de f (au sens des distributions) coïncide avec sa dérivée forte (au sens fonction) – remarque 3.4.

Exemple 4.22 Soit la fonction de Heaviside définie par $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sa dérivée (au sens des distributions) est

$$H' = \delta_0 \, .$$

Preuve de la formule des sauts
Elle résulte d'une intégration par parties. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a en effet

$$\begin{aligned}\langle T_f, \varphi' \rangle &= \int_a^c g_1(x)\varphi'(x)\, dx + \int_c^b g_2(x)\varphi'(x)\, dx \\ &= [g_1\varphi]_a^c + [g_1\varphi]_c^b - \int_a^b \{f'\}(x)\varphi(x)\, dx \\ &= -\langle \{f'\}, \varphi \rangle + (g_1(c) - g_2(c))\, \varphi(c)\, . \end{aligned}$$

□

Exemple 4.23 Etudions l'équation différentielle linéaire $T' + 2T = \delta_0$ $(\lozenge)$, d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D'après le corollaire 4.19, la restriction à $\mathbb{R}^*$ d'une solution T de $(\lozenge)$ est une fonction de classe C^∞, qui est solution forte de l'équation différentielle $T' + 2T = 0$. Autrement dit, il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{C}$ telles que

$$T_{|\mathbb{R}^*} = ae^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} + be^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \, .$$

Pour $b = a+1$, la formule des sauts (proposition 4.20) assure que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ae^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} + be^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ est solution de $(\lozenge)$.

La distribution $T_0 = e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ est donc solution particulière de l'équation linéaire $(\lozenge)$ sur $\mathbb{R}$. Toute autre solution de $(\lozenge)$ diffère de T_0 d'une solution de l'équation homogène, dont les solutions sont des fonctions de classe C^∞ (corollaire 4.19). Comme dans le cas classique, les solutions de $(\lozenge)$ sont donc les distributions de la forme $T_0 + ce^{-2x}$ avec $c \in \mathbb{C}$ (superposition de la solution particulière T_0, et de la solution générale de l'équation homogène $T' + 2T = 0$).

D Dérivée et “taux d'accroissement”

D.1 Taux d'accroissement

La dérivée d'une fonction est définie ponctuellement à partir de ses taux d'accroissement. Pour une fonction test, on a le résultat plus fin suivant (se reporter aux notations 3.15 et 3.16 si besoin).

Lemme 4.24 *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Les fonctions tests $(\frac{\varphi-\tau_h\varphi}{h})_{h\neq 0}$ convergent dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vers φ' lorsque converge vers 0.*

Preuve Il s'agit de voir que, pour $|h|$ petit, les supports de ces fonctions restent dans un compact fixe de $\mathbb{R}$, et qu'on a convergence uniforme de chacune des dérivées. Les détails sont laissés en exercice. $\square$

Corollaire 4.25 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors la famille de distributions $(\frac{T-\tau_h T}{h})_{h\neq 0}$ converge dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers T' lorsque h tend vers 0.*

Preuve La convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est la convergence simple. On fixe donc une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et on écrit

$$\langle \frac{T-\tau_h T}{h}, \varphi\rangle = \langle T, \frac{\varphi - \tau_{-h}\varphi}{h}\rangle \xrightarrow{h\to 0} \langle T, -\varphi'\rangle = \langle T', \varphi\rangle\,. \qquad \square$$

Remarque 4.26 Lorsque $T = T_f$ est la distribution associée à la fonction localement intégrable $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$, on a donc convergence

$$\frac{f-\tau_h f}{h} \longrightarrow (T_f)' \text{ au sens des distributions quand } h \to 0.$$

Attention : cet énoncé ne préjuge en rien de la convergence ponctuelle des taux d'accroissement $\frac{f-\tau_h f}{h}$ lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire de la dérivabilité de la fonction localement intégrable f en quelque point que ce soit !

D.2 Autres exemples de primitives

Ce qu'on vient de dire va nous permettre, dans l'esprit de la section A.2, d'étudier les primitives de distributions particulières. Observons que, lorsque $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, les fonctions $\frac{\varphi-\tau_h\varphi}{h}$ appartiennent à $\mathcal{D}(I)$ lorsque h est assez petit. Ainsi, pour $T \in \mathcal{D}'(I)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, les quantités $\langle\frac{T-\tau_h T}{h}, \varphi\rangle$ seront toutes définies définies pour h petit et elles convergeront vers $\langle T', \varphi\rangle$ quand $h \to 0$.

A. Primitive d'une distribution positive

Proposition 4.27 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $T \in \mathcal{D}'(I)$.*

Si la distribution T est définie par une fonction croissante $g : I \to \mathbb{R}$, sa dérivée T'_g est une distribution positive (définition 2.22).

Supposons que la dérivée T' soit une distribution positive. Il existe alors une fonction croissante $g : I \to \mathbb{R}$ et une constante complexe $c \in \mathbb{C}$ telles que la distribution T soit associée à la fonction $g + c \in L^1_{\rm loc}(I)$.

Preuve • Une fonction croissante $g : I \to \mathbb{R}$ est mesurable et localement bornée, donc définit une distribution T_g avec, au sens des distributions :

$$T_g' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(g - \tau_h g)\,.$$

Par croissance de g, chaque fonction $\frac{1}{h}(g - \tau_h g)$ est positive, donc définit une distribution positive. Une limite de distributions positive étant positive, il suit que T_g' est une distribution positive.

• C'est la partie délicate de la preuve, pour laquelle nous allons utiliser le théorème de représentation de Riesz 2.25.

On suppose que la distribution T' est positive. Elle provient donc d'une mesure de Radon m, soit $T' = T_m$. On choisit un point $\alpha \in I$, et on introduit la fonction croissante $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} -m(]x, \alpha[) & \text{si } x \leq \alpha \\ \ \ m([\alpha, x[) & \text{si } x > \alpha\,. \end{cases}$$

Soit $T_g \in \mathcal{D}'(I)$ la distribution qu'elle définit. Montrons l'égalité $(T_g)' = T_m$.

Soit en effet un segment $K = [a, b] \subset I$. A l'ajout d'une constante près à g, on pourra supposer pour simplifier les calculs que $\alpha = a$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(I)$. Le théorème de Fubini (dont l'utilisation ici est justifiée car $m([a, b]) < \infty$) assure que :

$$\begin{aligned} -\langle (T_g)', \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi' \rangle &= \int_{[a,b]} \varphi'(x) \left(\int_{[a,x[} dm(t) \right) dx \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{]t,b]} \varphi'(x)\, dx \right) dm(t) = -\langle T_m, \varphi \rangle\,. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré l'égalité $(T_g)' = T_m = T'$. Il suit du lemme 4.3 que T est égale, à une constante complexe près, à la fonction croissante g. □

Remarque 4.28 L'égalité $(T_g)' = T_m$ généralise, à une mesure de Radon quelconque, ce qu'on a déjà prouvé dans la proposition 4.5 pour une mesure à densité $dm = f(t)\, dt$ (avec $f \geq 0$ localement intégrable). Dans ce second cas, il faut prêter garde à ce que la mesure m peut charger certains points.

B. Primitive d'une fonction bornée

Proposition 4.29 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $T \in \mathcal{D}'(I)$.*
La distribution T est définie par une fonction lipschitzienne si et seulement si sa dérivée T' est une associée à une fonction bornée $f \in L^\infty(I)$.

Preuve $\Leftarrow$ Soit $a \in I$. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T' = T_f$, où $f \in L^\infty(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$ est une fonction bornée. D'après la proposition 4.5, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que T soit associée à la fonction

$$F : x \mapsto c + \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

qui est bien lipschitzienne.

$\Rightarrow$ Si $F : I \to \mathbb{C}$ est M-lipschitzienne, chaque fonction $\frac{F - \tau_h F}{h}$ (qui est définie localement sur I pour h petit) est bornée par M. Il suit, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ que :

$$|\langle (T_F)', \varphi\rangle| = \lim_{h \to 0} \left| \langle \frac{F - \tau_h F}{h}, \varphi \rangle \right| \leq M \|\varphi\|_1\,.$$

Il suit alors du théorème 4.11, et du corollaire 1.22, que l'application linéaire $(T_F)' : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$ se prolonge continûment à $L^1(I)$. La proposition 4.8 nous assure que T_F' est définie par une fonction $f \in L^\infty(I)$ telle que $\|f\|_\infty \leq M$. $\square$

E L'escalier du diable

Nous allons illustrer le paragraphe A.2, et la digression de la page 46, sur le bel exemple de la fonction de Lebesgue.

Soient l'espace

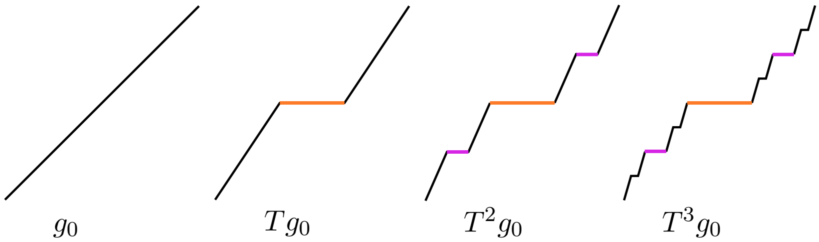
$$E = \{g : [0,1] \to [0,1] \text{ continue telle que } g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1\}$$

que l'on munit de la norme $\| \ \|_\infty$, et la transformation $T : E \to E$ définie pour $g \in E$ par

$$(Tg)(t) = \begin{cases} g(3t)/2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ 1/2 + g(3t-2)/2 & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La norme $\| \ \|_\infty$ fait de E un espace de Banach sur lequel T est $1/2$-lipschitzienne, donc contractante. Il suit du théorème de point fixe de Banach que T admet un unique point fixe $\ell \in E$: c'est la fonction de Lebesgue.

Pour visualiser ce point fixe, observons que $\ell = \lim T^n g$ pour toute $g \in E$, et en particulier pour $g_0 : x \mapsto x$. Dessinons le graphe des premières itérées $T^n g_0$.



Construction du graphe de la fonction de Lebesgue ℓ :
l'escalier du diable.

Chacune des fonctions $T^k g_0$ est constante égale à $1/2$, donc dérivable à dérivée nulle, sur l'intervalle médian $]1/3, 2/3[$ dès que $k \geq 1$. Chacune des fonctions $T^k g_0$ est constante égale à $1/4$ ou bien $3/4$, donc dérivable à dérivée nulle, sur chacun des intervalles $]1/9, 2/9[$ et $]7/9, 8/9[$ dès que $k \geq 2$. Il en va donc de même pour ℓ.

On constate plus généralement que la restriction de cette fonction de Lebesgue ℓ à chacun des intervalles ouverts qui constituent les composantes connexes du complémentaire $[0,1] \backslash \mathcal{C}^{(1/3)}$ de l'ensemble triadique de Cantor [1] est constante.

L'ensemble de Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$ est de mesure de Lebesgue nulle. La fonction de Lebesgue est donc dérivable presque partout et à dérivée nulle aux points où elle est dérivable.

• La fonction de Lebesgue est dérivable p.p. et à dérivée nulle : cette dérivée est donc intégrable, mais ℓ n'est pas primitive de sa "dérivée au sens des fonctions"... puisque ℓ n'est pas constante.

• La fonction de Lebesgue est croissante. On en déduit que sa "dérivée au sens des distributions" est une mesure de Radon m_ℓ pour laquelle on a d'après la proposition 4.27 :

$$m_\ell([0,1]) = \ell(1) - \ell(0) = 1\,.$$

Cette mesure m_ℓ est supportée par le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$. Elle est donc étrangère à la mesure de Lebesgue λ_1 : on a en effet, pour tout borélien $A \subset [0,1]$, les égalités

$$\lambda_1(A) = \lambda_1(A \cap {}^c\mathcal{C}^{(1/3)}) \quad \text{et} \quad m_\ell(A) = m_\ell(A \cap \mathcal{C}^{(1/3)})\,.$$

En particulier, la mesure m_ℓ n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

• Enfin, la fonction de Lebesgue étant continue, la mesure m_ℓ est sans atome : la mesure de tout singleton $m_\ell(\{x_0\}) = 0$ est nulle.

1. Voir l'exemple 4.19 du polycopié Donjons et dragons

5. L'espace de Sobolev $H^1(I)$

A Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Donnons nous un entier $k \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un exposant $1 \leq p < \infty$. On introduit l'espace de Sobolev [1] $W^{k,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ défini par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que, } \forall |\alpha| \leq k, \text{ on a } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}. \tag{5.1}$$

On munit l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p \,. \tag{5.2}$$

Ces espaces fonctionnels sont utilisés dans l'étude de l'existence et de la régularité des solutions d'une EDP (ils sont en effet bien plus performants dans ce domaine que nos habituels espaces $C^k(\Omega)$, voir les propositions 14.12 et 14.14 de l'appendice 14).

Notre objectif dans le présent chapitre est simplement de continuer à nous familiariser, en dimension 1, avec les distributions.

Remarque 5.1 Dans la définition (5.1), la fonction $u \in L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ a été implicitement identifiée à la distribution $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui lui est associée. Les dérivées $\partial^\alpha u$ sont donc à interpréter au sens des distributions.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient donc à l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ si elle est définie par une fonction $u \in L^p(\Omega)$, et si toutes ses dérivées $\partial^\alpha T$ d'ordre au plus k sont également définies par des fonctions de $L^p(\Omega)$. On identifiera alors systématiquement T et ses dérivées d'ordre au plus k aux fonctions de $L^p(\Omega)$ qui leur correspondent. En particulier, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Dire que la distribution $T = T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (ou la fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$) appartient à l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ donne des informations

- sur sa régularité : toutes ses dérivées d'ordre au plus k sont encore des fonctions
- sur sa "taille" ainsi que celle de ses dérivées d'ordre au plus k, qui doivent toutes être de puissance p-ième intégrables.

1. S. Sobolev, 1908-1989, Mathématicien russe

Exercice 5.2 On rappelle que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet. Montrer que la norme définie par (5.2) fait de $W^{k,p}(\Omega)$ un espace de Banach.

Dans ce cours, nous nous limiterons aux espaces de Sobolev pour l'exposant $p = 2$. On note alors $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. Ces espaces sont alors des espaces de Hilbert, la Rolls-Royce des espaces de Banach.

On peut aussi définir les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour des exposants $s \in \mathbb{R}$ non entiers... voire même non positifs ☺! On passe pour cela par la transformation de Fourier. Voir l'appendice 14.

B L'espace $H^1(I)$

Dans le reste de ce chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 5.3 *On introduit l'espace de Sobolev $H^1(I) \subset \mathcal{D}'(I)$ défini par :*

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I) \mid u' \in L^2(I)\} . \tag{5.3}$$

Remarque 5.4 Ainsi que nous l'avons indiqué dans la remarque 5.1, la définition (5.3) signifie

$$\begin{aligned} H^1(I) &= \{T \in \mathcal{D}'(I) \mid \text{il existe } u, v \in L^2(I) \text{ avec } T = T_u \text{ et } T' = T_v\} \\ &= \{u \in L^2(I) \mid \text{il existe } v \in L^2(I) \text{ avec } (T_u)' = T_v\}. \end{aligned}$$

Exercice 5.5

1. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ appartient à $H^1(I)$ si et seulement si l'intervalle I est borné.
2. Montrer que la fonction de Heaviside $H = \mathbb{1}_{[0,\infty[}$ n'appartient ni à $H^1(\mathbb{R})$ ni à $H^1(]-1,1[)$.

Proposition 5.6 *L'expression $\|u\|_{H^1} = (\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2)^{1/2}$ définit une norme sur $H^1(I)$ qui en fait un espace de Hilbert.*

Preuve On vérifie facilement que $\| \; \|_{H^1}$ définit une norme sur $H^1(I)$, qui provient du produit scalaire

$$(u_1, u_2) \in H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \int_I u_1 \overline{u_2} + \int_I u_1 \overline{u_2}' . \tag{5.4}$$

Reste à prouver la complétude. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^1(I)$. Cela signifie qu'il existe deux suites de Cauchy (u_n) et (v_n) dans $L^2(I)$, avec pour tout n, $(T_{u_n})' = T_{v_n}$.

L'espace $L^2(I)$ étant complet, il existe deux fonctions $u, v \in L^2(I)$ pour lesquelles $\|u_n - u\|_2 \to 0$ et $\|v_n - v\|_2 \to 0$. Or la convergence dans $L^2(I)$ implique la convergence dans $L^1_{\text{loc}}(I)$, et donc dans $\mathcal{D}'(I)$.

On a donc convergence $T_{u_n} \to T_u$ et $T_{v_n} \to T_v$ dans $\mathcal{D}'(I)$. La proposition 3.29 (continuité de la dérivation) assure par ailleurs que l'on a convergence $(T_{v_n}) = ((T_{u_n})') \to (T_u)'$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

La dérivée $(T_u)'$ est donc associée à la fonction $v \in L^2(I)$. Nous avons montré que la distribution associée à la fonction $u \in L^2(I)$ appartient à $H^1(I)$, avec $u' = v$ dans $\mathcal{D}'(I)$, et donc que la suite (u_n) converge vers u dans l'espace $H^1(I)$. □

Proposition 5.7 Plongement de Sobolev

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque.

Une fonction $u \in H^1(I)$ se prolonge à l'adhérence $\overline{I} \subset \mathbb{R}$ en une fonction continue bornée. Cette fonction est même $1/2$-höldérienne.

De plus, l'injection (linéaire) $H^1(I) \to C^0_b(\overline{I})$ est continue.

On contrôle donc la norme $\| \|_\infty$ par la norme $\| \|_{H^1}$. Rappelons que l'on ne contrôle pas la norme $\| \|_\infty$ par la norme $\| \|_2$.

Preuve Soit $u \in H^1(I)$. Puisque $u' \in L^2(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$, la proposition 4.5 affirme que u est (presque partout égale à) une fonction continue pour laquelle on a, pour tous $x < y$ dans I,

$$|u(y) - u(x)| = |\int_x^y u'(t)\,dt| \leq \|u'\|_2\,|x-y|^{1/2}\,.$$

La fonction u est donc hölderienne pour l'exposant $1/2$. En particulier elle est uniformément continue sur I, et il suit qu'elle se prolonge par continuité à l'adhérence $\overline{I}$.

Montrons maintenant que u est bornée, et que sa norme sup est contrôlée par sa norme H^1. Le fait que u' soit de carré intégrable va assurer que, si $|u(x)|$ est grand, alors $|u(y)|$ reste assez grand pour y proche de x et donc la norme $\|u\|_2$ est grande. Nous allons quantifier ceci.

Choisissons $0 < t < (1/2)\ell(I)$, où $\ell(I)$ désigne la longueur (éventuellement infinie) de l'intervalle I. Soit $x \in \overline{I}$. On supposera que $[x, x+t] \subset \overline{I}$ (sinon, on effectue le raisonnement avec l'intervalle $[x-t, x] \subset \overline{I}$). Pour $y \in [x, x+t]$, on a

$$|u(y)| \geq |u(x)| - \|u'\|_2|x-y|^{1/2} \geq |u(x)| - t^{1/2}\|u'\|_2\,.$$

Si, au point x, on a $|u(x)| \leq 2\,t^{1/2}\|u'\|_2$, on a *a fortiori* $|u(x)| \leq 2\,t^{1/2}\|u\|_{H^1}$, majoration qui nous convient.

Si par contre on a $|u(x)| \geq 2\,t^{1/2}\|u'\|_2$, il suit que $|u(y)| \geq |u(x)|/2$ pour tout $y \in [x, x+t]$, et donc

$$\|u\|_2^2 \geq t\,|u(x)|^2/4$$

$$\text{ou encore } |u(x)| \leq 2t^{-1/2}\|u\|_2 \leq 2t^{-1/2}\|u\|_{H^1}\,.$$

On a donc montré que u est bornée sur $\overline{I}$, avec l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_\infty \leq 2\,(t^{1/2} + t^{-1/2})\,\|u\|_{H^1} \,. \qquad \square$$

Nous identifierons donc désormais implicitement toute fonction $u \in H^1(I)$ avec son représentant continu.

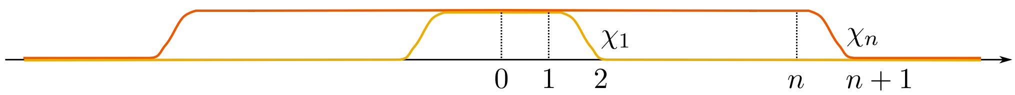
C Densité dans $H^1(I)$

Proposition 5.8 *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions test est dense dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Preuve On va procéder par troncature et régularisation. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$.

• Tronquons : On choisit une fonction plateau paire $\chi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \chi_1 \leq 1$, avec $\chi_1 \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1,1]$ et $\operatorname{supp}\chi_1 \subset [-2,2]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la fonction plateau paire telle que $\chi_n \equiv 1$ sur l'intervalle $[-n,n]$, et $\chi_n(x) = \chi_1(x-n)$ sur l'intervalle $[n,\infty[$, de sorte que $\|\chi_n'\|_\infty = \|\chi_1'\|_\infty =: c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit

$$\begin{aligned} v_n &= \chi_n u \in L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ \text{de sorte que} \quad v_n' &= \chi_n' u + \chi_n u' \in L^2(\mathbb{R}) \,. \end{aligned}$$

La distribution v_n appartient donc encore à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$, et elle est maintenant à support compact. De plus, la suite (v_n) converge vers u dans $H^1(\mathbb{R})$ puisque l'on a

$$\begin{aligned} \|u - v_n\|_2 &\leq \Big(\int_{|x|\geq n} |u|^2\Big)^{1/2} \\ \text{et} \quad \|u' - v_n'\|_2 &\leq \|(\chi_n - 1)\,u'\|_2 + \|\chi_n'\,u\|_2 \\ &\leq \Big(\int_{|x|\geq n} |u'|^2\Big)^{1/2} + c\,\Big(\int_{|x|\geq n} |u|^2\Big)^{1/2} . \end{aligned}$$

• Régularisons : On part désormais d'une fonction $v \in H^1(\mathbb{R})$ qui est à support compact, et on veut l'approcher dans $H^1(\mathbb{R})$ par des fonctions tests. On considère donc une approximation de l'unité (ρ_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $\rho_n(x) = n\,\rho(nx)$, où $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est positive et d'intégrale 1. On introduit $w_n = v * \rho_n$. Comme convolée d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ à support compact et d'une fonction test, la convolée w_n est bien définie et appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il s'agit de voir que $\|w_n - v\|_{H^1} \to 0$ quand $n \to \infty$.

La proposition 1.15 assure que $\|w_n - v\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

La proposition 1.13 affirme que l'on peut dériver la convolée du côté de la fonction C^∞, soit $w_n' = v * \rho_n'$, mais ce n'est pas très utile ici... On va voir que l'on peut également dériver la convolée du côté de la fonction $v \in H^1$, ce qui donnera l'égalité $w_n' = v' * \rho_n$! Il suivra $\|w_n' - v'\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$, ce qui assurera finalement la convergence $\|w_n - v\|_{H^1} \to 0$.

Revenons sur le point qu'on a admis. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$w_n'(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n'(x-t)\, v(t)\, dt = -\langle v, g_{n,x}' \rangle\,,$$

où la fonction $v \in L^2(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ est identifiée à la distribution T_v, et où $g_{n,x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est définie par $g_{n,x} : t \mapsto \rho_n(x-t)$. On a donc, comme annoncé :

$$w_n'(x) = \langle v', g_{n,x} \rangle = \int_{\mathbb{R}} v'(t)\, \rho_n(x-t)\, dt = (v' * \rho_n)(x)\,. \qquad \square$$

Remarque 5.9 Ce raisonnement (dériver d'un côté ou de l'autre du produit de convolution) préfigure les propositions 7.3 et 7.14.

Corollaire 5.10 *Une fonction $u \in H^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 à l'infini.*

Preuve En effet, la fonction u est limite dans $H^1(\mathbb{R})$, donc est limite uniforme (proposition 5.7), d'une suite de fonctions à supports compacts. $\square$

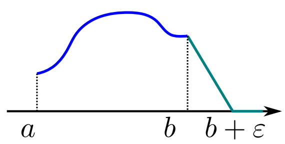
Pour étendre le résultat d'approximation de la proposition 5.8 à un intervalle I quelconque, nous commençons par prolonger les fonctions de $H^1(I)$.

Proposition 5.11 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $u \in H^1(I)$. Il existe $v \in H^1(\mathbb{R})$ qui prolonge u. On peut prendre v à support dans un voisinage arbitraire de $\overline{I}$.*

Preuve Notons $I =]a, b[$. On peut se contenter de traiter le cas où $b < \infty$, en prolongeant alors u à droite de b. On sait déjà (proposition 5.7) que la fonction u est continue jusqu'au bord, i.e. $u \in C^0(]a, b])$. On fixe $\varepsilon > 0$, et on prolonge u à l'intervalle $]a, \infty[$ en considérant la fonction continue $\tilde{u}$ qui est affine sur l'intervalle $[b, b+\varepsilon]$ avec $\tilde{u}(b) = u(b)$ et $\tilde{u}(b+\varepsilon) = 0$, puis avec $\tilde{u} \equiv 0$ sur $[b+\varepsilon, +\infty[$.

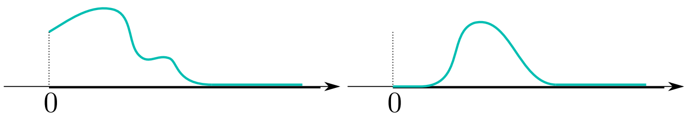
La fonction $\tilde{u} :]a, \infty[\to \mathbb{C}$ est continue et, par construction, c'est une “primitive” de la fonction localement intégrable $g \in L^2(]a, \infty[) \subset L^1_{\text{loc}}(]a, \infty[)$ définie par

$$g = \begin{cases} u' & \text{sur }]a, b[\\ -u(b)/\varepsilon & \text{sur } [b, b+\varepsilon] \\ 0 & \text{sur } [b+\varepsilon, +\infty[\,. \end{cases}$$



La proposition 4.5 assure que g est la dérivée au sens des distributions de la fonction $\tilde{u}$, et donc que $\tilde{u} \in H^1(]a, \infty[)$. $\square$

Notation 5.12 On notera $\mathcal{D}_{|I}$ l'ensemble des restrictions à l'intervalle I des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.



Une fonction de $\mathcal{D}_{|I}$, et une fonction de $\mathcal{D}(I)$, lorsque $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 5.13 Théorème de Borel.

1. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On veut montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ pour laquelle $f^{(n)}(0) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\chi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction plateau, avec $\operatorname{supp} \chi \subset [-1, 1]$ et $\chi \equiv 1$ sur $[-1/2, 1/2]$. On considère la série de fonctions
$$t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \chi(t_n x) \frac{x^n}{n\,!}$$
où t_n est la suite de réels définie par $t_n = |c_n|$ si $|c_n| \geq 1$ et $t_n = 1$ sinon. Montrer que cette série converge uniformément ainsi que les séries dérivées de tous ordres, et que sa somme $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifie $f^{(n)}(0) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que, si $I =]a, b[$ est un intervalle borné, on a $\mathcal{D}_{|I} = C^\infty([a, b])$, où $C^\infty([a, b])$ désigne l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ qui sont de classe C^∞ "jusqu'au bord".

Corollaire 5.14 *Le sous-espace $\mathcal{D}_{|I} \subset H^1(I)$ est dense.*

Mieux, si $u \in H^1(I)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{D}_{|I}$ telle que $\|u - f\|_\infty \leq \varepsilon$, et $\|u' - f'\|_2 \leq \varepsilon$.

Preuve Soit $u \in H^1(I)$, que l'on prolonge en $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$ (proposition 5.11). La densité de l'espace des fonctions tests dans $H^1(\mathbb{R})$ (proposition 5.8) fournit, pour $\varepsilon > 0$, une fonction $\tilde{w} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec
$$\|\tilde{u} - \tilde{w}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon\,.$$
La restriction $w = \tilde{w}_{|I} \in C^\infty(I)$ vérifie a fortiori
$$\|w - u\|_{H^1(I)} \leq \|\tilde{w} - \tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon\,.$$
La dernière précision découle alors de la proposition 5.7, qui permet de contrôler la norme uniforme par la norme de H^1. □

D L'espace $H_0^1(I)$

On a montré la densité de $\mathcal{D}_{|I}$ dans $H^1(I)$. Intéressons nous maintenant à l'adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1(I)$.

Proposition 5.15 *L'adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1(I)$ est l'espace*

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1(I) \mid \lim_{x \to \inf I} u(x) = \lim_{x \to \sup I} u(x) = 0\}\,.$$

L'espace $H_0^1(I)$ est constitué des fonctions de $H^1(I)$ qui sont nulles “au bord” de l'intervalle I. Si $I =]a, b[$ est un intervalle borné :

$$H_0^1(]a, b[) = \{u \in H^1(I) \mid u(a) = u(b) = 0\}\,.$$

Le corollaire 5.10 assurant l'égalité $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$, la proposition 5.15 généralise à un intervalle quelconque la proposition 5.8.

Preuve Nous procédons par double inclusion.
• La convergence dans l'espace $H^1(I)$ implique la convergence uniforme dans $C^0(\overline{I})$ (proposition 5.7), pour laquelle la condition $\lim_{x \to \inf I} u(x) = \lim_{x \to \sup I} u(x) = 0$ est fermée. Il suit que l'adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1(I)$ est incluse dans $H_0^1(I)$.

• Soit maintenant $u \in H_0^1(I)$, que l'on veut approcher au sens de la norme $\|\ \|_{H_1}$ par une fonction test $\Phi \in \mathcal{D}(I)$.

$*$ Supposons en un premier temps que l'intervalle $I =]a, b[$ soit borné. On a $\int_a^b u'(t)\,dt = u(b) - u(a) = 0$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(I)$ une fonction test telle que $\|u' - \psi\|_2$ soit petite. On observe que l'intégrale $\int_a^b \psi(t)\,dt$ est petite puisque

$$\Big| \int_a^b \psi \Big| = \Big| \int_a^b \psi - \int_a^b u' \Big| \leq (b-a)^{1/2} \|u' - \psi\|_2\,,$$

et donc ψ n'est pas loin d'être la dérivée d'une fonction test. Fixons donc une fois pour toutes une fonction $\rho \in \mathcal{D}(I)$ d'intégrale $\int_a^b \rho(t)\,dt = 1$.

La fonction $\varphi := \psi - (\int_a^b \psi)\,\rho \in \mathcal{D}(I)$ est encore une fonction test, elle est encore proche de u', mais on a maintenant $\int_a^b \varphi = 0$. On introduit donc l'unique primitive $\Phi \in \mathcal{D}(I)$ de φ qui soit à support compact. Par construction $\|\Phi' - u'\|_2 = \|\varphi - u'\|_2$ est petite. On a de plus pour tout $x \in I$

$$|\Phi(x) - u(x)| \leq \int_a^x |\varphi(t) - u'(t)|\,dt \leq (b-a)^{1/2} \|\varphi - u'\|_2\,.$$

Il suit que $\|\Phi - u\|_{H^1}$ est petite. D'où la densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H_0^1(I)$.

$*$ Le cas $I = \mathbb{R}$ faisant l'objet de la proposition 5.8, il nous reste à traiter le cas d'un intervalle semi-borné. On pourra supposer que $I =]0, \infty[$. Soit $u \in H_0^1(I)$, de sorte que $u(0) = 0$. Soit (χ_n) la suite de fonctions plateaux introduite dans la preuve de la proposition 5.8, de sorte que l'on a comme avant $\|\chi_n u - u\|_{H^1(I)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On a donc approché $u \in H_0^1(I)$ par une fonction $v \in H_0^1(I)$ qui est maintenant nulle en dehors d'un intervalle borné $[0, N]$.

On applique maintenant le cas précédent à la restriction $w \in H_0^1(I_N)$ de la fonction v à l'intervalle borné $I_N =]0, N[$. On obtient donc une fonction $\Phi \in \mathcal{D}(I_N) \subset \mathcal{D}(I)$ qui approche w dans $H^1(I_N)$. Ceci achève la preuve, puisque $\|\Phi - v\|_{H^1(I)} = \|\Phi - w\|_{H^1(I_N)}$. $\square$

Terminons cette section par une propriété fondamentale des espaces $H_0^1(I)$.

Proposition 5.16 Inégalité de Poincaré *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Il existe une constante $c > 0$ pour laquelle on a, pour toute fonction $u \in H_0^1(I)$:*

$$\|u\|_{H^1} \leq c\,\|u'\|_2\,.$$

Preuve Il s'agit, dans l'espace $H_0^1(I)$, de contrôler la norme $\|u\|_2$ par la norme $\|u'\|_2$ de la dérivée de cette fonction. Notons $I =]a, b[$. Puisque $u \in H_0^1(I)$ on a $u(a) = 0$, et donc pour tout $x \in I$, la majoration

$$|u(x)| = \left|\int_a^x u'(t)\,dt\right| \leq (b-a)^{1/2}\|u'\|_2\,.$$

Il suit que

$$\|u\|_2 \leq (b-a)\,\|u'\|_2\,.$$ $\square$

Ces résultats se généralisent, avec plus d'efforts, en dimension supérieure.

Lorsque $d \geq 2$, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ n'est pas toujours continue. On peut cependant définir, lorsque l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est régulier, une application "valeur au bord" (ou trace)

$$u \in H^1(\Omega) \to \gamma(u) \in L^2(\partial\Omega)\,,$$

qui est continue et qui coïncide avec la valeur au bord usuelle lorsque la fonction $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ est continue jusqu'au bord.

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Pour un ouvert à bord régulier, on a l'égalité

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma(u) = 0\}\,,$$

autrement dit cette adhérence est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent au bord (en un sens faible).

On a également une inégalité de Poincaré, valable en toute dimension. Pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, il existe une constante pour laquelle on a une estimation

$$\|u\|_2 \leq C\,(\sum_{1\leq j\leq d} \|\partial_j u\|_2)\,,$$

valable pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

E Problème de Dirichlet en dimension 1

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un segment, et deux fonctions $f, q : [a,b] \to \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0\,. \end{cases} \tag{5.5}$$

On supposera que $q \geq 0$, et on souhaite montrer l'existence et l'unicité des solutions. Noter au contraire que l'équation $u'' + u = 0$ (donc avec $q = -1$ et $f = 0$), avec la même condition de Dirichlet $u(a) = u(b) = 0$, admet des solutions non triviales lorsque $b = a + k\pi$, $k \geq 1$.

Le cas où les fonctions f et q sont régulières est classique et élémentaire. Nous le proposons ci-dessous en exercice pour mémoire.

Exercice 5.17 Problème de Dirichlet classique Soient $q, f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une unique solution $u_t \in C^2([a,b])$ du problème de Cauchy $-u'' + qu = f$, avec condition initiale $u_t(a) = 0$ et $u_t'(a) = t$.
2. Montrer que l'ensemble E des solutions $u \in C^2([a,b])$, qui s'annulent au point a, de l'équation différentielle $-u'' + qu = f$ est un espace affine de dimension 1.
3. On suppose désormais que $q \geq 0$.
   (a) Montrer que si $v \in C^2([a,b])$ est solution de $-v'' + qv = 0$, avec $v(a) = v(b) = 0$, alors v est nulle.
   (b) En déduire que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto u_t(b) \in \mathbb{R}$ est bijective.
   (c) Montrer finalement l'existence et l'unicité des solutions au problème de Dirichlet classique (5.5).

Nous nous intéressons maintenant au problème de Dirichlet (5.5), avec des données non régulières $q, f \in L^1(I)$. Ce cas d'école nous permettra de voir comment peut être mise en jeu la structure hilbertienne de l'espace de Sobolev $H_0^1(I)$.

Proposition 5.18 Problème de Dirichlet faible

Soit $I =]a,b[$ un intervalle borné. Soient $q, f \in L^1(I, \mathbb{R})$, avec $q \geq 0$.

1. *Il existe une unique fonction $u \in H_0^1(I)$ (donc avec $u(a) = u(b) = 0$) telle que $-u'' + qu = f$ (5.5) au sens des distributions.*
2. *Lorsque $q, f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ la solution précédente $u \in H_0^1(I)$ est régulière, i.e. on a $u \in C^2([a,b])$, et elle est solution du problème de Dirichlet (5.5) au sens classique.*

Nous utiliserons le résultat suivant où l'on voit que, sous l'hypothèse $q \geq 0$, on peut remplacer la restriction à $H_0^1(I)$ du produit scalaire (5.4) de $H^1(I)$ par un produit scalaire qui est adapté au problème que l'on étudie ici.

Lemme 5.19 *Soit $I =]a,b[$ un ouvert borné. On suppose que la fonction $q \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ vérifie $q \geq 0$. L'expression*

$$(u_1,u_2) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \mapsto (u_1,u_2)_q = \int_I q\, u_1\overline{u_2} + u_1'\overline{u_2}' \tag{5.6}$$

définit un produit scalaire hermitien sur $H_0^1(I)$ dont la norme associée est équivalente à la norme $\| \ \|_{H^1}$.

Preuve Puisque $H_0^1(I) \subset C^0(\overline{I})$, l'expression ci-dessus définit une forme sesquilinéaire hermitienne. Pour $u \in H_0^1(I)$, les inégalités de Sobolev et de Poincaré assurent que

$$\int_I |u|^2 + |u'|^2 \leq \big((b-a)^2+1\big)\|u'\|_2^2 \leq \big((b-a)^2+1\big)\,\Big(\int_I q\,|u|^2 + |u'|^2\Big)$$

et $$\int_I q\,|u|^2 + |u'|^2 \leq \int_I q\,\|u\|_\infty^2 + |u'|^2 \leq \big((b-a^2)^2\,\|q\|_1 + 1\big)\,\|u\|_{H^1}^2\,.$$

Il suit que le produit hermitien $(\ ,\ )_q$ est défini positif, ainsi que l'équivalence des normes annoncée. □

Preuve de la proposition 5.18

• Une fonction $u \in H_0^1(I)$ est solution du problème de Dirichlet (5.5) si et seulement si on a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, l'égalité

$$\int_I q\,\varphi\overline{u} + \varphi'\overline{u}' = \int \varphi\overline{f}\,.$$

C'est le cas si et seulement si les deux formes linéaires continues

$$w \in H_0^1(I) \mapsto \int_I q\,w\overline{u} + w'\overline{u}' \in \mathbb{C}$$
$$w \in H_0^1(I) \mapsto \int w\overline{f} \in \mathbb{C}$$

sur $H_0^1(I)$ coïncident sur le sous-espace vectoriel dense $\mathcal{D}(I) \subset H_0^1(I)$, et donc partout.
La fonction $u \in H_0^1(I)$ est donc solution du problème de Dirichlet faible (5.5) si et seulement si on a l'égalité

$$(w,u)_q := \int_I q\,w\overline{u} + w'\overline{u}' = \int_I w\overline{f} \text{ pour toute } w \in H_0^1(I).$$

• Considérons donc la forme linéaire continue $w \in H_0^1(I) \mapsto \int w\overline{f} \in \mathbb{C}$. D'après le lemme 5.19 et le théorème de représentation de Riesz dans l'espace de Hilbert $H_0^1(I)$ muni de la norme associée au produit scalaire $(\ ,\ )_q$, il existe une unique fonction $u \in H_0^1(I)$ telle que

$$(w,u)_q = \int_I w\overline{f}$$

pour toute $w \in H_0^1(I)$. Cette fonction $u \in H_0^1(I)$ est donc l'unique solution de notre problème de Dirichlet faible.

• Lorsque f et q sont régulières, la régularité de la solution $u \in H_0^1(I) \subset C^0(\bar{I})$ s'obtient par bootstrap, comme au corollaire 4.19. $\square$

Dans la proposition précédente, les distributions se sont naturellement invitées puisque nous avions pris soin de prendre des données non régulières pour que la méthode de l'exercice 5.17 ne s'applique pas. Cette illustration de l'utilité des espaces de Sobolev est donc un peu artificielle.

La résolution du problème de Dirichlet en dimension supérieure, pour des données régulières, fournirait une illustration plus convaincante de la méthode présentée.

6. Distributions en dimension quelconque

L'aboutissement de ce chapitre sera d'obtenir une solution fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ pour l'opérateur Laplacien $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial^2/\partial x_j^2$ en dimension $d \geq 1$, c'est-à-dire une distribution telle que $\Delta E = \delta_0$.

L'intérêt de disposer d'une solution fondamentale apparaîtra au chapitre 7 lorsque nous aurons défini la convolée de deux distributions.

Pour obtenir E nous allons opter dans la mesure du possible pour des raisonnements qualitatifs qui, en l'occurrence, feront intervenir le support ainsi que l'homogénéité des distributions considérées.

Dans tout ce chapitre $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ désignera un ouvert.

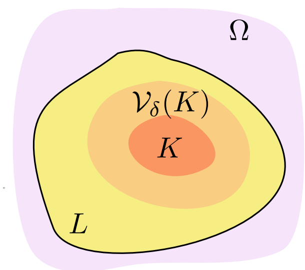
A Distributions à support compact

Commençons par contrôler l'ordre d'une distribution à support compact.

Proposition 6.1 *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dont le support* $\operatorname{supp} T \subset \Omega$ *est compact, est d'ordre fini.*

Preuve Le support $\operatorname{supp} T$ de T étant une partie compacte $K \subset \Omega$, le δ-voisinage fermé de $\mathcal{K}$, soit $\mathcal{V}_\delta(K) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, K) \leq \delta\}$, est également une partie compacte de Ω lorsque $0 < \delta < d(\operatorname{supp} T, {}^c\Omega)$.

Choisissons une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $\mathcal{V}_\delta(K)$ (voir le corollaire 1.27), et notons $L \subset \Omega$ le support de χ. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on observe que les fonctions φ et $\chi\varphi$ coïncident sur $\mathcal{V}_\delta(K)$. Il suit que $\operatorname{supp}(\varphi - \chi\varphi) \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, et donc que $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$.



La fonction $\chi\varphi$ étant à support dans L, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et des constantes $C, c > 0$ (qui dépendent de L et de χ, mais pas de φ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi\varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha (\chi\varphi)\|_{L^\infty(L)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(L)} \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

(on a subrepticement utilisé la formule de Leibniz). Cette majoration étant valable pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, indépendamment de son support, il suit que T est d'ordre fini au plus k. $\square$

Définition 6.2 *On introduit l'espace $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ de toutes les fonctions de classe C^∞ sur Ω.*

Rappelons qu'une distribution est une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sur l'espace vectoriel des fonctions tests qui vérifie la "condition de continuité" (2.2). On va montrer que, lorsque $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact, elle se prolonge en une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$, vérifiant encore une "condition de continuité'" (6.1). On a plus précisément l'énoncé suivant.

Corollaire 6.3 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution à support compact, et $k \in \mathbb{N}$ son ordre.*

Pour chaque fonction $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$, la valeur de $\langle T, \chi\psi\rangle$ ne dépend pas du choix d'une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ constante égale à 1 au voisinage de $\operatorname{supp} T$.

La forme linéaire $\tilde{T} : \psi \in \mathcal{E}(\Omega) \to \langle T, \chi\psi\rangle \in \mathbb{C}$ prolonge T, et vérifie l'estimation suivante : pour tout voisinage compact $L \subset \Omega$ de $\operatorname{supp} T$, il existe une constante $c(L)$ avec

$$|\langle \tilde{T}, \psi\rangle| \leq c(L) \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty(L)} \tag{6.1}$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$.

Preuve Soient $L \subset \Omega$ voisinage compact du support de T, et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau telle que $\chi \equiv 1$ sur L. Pour une fonction $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on pose $\langle \tilde{T}, \psi\rangle = \langle T, \chi\psi\rangle$. Alors $\tilde{T} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire, et elle vérifie la condition (6.1) pour ce choix de compact L. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\varphi - \chi\varphi \equiv 0$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$, donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle = \langle \tilde{T}, \varphi\rangle$, c'est-à-dire que $\tilde{T}$ prolonge T.

Il nous reste à montrer que la forme linéaire $\tilde{T}$ construite ci-dessus ne dépend pas du choix du compact L ni de la fonction plateau χ : si (L_1, χ_1) et (L_2, χ_2) sont deux tels choix, on a $\chi_1\psi - \chi_2\psi \equiv 0$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$ et donc l'égalité $\langle T, \chi_1\psi\rangle = \langle T, \chi_2\psi\rangle$ pour toute $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. $\square$

Par la suite, on oubliera la notation $\tilde{T}$ et l'on confondra la distribution à support compact $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et son prolongement $\tilde{T}$ à $\mathcal{E}(\Omega)$.

Remarque 6.4 Tant qu'on y est, on peut noter que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution à support compact d'ordre au plus k, elle se prolonge en une forme linéaire continue sur $C^k(\Omega)$ et donc sur $C^k(\mathbb{R}^d)$ (cette assertion est un écho de la proposition 2.12).

On munit $\mathcal{E}(\Omega)$ de la topologie naturelle "de la convergence uniforme, sur chaque compact, de chacune des dérivées partielles" (exemple 12.10.4). Pour cette topologie, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact sera un élément du dual continu de $\mathcal{E}(\Omega)$. On peut montrer qu'on obtient ainsi toutes les formes linéaires continues sur $\mathcal{E}(\Omega)$, ce qui justifie la notation suivante.

Notation 6.5 On notera $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ le sous-espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact.

Remarque 6.6 Les fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ se restreignant à l'ouvert Ω en des fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$, chaque distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ définit une distribution $S_T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ en posant $\langle S_T, f\rangle = \langle T, f_{|\Omega}\rangle$ pour toute $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. D'où une injection naturelle $T \in \mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow S_T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, qui identifie $\mathcal{E}'(\Omega)$ avec l'ensemble des distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ dont le support est un compact inclus dans Ω.

A défaut de définir précisément la topologie de $\mathcal{E}(\Omega)$, contentons nous pour l'instant de définir les suites convergentes dans cet espace.

Définition 6.7 *Une suite de fonctions (ψ_n) de $\mathcal{E}(\Omega)$ converge vers ψ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ si cette suite converge uniformément ainsi que chacune de ses dérivées partielles sur chacun des compacts de Ω, autrement dit si et seulement si : pour tout compact $L \subset \Omega$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a*

$$\sup_L |\partial^\alpha \psi_n - \partial^a \psi| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Comme conséquence immédiate des définitions, on a l'assertion suivante.

Proposition 6.8 *Soient $T \in \mathcal{E}(\Omega)$ une distribution à support compact, et (ψ_n) une suite de $\mathcal{E}(\Omega)$ convergeant vers $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ dans cet espace. Alors*

$$\langle T, \psi_n\rangle \to \langle T, \psi\rangle\,.$$

Remarque 6.9 On observera que lorsque $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ sont à supports disjoints, on a encore $\langle T, \psi\rangle = 0$ (voir 3.41).

Exercice 6.10 Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions $T \in \mathcal{D}'(]0,\infty[)$ qui ne sont pas la restriction de distributions $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

1. $T : \varphi \in \mathcal{D}(]0,\infty[) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^{(n)}(1/n) \in \mathbb{C}$, lorsque (c_n) est une suite de complexes non nuls $c_n \in \mathbb{C}^*$.
2. $T : \varphi \in \mathcal{D}(]0,\infty[) \mapsto \int_0^\infty e^{1/x}\varphi(x)\,dx \in \mathbb{C}$.

B Distribution à support un singleton

L'aboutissement de cette section sera la description des distributions supportées par un point. On commence par des résultats qui sont intéressants indépendamment de cet objectif.

Rappelons qu'il ne suffit pas que la fonction test φ s'annule sur le support de la distribution T pour que $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Par contre, on a le résultat suivant.

Proposition 6.11 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution d'ordre fini k.*

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On suppose que φ, ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre au plus k, sont nulles sur le support de T. Alors on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Remarque 6.12 On retrouve ainsi le fait que $\delta_0^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est d'ordre au moins k (et donc d'ordre k, voir l'exemple 2.9). En effet pour $\epsilon_k : x \mapsto x^k$ et une fonction plateau χ valant 1 au voisinage de l'origine, on constate que la fonction test $\varphi_k : x \mapsto \chi(x)\epsilon_k(x)$ a toutes ses dérivées d'ordre au plus $k-1$ nulles en l'origine, tandis que $\langle \delta_0^{(k)}, \varphi_k\rangle \neq 0$.

La preuve de la proposition 6.11 est d'ailleurs basée sur le principe utilisé dans l'étude de l'exemple 2.9, à savoir l'utilisation d'un kit de bricolage.

Lemme 6.13 *Soit $L \subset \mathbb{R}^d$ un fermé. Il existe des fonctions $\chi_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ ($\varepsilon > 0$) telles que $\chi_\varepsilon \equiv 1$ sur $\mathcal{V}_\varepsilon(L)$, avec $\operatorname{supp} \chi_\varepsilon \subset \mathcal{V}_{3\varepsilon}(L)$, et telles que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante c_α avec*

$$\|\partial^\alpha \chi_\varepsilon\|_\infty \le c_\alpha \varepsilon^{-\alpha} \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Preuve On reprend la construction des fonctions plateaux (corollaire 1.27), en se préoccupant maintenant de la taille des dérivées. Soit donc une fonction test $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ positive et d'intégrale 1, à support dans la boule unité. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$ (à support dans la boule de rayon ε) et l'on définit $\chi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{2\varepsilon}(L)}$ (convolution $\mathcal{D} * L^\infty$). Les deux premières conditions sont satisfaites et l'on a, pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^d$, l'égalité $\partial^\alpha \chi_\varepsilon = (\partial^\alpha \rho_\varepsilon) * \mathbb{1}_{\mathcal{V}_{2\varepsilon}(L)}$ d'où l'estimation :

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha \chi_\varepsilon\|_\infty &\le \|\partial^\alpha \rho_\varepsilon\|_1 \|\mathbb{1}_{\mathcal{V}_{2\varepsilon}(L)}\|_\infty = \|\partial^\alpha \rho_\varepsilon\|_1 \\ &= \int \varepsilon^{-(d+|\alpha|)} |\partial^a \rho(x/\varepsilon)|\, dx = \varepsilon^{-|\alpha|}\, \|\partial^\alpha \rho\|_1 \,. \end{aligned} \qquad \square$$

Lemme 6.14 *Soit $L \subset \mathbb{R}^d$ un fermé. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que φ et toutes ses dérivées partielles d'ordre au plus k s'annulent sur L. Alors il existe une constante $c(\varphi)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le k$, on ait*

$$\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathcal{V}_\varepsilon(L))} \le c(\varphi)\, \varepsilon^{k+1-|\alpha|} \,.$$

Preuve Puisque la fonction $\psi = \partial^\alpha \varphi$ s'annule sur L, ainsi que ses dérivées partielles d'ordre $k - |\alpha|$, il suffit de démontrer la propriété pour $\alpha = 0$.

Soit $y \in \mathcal{V}_\varepsilon(L)$. On choisit un point $x \in L$ avec $d(x, y) \le \varepsilon$. Pour évaluer $\varphi(y)$, on utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange entre les points x et y.

Toutes les dérivées d'ordre au plus k de φ s'annulant au point x, la partie polynomiale du développement de Taylor disparaît et le résultat suit puisque

$$|\varphi(y)| \le \frac{\|D^{k+1}\varphi\|_\infty}{(k+1)!}\, \|y - x\|^{k+1} \le \frac{\|D^{k+1}\varphi\|_\infty}{(k+1)!}\, \varepsilon^{k+1} \,. \qquad \square$$

Preuve de la proposition 6.11 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nulle sur $\operatorname{supp} T$ ainsi que ses dérivées partielles d'ordre au plus k. On veut montrer que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Soit $L = \operatorname{supp} T$. Pour $\varepsilon > 0$, soit la fonction χ_ε du lemme 6.13.

Soient $K \subset \Omega$ un compact, et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\varphi - \chi_\varepsilon \varphi$ est nulle au voisinage de $L = \operatorname{supp} T$, donc on a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_\varepsilon \varphi \rangle$. Puisque $\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon \varphi) \subset \operatorname{supp} \varphi$, il existe une constante c_K indépendante de ε pour laquelle on a d'après les lemmes 6.13 et 6.14, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |\langle T, \chi_\varepsilon \varphi \rangle| &\leq c_K \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha (\chi_\varepsilon \varphi)\|_{L^\infty(\mathcal{V}_{3\varepsilon}(L))} \\ &\leq c \sum_{|\beta|+|\gamma| \leq k} \|\partial^\beta (\chi_\varepsilon)\|_\infty \, \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(\mathcal{V}_{3\varepsilon}(L))} \\ &\leq c \sum_{|\beta|+|\gamma| \leq k} \varepsilon^{-|\beta|} \, \varepsilon^{k+1-|\gamma|} \leq c\, \varepsilon \,, \end{aligned}$$

la lettre c désignant diverses constantes indépendantes de ε. Il suit, en faisant tendre ε vers 0, que $\langle T, \varphi \rangle = 0$. □

On en déduit le théorème de structure suivant.

Corollaire 6.15 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution de support le singleton $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de T. Alors il existe une unique famille de complexes $(c_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ avec*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \, \partial^\alpha (\delta_{x_0}) \,.$$

Preuve On peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$.

• L'assertion d'unicité revient à dire que les dérivées $(\partial^\alpha(\delta_{x_0}))_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ sont linéairement indépendantes. Pour le prouver, choisir une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi \equiv 1$ au voisinage de l'origine, et tester l'indépendance de la famille en évaluant une combinaison linéaire de ces distributions sur chacune des fonctions $(\chi \epsilon_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^d}$ pour $\epsilon_\beta : x \mapsto x^\beta$.

• Pour l'existence, on écrit la formule de Taylor pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ en l'origine à l'ordre k. On tronque la partie polynomiale de ce développement par la fonction χ pour obtenir une décomposition de φ en somme de deux fonctions tests :

$$\varphi(x) = \chi(x) \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) \, x^\alpha \Big) + R(x) \,,$$

où le reste $R \in \mathcal{D}(\Omega)$ a toutes ses dérivées d'ordre au plus k nulles en l'origine.

La proposition 6.11 assure que $\langle T, R\rangle = 0$. On a donc l'égalité

$$\begin{aligned}\langle T,\varphi\rangle &= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha\varphi(0)\ \langle T,\chi\epsilon_\alpha\rangle \\ &= \sum_{|\alpha|\le k} \Big(\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\ \langle T,\chi\epsilon_\alpha\rangle\Big)\ \langle \partial^\alpha(\delta_0),\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Il suit que $T = \sum_{|\alpha|\le k}\Big(\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\ \langle T,\chi\epsilon_\alpha\rangle\Big)\ \partial^\alpha(\delta_0)$. □

Exercice 6.16 Résoudre l'équation $x^k T = 0$, d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

C Solutions fondamentales pour l'opérateur Δ

On travaille dans $\mathbb{R}^d$ euclidien, que l'on munit de sa structure euclidienne standard pour laquelle la base canonique est orthonormée.

Définition 6.17 *Une solution fondamentale pour l'opérateur laplacien* $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial^2/\partial_j^2$ *est une distribution* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\Delta E = \delta_0$*.*

Exemple 6.18 Sur $\mathbb{R}$, la fonction localement intégrable $E_1 : x \mapsto |x|/2$ est une solution fondamentale pour l'opérateur Δ en dimension 1 (dérivée seconde).

Cette assertion résulte de la formule des sauts, une première fois “sans saut” pour voir que $E_1' = -(1/2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} + (1/2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$, puis une seconde fois pour voir que $E_1'' = \delta_0$.

Notation 6.19 Pour $d \ge 2$, on note $\omega_d = \sigma(\mathbb{S}^{d-1})$ le volume $(d-1)$-dimensionnel de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ (voir le chapitre 11 pour la définition de la mesure superficielle σ, ainsi que l'exercice 11.21 pour une valeur explicite de ω_d). On a notamment $\omega_2 = 2\pi$ et $\omega_3 = 4\pi/3$.

On introduit les fonctions localement intégrables suivantes sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} &E_2 : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2\pi}\log\|x\| \in \mathbb{R} && \text{si } d = 2\\ &E_d : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{-1}{(d-2)\omega_d}\|x\|^{2-d} \in \mathbb{R} && \text{si } d \ge 3.\end{aligned}$$

Théorème 6.20 *Pour chaque* $d \ge 2$*, on a*

$$\Delta E_d = \delta_0\,.$$

Autrement dit, E_d *est une solution fondamentale pour le laplacien sur* $\mathbb{R}^d$*.*

Nous donnons une première preuve de ce résultat. Nous le retrouverons ultérieurement, comme application de la formule des sauts en dimension supérieure, à la proposition 11.24.

Remarque 6.21 Comment peut-on pressentir ces solutions fondamentales ? L'opérateur Δ s'obtient en prenant la trace de la Hessienne, relativement à une base orthonormée. C'est donc un opérateur invariant par rotation (voir la remarque 9.13 et l'exemple 9.14). Il est donc raisonnable de chercher une solution fondamentale qui soit également invariante par rotation.

Notons $r(x) = \|x\|$. Une fonction $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est invariante par rotation (on dit également que G est radiale) si elle s'écrit sous la forme $G = g \circ r$ pour une fonction $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Lorsque g est régulière, on a l'égalité $\Delta G = (g'' \circ r) + \frac{d-1}{r}(g' \circ r)$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (voir l'exercice 1.30).

Posons $h = g'$. La fonction G vérifie $\Delta G = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ si et seulement si h est solution de l'équation différentielle $h' + \frac{d-1}{r} h = 0$, autrement dit si h est multiple de la fonction $r \mapsto r^{1-d}$. Il vient alors g multiple de $r \mapsto r^{2-d}$ lorsque $d \geq 3$, et g multiple de $r \mapsto \log r$ lorsque $d = 2$. Les fonctions E_d sont donc harmoniques (i.e. de Laplacien nul) sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Il n'y a plus qu'à étudier ce qui se passe au voisinage de l'origine.

On commence la preuve du théorème 6.20 par un lemme.

Lemme 6.22 *Soit* $T = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \, \partial^\alpha \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *une distribution supportée en l'origine. Alors* T *est homogène, de degré* $-d-k$*, si et seulement si les seuls coefficients non nuls dans cette combinaison linéaire correspondent aux multi-indices* α *tels que* $|\alpha| = k$*.*

Preuve On a déjà vu que la condition est suffisante (exemple 3.21 et lemme 3.22). Montrons qu'elle est nécessaire. La distribution T est homogène de degré $-d-k$ si et seulement si on a l'égalité $\langle T, \varphi_t \rangle = t^k \langle T, \varphi \rangle$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$. Chaque distribution $\partial^\alpha \delta_0$ étant homogène de degré $-d - |\alpha|$, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$:

$$\langle T, \varphi_t \rangle = \langle \sum_{|\alpha| \leq p} t^{|\alpha|} \, c_\alpha \, \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle \, .$$

Il suit que $T = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \, \partial^\alpha \delta_0$ est homogène de degré $-d-k$ si et seulemet si on a l'égalité

$$\sum_{|\alpha| \leq p} t^k c_\alpha \, \partial^\alpha \delta_0 = \sum_{|\alpha| \leq p} t^{|\alpha|} \, c_\alpha \, \partial^\alpha \delta_0$$

pour tout $t > 0$. Les $(\partial^\alpha \delta_0)$ étant linéairement indépendants, c'est le cas si et seulement si on a, pour tout $|\alpha| \leq p$ et tout $t > 0$, l'égalité

$$t^k c_\alpha = t^{|\alpha|} \, c_\alpha \, ,$$

soit $c_\alpha = 0$ lorsque $|\alpha| \neq k$. $\square$

Exercice 6.23 Soit $(S_j)_{1 \leq j \leq n}$ des distributions non nulles sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que chaque S_j est homogène de degré k_j avec $k_i \neq k_j$ lorsque $i \neq j$. Montrer que cette famille est libre, puis retrouver le résultat du lemme 6.22.

Preuve du théorème 6.20

La fonction E_d est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (exercice 1.31). Elle définit donc une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

On a vu à la remarque 6.21 que $\Delta E_d = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Le laplacien ΔE_d est supporté par l'origine, c'est donc une combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en l'origine.

Pour voir que ΔE_d est un multiple de δ_0, il va suffire de raisonner par homogénéité.

• Supposons en un premier temps que $d \geq 3$. Dans ce cas, la fonction E_d est homogène de degré $2-d$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et il en va de même de la distribution $E_d \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ qui lui est associée. Le lemme 3.22 assure que $\Delta E_d \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution homogène de degré $-d$. D'autre part, le lemme 6.22 assure que les seules distributions homogènes de degré $-d$ supportées par l'origine sont les multiples de la masse de Dirac en l'origine. Il existe donc une constante c_d, qui reste à déterminer, telle que $\Delta E_d = c_d \delta_0$.

Pour déterminer c_d, on va tester ΔE_d sur une fonction plateau $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ invariante par rotation, avec $\rho \equiv 1$ au voisinage de l'origine. On se permettra d'écrire $\rho = \rho(r)$. On a alors en intégrant en coordonnées sphériques (proposition 11.20) :

$$\begin{aligned}\langle \Delta r^{2-d}, \rho\rangle &= \langle r^{2-d}, \Delta\rho\rangle \\ &= \omega_d \int_1^\infty r^{2-d}\left(\rho'' + \frac{d-1}{r}\rho'\right) r^{d-1}\, dr \\ &= \omega_d \int_1^\infty \big(r\rho'' + (d-1)\rho'\big)\, dr = (2-d)\omega_d\end{aligned}$$

après une intégration par parties. □

• Lorsque $d = 2$, la distribution E_2 n'est plus homogène. Mais on a néanmoins, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}\langle \Delta \log\|x\|, \varphi_t(x)\rangle &= \langle \log\|x\|, (\Delta\varphi_t)(x)\rangle \\ &= \int \log\|x\|\; t^2\,(\Delta\varphi)(tx)\, dx \\ &= \int (\log\|y\| - \log t)\ (\Delta\varphi)(y)\, dy \\ &= \langle \Delta \log\|x\|, \varphi\rangle - \log t \int \Delta\varphi(y)\, dy\,,\end{aligned}$$

avec le changement de variables $y = tx$. Le théorème de Fubini assure que $\int \Delta\varphi = 0$. Il vient donc que ΔE_2 est homogène de degré -2. On conclut alors comme dans le cas précédent. □

Remarque 6.24 Le fait que les solutions fondamentales E_d du laplacien soient de support singulier l'origine est d'une importance capitale. Voir en effet le théorème 7.27 de régularité elliptique du laplacien.

7. Convolution et EDP

A Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$

Nous commençons par introduire la convolée d'une distribution et d'une fonction. Cette première étape nous permettra, au paragraphe D, de définir plus généralement la convolée de deux distributions.

La définition et les propriétés essentielles de la convolution des fonctions ont été rappelées au paragraphe 1.C. En particulier, lorsque $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la convolée $f * \varphi$ est bien définie : c'est la fonction de classe C^∞ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy = \langle f, \tau_x(\varphi^\vee)\rangle \tag{7.1}$$

où $\varphi^\vee : y \mapsto \varphi(-y)$ et $\tau_x\varphi : y \mapsto \varphi(y-x)$. De plus, on peut dériver sous le signe intégrale avec $\partial^\alpha(f * \varphi) = f * (\partial^\alpha \varphi)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution associée à la fonction localement intégrable $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On observe que la définition (7.1) peut également s'écrire

$$f * \varphi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle T_f, \tau_x(\varphi^\vee)\rangle \in \mathbb{C}\,.$$

Sous cette forme, nous sommes prêts à étendre cette définition à la convolée d'une distribution quelconque et d'une fonction test.

Définition 7.1 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. La convolée $T * \varphi$ est la fonction définie par*

$$T * \varphi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle T, \tau_x(\varphi^\vee)\rangle \in \mathbb{C}\,. \tag{7.2}$$

Observons que cette définition fait sens car toutes les fonctions $\tau_x(\varphi^\vee)$ sont des fonctions tests.

Exemple 7.2 Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\delta_a * \varphi = \tau_a\varphi$. En particulier, $\delta_0 * \varphi = \varphi$.

Sans surprise au vu de ce que l'on sait de la convolution des fonctions (proposition 1.13), on a les propriétés suivantes.

Proposition 7.3 1. *La convolée $T * \varphi$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ avec, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les égalités*

$$\partial^\alpha(T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha T * \varphi\,.$$

2. *Les supports vérifient l'inclusion*

$$\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi\,.$$

En particulier, pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $T * \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.
3. *L'application $(T, \varphi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto T * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est bilinéaire.*

Preuve Soient $(y_1, \dots, y_d)$ les coordonnées relatives à la base canonique $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, le résultat de l'exercice 2.6 assure que

$$(T * \varphi)(x + h) - (T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_h(\tau_x(\varphi^\vee)) - \tau_x(\varphi^\vee)\rangle \longrightarrow 0\,.$$

lorsque $h \to 0$ dans $\mathbb{R}^d$. Donc la fonction $T * \varphi$ est continue.

Soit maintenant $1 \leq j \leq d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{t}\left((T * \varphi)(x + te_j) - (T * \varphi)(x)\right) = \langle T, \frac{1}{t}\left(\tau_{te_j}(\tau_x(\varphi^\vee)) - \tau_x(\varphi^\vee)\right)\rangle\,.$$

Notons $\psi = \tau_x(\varphi^\vee)$. On a vu à l'exercice 2.6 que les fonctions $(\tau_{te_j}\psi - \psi)/t$ convergent dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vers $-\partial_j \psi$ lorsque $t \to 0$. Il suit que la fonction $T * \varphi$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 avec

$$\partial_j(T * \varphi)(x) = -\langle T, \partial_j(\tau_x(\varphi^\vee))\rangle = \langle \partial_j T, \tau_x(\varphi^\vee)\rangle = (\partial_j T * \varphi)(x)\,.$$

Par ailleurs, puisque $\partial_j(\varphi^\vee) = -(\partial_j \varphi)^\vee$, il vient

$$\partial_j\left(\tau_x(\varphi^\vee)\right) = \tau_x\left(\partial_j(\varphi^\vee)\right) = -\tau_x\left((\partial_j \varphi)^\vee\right)$$

d'où également

$$\partial_j(T * \varphi) = T * \partial_j \varphi\,.$$

Le premier point assure que ces dérivées partielles sont continues, et donc que $T * \varphi$ est de classe C^1. On conclut par récurrence sur l'ordre de dérivation.

2. On a $\operatorname{supp}(\varphi^\vee) = -\operatorname{supp}\varphi$, donc $\operatorname{supp}(\tau_x(\varphi^\vee)) = -\operatorname{supp}\varphi + x$. Il suit que, lorsque $x \notin \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi$, on a $\operatorname{supp}(\tau_x(\varphi^\vee)) \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ et donc $T * \varphi(x) = 0$.

3. Immédiat. □

Exemple 7.4 Pour $a \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\alpha(\delta_a * \varphi) = \partial^\alpha \delta_a * \varphi = \delta_a * \partial^\alpha \varphi = \tau_a(\partial^a \varphi)$.

En particulier, $\partial^\alpha \delta_0 * \varphi = \partial^\alpha \varphi$: dériver, c'est convoler !

Maintenant que l'on a défini la convolution d'une distribution et d'une fonction, il s'agit de savoir s'en servir. Commençons par une remarque.

Lemme 7.5 *Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et deux fonctions tests $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a les égalités*

$$\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle f, \varphi^\vee * \psi \rangle = \langle \varphi, f^\vee * \psi \rangle .$$

On a identifié les fonctions aux distributions qui leurs sont associées (soit $f*\varphi$ à $T_{f*\varphi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, f à $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et φ à $T_\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$). Les espaces dans lesquels vivent les couples intervenant dans les expressions ci-dessus sont successivement $\langle C^\infty \subset \mathcal{D}', \mathcal{D}\rangle$, puis $\langle L^1_{\text{loc}} \subset \mathcal{D}', \mathcal{D}\rangle$ et enfin $\langle \mathcal{D} \subset \mathcal{E}', C^\infty\rangle$.

Preuve Vérifier que la fonction $(t, x) \mapsto f(t)\varphi(x - t)\psi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et lui appliquer le théorème de Fubini. □

Les expressions du lemme 7.5 conservent un sens lorsqu'on remplace f (ou plutôt T_f) par une distribution quelconque, avec ici des appariements $\langle C^\infty \subset \mathcal{D}', \mathcal{D}\rangle$, puis $\langle \mathcal{D}', \mathcal{D}\rangle$ et enfin $\langle \mathcal{D} \subset \mathcal{E}', C^\infty\rangle$. Le principe de naturalité nous souffle donc à l'oreille la proposition suivante.

Proposition 7.6 *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et deux fonctions tests $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a les égalités*

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \varphi^\vee * \psi \rangle = \langle \varphi, T^\vee * \psi \rangle . \tag{7.3}$$

Avant de passer à la preuve de cette proposition, nous dégageons un lemme technique. Une distribution est une forme linéaire, elle commute donc aux sommes finies. Une intégrale n'étant autre qu'une limite de sommes finies, il est raisonnable que l'on puisse échanger distribution et intégrale, sous des hypothèses raisonnables. C'est ce qu'affirme le lemme suivant.

Lemme 7.7 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. On a l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \Phi(x, \cdot)\rangle \, dx = \langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, \cdot) \, dx \rangle ,$$

où l'on note $\Phi(x, \cdot) : y \mapsto \Phi(x, y)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, \cdot)\, dx : y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, y)\, dx$.

Preuve Etudions séparément les deux membres de cette égalité.

Membre de gauche. La fonction $x \mapsto \langle T, \Phi(x, \cdot)\rangle$ est bien définie, et elle est à support compact. De plus, elle est continue (cela suit du résultat de la proposition 2.7). L'intégrale du membre de gauche est donc bien définie et s'obtient comme limite de sommes de Riemann, soit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \Phi(x, \cdot)\rangle \, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle T, \Phi(\frac{k}{n}, \cdot)\rangle .$$

Noter que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la somme ci-dessus est à support fini puisque la fonction Φ est à support compact.

Membre de droite. On a convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ de la suite de fonctions

$$y \mapsto \frac{1}{n^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Phi(\frac{k}{n}, y) \quad \text{vers la fonction} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, y)\, dx$$

lorsque $n \to \infty$. En effet les supports restent dans un compact fixe de $\mathbb{R}^d$ (car Φ est à support compact). On a convergence uniforme par uniforme continuité de Φ. Et la convergence uniforme de chaque dérivée suit du même argument puisqu'on peut dériver sous le signe intégrale la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, y)\, dx$. Puisque T est une distribution, il suit que

$$\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, \cdot)\, dx \,\rangle = \lim_{n \to \infty} \langle T, \frac{1}{n^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Phi(\frac{k}{n}, \cdot) \,\rangle\,.$$

De nouveau, chacune des sommes ci-dessus (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est une somme finie.

Conclusion. Notre distribution T étant linéaire (et les sommes étant en fait des sommes finies) on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\frac{1}{n^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle T, \Phi(\frac{k}{n}, \cdot) \rangle = \langle T, \frac{1}{n^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Phi(\frac{k}{n}, \cdot) \,\rangle\,.$$

Ces égalités passent à la limite quand $n \to \infty$ pour donner le résultat. □

Preuve de la proposition • Par définition de $T * \varphi$, et linéarité de T, on a

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \tau_x(\varphi^\vee) \rangle\, \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T,\ \psi(x) \tau_x(\varphi^\vee) \rangle\, dx\,.$$

Appliquons le lemme 7.7 à la fonction $\Phi : (x, y) \mapsto \psi(x)\varphi(x - y)$. Il vient

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) \tau_x(\varphi^\vee)\, dx \rangle = \langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) \varphi(x - \cdot)\, dx \rangle = \langle T, \varphi^\vee * \psi \rangle\,.$$

• Pour $y \in \mathbb{R}^d$, on a les égalités

$$(\varphi^\vee * \psi)(y) = \int \varphi(-x)\psi(y - x)\, dx = \int \varphi(x)\psi(y + x)\, dx\,.$$

On applique cette fois-ci le lemme 7.7 à la fonction $\Phi : (x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(x+y)$. En observant que $\psi(x + y) = (\tau_{-x}\psi)(y)$ il vient, par linéarité de T :

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi^\vee * \psi \rangle &= \int \varphi(x)\, \langle T, \tau_{-x}\psi \rangle\, dx \\
&= \int \varphi(x)\, \langle T^\vee, \tau_x(\psi^\vee) \rangle\, dx \\
&= \int \varphi(x)\, (T^\vee * \psi)(x)\, dx \\
&= \langle \varphi, T^\vee * \psi \rangle\,.
\end{aligned}$$

□

B Régulariser une distribution

Corollaire 7.8 Régularisation *Soit* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite régularisante. Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$*. On a convergence* $T * \rho_n \longrightarrow T$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$*.*

Preuve Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On vérifie facilement que la suite $(\overset{\vee}{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également une suite régularisante (définition 1.19). On a donc convergence $\overset{\vee}{\rho_n} * \varphi \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, et le résultat annoncé suit de l'égalité (proposition 7.6)

$$\langle T * \rho_n, \varphi\rangle = \langle T, \overset{\vee}{\rho_n} * \varphi\rangle\,. \qquad \square$$

Corollaire 7.9 Troncature et régularisation
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert et* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Alors* T *est limite, dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, d'une suite de distributions* $(T_{\psi_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *associées à des fonctions tests* $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$*.*

Preuve On introduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le compact $K_n \subset \Omega$ défini par

$$K_n = \{x \in \Omega \,|\, d(x, {}^c\Omega) \geq 1/n\} \cap \overline{B(0,n)}\,.$$

Cette famille (K_n) constitue une exhaustion de Ω par des compacts, voir la remarque 1.24 : tout compact $K \subset \Omega$ est donc inclus dans l'un des K_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Choisissons une fonction plateau $\chi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi_n \equiv 1$ sur K_n et $\operatorname{supp}\chi_n \subset \mathring{K}_{n+1}$. La distribution $\chi_n T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ se prolonge en une distribution $\chi_n T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (voir la remarque 6.6). Soit également (ρ_n) une approximation de l'unité, telle que $\operatorname{supp}\rho_n \subset B(0, 1/(2n))$. On définit alors $\psi_n = (\chi_n T) * \rho_n$, et l'on remarque que $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est à support dans Ω.

On va montrer que $\psi_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit donc une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a les égalités

$$\langle \psi_n, \varphi\rangle = \langle (\chi_n T) * \rho_n, \varphi\rangle = \langle \chi_n T, \overset{\vee}{\rho_n} * \varphi\rangle = \langle T, \chi_n\,(\overset{\vee}{\rho_n} * \varphi)\rangle\,.$$

Lorsque n est assez grand, le support de $\overset{\vee}{\rho_n} * \varphi$ reste confiné dans un compact fixe $K \subset \Omega$. Il existe alors un entier $N(K)$ pour lequel $K \subset K_n$ dès que $n \geq N(K)$, et donc $\chi_n\,(\overset{\vee}{\rho_n} * \varphi) = \overset{\vee}{\rho_n} * \varphi \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$. On a donc bien

$$\langle \psi_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$$

lorsque $n \to \infty$, ce qu'on voulait. $\square$

Comme application de la régularisation par convolution, nous allons démontrer le résultat suivant - qui semble bien naturel mais dont la preuve ne s'impose pas a priori... Ce résultat nous servira notamment dans la preuve du théorème 9.9.

Proposition 7.10 *Soit* $T = T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *la distribution définie par une fonction continue* $f \in C^0(\Omega)$*, où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*.*

On suppose que, pour chaque $1 \leq j \leq d$ *(resp. pour chaque* $\alpha \in \mathbb{N}^d$*), la dérivée partielle* $\partial_j T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *(resp.* $\partial^\alpha T$*) est définie par une fonction continue. Alors* T *est définie par une fonction de classe* C^1 *(resp.* C^∞*).*

Preuve Il suffit de prouver la première assertion, la seconde s'en déduit par récurrence sur l'ordre de dérivation. Nous noterons $g_j \in C^0(\Omega)$ la fonction continue dont provient la distribution $\partial_j T$ ($1 \leq j \leq d$).

Premier cas. Supposons en un premier temps que $\Omega = \mathbb{R}^d$. Donnons nous une suite régularisante (ρ_n), et introduisons la suite de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ définie par $f_n = f * \rho_n$. Puisque $f_n = T * \rho_n$, on a $\partial_j f_n = \partial_j T * \rho_n = g_j * \rho_n$ au sens des distributions.

Les fonctions f et g_j (pour $1 \leq j \leq d$) étant continues, on a convergence uniforme locale $f_n \to f$ et $\partial_j f_n \to g_j$ lorsque $n \to \infty$. Le théorème sur les suites de fonctions de classe C^1 montre donc que la fonction $f = \lim f_n$ est de classe C^1 (avec $\partial_j f = g_j$).

Cas général. Maintenant $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert quelconque. Le résultat à montrer étant de nature locale, on va pouvoir se ramener au cas précédent. Soient donc $x \in \Omega$ et une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\chi \equiv 1$ au voisinage du point x. On introduit la distribution tronquée $S = \chi T \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. La distribution S est définie par la fonction continue $\chi f \in C^0(\mathbb{R}^d)$, et ses dérivées partielles $\partial_j S = (\partial_j \chi)\, T + \chi\, (\partial_j T)$ sont définies par les fonctions continues $(\partial_j \chi)\, f + \chi\, g_j$ pour $1 \leq j \leq p$. Le premier cas assure que la foncton $\chi\, f$ est de classe C^1, et donc que f est de classe C^1 au voisinage du point x que l'on avait choisi. $\square$

C Convolution $\mathcal{E}' * \mathcal{E}$

Pour définir la convolée de deux fonctions localement intégrables, il suffit que l'un des deux arguments du produit de convolution – peu importe lequel – soit à support compact pour que leur convolée soit définie. Nous avons déjà défini la convolée $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$, nous définissons maintenant la convolée $\mathcal{E}' * \mathcal{E}$.

Définition 7.11 *Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. La convolée $S * \varphi$ est la fonction définie par*

$$S * \varphi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle S, \tau_x(\varphi^\vee) \rangle \in \mathbb{C}\,. \tag{7.4}$$

Observons que cette définition fait sens car toutes les fonctions $\tau_x(\varphi^\vee)$ sont des fonctions de classe C^∞ et on a supposé que la distribution S est à support compact.

Exemple 7.12 Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, on a $\delta_a * \varphi = \tau_a \varphi$. En particulier, $\delta_0 * \varphi = \varphi$.

Sans surprise, on a les propriétés suivantes qui font écho aux propositions 7.3 et 7.6.

Proposition 7.13 1. *La convolée $S * \varphi$ d'une distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction régulière $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ avec, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les égalités*

$$\partial^\alpha (S * \varphi) = S * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha S * \varphi\,.$$

2. *Les supports vérifient l'inclusion*

$$\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi\,.$$

3. *L'application $(S, \varphi) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \mapsto S * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est bilinéaire.*
4. *Pour $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ et une fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\langle S * \varphi, \psi \rangle = \langle S, \varphi^\vee * \psi \rangle = \langle \varphi, S^\vee * \psi \rangle\,.$$

Dans les égalités ci-dessus, on a respectivement les appariements

$$\langle \mathcal{E} \subset \mathcal{D}', \mathcal{D} \rangle, \quad \langle \mathcal{E}', \mathcal{E} \rangle, \quad \langle \mathcal{E} \subset \mathcal{D}', \mathcal{D} \rangle\,.$$

Preuve La preuve est laissée au lecteur. Il pourra au choix reprendre les arguments précédents, ou bien se ramener au cas $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$ en localisant. □

D Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$

Dans ce paragraphe, nous apprenons à convoler deux distributions, dont l'une est à support compact. Ceci nous permettra d'utiliser des solutions fondamentales (voir les définitions 6.17 et 7.20) pour montrer notamment des théorèmes de régularité a priori pour les solutions d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants, comme $\Delta T = S$ ou plus généralement $P(\partial)T = S$ (proposition 7.22 et théorèmes de régularité elliptique 7.27 et 9.9).

La proposition 7.6 nous fournit un angle d'attaque pour introduire, en suivant le désormais familier principe de naturalité, la convolée de deux distributions.

Proposition 7.14 1 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. L'expression*

$$T * S : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto \langle T, S^\vee * \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

définit une distribution $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. *On a, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, l'égalité*

$$\partial^\alpha (T * S) = T * \partial^\alpha S = \partial^\alpha T * S\,.$$

3. *Les supports vérifient l'inclusion*

$$\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\ S\,.$$

4. *L'application $(T, S) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \mapsto T * S \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est bilinéaire.*
5. *Enfin, on a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ les égalités*

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, S^\vee * \varphi \rangle = \langle S, T^\vee * \varphi \rangle\,. \tag{7.5}$$

Dans les égalités (7.5) ci-dessus, on a respectivement les appariements

$$\langle \mathcal{D}', \mathcal{D} \rangle, \quad \langle \mathcal{D}', \mathcal{D} \rangle, \quad \langle \mathcal{E}', \mathcal{E} \rangle .$$

Remarque 7.15 Dans l'équation (7.5), qui fait écho à (7.3), la première égalité reprend désormais simplement la définition de la distribution $T * S$, l'information nouvelle se situant dans la dernière égalité.

L'identité (7.5) nous permet de définir la convolée $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de deux distributions S et T, dont l'une au moins est à support compact, de sorte que

$$S * T = T * S .$$

Il suffit, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, de poser $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, S^\vee * \varphi \rangle = \langle S, T^\vee * \varphi \rangle$.

Exemple 7.16 Pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, un point $a \in \mathbb{R}^d$ et un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $(\partial^\alpha \delta_a) * T = \tau_a(\partial^\alpha T)$. En particulier, δ_0 est une unité pour le produit de convolution.

La preuve de la proposition 7.14 reprend des idées désormais familières. Nous la reportons à la section F pour en arriver plus vite aux conséquences. Le résultat suivant sera d'une importance cruciale dans les résultats de régularité elliptique.

Proposition 7.17 *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On a l'inclusion*

$$\operatorname{supp\,sing}(T * S) \subset \operatorname{supp\,sing} T + \operatorname{supp\,sing} S .$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. On choisit, grâce au corollaire 1.27, une fonction plateau $\chi_S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_S \equiv 1$ au voisinage de $\operatorname{supp\,sing}(S)$ et avec $\operatorname{supp}(\chi_S) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\operatorname{supp\,sing} S)$. La même construction (convoler la fonction indicatrice d'un voisinage de $\operatorname{supp\,sing}(T)$ par une fonction test positive de masse 1) donne une fonction $\chi_T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_T \equiv 1$ au voisinage de $\operatorname{supp\,sing}(T)$ et avec $\operatorname{supp}(\chi_T) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\operatorname{supp\,sing} T)$.

Par définition du support singulier, les deux distributions $(1-\chi_S)S$ et $(1-\chi_T)T$ sont définies par des fonctions de classe C^∞, et donc

$$\begin{aligned} T * S &= (\chi_T T + (1-\chi_T)T) * (\chi_S S + (1-\chi_S)S) \\ &= (\chi_S S) * (\chi_T T) + F \end{aligned}$$

où la fonction F est de classe C^∞. Il suit que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp\,sing}(T * S) &\subset \operatorname{supp}(\chi_S S) + \operatorname{supp}(\chi_T T) \\ &\subset \mathcal{V}_\varepsilon(\operatorname{supp\,sing} T) + \mathcal{V}_\varepsilon(\operatorname{supp\,sing} S) \\ &\subset \mathcal{V}_{2\varepsilon}(\operatorname{supp\,sing} T + \operatorname{supp\,sing} S) . \end{aligned}$$

Cette inclusion est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$. La somme d'une partie fermée et d'un compact de $\mathbb{R}^d$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$. Le résultat suit. $\square$

E Solutions fondamentales et parametrix

Tous les opérateurs différentiels considérés seront à coefficients constants.

Notation 7.18 Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$.
L'opérateur différentiel à coefficients constants associé sur $\mathbb{R}^d$ est défini par

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha \partial^\alpha \text{ lorsque } P(X_1, \cdots, X_d) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha X^\alpha ,$$

où $X^\alpha = \prod_{j=1}^d X_j^{\alpha_j}$.

Exemple 7.19 Pour le polynôme $P : (X_1, \cdots, X_d) \mapsto \sum_{j=1}^d X_j^2$, on obtient le laplacien $P(\partial) = \sum_{j=1}^d \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \Delta$.

Définition 7.20 *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une solution fondamentale (ou bien, une solution élémentaire) pour l'opérateur $P(\partial)$ lorsque $P(\partial)\, E = \delta_0$.*

Nous avons exhibé des solutions fondamentales pour le laplacien au chapitre 3, section C. Voici un autre exemple qui nous permettra, au corollaire 11.23, de voir la formule de Cauchy avec un œil neuf.

Exercice 7.21 On identifie $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, avec les coordonnées $z = x + iy$, et l'on introduit l'opérateur $\partial_{\bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}$ défini par $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 est holomorphe ssi $\partial_{\bar z} f = 0$.
2. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
3. Montrer que T est homogène, et préciser son degré d'homogénéité.
4. En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $\frac{\partial}{\partial \bar z} T = c\, \delta_0$.
   On montrera à l'exercice 8.25 que $c = \pi$.

Proposition 7.22 *Supposons que l'opérateur différentiel $P(\partial)$ admette une solution fondamentale E. Alors, pour toute distribution à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a l'égalité*

$$P(\partial)(E * S) = S = E * P(\partial) S .$$

En particulier l'opérateur $P(\partial) : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est injectif.

Preuve Immédiate avec la proposition 7.14. □

Remarque 7.23 Tout opérateur différentiel à coefficients constants possède une solution fondamentale[1].

L'application $\Delta : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ n'est pas injective. Par exemple, la distribution associée sur $\mathbb{R}^2$ à la fonction $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$ est harmonique.

1. P. Wagner. A new constructive proof of the Malgrange-Ehrenpreis theorem. Amer. Math. Monthly, 116 :457–462, 2009.

Lorsqu'on est uniquement intéressés par les questions de régularité, on peut travailler "aux fonctions de classe C^∞ près". Ce qui va nous amener à la définition suivante.

Définition 7.24 *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On dit que la distribution $\Pi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une paramétrix pour l'opérateur $P(\partial)$ lorsque $P(\partial)\Pi = \delta_0 + \omega$, où $\omega \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction de classe C^∞.*

Exemple 7.25 Une solution fondamentale pour l'opérateur $P(\partial)$ est à plus forte raison une paramétrix pour ce même opérateur.

Il est beaucoup plus facile de construire une paramétrix qu'une solution fondamentale. Nous construirons, en utilisant la transformée de Fourier, une paramétrix pour tout opérateur différentiel "elliptique" (théorème 9.9).

Exercice 7.26 Soit $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une solution fondamentale pour l'opérateur différentiel $P(\partial)$. On suppose que $\operatorname{supp\,sing}(E) = \{0\}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de l'origine. Montrer que $\chi E_d \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est une paramétrix à support compact pour le laplacien, et que $\operatorname{supp\,sing}(\Pi) = \{0\}$.

Constater que ce résultat s'applique aux opérateurs Δ sur $\mathbb{R}^d$ et $\partial_{\bar{z}}$ sur $\mathbb{C}$.

Théorème 7.27 *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Supposons que $P(\partial)$ admette une paramétrix $\Pi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont le support singulier soit l'origine :* $\operatorname{supp\,sing}(\Pi) = \{0\}$*.*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a alors l'égalité

$$\operatorname{supp\,sing}(T) = \operatorname{supp\,sing}(P(\partial)T)\,.$$

Exemple 7.28 Une distribution harmonique (i.e. telle que $\Delta T = 0$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$), ou bien une distribution holomorphe (i.e. telle que $\partial T/\partial\bar{z}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$) est donc associée à une fonction de classe C^∞ sur cet ouvert, qui est harmonique (ou holomorphe) au sens classique.

Preuve du théorème 7.27 • L'inclusion $\operatorname{supp\,sing}(P(\partial)T) \subset \operatorname{supp\,sing}(T)$ est immédiate. En effet, si la restriction de T à l'ouvert U est associée à une fonction C^∞, il en va de même pour la restriction de $P(\partial)T$ à cet ouvert.

• *Premier cas :* Supposons pour commencer que la distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ soit à support compact. Dans ce cas, T se prolonge (par 0) en une distribution $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (corollaire 6.3 et remarque 6.6). On a alors

$$\begin{aligned} P(\partial)\left(\Pi * \tilde{T}\right) &= (P(\partial)\Pi) * \tilde{T} = \tilde{T} + \omega * \tilde{T} \\ &= \Pi * \left(P(\partial)\tilde{T}\right)\,, \end{aligned}$$

donc, puisque $\omega * \tilde{T}$ est associée à une fonction de classe C^∞ et d'après la proposition 7.17 :

$$\begin{aligned} \operatorname{supp\,sing}(T) = \operatorname{supp\,sing}(\tilde{T}) &= \operatorname{supp\,sing}\left(\Pi * P(\partial)\tilde{T}\right) \\ &\subset \operatorname{supp\,sing} P(\partial)\tilde{T} = \operatorname{supp\,sing} P(\partial)T\,. \end{aligned}$$

• *Cas général :* Maintenant $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution quelconque. Comme dans la preuve de la proposition 6.11, on va pouvoir localiser pour se ramener au cas précédent. Soient donc $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp\,sing} P(\partial)T$ et $V \subset \Omega \setminus \operatorname{supp\,sing} P(\partial)T$ un voisinage de x avec $\overline{V} \subset \Omega$.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau telle que $\chi \equiv 1$ sur V, de sorte que $S = \chi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Le cas précédent assure que $\operatorname{supp\,sing} S = \operatorname{supp\,sing} P(\partial)S$. Puisqu'en restriction à V la distribution $P(\partial)T = P(\partial)S$ est par hypothèse associée à une fonction de classe $C^\infty(V)$, on a $S_{|V}$ définie par une fonction de classe C^∞, et donc $T_{|V}$ définie par une fonction de classe C^∞. □

F Preuve de la proposition 7.14

1. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la convolée $S^\vee * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est (associée à) une fonction test donc $T * S$ est bien définie, et $T * S$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (car les applications T et $\varphi \mapsto S^\vee * \varphi$ sont linéaires). Si la suite de fonctions tests (φ_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ leurs supports restent dans un compact fixe, il en va donc de même pour les supports des $S^\vee * \varphi_n$. De plus, $S^\vee$ étant une distribution, la suite de fonctions $(S^\vee * \varphi_n)$ converge uniformément vers 0, ainsi que chacune de ses dérivées. Il suit que $T * S$ est une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

2. On va utiliser la définition de la convolée de deux distributions (bien sûr !) ainsi que la proposition 7.3. Pour dériver $T * S$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T * S, \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, S^\vee * \partial^\alpha \varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha (S^\vee * \varphi)\rangle = \langle (\partial^\alpha T) * S, \varphi\rangle \,,\end{aligned}$$

ou bien écrire

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, S^\vee * \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha (S^\vee) * \varphi\rangle \\ &= \langle T, (\partial^\alpha S)^\vee * \varphi\rangle = \langle T * (\partial^\alpha S), \varphi\rangle \,.\end{aligned}$$

On a en effet, pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, les égalités

$$(\partial^\alpha f^\vee)(x) = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha f)(-x) = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha f)^\vee(x)\,,$$

ce dont on déduit

$$(\partial^\alpha S)^\vee = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha (S^\vee)\,.$$

3. Même argument qu'à la proposition 7.3.

4. est immédiat.

5. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a défini $\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T, S^\vee * \varphi\rangle$ et on veut voir l'égalité $\langle T * S, \varphi\rangle = \langle S, T^\vee * \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Cette assertion est bien raisonnable puisque, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et deux fonctions test φ, σ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a d'après la proposition 7.6 :

$$\langle T * \sigma, \varphi\rangle = \langle T, \sigma^\vee * \varphi\rangle = \langle \sigma, T^\vee * \varphi\rangle\,.$$

Soient (ρ_n) une suite régularisante et $\sigma_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par $\sigma_n = S * \rho_n$.

Les supports des σ_n restant dans un compact fixe, le corollaire 7.8 assure la convergence de la suite (σ_n) vers S dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ i.e. $\langle \sigma_n, \psi\rangle \to \langle S, \psi\rangle$ pour toute $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. En particulier, $\langle \sigma_n, T^\vee * \varphi\rangle \to \langle S, T^\vee * \varphi\rangle$ lorsque $n \to \infty$.

Pour conclure, il faut montrer que $\langle T, \sigma_n^\vee * \varphi\rangle \to \langle T, S^\vee * \varphi\rangle$ quand $n \to \infty$. Or $\sigma_n \to S$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, donc $\sigma_n^\vee \to S^\vee$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (c'est immédiat) et l'on va montrer que cela assure que $\sigma_n^\vee * \varphi \to S^\vee * \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (c'est un résultat de continuité de la convolution).

Lemme 7.29 *Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et (ρ_n) une suite régularisante.*

Soit $\sigma_n = S * \rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a convergence $\sigma_n^\vee * \varphi \to S^\vee * \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve • Les supports de (σ_n) restent dans compact fixe de $\mathbb{R}^d$, donc ceux des $\sigma_n^\vee * \varphi$ aussi.

• Puisque $\partial^\alpha(\sigma_n^\vee * \varphi) = \sigma_n^\vee * \partial^\alpha\varphi$, il suffit de montrer la convergence uniforme $\sigma_n^\vee * \varphi \to S^\vee * \varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pour avoir la convergence uniforme de toutes les dérivées.

• Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}
(\sigma_n^\vee * \varphi - S^\vee * \varphi)(x) &= \langle \sigma_n^\vee, \tau_x(\varphi^\vee)\rangle - \langle S^\vee, \tau_x(\varphi^\vee)\rangle\\
&= \langle \sigma_n^\vee, (\tau_{-x}\varphi)^\vee\rangle - \langle S^\vee, (\tau_{-x}\varphi)^\vee\rangle\\
&= \langle S * \rho_n, \tau_{-x}\varphi\rangle - \langle S, \tau_{-x}\varphi\rangle\\
&= \langle S, \rho_n^\vee * \tau_{-x}\varphi - \tau_{-x}\varphi\rangle\\
&= \langle S, \tau_{-x}\big(\rho_n^\vee * \varphi - \varphi\big)\rangle
\end{aligned}$$

puisque la convolution commute aux translations. Il existe donc une constante c et un entier k pour lesquels, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
|(\sigma_n^\vee * \varphi - S^\vee * \varphi)(x)| &\le c \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha\big(\tau_{-x}(\rho_n^\vee * \varphi - \varphi)\big)\|_\infty\\
&= c \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha(\rho_n^\vee * \varphi) - \partial^\alpha\varphi\big)\|_\infty\\
&= c \sum_{|\alpha|\le k} \|(\rho_n^\vee * \partial^\alpha\varphi) - \partial^\alpha\varphi\big)\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

puisque la suite $(\rho_n^\vee)$ est une suite régularisante. $\square$

8. Transformation de Fourier

A Les EDP et la transformation de Fourier

L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni du produit scalaire canonique, noté $(x, \xi) \mapsto x \cdot \xi$. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction continue bornée $\mathcal{F}f$, que l'on notera également $\hat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{F}f : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx \in \mathbb{C}\,.$$

Nous allons étendre la transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_b^0(\mathbb{R}^d)$$

en une application linéaire bijective

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace des distributions tempérées (définition 8.19). Une des propriétés fondamentales de la transformation de Fourier est que cet opérateur échange dérivation et multiplication par un polynôme. On aura en effet, pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les égalités

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|} x^\alpha\, \hat{T} \;\text{ et }\; \mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{T}.$$

On comprend donc maintenant l'intérêt de la transformation de Fourier dans l'étude des EDP à coefficients constants. A travers le miroir que constitue la transformation de Fourier $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\text{Résoudre } P(\partial)T = S} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\text{Résoudre } P(i\xi)\hat{T} = \hat{S}}\,.$$

On y gagne, car il est bien plus simple de diviser une fonction ou une distribution par une fonction régulière (au moins lorsque cette fonction ne s'annule pas...), que de résoudre une EDP : voir la proposition 9.3 ou, plus profond, le théorème 9.9.

B L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Définition 8.1 *Une fonction* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *de classe* C^∞ *est à décroissance rapide lorsque, pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$*, la fonction* $x \in \mathbb{R}^d \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \in \mathbb{C}$ *est bornée.*

Remarque 8.2 Revoir les conditions équivalentes de l'exercice 1.29.

Définition 8.3 *L'espace de Schwartz*[1] $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est l'espace des fonctions à décroissance rapide.*

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ *et toute fonction* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*, on notera*

$$N_p(\varphi) = \max_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty \,.$$

Remarque 8.4 On aurait pu choisir de remplacer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'expression N_p par

$$\tilde{N}_p(\varphi) = \max_{|\beta| \le p} \|(1 + \|x\|)^p \, \partial^\beta \varphi\|_\infty$$

(ou encore d'autres variantes). Cela n'aurait pas eu d'incidence sur la suite. On a en effet l'inégalité $c_p^{-1} \tilde{N}_p \le N_p \le c_p \tilde{N}_p$ pour une constante $c_p > 1$.

Exemple 8.5 On a l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Pour tout complexe $a \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\operatorname{Re} a > 0$ et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$, la fonction $x \mapsto P(x) e^{-a\|x\|^2}$ appartient à l'espace de Schwartz.

La fonction $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{-1}$ n'est pas dans l'espace de Schwartz.

Proposition 8.6 *Pour tous* $1 \le p \le \infty$*, on a l'inclusion* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, il existe une constante c telle que

$$\|\varphi\|_1 \le c \, N_{d+1}(\varphi) \tag{8.1}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Traitons le cas $p = 1$. Le cas $1 < p \le \infty$ est laissé en exercice.

En passant en coordonnées sphériques (proposition 11.20), on constate que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|)^{-(d+1)} \, dx$ est de même nature que l'intégrale de variable réelle $\int_1^\infty r^{-(d+1)} r^{d-1} \, dr = \int_1^\infty r^{-2} \, dr$ et est donc convergente, avec pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|\varphi(x)| \le \tilde{N}_{d+1}(\varphi) \, (1 + \|x\|)^{-(d+1)} \,. \qquad \square$$

Une fois définie la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (exemple 12.10.6), on pourra préciser l'énoncé en disant que l'injection $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue. C'est ce qu'exprime quantitativement (8.1) lorsque $p = 1$ (nous n'utiliserons pas les estimées explicites pour les injections dans les autres espaces L^p).

1. Du nom du mathématicien Laurent Schwartz (1915-2002)

Définition 8.7 *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est à croissance lente lorsque, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel*

$$(1 + \|x\|)^{-n}(\partial^\alpha f)(x) \to 0 \text{ lorsque } \|x\| \to \infty.$$

On notera $\mathcal{O}_M \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace vectoriel des fonctions à croissance lente (ce sont les "Opérateurs de Multiplication").

Exemple 8.8 Une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^d$ est à croissance lente.

Pour $a \in \mathbb{R}^d$, soit la fonction $\mathrm{e}_a : x \in \mathbb{R}^d \to e^{ia\cdot x} \in \mathbb{C}$ où, rappelons-le, $a \cdot x$ désigne le produit scalaire de ces deux vecteurs. Ces fonctions e_a appartiennent à $\mathcal{O}_M$.

Proposition 8.9 Dérivation et multiplication dans l'espace de Schwartz

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel. Il est stable par dérivation, et par multiplication par les fonctions $f \in \mathcal{O}_M$.

Soit plus précisément $f \in \mathcal{O}_M$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c = c(p, f)$ et un entier $q = q(p, f)$ pour lesquels $N_p(f\varphi) \leq cN_q(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c = c(p, q)$ telle qu'on ait pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tous multi-indices $|\alpha| \leq q$ et $|\beta| \leq q$, la majoration

$$N_p(x^\alpha \partial^\beta \varphi) \leq c\, N_{p+q}(\varphi)\,.$$

Preuve La preuve, élémentaire, est laissée au lecteur. □

A défaut de topologie, contentons-nous pour l'instant d'introduire les suites convergentes dans l'espace de Schwartz.

Définition 8.10 Suites convergentes dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Soient $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On dit que la suite (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lorsque, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $N_p(\varphi_n - \varphi) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque 8.11 Cela revient à dire que $\|x^\alpha \partial^\beta(\varphi_n - \varphi)\|_\infty \to 0$, pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, lorsque $n \to \infty$. On a dit plus haut qu'alors $\|\varphi_n - \varphi\|_p \to 0$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$: la convergence dans $\mathcal{S}$ implique la convergence dans tous les L^p.

Proposition 8.12 Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *Toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est limite, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, d'une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve On procède par troncature. On commence par choisir une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $0 \leq \chi \leq 1$, et $\chi \equiv 1$ sur $B(0, 1)$. On définit ensuite $\chi_n(x) = \chi(x/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $\chi_n \equiv 1$ sur $B(0, n)$. On note que, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\|\partial^\alpha \chi_n\|_\infty = n^{-|\alpha|}c_\alpha \leq c_\alpha$ où $c_\alpha = \|\partial^\alpha \chi\|_\infty$ ne dépend pas de n.

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on pose $\varphi_n = \chi_n \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ deux multi-indices, et $p = \max(|\alpha|, |\beta|)$. Par dérivation d'un produit de deux fonctions (formule de Leibniz), on observe qu'il existe des constantes $c = c(d, p, \chi)$ (amenées à changer d'une ligne à l'autre) telles que :

$$\begin{aligned}\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi - \varphi_n)\|_\infty &= \|x^\alpha \partial^\beta \left((1-\chi_n)\right) \varphi\|_\infty \\ &\leq c \sum_{\gamma \leq \beta} \|\partial^{\beta-\gamma}(1-\chi_n)\; x^\alpha \partial^\gamma \varphi\|_\infty \\ &\leq c \sum_{\gamma \leq \beta} \sup_{\|x\| \geq n} \{|x^\alpha \partial^\gamma \varphi(x)|\} \\ &\leq (c/n) \sum_{|\gamma| \leq p} \|(1+\|x\|)^{p+1}\, \partial^\gamma \varphi(x)\|_\infty \,.\end{aligned}$$

Il vient donc (remarque 8.4),

$$N_p(\varphi - \varphi_n) \leq (c/n)\, N_{p+1}(\varphi)\,. \qquad \square$$

C Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Nous allons voir que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ fournit un premier cadre idyllique (le cadre ultime sera celui des distributions tempérées) pour définir la transformation de Fourier.

Notation 8.13 On désignera par $(x_1, \cdots, x_d)$ les coordonnées “au départ”, et par $(\xi_1, \cdots, \xi_d)$ les coordonnées “à l'arrivée”.

On rappelle que τ_a désigne l'opérateur de translation par $a \in \mathbb{R}^d$ avec $(\tau_a \varphi)(x) = \varphi(x-a)$, et que l'on a défini $\mathrm{e}_a : x \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{ia\cdot x} \in \mathbb{C}$.

Définition 8.14 *La transformée de Fourier de la fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est la fonction définie par*

$$\mathcal{F}(\varphi) = \hat{\varphi} : \xi \in \mathbb{R}^d \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx \in \mathbb{C}\,. \tag{8.2}$$

Ce sont notamment les propriétés suivantes qui font la pertinence de la transformation de Fourier.

Proposition 8.15 Propriétés fonctionnelles de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

1. La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est bien définie et linéaire, avec pour tout $1 \leq j \leq d$ les relations fonctionnelles

$$\mathcal{F}(x_j \varphi) = i\, \partial_j (\mathcal{F}\varphi) \tag{8.3a}$$

$$\mathcal{F}(\partial_j \varphi) = i\, \xi_j \mathcal{F}(\varphi)\,. \tag{8.3b}$$

2. De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{F}(\tau_a \varphi) = \mathrm{e}_{-a} \mathcal{F}\varphi \tag{8.4a}$$

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}_a \varphi) = \tau_a \hat{\varphi}\,. \tag{8.4b}$$

La transformée de Fourier échange donc dérivation et multiplication par un polynôme d'une part, translation et multiplication par un caractère e_a d'autre part.

Preuve Puisqu'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est intégrable, sa transformée de Fourier est bien définie. Le théorème de continuité sous l'intégrale montre que $\hat{\varphi}$ est une fonction continue, bornée par $\|\hat{\varphi}\|_\infty \le \|\varphi\|_1$. La linéarité de l'intégrale assure que $\hat{\varphi}$ dépend linéairement de φ.

1. On peut dériver sous le signe intégrale pour obtenir que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 et que la relation (8.3a) est vérifiée. On obtient (8.3b) avec Fubini et une intégration par parties.

Il suit par récurrence que la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est de classe C^∞ et que, pour tous multi-indices α et β, la fonction :

$$\xi^\beta \partial^\alpha \hat{\varphi} = i^{-|\alpha|} \xi^b \mathcal{F}(x^\alpha \varphi) = i^{-|\alpha|-|\beta|} \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha \varphi))$$

est bornée. On a donc bien $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

2. La propriété (8.4b) est immédiate, tandis que (8.4a) s'obtient avec le changement de variable $y = x - a$. □

Proposition 8.16 L'exemple des gaussiennes
Pour $\lambda > 0$, introduit la fonction $G_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$G_\lambda : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2\lambda}} \in \mathbb{R}\,.$$

On a l'identité

$$\widehat{G_\lambda} = (2\pi\lambda)^{d/2} G_{1/\lambda}\,.$$

Preuve Commençons par supposer que $d = 1$, avec $g_\lambda : x \in \mathbb{R} \to e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} \in \mathbb{R}$. On utilise alors les propriétés fonctionnelles de la proposition 8.15 pour obtenir, essentiellement sans calculs, le résultat annoncé. En effet, puisque

$$g_\lambda'(x) = -\frac{x}{\lambda}\, g_\lambda(x)\,,$$

on obtient

$$i\xi \widehat{g_\lambda}(\xi) = -i \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\xi} \widehat{g_\lambda}(\xi)\,,$$

d'où

$$\widehat{g_\lambda(\xi)} = \widehat{g_\lambda}(0)\, e^{-\frac{\lambda \xi^2}{2}}\,.$$

On conclut en observant que

$$\widehat{g_\lambda}(0) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\, dx = (2\pi\lambda)^{1/2}\,.$$

Le cas de la dimension quelconque se ramène à la dimension 1 en utilisant le théorème de Fubini. □

Remarque 8.17 Nous venons de montrer, sur cette famille d'exemples, la propriété d'inversion de Fourier 8.37. En effet, les G_λ étant des distributions paires, on a

$$\widehat{\widehat{G_\lambda}} = (2\pi)^d G_\lambda = (2\pi)^d (G_\lambda)^\vee .$$

Cet exemple constituera l'étape cruciale dans la démonstration du théorème d'inversion de Fourier 8.37, via la proposition 8.34.

Proposition 8.18 "Continuité" de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Soient $d \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}$. Il existe une constante $c = c(d,p)$ telle qu'on ait, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'estimation

$$N_p(\hat{\varphi}) \leq c\, N_{p+d+1}(\varphi) .$$

Si donc (φ_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ au sens de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a également $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Soit $p \in \mathbb{N}$. On rappelle l'estimation $\|\varphi\|_1 \leq c\, N_{d+1}(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 8.6). Il suit alors des relations fonctionnelles de la proposition 8.15, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$:

$$\begin{aligned} N_p(\hat{\varphi}) &= \max_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}\|_\infty = \max_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta \varphi))\|_\infty \\ &\leq \max_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\|_1 \leq c \max_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} N_{d+1}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi)) \\ &\leq c\, N_{p+d+1}(\varphi) . \end{aligned}$$

□

D L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées

Définition 8.19 Distributions tempérées

Une distribution tempérée *est une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ qui est "continue", ce qui signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ avec, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la majoration*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c\, N_p(\varphi) . \tag{8.5}$$

Une *distribution tempérée* (en un seul mot !)... est une distribution. En effet :

Proposition 8.20 *L'application de restriction*

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mapsto T_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

est bien définie, et injective. De plus, une distribution tempérée est une distribution d'ordre fini.

Preuve L'application $T_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ obtenue par restriction de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ au sous-espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est linéaire. Supposons que T satisfasse (8.5).

Soit $K \subset B(0, R)$ un compact de $\mathbb{R}^d$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ on observe que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c\,\tilde{N}_p(\varphi) \leq c\,(1+R)^p \max_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty\,,$$

et donc T est une distribution sur $\mathbb{R}^d$, d'ordre au plus p.

Si la restriction de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est nulle, la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 8.12) assure que T est nulle. □

Parmi les distributions, il faut savoir reconnaître celles qui sont tempérées.

Proposition 8.21 *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ s'étend à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en une distribution tempérée si et seulement si il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ et une constante $c > 0$ avec, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la majoration*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c\,N_p(\varphi)\,. \tag{8.5}$$

Preuve Le sens direct est immédiat. Pour la réciproque il s'agit, comme à la proposition 2.12, du théorème de prolongement des applications linéaires continues définies sur un sous-espace dense. On approche $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par une suite (φ_n) de fonctions tests. On montre que $\langle\tilde{T}, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle$ existe, et ne dépend pas de la suite choisie. L'application linéaire $\tilde{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ ainsi définie est l'unique prolongement continu de T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Exemple 8.22 de distributions tempérées

• Une distribution à support compact est tempérée. On a donc $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, reflet des injections continues $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

• Une fonction à croissance polynomiale (c'est-à-dire qui satisfait une majoration $|f(x)| \leq c\,(1 + \|x\|^2)^n$ pour une constante $c > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$) définit une distribution tempérée.

• Une fonction appartenant à l'un des espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ définit une distribution tempérée.

Pour montrer qu'une distribution est tempérée, on pourra essayer de la décomposer en somme de distributions des types précédents.

Proposition 8.23 Opérations sur les distributions tempérées

L'ensemble $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées est un sous-espace vectoriel qui est stable par :

• Dérivation : *pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$, l'expression*

$$\partial^\beta T : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to (-1)^{|\beta|}\langle T, \partial^\beta\varphi\rangle \in \mathbb{C}$$

définit une distribution tempérée.

• Multiplication par une fonction à croissance lente : *Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et une fonction $f \in \mathcal{O}_M$, l'expression suivante définit une distribution tempérée*

$$fT : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \langle T, f\varphi\rangle \in \mathbb{C}\,.$$

Preuve Conséquence immédiate de la proposition 8.9. □

En particulier, on peut multiplier une distribution tempérée par une fonction polynomiale, ou bien par un caractère $\mathrm{e}_a : x \mapsto e^{ia\cdot x}$, pour obtenir une nouvelle distribution tempérée.

Exercice 8.24 Montrer les assertions suivantes.

1. La distribution $\mathrm{vp}\,(1/x)$ est tempérée.
2. La distribution définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto e^x$ n'est pas tempérée.
3. Les distributions définies sur $\mathbb{R}$ par les fonctions $x \mapsto e^{ie^x}$ et $x \mapsto e^x e^{ie^x}$ sont tempérées.

Exercice 8.25
1. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction $z \mapsto e^{-|z|^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.
3. En évaluant $\langle \partial_{\bar z} \frac{1}{z}, e^{-|z|^2} \rangle$, poursuivre l'exercice 7.21 en montrant que la distribution associée à la fonction $\frac{1}{\pi z}$ est une solution fondamentale pour l'opérateur $\partial_{\bar z} = (1/2)(\partial_x + i\partial_y)$.

Il nous reste à introduire les suites convergentes de distributions tempérées.

Définition 8.26 *Soient T_n pour $n \in \mathbb{N}$, et T des distributions tempérées. On dit que la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsqu'on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \,.$$

On peut énoncer la variante suivante du théorème 3.31 (ou du corollaire 12.26, plus précis). Comme son prédécesseur, ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 8.27 *On suppose que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge simplement (en tant que suite d'applications $T_n : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$) vers une application $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$.*

Alors les (T_n) sont équicontinues : il existe $c > 0$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ pour lesquels on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \le c\, N_p(\varphi)\,.$$

Il suit que T est une distribution tempérée.

Proposition 8.28 *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions tempérées, qui converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors :*

1. *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Pour tout opérateur de multiplication $f \in \mathcal{O}_M$ (et donc pour toute fonction polynomiale $f \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$) on a $fT_n \to fT$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve Immédiat en revenant aux définitions de la dérivée ainsi que de la multiplication d'une distribution tempérée par un élément de $\mathcal{O}_M$ (voir la proposition 8.23). □

E Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

La transformation de Fourier a été définie sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous l'étendons maintenant à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées en utilisant notre principe de naturalité. Cela va passer par le lemme suivant.

Lemme 8.29 d'échange *On a, pour toutes fonctions φ et ψ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}\,\psi = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,\hat{\psi}\,.$$

Preuve On applique le théorème de Fubini à la fonction intégrable

$$(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi) \in \mathbb{C}\,. \qquad \square$$

On peut reformuler le lemme précédent en disant que, pour φ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et pour $T_\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution tempérée associée à ψ, on a l'égalité

$$\langle T_{\hat{\psi}}, \varphi\rangle = \langle T_\psi, \hat{\varphi}\rangle\,.$$

Ceci nous mène donc à définir la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par dualité.

Définition 8.30 *Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on pose*

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle\,. \tag{8.6}$$

Cette définition assure l'égalité $\widehat{T_\psi} = T_{\hat{\psi}}$ pour toute distribution tempérée associée à une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 8.31 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

1. *L'application $\mathcal{F} : T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est bien définie, et elle est linéaire.*
2. **Continuité.** *Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{T}_n \to \hat{T}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve 1. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La proposition 8.15 assure que l'application

$$\hat{T} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \langle T, \hat{\varphi}\rangle \in \mathbb{C}$$

est bien définie et linéaire. Puisque T est une distribution tempérée, il suit de la proposition 8.18 que $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est également une distribution tempérée.

2. Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la convergence

$$\langle \hat{T}_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \hat{\varphi}\rangle \to \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{T}, \varphi\rangle\,. \qquad \square$$

Proposition 8.32 Propriétés fonctionnelles de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
On a, pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, tout $1 \leq j \leq d$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$, les relations fonctionnelles

$$\mathcal{F}(x_j\varphi) = i\,\partial_j(\mathcal{F}T) \tag{8.7a}$$
$$\mathcal{F}(\partial_j T) = i\,\xi_j\mathcal{F}(T)\,. \tag{8.7b}$$
$$\mathcal{F}(\tau_a T) = \mathrm{e}_{-a}\mathcal{F}T \tag{8.7c}$$
$$\mathcal{F}(\mathrm{e}_a T) = \tau_a(\mathcal{F}T)\,. \tag{8.7d}$$

Preuve La preuve est immédiate. Revenir à la définition de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, puis utiliser les propriétés fonctionnelles de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 8.15). □

Exemple 8.33 On a, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les égalités

$$\widehat{\delta_0} = \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \widehat{\partial^\alpha\delta_0} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \quad ,$$

où $\mathbb{1}$ désigne la (distribution définie par la) fonction constante égale à 1.

F Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Comme évoqué dans la section d'introduction 8.A, la formule d'inversion de Fourier sera un outil crucial pour l'étude des EDP à travers la transformée de Fourier.

On va commencer par montrer cette formule d'inversion pour une seule distribution tempérée, à savoir la masse de Dirac δ_0.

Le cas général, pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ puis pour les distributions tempérées, en découlera de façon indolore en revenant aux définitions et en utilisant les propriétés fonctionnelles de la transformation de Fourier.

Proposition 8.34 Exemple fondamental : la formule d'inversion pour δ_0

Dans $\mathbb{R}^d$, on a $\widehat{\delta_0} = \mathbb{1}$ et $\widehat{\mathbb{1}} = (2\pi)^d\,\delta_0$.

Preuve On va procéder par approximation, en utilisant la transformée de Fourier des gaussiennes 8.16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que la fonction $G_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2n}}$ a pour transformée de Fourier $\widehat{G_n} : x \mapsto (2\pi n)^{d/2}\mathrm{e}^{-\frac{n\|x\|^2}{2}}$.

Le théorème de convergence dominée, que l'on applique à chaque suite $(G_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montre que l'on a convergence $G_n \to \mathbb{1}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La proposition 8.31 (continuité de la transformation de Fourier) assure alors la convergence $\widehat{G_n} \to \widehat{\mathbb{1}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il reste donc à montrer que l'on a convergence $\widehat{G_n} \to (2\pi)^d\,\delta_0$.

Cette dernière assertion résulte de nouveau du théorème de convergence dominée, que l'on applique avec le changement de variable $y = n^{1/2}x$ pour obtenir, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\langle \widehat{G_n}, \varphi\rangle &= (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} n^{d/2} \mathrm{e}^{-\frac{n\|x\|^2}{2}} \varphi(x)\, dx \\ &= (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{\|y\|^2}{2}} \varphi(n^{-1/2}y)\, dy \\ &\to (2\pi)^{d/2}\varphi(0) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\, dy = (2\pi)^d \varphi(0)\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Exemple 8.35 On en déduit, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, que

$$\mathcal{F}(x^\alpha) = \mathcal{F}(x^\alpha\, \mathbb{1}) = (i^{|\alpha|}\partial^\alpha)\widehat{\mathbb{1}} = (2\pi)^d i^{|\alpha|}\partial^\alpha \delta_0\,.$$

Définition 8.36 Transformée de Fourier inverse
Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\overline{\mathcal{F}}(\varphi) = (\mathcal{F}\varphi)^\vee = \mathcal{F}(\varphi^\vee) = \overline{\mathcal{F}(\overline{\varphi})} \quad \textit{et} \quad \langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi\rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a bien, avec le changement de variable $y = -x$:

$$(\mathcal{F}\varphi)^\vee(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{ix\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^\vee(y) e^{-iy\cdot\xi}\, dx = \mathcal{F}(\varphi^\vee)(\xi)\,.$$

Théorème 8.37 d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$
On a, pour toutes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, les égalités

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = (2\pi)^d \varphi \quad \textit{et} \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = (2\pi)^d T.$$

Les applications $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont des applications linéaires bijectives et bicontinues.

Preuve • On commence par montrer la formule d'inversion en l'origine $x = 0$, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en remarquant que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi(0) = \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(0)$. On a donc avec l'exemple fondamental 8.33 :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi(0) &= \langle \delta_0, \hat{\hat{\varphi}}\rangle = \langle \hat{\delta}_0, \hat{\varphi}\rangle = \langle \mathbb{1}, \hat{\varphi}\rangle \\ &= \langle \widehat{\mathbb{1}}, \varphi\rangle = \langle (2\pi)^d \delta_0, \varphi\rangle = (2\pi)^d \varphi(0)\,.\end{aligned}$$

• Le résultat étant acquis en l'origine, on l'obtient au point $x \in \mathbb{R}^d$ en utilisant les équations fonctionnelles (8.4a) et (8.4b), puisqu'alors :

$$\begin{aligned}(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi)(x) &= (\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi)(-x) = (\tau_x \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi)(0) = \mathcal{F}(\mathrm{e}_x\, \mathcal{F}\varphi)(0) \\ &= \mathcal{F}\mathcal{F}(\tau_{-x}\varphi)(0) = (2\pi)^d (\tau_{-x}\varphi)(0) = (2\pi)^d \varphi(x)\,.\end{aligned}$$

• Le résultat s'en déduit pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par dualité, puisque, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi\rangle &= \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle T, \overline{\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\overline{\varphi}}\rangle \\ &= \langle T, (2\pi)^d\, \overline{\overline{\varphi}}\rangle = (2\pi)^d\, \langle T, \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

• La bijectivité des applications "Fourier" est alors immédiate.
La "continuité" de $\mathcal{F}$, et donc de $\overline{\mathcal{F}}$, a été prouvée en 8.18 et en 8.31. □

G Transformation de Fourier dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$

G.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Commençons par vérifier la cohérence de la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, que celle-ci soit définie comme sur l'espace de Schwarz par l'expression (8.2), ou bien par dualité (8.6).

Lemme 8.38 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction intégrable, et $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ la distribution tempérée associée. La transformée de Fourier $\mathcal{F}(T_f) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la distribution tempérée associée à la fonction définie par*

$$\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^d \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx \in \mathbb{C}\,. \tag{8.8}$$

Preuve Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a en appliquant le théorème de Fubini à la fonction intégrable définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par $(x,\xi) \mapsto f(\xi)\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}$, les égalités

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\rangle &= \langle T_f, \mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx\right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{-ix\cdot\xi}\, d\xi\right) dx \\ &= \langle \hat{f}, \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$
□

Corollaire 8.39 Injectivité de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$
La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue bornée, qui tend vers 0 à l'infini.
La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0^0(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue et injective. Elle n'est pas surjective.

Preuve Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On l'écrit comme limite, pour la norme $\|\ \|_1$, d'une suite de fonctions tests $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (corollaire 1.22). Puisque $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a aussi $\mathcal{F}(\varphi_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$.

Comme $\|\hat{f}-\widehat{\varphi_n}\|_\infty = \|f-\varphi_n\|_1$, la fonction $\hat{f}$ est limite uniforme de la suite de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini $\mathcal{F}(\varphi_n)$. C'est donc également une fonction continue tendant vers 0 à l'infini. ™ L'injectivité de $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ suit de l'injection $L^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et du théorème 8.37.

Pour montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0^0(\mathbb{R}^d)$ n'est pas surjective, on applique le théorème de l'isomorphisme de Banach 12.6 en utilisant l'exemple traité dans l'exercice qui suit. □

Exercice 8.40

1. Soient $g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(g * h) = (\mathcal{F}g)\,(\mathcal{F}h)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n = \mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-n,n]}$. Expliciter f_n, et montrer que $\|f_n\|_\infty = 2$.
3. Déterminer la transformée de fourier $\mathcal{F}(f_n)$.
4. Montrer que $\|\mathcal{F}f_n\|_1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
   On pourra utiliser la minoration $\sin t \geq 2t/\pi$ pour $0 \leq t \leq \pi/2$.

Corollaire 8.41 Inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, telle que sa transformée de Fourier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ soit également intégrable. Alors f possède un représentant continu, qui est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, d\xi\,.$$

Preuve Le théorème d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ assure l'égalité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi)^d f$ au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Puisque f est intégrable, la distribution $\mathcal{F}f$ est définie par la fonction continue $\hat{f}$ définie par (8.8), que nous avons supposée intégrable.

La distribution $T_f = (2\pi)^{-d}\,\overline{\mathcal{F}}\hat{f}$ est donc associée à la fonction continue définie par

$$x \mapsto (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, d\xi\,.$$

Le résultat annoncé suit alors de ce que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une application injective. □

G.2 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Puisque $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable est bien définie, et est une distribution tempérée. Attention : lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas supposée intégrable, sa transformée de Fourier n'est pas définie par (8.8) (expression qui n'a alors pas de sens...) Nous allons cependant voir que $\hat{f}$ est alors elle-même définie par une fonction de carré intégrable.

Lemme 8.42 Plancherel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Pour deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\, \overline{\hat{\psi}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \overline{\psi(x)}\, dx$$

et donc

$$\|\hat{\varphi}\|_2^2 = (2\pi)^d \|\varphi\|_2^2 \,.$$

Preuve On rappelle que $\overline{\mathcal{F}\psi} = \overline{\mathcal{F}}\bar{\psi}$. Appliquons le lemme d'échange 8.29. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}\varphi\, \overline{\mathcal{F}\psi} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\bar{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, \overline{\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\psi} = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\overline{\psi} \,. \qquad \square$$

On va en déduire immédiatement le théorème de Plancherel dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 8.43 de Plancherel

La transformée de Fourier de la distribution tempérée associée à une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ de carré intégrable est associée à une fonction de carré intégrable $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et l'on a

$$\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d\, \|f\|_2^2 \,.$$

Après renormalisation, la transformation de Fourier

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d) \to (2\pi)^{-d/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

est une bijection linéaire isométrique.

Preuve Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et soit une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f en norme L^2 (corollaire 1.22). A fortiori on a convergence $\varphi_n \to f$ au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et donc, par la proposition 8.31, $\widehat{\varphi_n} \to \hat{f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Mais, puisque la suite (φ_n) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il suit du lemme 8.42 que la suite $(\widehat{\varphi_n})$ de ses transformées de Fourier est également de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant complet, la suite $(\widehat{\varphi_n})$ converge donc en norme L^2 vers une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On a a fortiori convergence $\widehat{\varphi_n} \to g$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il suit l'égalité $\hat{f} = g$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

De plus, on a les égalités

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi_n}\|_2^2 = (2\pi)^d \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_2^2 = (2\pi)^d\, \|f\|_2^2 \,. \qquad \square$$

H Transformation de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$

Commençons par remarquer que la transformée de Fourier d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie au point $\xi \in \mathbb{R}^d$ par l'expression

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx = \langle T_\varphi, \mathrm{e}_{-\xi}\rangle\,,$$

le crochet $\langle T_\varphi, \mathrm{e}_{-\xi}\rangle$ désignant ici l'appariement $(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ de la distribution à support compact associée à φ et de la fonction de classe C^∞ définie par $\mathrm{e}_{-\xi} : x \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$.

Passons maintenant à la transformée de Fourier d'une distribution à support compact. On ne sera pas surpris du résultat suivant.

Proposition 8.44 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Sa transformée de Fourier $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est associée à la fonction $\hat{T} \in \mathcal{O}_M$ de classe C^∞ à croissance lente*

$$\hat{T} : \xi \in \mathbb{R}^d \to \langle T, \mathrm{e}_{-\xi}\rangle \in \mathbb{C}\,.$$

Preuve • Lorsque $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{R}^d$, on a vérifie facilement que la suite (e_{ξ_n}) converge vers e_ξ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ (définition 6.7). Il suit de la proposition 6.8 que la fonction $g : \xi \mapsto \langle T, \mathrm{e}_{-\xi}\rangle$ est continue.

• Il nous faut montrer que la distribution $\hat{T}$ est associée à la fonction continue g. Pour cela, on revient à la définition de $\hat{T}$ par dualité (définition 8.30). Il s'agit alors d'échanger une intégrale et une distribution, ce que l'on fait en utilisant le lemme 7.7. On choisit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau, égale à 1 au voisinage du support de T.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On introduit la fonction $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ définie par $\Phi : (x, \xi) \mapsto \chi(x)\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}$. On a alors le résultat annoncé puisque :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle &= \langle T, \chi\hat{\varphi}\rangle \\
&= \langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\cdot, \xi)\, d\xi\,\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \Phi(\cdot, \xi)\rangle\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi)\, \langle T, \chi\, \mathrm{e}_{-\xi}\,\rangle\, d\xi \\
&= \langle g, \varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

• Les égalités $\partial^\alpha \hat{T} = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T)$ assurent que toutes les dérivées de T au sens des distributions sont des fonctions continues et donc, par la proposition 7.10, que $\hat{T}$ est de classe C^∞.

• La distribution T est à support compact, donc d'ordre fini k. Soit R tel que $\operatorname{supp} T \subset B(0, R)$. Le corollaire 6.3 assure l'existence de constantes $c > 0$ telles qu'on ait pour toute $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$|\hat{T}(\xi)| = |\langle T, \mathrm{e}_{-\xi}\rangle| \leq c \sup_{B(0,R+1)} \sup_{|\alpha|\leq k} |\partial^\alpha(\mathrm{e}_{-\xi})(x)| \leq c\,(1 + \|\xi\|)^k\,.$$

On obtient des estimations semblables pour les dérivées de $\hat{T}$ en utilisant les relations fonctionnelles $\partial^\alpha \hat{T} = \mathcal{F}(-i^{|\alpha|}x^\alpha T)$, chaque distribution $-i^{|\alpha|}x^\alpha T$ étant également à support compact. La fonction $\hat{T}$ est donc à croissance lente. □

Remarque 8.45 Supposons que la dimension soit $d = 1$. La transformée de Fourier $\hat{T}$ de $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ se prolonge en la fonction entière définie par

$$\hat{T} : z \in \mathbb{C} \to \langle T_x, e^{-izx} \rangle \in \mathbb{C}\,,$$

et qui vérifie l'estimation $|\hat{T}(z)| \leq c\,(1 + |z|)^k\, e^{R\,|\mathrm{Im}\, z|}$, où $c > 0$, k est l'ordre de T, et $\mathrm{supp}\, T \subset [-R, R]$.

On a un énoncé semblable en dimension supérieure, sous réserve que l'on ait définit la notion de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^d$...

La réciproque de cet énoncé constitue le théorème de Paley-Wiener.

Nous allons déduire de ce qui précède un théorème de structure qui généralise ce qui a été vu en dimension 1 (corollaire 4.16) : toute distribution est, localement, une somme finie de dérivées de fonctions continues.

Corollaire 8.46 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction continue $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $T = (1 - \Delta)^n f$.*

Preuve La transformée de Fourier $\hat{T}$ de T est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant une condition de croissance polynomiale $|\hat{T}(\xi)| \leq c\,(1 + \|\xi\|)^k$. Soit un entier n tel que $2n > k + d$. La fonction

$$g : \xi \in \mathbb{R}^d \to (1 + \|\xi\|^2)^{-n}\hat{T}(\xi)$$

est donc intégrable sur $\mathbb{R}^d$, et la fonction $f = \overline{\mathcal{F}}g \in C^0_0(\mathbb{R}^d)$ est une fonction continue. La proposition 8.31 et le théorème 8.37 assurent que

$$\mathcal{F}((1 - \Delta)^n f) = (1 + \|\xi\|^2)^n\, \mathcal{F}f = (1 + \|\xi\|^2)^n\, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}g = (2\pi)^d\, \mathcal{F}T\,.$$

On conclut par injectivité de Fourier l'égalité $T = (2\pi)^{-d}(1 - \Delta)^n f$. □

9. Application de Fourier aux EDP

A Premières applications aux EDP

Nous nous intéressons aux solutions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'une EDP linéaire à coefficients constants $P(\partial)T = S$, où P est un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$ et $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 9.1 *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$ un polynôme de degré m. On note $P_m \in \mathbb{C}^{(m)}[X_1, \cdots, X_d]$ sa partie homogène de degré maximal. On dit que*

- $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto P(i\xi) \in \mathbb{C}$ *est le symbole de l'opérateur $P(\partial)$*
- $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto P_m(i\xi) \in \mathbb{C}$ *est son symbole principal.*

On a donc $P(X) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha X^\alpha$, avec $P_m(X) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha X^\alpha \not\equiv 0$.

Exemple 9.2 • Pour le laplacien défini sur $\mathbb{R}^d$, le symbole et le symbole principal sont tous deux égaux à la fonction $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto -\|\xi\|^2 \in \mathbb{C}$.
• Pour l'opérateur $\partial/\partial\bar{z} = (1/2)(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ défini sur $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, le symbole et le symbole principal sont égaux à $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1/2)(i\xi_1 - \xi_2) \in \mathbb{C}$.

• Pour l'opérateur de la chaleur $\partial/\partial t - \Delta_x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, le symbole est la fonction $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto i\tau + \|\xi\|^2 \in \mathbb{C}$ et le symbole principal est $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \|\xi\|^2 \in \mathbb{C}$.

• Pour l'opérateur des ondes $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \Delta_x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, le symbole et le symbole principal sont égaux à $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto -\tau^2 + \|\xi\|^2 \in \mathbb{C}$.

Le symbole et le symbole principal vont nous donner des informations sur l'opérateur $P(\partial)$ (proposition 9.3 et théorème 9.9).

Proposition 9.3 *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$ un polynôme.*

1. On suppose que le symbole $\xi \mapsto P(i\xi)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d$. Alors l'opérateur différentiel $P(\partial) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est injectif.

2. On suppose que le symbole $\xi \mapsto P(i\xi)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Alors les solutions tempérées $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de $P(\partial)T = 0$ sont associées à des fonctions polynomiales.

Preuve Les propriétés fonctionnelles de Fourier (proposition 8.32) assurent, pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, l'égalité $\mathcal{F}(P(\partial)T) = P(i\xi)\,\hat{T}$.
1. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ avec $P(\partial)T = 0$. On a donc $\mathcal{F}(P(\partial)T) = P(i\xi)\,\hat{T} = 0$. Si le symbole ne s'annule pas, cela implique que $\hat{T} = 0$, et donc que $T = 0$ par injectivité de la transformation de Fourier.

2. Si le symbole ne s'annule pas en dehors de l'origine, l'égalité $P(i\xi)\,\hat{T} = 0$ implique que $\operatorname{supp}\hat{T} \subset \{0\}$, donc que $\hat{T}$ est une combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirac en l'origine. L'exemple 8.33 et l'inversion de Fourier montrent que T est définie par une fonction polynomiale. $\square$

Exemple 9.4 La partie 1. de la proposition 9.3 s'applique par exemple aux opérateurs $P(\partial) = \lambda + \Delta$, où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ est un complexe qui n'est pas un réel positif.
La partie 2. montre qu'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ harmonique (ou une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ holomorphe) est polynomiale.

Exercice 9.5 Montrer qu'une fonction polynomiale bornée $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est constante, puis retrouver le théorème de Liouville : une fonction entière bornée est constante (et de même pour une fonction harmonique $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ bornée).

B Régularité elliptique

On a vu (exercice 7.28) que les opérateurs Δ et $\partial_{\bar{z}}$ sont hypo-elliptiques, au sens suivant.

Lemme 9.6 Opérateurs hypo-elliptiques
L'opérateur différentiel $P(\partial)$ est hypo-elliptique si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
(1) L'opérateur $P(\partial)$ admet une paramétrix de support singulier l'origine.
(2) Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on a l'égalité

$$\operatorname{supp\,sing} T = \operatorname{supp\,sing} P(\partial)T\,.$$

Preuve Lorsque la condition (1) est vérifiée, le théorème 7.27 assure que (2) est satisfaite.
On admet que tout opérateur différentiel à coefficients constants possède une solution fondamentale E, qui est donc également une paramétrix (voir la remarque 7.23). Supposons alors la condition (2) satisfaite. Puisqu'on a $P(\partial)E = \delta_0$, il suit que $\operatorname{supp\,sing} E = \operatorname{supp\,sing} P(\partial)E = \operatorname{supp\,sing} \delta_0 = \{0\}$.
D'où, comme annoncé, l'équivalence des deux propriétés. $\square$

Les opérateurs Δ et $\partial_{\bar{z}}$ ont en commun d'être des opérateurs elliptiques.

Définition 9.7 Opérateurs elliptiques
L'opérateur $P(\partial)$ de degré m est elliptique lorsque son symbole principal $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto P_m(i\xi) \in \mathbb{C}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Il est donc facile de vérifier si la condition d'ellipticité est satisfaite.

Exemple 9.8 Un opérateur de la forme $\sum_{j=1}^{d} \partial^4/\partial x_j^4 + Q(\partial)$, où l'opérateur $Q(\partial)$ est d'ordre au plus 3, est elliptique. L'opérateur $i\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$ est elliptique.

L'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta_x$, l'opérateur des ondes $\square = \partial^2/\partial t^2 - \Delta_x$ et l'opérateur de Schrödinger $i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x$ ne sont pas elliptiques.

Théorème 9.9 Régularité elliptique

Un opérateur elliptique $P(\partial)$ est hypo-elliptique.

Remarque 9.10 L'opérateur de la chaleur $\partial/\partial t - \Delta_x$ est hypo-elliptique, bien qu'il ne soit pas elliptique. On peut en effet montrer que la fonction définie par

$$(t,x) \mapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

(où H est la fonction de Heaviside) est de classe C^∞ sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, et que c'est une solution fondamentale pour l'opérateur de la chaleur.

Pour montrer le théorème 9.9, nous voulons construire une paramétrix pour l'opérateur elliptique $P(\partial)$ et étudier sa régularité. Si l'on cherchait une solution fondamentale tempérée de cet opérateur, on serait amenés à résoudre l'équation $P(\partial E) = \delta_0$ soit, en passant par Fourier : $P(i\xi)\,\hat{E} = 1$.

La difficulté vient de ce que le symbole $\xi \mapsto P(i\xi)$ peut s'annuler. On va donc résoudre cette dernière équation de façon approchée (et obtenir ainsi une paramétrix), le lemme suivant assurant en particulier que le symbole ne s'annule pas dès qu'on est loin de l'origine.

Lemme 9.11 *Soit $P(\partial)$ notre opérateur différentiel elliptique, d'ordre m. Il existe deux constantes c, R telles qu'on ait*

$$|P(i\xi)| \geq c\,\|\xi\|^m \text{ pour tout } \|\xi\| \geq R.$$

Preuve Puisque par hypothèse le symbole principal de $P(\partial)$ ne s'annule pas hors de l'origine, la fonction $\xi \mapsto |P_m(i\xi)| \in \mathbb{R}$ est minorée sur la sphère unité par un réel positif $a > 0$.
D'où, par homogénéité, la minoration $|P_m(i\xi)| \geq a\,\|\xi\|^m$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
On conclut puisque $(P(i\xi) - P_m(i\xi)) = o(\|\xi\|^m)$ lorsque $\xi \to \infty$. $\square$

Preuve du théorème 9.9 On supposera $m \geq 1$ (sinon le résultat est trivial).

• Choisissons une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi \equiv 1$ sur la boule $B(0,R)$, où R a été déterminé au lemme précédent. On introduit la fonction

$$f : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1 - \chi(\xi)}{P(i\xi)} \in \mathbb{C}\,.$$

La fonction f est bien définie (elle est nulle au voisinage de l'origine), de classe C^∞, et elle vérifie l'estimation $\|f(\xi)\| \leq (1/c)\,\|\xi\|^{-m}$ pour $\|\xi\| \geq R$. La fonction f définit donc une distribution tempérée.

On introduit la distribution tempérée $\Pi = \mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et l'on va voir que Π est la paramétrix cherchée.

• Par définition de Π, et avec les propriétés fonctionnelles de Fourier, on a $\mathcal{F}(P(\partial)\Pi) = P(i\xi)\,f = 1 - \chi(\xi)$. On obtient donc par inversion de Fourier l'égalité $P(\partial)\Pi = \delta_0 + \omega$ où $\omega = -\mathcal{F}^{-1}(\chi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc Π est bien une paramétrix pour $P(\partial)$.

• Il nous reste maintenant à vérifier la régularité de Π hors de l'origine. Rappelons que si une distribution, ainsi que toutes ses dérivées partielles, sont définies par des fonctions continues, cette distribution est alors définie par une fonction de classe C^∞ (proposition 7.10).

Pour $1 \leq j \leq d$, introduisons l'ouvert $V_j = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_j \neq 0\}$. Puisque $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} = \cup_{j=1}^d V_j$, il suffit de montrer que Π est de classe C^∞ sur chacun des ouverts V_j, elle sera alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (corollaire 3.34).

Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $1 \leq j \leq d$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel la distribution $x_j^k\,\partial^\alpha \Pi$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ par une fonction continue.

On observe que, pour $1 \leq j \leq d$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a les égalités

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_j^k\,\partial^\alpha \Pi) &= i^{k+|\alpha|}\,\partial_j^k\,(\xi^\alpha\,\mathcal{F}\Pi) \\ &= i^{k+|\alpha|}\,\partial_j^k\,(\xi^\alpha\,(1-\chi(\xi))\,\frac{1}{P(i\xi)})\,.\end{aligned}$$

Nous cherchons k tel que que la distribution $x_j^k\,\partial^\alpha \Pi$ soit définie par une fonction continue. Pour cela, il suffit donc de choisir k de sorte que la fonction définie par $F : \xi \mapsto \partial_j^k\,(\xi^\alpha\,(1-\chi(\xi))\,\frac{1}{P(i\xi)})$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^d$. La fonction F étant de classe C^∞, il suffit de tester son intégrabilité hors du support de χ, et donc sur un domaine où on a l'égalité

$$F = \partial_j^k\,(\xi^\alpha\,\frac{1}{P(i\xi)})\,.$$

On dérive ce produit par la formule de Leibniz. Si l'entier $k \gg |\alpha|$ est bien supérieur à la longueur de α, la dérivée fera intervenir une combinaison linéaire de termes en $\xi^\beta\,\partial_j^\ell\,(1/P(i\xi))$ avec $\beta \leq \alpha$ et $\ell \geq k - |\alpha|$.
On peut écrire chaque dérivée

$$\partial_j^\ell\,(\frac{1}{P(i\xi)}) = \frac{Q_\ell(\xi)}{R_\ell(\xi)}$$

comme un quotient de deux polynômes dont les degrés vérifient, puisque $m \geq 1$, la relation $\deg Q_\ell - \deg R_\ell = -m - \ell$, et où le polynôme R_ℓ est une puissance de P.

On aura donc, par ellipticité (lemme 9.11), les estimations suivantes pour $|\xi|$ grand :

$$|Q_\ell(\xi)| \leq c\,|\xi|^{\deg Q_\ell} \quad \text{et} \quad |R_\ell(\xi)| \geq c\,|\xi|^{\deg R_\ell} \ ,$$

d'où $|F(\xi)| = \mathcal{O}(|\xi|^{2|\alpha|-m-k})$ à l'infini. Il suit que F est intégrable si k est choisi assez grand, ce qui achève la preuve. □

C Pourquoi le laplacien ?

Pour conclure ce chapitre, une petite remarque.

Travaillons dans $\mathbb{R}^d$ euclidien, dont on note $(e_j)_{1\leq j\leq d}$ la base canonique. On a vu que l'équation de Poisson $\Delta S = T$ apparaît en électrostatique ainsi qu'en gravitation universelle.

De même, les équations d'évolution classiques suivantes font également intervenir le laplacien :

équation de la chaleur	$\partial_t u = \Delta_x u$
équation des ondes	$\partial_t^2 = \Delta_x$
équation de Schrödinger	$i\partial_t = -\Delta_x$.

Pourquoi cette ubiquité du laplacien ? Parce que toutes ces équations modélisent des phénomènes physiques dans un milieu qui est isotrope (pour la variable d'espace x), et qu'il n'y a pas tant d'opérateurs différentiels à coefficients constants qui soient invariants par isométries. Noter que tout opérateur différentiel à coefficients constants est invariant par translations.

Définition 9.12 *Un opérateur différentiel à coefficients constants $P(\partial)$ est invariant par isométries lorsque $P(\partial)(f\circ A) = (P(\partial)f)\circ A$ pour tout fonction régulière f, et toute isométrie $A \in \mathrm{O}(d)$.*

Remarque 9.13 Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$, et $S \in \mathrm{Sym}_d\mathbb{R}$ la matrice qui lui est associée dans la base canonique $\mathcal{B}_0$. Sa matrice dans une autre base $\mathcal{B}$ est ${}^tPSP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}$. En général, on a $\mathrm{Tr}\,S \neq \mathrm{Tr}\,({}^tPSP)$ (par exemple si $P = t\mathrm{Id}$ avec $t \neq \pm 1$). Cependant, lorsque la base $\mathcal{B}$ est également orthonormée, on a ${}^tP = P^{-1}$. La trace étant invariante par conjugaison, on a dans ce cas l'égalité $\mathrm{Tr}\,S = \mathrm{Tr}\,(P^{-1}SP) = \mathrm{Tr}\,({}^tPSP)$.

Exemple 9.14 Le laplacien est invariant par isométries. On a en effet, pour toute fonction de classe C^2,

$$\Delta f(m) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(m) = \sum_{j=1}^{d} D_m^2 f(e_j, e_j)\,.$$

D'après la remarque précédente, le laplacien de f au point m est donc égal à la trace de la matrice hessienne de f en m exprimée dans toute base orthonormée.

Soit donc $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $A \in \mathrm{O}(d)$. On a, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$, l'égalité $D^2_m(f \circ A)(u, v) = D^2_{Am} f(Au, Av)$. Puisque l'image par l'isométrie A de la base canonique est une base orthonormée, il suit l'égalité $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$: le laplacien est donc invariant par isométries.

Proposition 9.15 *Les opérateurs différentiels à coefficients constants sur* $\mathbb{R}^d$ *euclidien qui sont invariants par isométries sont les opérateurs de la forme* $P(\partial) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Delta^k$*, où* $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ *et* $\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}$ *pour* $k \geq 1$ *sont les itérées du laplacien, et les* (c_k) *sont des constantes.*

La preuve s'appuie sur une nouvelle (encore une !) relation fonctionnelle pour Fourier, dont nous laissons la démonstration en exercice.

Exercice 9.16 Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $A \in \mathrm{Gl}_d(\mathbb{R})$. Alors $\varphi \circ A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{F}(\varphi \circ A)(\xi) = |\det A|^{-1} (\mathcal{F}\varphi)({}^t A^{-1} \xi) .$$

En particulier lorsque $A \in \mathrm{O}(d)$, il vient

$$\mathcal{F}(\varphi \circ A) = (\mathcal{F}\varphi) \circ A .$$

Preuve de la proposition 9.15

On a vu à l'exemple 9.14 que les opérateurs de la liste sont bien invariants par isométries.

Supposons réciproquement que $P(\partial)$ soit invariant par isométries. Cela signifie que, pour toutes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $A \in \mathrm{O}(d)$, on a

$$P(\partial)(\varphi \circ A) = (P(\partial)\varphi) \circ A .$$

Passons côté Fourier. Il vient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$P(i\xi)\, \mathcal{F}(\varphi \circ A)(\xi) = P(i\xi)\, (\mathcal{F}\varphi) \circ A = \mathcal{F}\left((P(\partial)\varphi) \circ A\right) = P(iA\xi)(\mathcal{F}\varphi) \circ A .$$

Il vient, en testant par exemple sur la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-\|x\|^2}$ dont la transformée de Fourier ne s'annule pas, l'égalité

$$P(iA\xi) = P(i\xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et toute isométrie $A \in \mathrm{O}(d)$.

Soit le polynôme $Q : \xi \mapsto P(i\xi)$. Puisqu'il est invariant par rotation, chacune de ses composantes homogènes Q_m de degré m est également invariante par rotation, donc constante sur la sphère unité. Il suit que $Q_m(\xi) = c_m \|\xi\|^m$ pour une constante $c_m \in \mathbb{C}$. La fonction $\xi \mapsto \|\xi\|^m$ n'étant polynomiale que lorsque m est pair, il suit que Q_m est nulle lorsque m est impair, et est proportionnelle à $\|\xi\|^m$ lorsque m est pair. Le résultat suit.

10. Un peu de géométrie

Nous introduisons la mesure superficielle d'une hypersurface de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, où $d \geq 2$. Cette mesure permet de calculer la longueur d'une courbe de $\mathbb{R}^2$ (proposition 11.16), l'aire d'une surface de $\mathbb{R}^3$ etc...

Cette mesure superficielle intervient dans la formule des sauts (théorème 11.9), qui généralise en dimension quelconque celle que nous avons déjà rencontrée en dimension 1 (proposition 4.20).

Dans ce chapitre et le suivant nous munirons l'espace $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne standard, pour laquelle la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_d)$ est orthonormée. On notera $u \cdot v$ le produit scalaire des vecteurs u et v.

A Différentielle et gradient

Avant de rentrer dans le vif du sujet, un préliminaire pour fixer les idées.

La différentielle au point $m \in \mathbb{R}^d$ de la fonction différentiable $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est un élément $D_m g \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ du dual de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathbb{R}^d$ étant muni d'une structure euclidienne, le théorème de représentation de Riesz fournit un unique vecteur $\nabla_m g \in \mathbb{R}^d$ pour lequel on ait l'égalité

$$D_m g(u) = \nabla_m g \cdot u$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$.

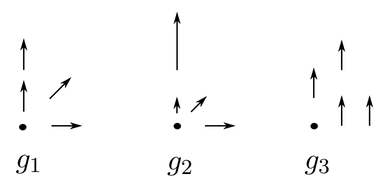
Définition 10.1 *Le vecteur $\nabla_m g$ est le vecteur gradient de g en $m \in \mathbb{R}^d$. On a, en coordonnées, l'égalité $\nabla g = (\partial g/\partial x_1, \ldots \partial g/\partial x_d)$.*

Exemple 10.2 Pour $g_1 : x \mapsto \|x\|$, on a $\nabla_m g_1 = \frac{m}{\|m\|}$ en dehors de l'origine.

Pour $g_2 : x \mapsto \|x\|^2/2$, on a $\nabla_m g_2 = m$ en tout point de $\mathbb{R}^d$.

Pour $g_3 : x \mapsto x_d$, on a $\nabla_m g_3 = e_d$ en tout point de $\mathbb{R}^d$.

L'intérêt du vecteur gradient $\nabla_m g$, par rapport à la différentielle $D_m g$, c'est qu'on peut le dessiner (comme un vecteur "attaché" au point m où on l'évalue).



B Volume et déterminant

Notation 10.3 Le parallélépipède engendré par les vecteurs $(v_1, \cdots, v_d)$ de $\mathbb{R}^d$ est

$$\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_d) = \{\textstyle\sum_{j=1}^d t_j v_j \text{ avec } 0 \leq t_j \leq 1\}\,.$$

On munit $\mathbb{R}^d$ de l'unique mesure de Lebesgue, que nous noterons ici vol_d, normalisée de sorte que

$$\mathrm{vol}_d(\mathcal{P}(e_1, \cdots, e_d)) = 1\,.$$

Lemme 10.4 *La mesure de Lebesgue* vol_d *est invariante par isométries.*

Preuve Soit $f \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$ linéaire inversible. L'application

$$A \in \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathrm{vol}_d(f(A)) \in [0, \infty]\,,$$

définit une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$, qui est localement finie et invariante par translation : c'est une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Il existe donc une constante $\lambda(f) > 0$ avec, pour tout borélien $A \in \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathrm{vol}_d(f(A)) = \lambda(f)\,\mathrm{vol}_d(A)\,.$$

Soit $f \in \mathrm{O}(d)$ une isométrie. Puisque la boule $B(0,1)$ est stable par f, et de mesure de Lebesgue non nulle, on obtient $\lambda_f = 1$. □

Proposition 10.5 *Pour tout système de vecteurs* $(v_1, \cdots, v_d)$ *de* $\mathbb{R}^d$*, on a l'égalité*

$$\mathrm{vol}_d(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_d)) = |\det_{\mathcal{B}_0}(v_1, \cdots, v_d)|\,,$$

le déterminant étant pris relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0$ *(ou bien à toute autre base orthonormée).*

Lorsque les vecteurs sont liés, les deux termes de l'égalité ci-dessus sont nuls. Nous supposerons donc que les vecteurs $(v_1, \cdots, v_d)$ forment une famille libre.

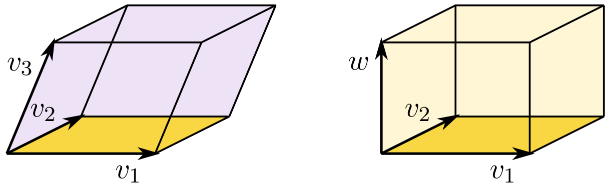
Définition 10.6 *On suppose* $d \geq 2$.

Soient $(v_1, \cdots, v_{d-1})$ *des vecteurs linéairement indépendants de* $\mathbb{R}^d$*. Soit l'hyperplan* $H = \mathrm{vect}\,(v_1, \cdots, v_{d-1})$*. Le parallélogramme de* $\mathbb{R}^d$ *engendré par ces vecteurs est le parallélépipède* $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}) \subset H$*.*

Dans cette définition, on a repris en dimension quelconque la terminologie familière d'un parallélogramme de "dimension 2" et d'un parallélépipède de "dimension 3" dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$. Le lemme suivant affirme que le volume (d-dimensionnel) d'un parallélépipède égale le produit de l'aire (volume $d-1$-dimensionnel) de sa base par sa hauteur.

Lemme 10.7 *Soient $(v_1, \cdots, v_{d-1}, v_d)$ linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $w \in \mathbb{R}^d$ la projection orthogonale du vecteur v_d sur la droite $H^\perp$, où $H = \mathrm{vect}\,(v_1, \cdots, v_{d-1})$. On a l'égalité*

$$\mathrm{vol}_d(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}, v_d)) = \mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}))\, \|w\|\,.$$



Dans le lemme ci-dessus, vol_{d-1} désigne la mesure de Lebesgue normalisée de l'hyperplan $H \simeq \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, muni de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^d$.

Preuve La mesure de Lebesgue étant invariante par isométries (lemme 10.4) on peut supposer, quitte à faire agir $f \in \mathrm{O}(d)$, que l'hyperplan H est un hyperplan de coordonnées, soit $H = \mathrm{vect}\,(e_1, \cdots, e_{d-1})$, et que $w = \|w\|\, e_d$. On écrira $v_d = h + w$, avec $h \in H$. Chaque hyperplan affine (euclidien) $\mathcal{H}_s = H + s\, e_d$ est muni de sa mesure de Lebesgue normalisée. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}; v_d) &= \{x + tv_d\,,\ x \in \mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}) \text{ et } 0 \leq t \leq 1\}\\ &= \{(x + th) + tw,\,,\ x \in \mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}) \text{ et } 0 \leq t \leq 1\}\,.\end{aligned}$$

Calculons notre volume en utilisant le théorème de Fubini.

Chacune des translations $m \in H = \mathcal{H}_0 \mapsto m + th + tw \in \mathcal{H}_{t\|w\|}$ étant une isométrie, le volume $(d-1)$-dimensionnel de chaque parallélogramme $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}) + tv_d \subset \mathcal{H}_{t\|w\|}$ est égal à celui du parallélogramme initial $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}) \subset H$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_d(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}; v_d)) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}, v_d)}\, d\mathrm{vol}_d\\ &= \int_0^{\|w\|} \mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}; v_d) \cap \mathcal{H}_s)\, ds\\ &= \mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}))\, \|w\|\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 10.5

On procède par récurrence sur la dimension. Le volume 1-dimensionnel du segment $[0, a]$ est $|a|$. Supposons le résultat acquis en dimension $d-1$. Soient $\beta = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{d-1})$ une base orthonormée de H et $\epsilon_d = w/\|w\|$, de sorte que $\tilde{\beta} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$. L'hypothèse de récurrence assure que

$$\mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1})) = |\det{}_\beta(v_1, \cdots, v_{d-1})|\,.$$

La matrice des vecteurs $(v_1, \cdots, v_{d-1}, v_d)$ dans la base $\tilde{\beta}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\beta}}(v_1, \cdots, v_d) = \begin{pmatrix} & & & * \\ & \mathrm{Mat}_\beta(v_1, \cdots, v_{d-1}) & & * \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & \|w\| \end{pmatrix}.$$

Il vient donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme 10.7 :

$$\begin{aligned} \det \mathrm{Mat}_{\tilde{\beta}}(v_1, \cdots, v_d) &= |\det \mathrm{Mat}_\beta(v_1, \cdots, v_{d-1})| \; \|w\| \\ &= \mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1})) \, \|w\| \\ &= \mathrm{vol}_d(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}, v_d)) \,. \end{aligned}$$

□

Remarque 10.8 On peut également présenter comme suit la preuve de la proposition 10.5, dans l'esprit du lemme 10.4 dont on reprend les notations, et qui fait intervenir une famille de générateurs du groupe linéaire. La voici. Quand les vecteurs $(v_1, \cdots, v_d)$ sont liés, le parallélépipède $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_d)$ est de mesure nulle, tandis que $\det_{\mathcal{B}_0}(v_1, \cdots, v_d) = 0$.

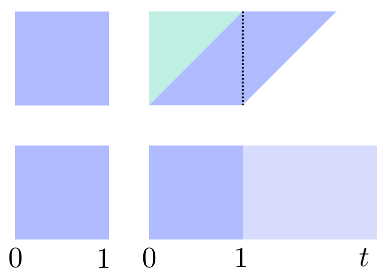
Soit donc $f \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$ linéaire inversible. Il s'agit de montrer l'égalité $\lambda(f) = |\det f|$. On appliquera cette identité à l'application linéaire définie par $f(e_j) = v_j$ $(1 \le j \le d)$ pour conclure que

$$\mathrm{vol}_d(\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_d)) = \mathrm{vol}_d(f(\mathcal{P}(e_1, \cdots, e_d))) = |\det f| = \det_{\mathcal{B}_0}(v_1, \cdots, v_d)\,.$$

Les applications $f \mapsto \lambda(f)$ et $f \mapsto |\det f|$ étant des morphismes de groupes de $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathbb{R}_*^+$, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur un système de générateurs. L'égalité $\lambda(f) = |\det f|$ est immédiate lorsque

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = T = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{d-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = D(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{d-1} \end{pmatrix}$$



et donc aussi lorsque f est conjuguée dans $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$ à la transvection T, ou à la dilatation $D(t)$ (où $t \in \mathbb{R}^*$). Ceci conclut la preuve puisque les dilatations et les transvections engendrent le groupe $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 10.9 La proposition 10.5 constitue la première étape en direction de la formule du changement de variable dans les intégrales.

En effet, si $\varphi_M : x \mapsto Mx$ est le changement de variable linéaire associé à $M \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$, la proposition 10.5 identifie la mesure image de la mesure de Lebesgue par φ_M : on a $(\varphi_M)_* \mathrm{vol}_d = |\det M|^{-1} \mathrm{vol}_d$. Il suit l'égalité

$$\int (f \circ \varphi_M)\, |\det M|\, d\mathrm{vol}_d = \int f\ d\mathrm{vol}_d$$

pour toute fonction étagée, puis pour toute fonction mesurable positive ou intégrable. Le cas général, pour un C^1 difféomorphisme quelconque φ, en découle... avec un peu d'huile de coude, en approchant localement notre application différentiable par ses applications affines tangentes.[1] On voit ainsi se profiler la valeur absolue du déterminant jacobien.

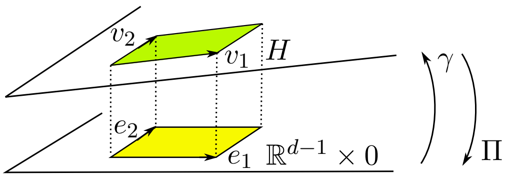
C Aire d'un graphe, cas linéaire

Nous en venons maintenant au point qui nous intéresse.

Soit H un hyperplan, graphe de la forme linéaire $h : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, où $h(x_1, \cdots, x_{d-1}) = a_1 x_1 + \cdots + a_{d-1} x_{d-1}$, c'est-à-dire que $H = \gamma(\mathbb{R}^{d-1})$, où $\gamma : x \in \mathbb{R}^{d-1} \mapsto (x; h(x)) \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\gamma\left(\mathcal{P}(e_1, \cdots, e_{d-1})\right) = \mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}),$$

où $v_j = e_j + a_j e_d = e_j + (\partial_j h)\, e_d$ pour $1 \leq j \leq d-1$.



Sur ce dessin, on a translaté les parallélogrammes pour plus de lisibilité (ils n'ont pas pour sommet l'origine).

Lemme 10.10 *On a l'égalité*

$$\mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(e_1 + a_1 e_d, \cdots, e_{d-1} + a_d e_d)) = (1 + \sum_{j=1}^{d-1} a_j^2)^{1/2}.$$

On veut déterminer l'aire (volume $d-1$-dimensionnel) du parallélogramme $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1})$. Plutôt que de calculer le déterminant $\det_\beta(v_1, \cdots, v_{d-1})$ par rapport à une base orthonormée β de H, on va épaissir le parallélogramme $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1})$ et se ramener à calculer le volume d'un parallélépipède.

Preuve Un vecteur normal aux vecteurs (v_j) pour $1 \leq j \leq d-1$ est le vecteur $w = -\sum_{j=1}^{d-1} a_j e_j + e_d$, et il est de norme $\|w\| = (1 + \sum_{j=1}^{d-1} a_j^2)^{1/2}$.

1. Voir par exemple le cours de JF Le Gall

Le parallélépipède $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1}, w)$ a pour base $\mathcal{P}(v_1, \cdots, v_{d-1})$ et pour hauteur $\|w\|$. On lui applique la proposition 10.5. Il vient, avec le lemme 10.7, l'égalité

$$\mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(e_1 + a_1 e_d, \cdots, e_{d-1} + a_d e_d))\,(1 + \textstyle\sum_{j=1}^{d-1} a_j^2)^{1/2} = \left| \det \begin{pmatrix} & & & -a_1 \\ & \mathrm{Id}_{d-1} & & \vdots \\ & & & -a_{d-1} \\ a_1 & \ldots & a_{d-1} & 1 \end{pmatrix} \right| .$$

Il reste à calculer le déterminant ci-dessus. Notons $(c_1, \cdots, c_d)$ les colonnes de la matrice précédente. On a l'égalité

$$\det(c_1, \cdots, c_d) = \det(c_1, \cdots, c_{d-1}, c_d + \sum_{j=1}^{d-1} a_j c_j)\,,$$

où le second déterminant est celui d'une matrice triangulaire. □

Jusqu'ici, nous nous étions permis de noter vol_{d-1} la mesure de Lebesgue normalisée de n'importe quel hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Nous allons désormais les noter différemment pour bien les distinguer.

Corollaire 10.11 *On désigne par σ_0 la mesure de Lebesgue normalisée de l'hyperplan $H_0 = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, muni de la structure euclidienne induite. De même, soit σ la mesure de Lebesgue normalisée de l'espace euclidien H.*

On introduit la projection orthogonale $\Pi : (x, h(x)) \in H \mapsto x \in H_0$. On a, pour tout borélien $A \subset H$, l'égalité

$$\sigma(A) = (1 + \sum_{j=1}^{d-1} a_j^2)^{1/2}\, \sigma_0(\Pi(A))\,. \tag{10.1}$$

Les mesures σ_0 et σ sont les mesures superficielles des hyperplans H_0 et H.

Preuve Les mesures σ et $\sigma_0 \circ \Pi$ sont deux mesures de Lebesgue sur H, et on a déterminé le coefficient de proportionnalité au lemme précédent puisqu'on a par définition $\sigma(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_{d-1})) = \mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_{d-1}))$ et $\sigma_0(\mathcal{P}(e_1, \ldots, e_{d-1})) = \mathrm{vol}_{d-1}(\mathcal{P}(e_1, \ldots, e_{d-1}))$. □

Remarque 10.12 Rappelons que la mesure image de σ_0 par $\gamma : H_0 \to H$ est définie, pour tout borélien $A \subset H$, par l'expression

$$(\gamma_* \sigma_0)(A) = \sigma_0(\gamma^{-1}(A))\,.$$

L'égalité (10.1) peut alors s'exprimer en termes de mesure image. Puisque $\gamma^{-1} = \Pi_{|H} : H \to H_0$, on peut en effet écrire (10.1) sous la forme

$$\sigma = \gamma_* \left((1 + \sum_{j=1}^{d-1} a_j^2)^{1/2}\, \sigma_0 \right)\,. \tag{10.1b}$$

D Aire d'un graphe, cas général

Soit maintenant le graphe $S = \{(x, h(x))\,,\ x \in U\} \subset \mathbb{R}^d$ d'une application $h : U \subset \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$. On verra à la section 10.E qu'un tel S est une "hypersurface régulière". Au voisinage de chaque point $(x_0, h(x_0))$, S est approchée par le graphe de l'application affine tangente à h en x_0, soit $T_{x_0}h$, qui est définie par

$$T_{x_0}h : x \in \mathbb{R}^{d-1} \mapsto h(x_0) + D_{x_0}h(x - x_0) \in \mathbb{R}\,.$$

La translation de vecteur $h(x_0)$ ne modifie pas le volume. Guidés par l'étude du cas d'une application linéaire h mené à la section précédente (pour lequel l'application $x \mapsto D_x h$ est constante égale à h, et avec l'égalité $1 + \sum_{j=1}^{d-1} a_j^2 = 1 + \|\nabla h\|^2$), on est naturellement amenés à introduire la définition suivante (les notations sont celles du corollaire 10.11).

Définition 10.13 *Pour une partie mesurable $A \subset S$, on pose*

$$\sigma(A) = \int_{\Pi(A)} (1 + \|\nabla h\|^2)^{1/2}\, d\sigma_0\,. \tag{10.2}$$

On dit que σ est la mesure superficielle de S. C'est une mesure borélienne localement finie sur S.

Remarque 10.14 Tout comme dans le cas linéaire (voir la remarque 10.12), on peut définir la mesure superficielle σ en termes de mesure image : on a

$$\sigma = \gamma_* \Big((1 + \|\nabla h\|^2)^{1/2}\, \sigma_0 \Big) \tag{10.2.b}$$

où $(1 + \|\nabla h\|^2)^{1/2}\, \sigma_0$ désigne la mesure à densité $x \mapsto (1 + \|\nabla h(x)\|^2)^{1/2}$ par rapport à σ_0.

Remarque 10.15 Lorsque l'application h est linéaire (ou bien affine), le gradient ∇h est constant, et l'on retrouve la mesure superficielle de la section précédente (10.1).

Une hypersurface S pourra s'écrire de plusieurs façons comme un graphe au-dessus d'un hyperplan. Nous montrerons au théorème 11.4 que la mesure superficielle σ que nous venons d'introduire, et qui semble dépendre de cette écriture, est en fait intrinsèque.

Un compact de $S \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ se projetant sur un compact de $\mathbb{R}^{d-1}$, la mesure σ est une mesure de Radon sur S. Elle permet donc d'intégrer les fonctions continues à support compact $f : S \to \mathbb{C}$ en posant

$$\int_S f\, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x, h(x))\, (1 + \|\nabla_x h\|^2)^{1/2}\, dx\,.$$

Exemple 10.16 Longueur d'une courbe Soit $\Gamma = \{(x, h(x))\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe d'une application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. La longueur de la portion de Γ obtenue comme image du segment $[a, b]$ est

$$\sigma(\Gamma_{[a,b]}) = \int_a^b (1 + |h'(x)|^2)^{1/2}\, dx\,.$$

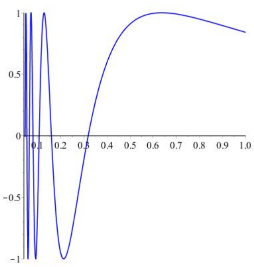
Remarque 10.17 La mesure σ peut être vue comme une mesure borélienne $\overline{\sigma}$ sur $\mathbb{R}^d$, supportée par S (i.e. telle que $\overline{\sigma}(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$). Il suffit de poser $\overline{\sigma}(B) = \sigma(B \cap S)$ pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$. On vérifie facilement que le support de $\overline{\sigma}$ est $\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) = S$. Puisque le graphe S est de mesure de Lebesgue nulle (utiliser le théorème de Fubini), la mesure $\overline{\sigma}$ n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

La mesure $\overline{\sigma}$ n'est pas toujours une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. n'est pas toujours finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$) comme en atteste l'exemple qui suit, d'un graphe borné de longueur infini. Voir cependant le théorème 11.4 lorsque S est le bord d'un ouvert à bord régulier.

Exemple 10.18 Le graphe $S = \{(x, h(x))\,,\ 0 < x < 1\}$ de $h : x \mapsto \sin(1/x)$ est de longueur infinie puisqu'on a,

$$\sigma(S) = \int_0^1 (1 + |h'(x)|^2)^{1/2}\, dx \geq \int_0^1 \frac{|\cos(1/x)|}{x^2}\, dx = \int_1^\infty |\cos u|\, du = +\infty\,.$$

Il suit que $\overline{\sigma}(B(0, 2)) = \sigma(S) = \infty$.



E Hypersurfaces

Définition 10.19 *Une partie $S \subset \mathbb{R}^d$ est une hypersurface (régulière) si elle s'écrit localement, à permutation des coordonnées près, comme le graphe d'une fonction de classe C^∞ :*

pour tout $m \in S$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ contenant m, un indice $1 \leq j \leq d$, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$, et une application $h : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que

$$S \cap U = \{(x_1, \cdots x_{j-1}; h(x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_d); x_{j+1}, \cdots; x_d)\,,\ (x_1, \cdots \widehat{x_j} \cdots x_d) \in V\}\,,$$

le symbole $\widehat{}$ indiquant que l'on omet cette expression.

Lorsque $j = d$, on a simplement $S \cap U = \{(x; h(x))\,,\ x = (x_1, \cdots x_{d-1}) \in V\}$.

Exercice 10.20
1. Montrer qu'un hyperplan $\{\ell = 0\}$, où $\ell \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une forme linéaire non nulle, est une hypersurface.
2. Montrer que, pour $d \geq 2$, la sphère unité
$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d\,,\ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^d$$
est une hypersurface.

Sous cette forme de graphe local, la notion d'hypersurface se comprend facilement. Mais il faut savoir reconnaître une hypersurface lorsqu'elle est définie par d'autres moyens (par exemple, on définit naturellement la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ par son équation $\|x\| = 1$).

Définition 10.21 *Une fonction $g : W \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie et de classe C^∞ sur un ouvert W de $\mathbb{R}^d$, est une submersion lorsqu'en tout point $m \in W$ sa différentielle $D_m g \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une forme linéaire surjective... c'est-à-dire non nulle !*

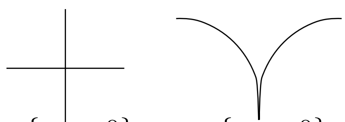
Exercice 10.22 Soit $g : W \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert $W \subset \mathbb{R}^d$. On suppose que $D_m g \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est surjective. Montrer qu'il existe un ouvert $W_m \subset W$ contenant m tel que $D_p g \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ soit surjective pour tout $p \in W_m$. La condition "être submersive en un point" est une condition ouverte.

Proposition 10.23 *Une partie $S \subset \mathbb{R}^d$ est une hypersurface si et seulement si elle est définie au voisinage de chaque point par une équation submersive :*

pour tout point $m \in S$, il existe un ouvert $W \subset \mathbb{R}^d$ contenant m et une fonction $g : W \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et submersive tels que
$$W \cap S = \{g = 0\}\,.$$

Dire que g est submersive signifie que S est définie, au voisinage de m, par l'équation "non singulière" $\{g = 0\}$.

Exemple 10.24 Les applications $g_1 : (x, y) \mapsto xy$ et $g_2 : (x, y) \mapsto y^3 - x^2$ ne sont pas submersives en l'origine. On peut montrer que les ensembles $\{g_1 = 0\}$ et $\{g_2 = 0\}$ ne sont pas des hypersurfaces au voisinage de l'origine (utiliser par exemple la notion d'espace tangent, définition 10.26).


$\{g_1 = 0\}$ $\{g_2 = 0\}$

Exemple 10.25 La sphère unité est définie comme $\mathbb{S}^{d-1} = \{g = 0\}$ avec $g : x \mapsto \|x\|^2 - 1$. L'application g est C^∞, et elle est submersive sauf en l'origine, ce qui nous suffit car ce point n'est pas sur la sphère.

Preuve • Si S s'écrit localement comme un graphe on a, quitte à permuter les coordonnées :

$$S \cap U = \{(x_1, \cdots, x_{d-1}; h(x_1, \cdots, x_{d-1})\} ,$$

avec h de classe C^∞. La fonction

$$g : (x_1, \cdots, x_d) \mapsto x_d - h(x_1, \cdots, x_{d-1})$$

est de classe C^∞ sur U, submersive et $S \cap U = \{g = 0\}$.

• La réciproque n'est autre que le théorème des fonctions implicites. Nous préférons le redémontrer (en supposant connu le théorème d'inversion locale).

Si donc S s'écrit au voisinage de $m \in S$ comme $S = \{g = 0\}$ avec g de classe C^∞ submersive on peut supposer, quitte à permuter les coordonnées, que $\frac{\partial g}{\partial x_d}(m) \neq 0$. L'application de classe C^∞ définie par

$$G : (x_1, \cdots, x_{d-1}; x_d) \mapsto (x_1, \cdots, x_{d-1}; g(x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d))$$

a un jacobien au point m de la forme $\mathrm{Jac}_m G = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{d-1} & 0 \\ * & \neq 0 \end{pmatrix}$, qui est donc inversible. Ainsi G est un difféomorphisme local au voisinage de m. On note

$$G^{-1} : (x_1, \cdots, x_{d-1}; y) \mapsto (x_1, \cdots, x_{d-1}; H(x_1, \cdots, x_{d-1}; y))$$

l'application réciproque (locale) de G, et on introduit la fonction de classe C^∞ définie par

$$h : (x_1, \cdots, x_{d-1}) \mapsto H(x_1, \cdots, x_{d-1}; 0) .$$

On a (localement) le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\{g = 0\} \arrow[rr, "G"] \arrow[d, equal] & & \{y = 0\} \sim \mathbb{R}^{d-1} \arrow[dll, dotted, "G^{-1}"] \\
\{(x_1 \cdots x_{d-1}; h(x_1 \cdots x_{d-1}))\} & &
\end{tikzcd}$$

qui assure que, au voisinage de m, l'ensemble de niveau $S = \{g = 0\}$ s'obtient également comme le graphe de la fonction régulière h. □

F Espace tangent

Définition 10.26 *L'espace tangent $T_m S$ au point $m \in S$ à l'hypersurface S est l'ensemble des vecteurs tangents en m aux courbes C^∞ tracées sur S :*

$$T_m S = \{c'(0) \,,\ \textit{où } c : I \to S \subset \mathbb{R}^d \textit{ est } C^\infty \textit{ avec } c(0) = m\} ,$$

I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine.

Cette définition de l'espace tangent à l'hypersurface S est intrinsèque. Elle ne dépend pas de la définition de S comme un graphe, ou à travers une équation. A la proposition 10.27, on décrira l'espace tangent lorsque S est définie comme un graphe ou bien par une équation.

Nous verrons (ce n'est pas immédiat avec la définition 10.26) que l'espace tangent T_mS est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. Dans la pratique, on le dessine cependant comme un hyperplan affine passant par le point m !

Proposition 10.27 *Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ une hypersurface. Soit $m \in S$.*

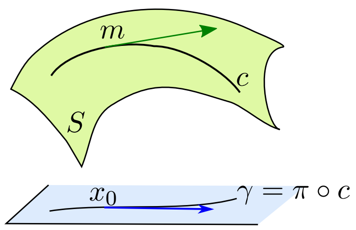
1. *L'espace tangent $T_mS \subset \mathbb{R}^d$ à l'hypersurface S est un sous-espace vectoriel de dimension $d-1$ (i.e. un hyperplan).*
2. *Si S s'écrit localement comme un graphe $\{(x; h(x))\}$ au voisinage de $m = (x_0; h(x_0))$, on a l'égalité $T_mS = \{(u; D_{x_0}h(u))\,,\ u \in \mathbb{R}^{d-1}\}$.*
3. *Si S s'écrit localement $S = \{g = 0\}$ avec g submersive, on a l'égalité $T_mS = \mathrm{Ker} D_m g = (\nabla_m g)^\perp$.*

La preuve repose sur l'exemple immédiat suivant.

Exemple 10.28 Lorsque H est un hyperplan vectoriel, on a en chaque point $m \in H$ l'égalité $T_mH = H$.

Preuve 2. Supposons que S soit définie comme le graphe de h. On observe que les courbes $c : I \to \mathbb{R}^d$ de classe C^∞ tracées sur S sont les courbes de la forme $c : t \in I \mapsto (\gamma(t), h(\gamma(t))) \in \mathbb{R}^d$, où $\gamma : I \to \mathbb{R}^{d-1}$ est une courbe paramétrée de classe C^∞. On obtient en effet $\gamma = \pi \circ c$, où $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ est la projection sur l'hyperplan $\{x_d = 0\}$.

Lorsque $m = (x_0, h(x_0)) = c(0)$ on a alors $c'(0) = (\gamma'(0); D_{x_0}h(\gamma'(0)))$. Le résultat annoncé suit alors de l'exemple 10.28.



1. On vient de voir que l'espace tangent T_mS est l'image de l'hyperplan $\mathbb{R}^{d-1}$ par l'application linéaire $j : u \mapsto (u; D_{x_0}h(u))$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. Et il est de dimension $d-1$ car j est injective.

3. Lorsque $c : I \to S \subset \mathbb{R}^d$ est une courbe tracée sur $S = \{g = 0\}$, on a $g \circ c = 0$, donc $T_mS \subset \mathrm{Ker} D_m g$. L'égalité de ces sous-espaces suit de l'égalité de leurs dimensions. $\square$

Remarque 10.29 • Une hypersurface $S \subset \mathbb{R}^d$ ne peut pas toujours s'écrire globalement comme un graphe. Considérer la sphère $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$.

• Une hypersurface ne peut pas toujours être définie globalement comme ensemble de niveau d'une fonction submersive $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Lorsque c'est le cas, $S = \{g = 0\}$ est en effet fermée dans $\mathbb{R}^d$.

11. Formule de Green

A Ouverts de $\mathbb{R}^d$ à bord régulier

Soit $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, avec $d \geq 2$. Puisque $\mathbb{1}_V \equiv 1$ sur V et $\mathbb{1}_V \equiv 0$ sur le complémentaire ${}^c\overline{V}$, les dérivées partielles $\partial_j \mathbb{1}_V$ seront nulles sur l'ouvert $V \cup {}^c\overline{V}$, donc supportées par la frontière (ou bord) $\partial V = \overline{V} \setminus V$ de V.

Lorsque l'ouvert V est quelconque, son bord peut être bien compliqué et l'on ne pourra pas dire grand chose de plus.

Nous supposerons donc que V est un ouvert à bord régulier.

Définition 11.1 *Un ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ est à bord régulier lorsqu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que*

1. *la fonction g est submersive en chaque point de $\{g = 0\}$, i.e. $\nabla_m g \neq 0$ si $g(m) = 0$*
2. *$V = \{g < 0\}$.*

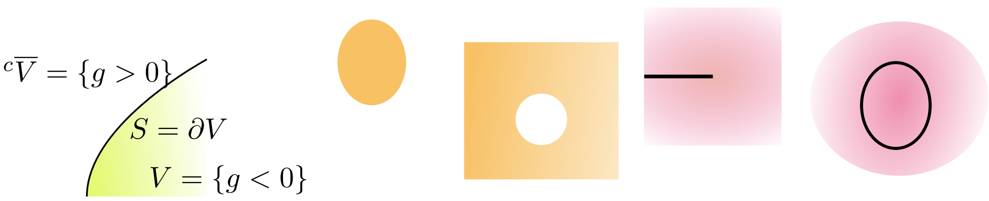
On a alors $\overline{V} = \{g \leq 0\}$ et $\partial V = \overline{V} \setminus V = \{g = 0\}$. L'ouvert ${}^c\overline{V}$ est lui aussi à bord régulier, avec

3. *${}^c\overline{V} = \{g > 0\}$.*

Remarque 11.2 La condition pour g d'être submersive en un point est une condition ouverte. On a donc $\nabla g \neq 0$ sur un voisinage du bord ∂V.

La définition 11.1 exprime que le bord $S = \partial V$ de l'ouvert V est une hypersurface de $\mathbb{R}^d$, et que V est localement d'un seul côté de S.

Noter que le bord $S = \partial V = \{g = 0\} \subset \mathbb{R}^d$ est une hypersurface fermée.



Un disque ouvert, ou bien le complémentaire d'un disque fermé, ou encore un demi-espace ouvert sont des ouverts réguliers.
Mais pas le complémentaire d'une (demi-)droite, ni le complémentaire d'un cercle.

Pour un ouvert à bord régulier V, nous allons relier en 11.4 les dérivées partielles $\partial_j \mathbb{1}_V$ à la mesure superficielle σ de l'hypersurface $S = \partial V$ qui avait été introduite en 10.13. Ceci assurera, comme nous l'avons annoncé, que cette mesure superficielle σ est bien intrinsèque (voir le théorème 11.12).

Définition 11.3 *Pour $m \in S$, on introduit le vecteur $\nu(m)$ défini par*

$$\nu(m) = \frac{\nabla_m g}{\|\nabla_m g\|} \in \mathbb{R}^d .$$

C'est l'unique vecteur unitaire normal à S en m, sortant de V.

Pour $m \in S$, le vecteur $\nu(m)$ ainsi défini est en effet, par construction, orthogonal à l'hyperplan $T_m S = \mathrm{Ker} D_m g = (\nabla_m g)^{\perp}$. Lorsqu'on parcourt la demi-droite $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto m + t\nu(m) \in \mathbb{R}^d$ à partir du point m (i.e. $t = 0$), on sort de V puisque $g(m + t\nu(m)) > 0$ pour $t > 0$ petit.

Le champ de vecteurs $\nu : S \to \mathbb{R}^d$ est continu, et il est intrinsèque : il ne dépend que de S, et pas du choix de la fonction g qui définit V et S.

B Formule de Green

On conserve les notations et les hypothèses du paragraphe précédent.

Théorème 11.4 Formule de Green, version distributions

Soit $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord régulier, de bord $S = \partial V$.

1. *La mesure superficielle σ de S introduite à la définition 10.13 est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$. Elle définit donc une distribution d'ordre 0, encore notée $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Cette mesure superficielle σ est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'écriture locale de S comme un graphe.*
3. *Pour $1 \leq j \leq d$, on note $\nu_j = \nu \cdot e_j$ la j-ième composante de ν. On a alors l'égalité, au sens des distributions :*

$$\partial_j(\mathbb{1}_V) = -\nu_j \sigma . \tag{11.1}$$

Remarque 11.5 La signification de l'expression (11.1) requiert quelques explications.

• Le champ de vecteurs continu $\nu : S \to \mathbb{R}^d$ est la restriction à S du champ de vecteur de classe C^∞ défini par

$$N : m \in \Omega \mapsto \frac{\nabla_m g}{\|\nabla_m g\|} \in \mathbb{R}^d$$

sur le voisinage ouvert $\Omega = \{m \in \mathbb{R}^d \,,\ \nabla_m g \neq 0\}$ de S. L'expression $N_j\,\sigma$ définit une distribution $N_j\,\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ car σ est une distribution supportée par S et N_j est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de S.

Il suffit en effet de poser, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle N_j\,\sigma, \varphi\rangle = \langle \sigma, (\chi N_j)\varphi\rangle$$

où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de S, et de support inclus dans Ω – la valeur obtenue pour cette expression ne dépendant pas du choix de χ.

• La distribution $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ étant d'ordre 0, la proposition 6.11 assure que $N_j\,\sigma$ ne dépend que de la valeur de N_j sur S, c'est-à-dire ne dépend que de ν_j. On note donc

$$-\nu_j\,\sigma := -N_j\,\sigma\,, \tag{11.1b}$$

le membre de gauche faisant clairement apparaître que cette expression est intrinsèque à S, et ne dépend pas de l'équation choisie $V = \{g < 0\}$ comme pourrait le laisser entendre le membre de droite.

Remarque 11.6 L'expression (11.1) équivaut, par linéarité, à dire que pour tout vecteur $w = (w_1, \cdots, w_d) \in \mathbb{R}^d$), on a

$$D(\mathbb{1}_V)(w) := \sum_{j=1}^{d} w_j\,\partial_j \mathbb{1}_V = -(\nu \cdot w)\,\sigma\,.$$

Remarque 11.7 Ce résultat étend, en dimension supérieure, la formule des sauts de la dimension 1 (proposition 4.20). En effet si $V =]a, b[$ est un intervalle ouvert borné, son bord est $S = \partial V = \{a, b\}$ et il est naturel de définir la mesure superficielle de S comme $\sigma = \delta_a + \delta_b$. Le vecteur unitaire sortant en a est $\nu(a) = -1$ et le vecteur unitaire sortant en b est $\nu(b) = 1$, tandis que $\big(\mathbb{1}_V\big)' = \delta_a - \delta_b = -(\nu(a)\delta_a + \nu(b)\delta_b) = -\nu\sigma$.

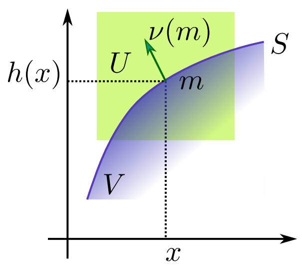
Preuve du théorème 11.4 **1.** Contrairement à ce qui se passait dans l'exemple 10.18, l'hypersurface $S \subset \mathbb{R}^d$ est ici fermée. La trace sur S d'un compact de $\mathbb{R}^d$ est donc un compact de S. Il suit que la mesure superficielle $\overline{\sigma}$ induite par σ sur $\mathbb{R}^d$ (remarque 10.17) est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. La mesure superficielle σ définit donc une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$, que l'on notera encore $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

2. est conséquence de **3** puisqu'au voisinage d'un point de S où la j-ième composante ν_j de ν ne s'annule pas, on aura $\sigma = (-N_j)^{-1}\,\partial_j(\mathbb{1}_V)$ (ou encore $\sigma = (-\nu_j)^{-1}\,\partial_j(\mathbb{1}_V)$, la distribution $\partial_j(\mathbb{1}_V$ étant d'ordre 0).

3. Pour simplifier les notations, on écrit la preuve en dimension 2 (il n'y a pas de difficulté supplémentaire en dimension supérieure).

L'énoncé est local, car une distribution est connue lorsqu'elle est connue localement (principe de localisation 3.34). Soient donc $m \in S$, un voisinage U de m dans $\mathbb{R}^2$, et un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ dans lequel

$$S \cap U = \{(x, h(x))\} \text{ et } V \cap U = \{(x, y)\,,\ y < h(x)\}\,.$$



• Rappelons qu'au point $(x, h(x)) \in S \cap U$ le vecteur normal sortant à V est

$$\nu = \frac{\nabla g}{\|g\|} = (1 + |h'(x)|^2)^{-1/2}(-h'(x), 1)\,,$$

et que la mesure superficielle de S a été définie, à travers la paramétrisation locale $\gamma : x \in \mathbb{R} \mapsto (x, h(x)) \in S$, comme la mesure $\gamma_*((1 + |h'(x)|^2)^{1/2}\,dx)$.

• Nous commençons par un préliminaire dont l'utilité apparaîtra plus bas. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. La fonction $F : (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_{-\infty}^{z} \varphi(x, y)\,dy \in \mathbb{R}$ est de classe C^1 car ses dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\,dy \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \varphi(x, z)$$

existent et sont continues (pour la première assertion, on utilise le théorème de dérivation sous le signe somme, φ étant C^1 à support compact).

La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, h(x))) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1 et à support compact. Il vient, par dérivation de fonctions composées :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{-\infty}^{h(x)} \varphi(x, y)\,dy\right] &= \frac{d}{dx} F(x, h(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, h(x))\,h'(x) \\ &= \int_{-\infty}^{h(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\,dy + \varphi(x, h(x))\,h'(x)\,. \end{aligned}$$

On observe que $\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,dx = 0$ puisque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à support compact.

Nous déterminons maintenant $\partial_1 \mathbb{1}_V$ avec le théorème de Fubini, et en utilisant le préliminaire que nous venons d'établir. Il vient, pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$:

$$\begin{aligned} \langle \partial_1 \mathbb{1}_V, \varphi \rangle &= -\langle \mathbb{1}_V, \partial_1 \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{h(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\,dy\right] dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, h(x))\,h'(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, h(x))\,h'(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, h(x))\,\frac{h'(x)}{(1 + |h'(x)|^2)^{1/2}}\,(1 + |h'(x)|^2)^{1/2}\,dx \\ &= -\int_S \varphi\,\nu_1\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

• Pour l'autre dérivée partielle, même principe mais c'est plus direct avec

$$\begin{aligned}
\langle \partial_2 \mathbb{1}_V, \varphi\rangle &= -\langle \mathbb{1}_V, \partial_2\varphi\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{h(x)} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\,dy\right]\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,h(x))\,\frac{1}{(1+|h'(x)|^2)^{1/2}}\,(1+|h'(x)|^2)^{1/2}\,dx \\
&= -\int_S \varphi\,\nu_2\,d\sigma\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Exercice 11.8 Soient $(a_1, \cdots, a_d)$ des réels non tous nuls et $b \in \mathbb{R}$, et soit $H \subset \mathbb{R}^d$ l'hyperplan affine d'équation $\sum_{j=1}^d a_j x_j = b$.

Soit $V = \{\sum_{j=1}^d a_j x_j - b < 0\}$. Exprimer les dérivées partielles $\partial_j(\mathbb{1}_V)$ en fonction de la mesure de Lebesgue normalisée de H.

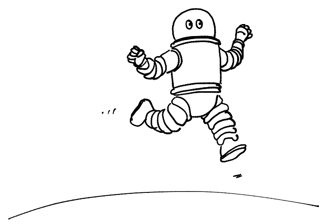
Corollaire 11.9 Formule des sauts dans l'espace

Soient $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, à bord régulier S dont on note σ la mesure superficielle, et ν la normale unitaire sortante. Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On introduit la distribution

$$T = f_1\,\mathbb{1}_V + f_2\,\mathbb{1}_{{}^c\bar{V}}\,.$$

On a, pour tout $1 \leq j \leq d$, l'égalité

$$\partial_j T = (\partial_j f_1)\mathbb{1}_V + (\partial_j f_2)\,\mathbb{1}_{{}^c\bar{V}} + (f_2 - f_1)\nu_j\,\sigma\,.$$



Preuve On rappelle que ${}^c\overline{V}$ est également un ouvert à bord régulier, de même bord $\partial({}^c\overline{V}) = S$ que V.

Soit ν le vecteur normal unitaire sortant à V. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\partial_j(f_1\,\mathbb{1}_V) &= (\partial_j f_1)\mathbb{1}_V + f_1\,(\partial_j \mathbb{1}_V) = (\partial_j f_1)\mathbb{1}_V + f_1\,(-\nu_j\sigma) \\
\partial_j(f_2\,\mathbb{1}_{{}^c\bar{V}}) &= (\partial_j f_2)\mathbb{1}_{{}^c\bar{V}} + f_2\,(\partial_j \mathbb{1}_{{}^c\bar{V}}) = (\partial_j f_2)\mathbb{1}_{{}^c\bar{V}} + f_2\,(\nu_j\sigma)\,,
\end{aligned}$$

puisque la normale sortante de l'ouvert V est la normale rentrante de l'ouvert ${}^c\overline{V}$. Le résultat suit. $\square$

C Mesure superficielle d'une hypersurface

C.1 Localisation

Dans ce qui précède nous avons supposé en un premier temps, par souci de simplicité, que l'ouvert ambiant était $\mathbb{R}^d$. Mais on peut vouloir travailler dans un ouvert quelconque U de $\mathbb{R}^d$. La définition est la même...

Définition 11.10 *Un ouvert $V \subset U$ est à bord régulier lorsqu'il existe une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que*

1. *la fonction g est submersive en tout point de $\{g = 0\} \subset U$*
2. *$V = \{g < 0\}$.*

On a alors $\partial V = \overline{V} \setminus V = \{g = 0\}$.

La petite subtilité est que, dans ce contexte, l'adhérence de V doit être entendu comme l'adhérence relative de V dans U (le plus petit fermé de U contenant V). Le bord $S = \partial V$ de V est une hypersurface, qui est fermée dans U. Cela dit, la formule de Green s'énonce et se démontre comme ci-dessus. On obtient le résultat suivant.

Proposition 11.11 *La mesure superficielle σ de S (qui a été introduite à la définition 10.13) est intrinsèque, i.e. ne dépend pas de l'écriture locale de S comme un graphe.*

La mesure σ est une mesure localement finie sur U. Elle définit donc une distribution encore notée $\sigma \in \mathcal{D}'(U)$ pour laquelle on a, pour tout $1 \leq j \leq d$, l'égalité

$$\partial_j(\mathbb{1}_V) = -\nu_j \sigma\,,$$

$\nu(m)$ désignant le vecteur normal unitaire sortant de V au point $m \in S$.

Observons maintenant que toute hypersurface $S \subset \mathbb{R}^d$ est localement le bord d'un ouvert à bord régulier. Soit en effet $U \subset \mathbb{R}^d$ un voisinage ouvert de $m \in S$ pour lequel $S \cap U = \{g = 0\}$, où $g : U \to \mathbb{R}$ est une submersion. On constate que l'hypersurface $S \cap U$ est alors le bord (dans U) des deux ouverts $V = \{x \in U\,,\ g < 0\}$ et ${}^c\overline{V} = \{x \in U\,,\ g > 0\}$.

Une mesure étant connue lorsqu'elle est connue localement, on a donc le résultat suivant.

Théorème 11.12 Mesure superficielle

Toute hypersurface $S \subset \mathbb{R}^d$ porte une mesure superficielle, qui est définie localement par 10.13... mais qui est intrinsèque.

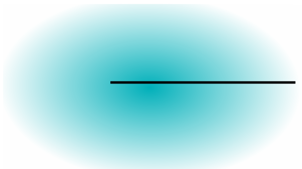
Exemple 11.13 La mesure superficielle de la demi-sphère

$$\mathbb{S}^{d-1}_+ = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}\,,\ x_d > 0\} \subset U$$

avec $U = \{x \in \mathbb{R}^d\,,\ x_d > 0\}$ est la restriction à $\mathbb{S}^{d-1}_+$ de la mesure superficielle de $\mathbb{S}^{d-1}$.

C.2 Hypersurfaces séparantes

On vient de voir que toute hypersurface est, localement, le bord d'un ouvert à bord régulier. Cependant, une hypersurface régulière de $\mathbb{R}^d$ n'est pas toujours le bord d'un ouvert à bord régulier de $\mathbb{R}^d$. Considérer par exemple $S = \{(t,0)\,,\ t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.



Il est donc légitime de se demander, parmi les hypersurfaces $S \subset \mathbb{R}^d$, lesquelles séparent $\mathbb{R}^d$ en deux deux ouverts V et ${}^c\bar{V}$ de $\mathbb{R}^d$ à bord régulier $\partial V = \partial^c\overline{V} = S$.

Une telle hypersurface est alors fermée puisqu'égale à $\overline{V} \setminus V$.

Réciproquement, une hypersurface fermée connexe de $\mathbb{R}^d$ sépare $\mathbb{R}^d$ en exactement deux composantes connexes, qui sont alors des ouverts à bord régulier. (De même pour une hypersurface fermée et connexe dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ simplement connexe).

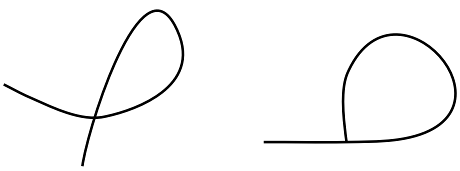
Une preuve "relativement élémentaire" de cette assertion, qui repose sur la notion de transversalité, se trouve dans l'article
H. Samelson, *Orientability of hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Proc. AMS, (22), 1969.

C.3 Mesure superficielle d'une courbe plane

Comme annoncé au début du chapitre 10, nous allons relier la mesure de longueur d'une courbe paramétrée à la mesure superficielle de son image.

Définition 11.14 Courbe paramétrée *Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^∞ telle que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$. L'image $\Gamma = \gamma(J) \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$.*

L'image Γ n'est pas toujours tout à fait une hypersurface, comme l'évoquent les dessins suivants (le second étant pourtant associé à une application γ injective).



Cependant...

Lemme 11.15 *Pour tout $t_0 \in J$, il existe un intervalle ouvert $t_0 \in I \subset J$ pour lequel $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est injective, avec $\gamma(I)$ hypersurface de $\mathbb{R}^2$.*

Preuve Notons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Nous supposerons pour fixer les idées que la première composante $\gamma_1'(t_0)$ de $\gamma'(t_0)$ soit non nulle. Le théorème d'inversion locale assure l'existence d'un intervalle ouvert I contenant t_0 pour lequel $t \in I \mapsto \gamma_1(t) \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme sur son image. L'image $\gamma(I)$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^2$, i.e. une courbe régulière, puisqu'elle s'écrit comme le graphe

$$\gamma(I) = \{(x, \gamma_2 \circ (\gamma_1)^{-1}(x)) \, , \; x \in \gamma_1(I)\} \, . \qquad \square$$

Proposition 11.16 Mesure superficielle d'une courbe paramétrée
Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, image de $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$. On suppose que l'application γ est injective.

Pour $[a, b] \subset J$, la mesure superficielle du compact $\gamma([a, b]) \subset \Gamma$ est égale à la longueur de cette portion de courbe, soit

$$\sigma(\gamma([a, b])) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \, . \tag{11.2}$$

Remarque 11.17 On suppose γ injective pour éviter, par exemple, d'écrire le cercle $\mathbb{S}^1$ comme image de l'application $\gamma : t \in \mathbb{R} \to e^{it} \in \mathbb{C}$. L'expression (11.2) semblerait alors indiquer que le cercle a une longueur infinie... alors qu'on l'a simplement parcouru une infinité de fois.

Par contre, la légère non injectivité de l'application associée au dessin de gauche de la page 128 n'est pas problématique puisqu'un point de la courbe est de mesure superficielle nulle.

Remarque 11.18 Sous les hypothèses de la proposition 11.16, on peut reformuler (11.2) par l'égalité

$$d\sigma = \gamma_*(\|\gamma'(t)\| \, dt) \, . \tag{11.2b}$$

Il suit, pour une fonction continue $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$, l'égalité

$$\int_{\gamma([a,b])} f \, d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt \, .$$

Preuve de la proposition 11.16 Quitte à restreindre l'intervalle $[a, b]$ et à échanger le rôle des coordonnées, on peut supposer grâce au lemme 11.15 que la portion de courbe $\gamma([a, b])$ est le graphe

$$\gamma([a, b]) = \{(s, \gamma_2 \circ (\gamma_1)^{-1}(x)) \, , \; x \in [\alpha, \beta]\}$$

où $\gamma_1 : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ est bijective.

On utilise donc l'expression de la mesure superficielle d'un graphe obtenue à l'exemple 10.16 avec ici $h = \gamma_2 \circ (\gamma_1)^{-1}$, en tenant compte de l'expression de la dérivée d'une fonction composée, ainsi que de l'égalité

$$(\gamma_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\gamma_1'(\gamma_1^{-1}(x))}\,.$$

Il vient alors avec le changement de variables $x = \gamma_1(t)$ (et une valeur absolue au cas où γ_1 soit décroissante...) :

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma([a,b])) &= \left|\int_\alpha^\beta (1+|h'(x)|^2)^{1/2}\,dx\right| \\
&= \left|\int_\alpha^\beta \left[1+\left(\frac{\gamma_2'(\gamma_1^{-1}(x))}{\gamma_1'(\gamma_1^{-1}(x))}\right)^2\right]^{1/2} dx\right| \\
&= \int_a^b \left[\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2\right]^{1/2} dt \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt\,.
\end{aligned}$$

□

Exemple 11.19 On paramètre le cercle $S(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r (privé d'un point, négligeable pour la mesure superficielle) par l'application

$$\gamma : t \in \,]-\pi,\pi[\, \mapsto x_0 + r(\cos t, \sin t) \in S(x_0, r)\,.$$

La mesure superficielle σ du cercle $S(c_0, r)$ est égale à $\gamma_*(r\,dt)$, avec l'égalité

$$\omega_2 = \sigma(S(x_0, r)) = 2\pi r\,.$$

L'intégrale, pour la mesure superficielle σ, d'une fonction $f \in L^1(S(x_0, r))$ intégrable est $\int_{S(x_0,r)} f\,d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r(\cos t, \sin t))\,r\,dt$.

C.4 Intégration en coordonnées sphériques

Il s'agit de démontrer la formule d'intégration en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^d$ dont la formule d'intégration en polaires, en dimension 2, est un cas particulier.

Proposition 11.20 *Soit σ la mesure superficielle de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ de $\mathbb{R}^d$ euclidien. Pour toute fonction mesurable positive $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$, et donc pour toute fonction intégrable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on a l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(tu)\,d\sigma(u)\right] t^{d-1}\,dt\,.$$

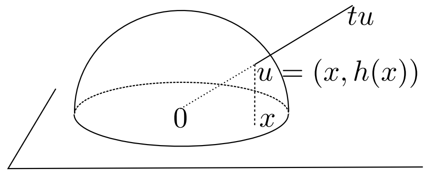
Preuve Il suffit de démontrer le résultat pour une fonction mesurable positive supportée par un demi-espace, par exemple par $U = \{x_d > 0\}$.

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^{d-1}\,,\ \|x\| < 1\}$ la boule unité. La portion de sphère $\mathbb{S}^{d-1} \cap U$ est le graphe de la fonction $h : x \mapsto (1 - \|x\|^2)^{1/2}$. Observons dès maintenant que

$$\partial_j h = \frac{-x_j}{h} \quad \text{et donc} \quad 1 + \|\nabla h\|^2 = \frac{1}{h^2}\,.$$

On paramètre le demi-espace U par le difféomorphisme

$$F : (x;t) \in B \times]0,\infty[\ \xrightarrow{\simeq}\ t\,(x; h(x)) \in U = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*\,.$$



Le déterminant jacobien de F au point $(x_1, \cdots, x_{d-1}; t)$ est égal à

$$\begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & t & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & x_{d-1} \\ \frac{-tx_1}{h} & & \cdots & \frac{-tx_{d-1}}{h} & h \end{vmatrix}$$

$$= \frac{t^{d-1}}{h} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{d-1} \\ -x_1 & & \cdots & -x_{d-1} & h^2 \end{vmatrix} = \frac{t^{d-1}}{h}$$

(effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes pour se ramener à une matrice triangulaire). La formule du changement de variable pour l'intégrale de la fonction mesurable positive $f : U \to [0,\infty[$ donne alors

$$\begin{aligned} \int_U f\,dx &= \int_{B\times]0,\infty[} f(F(x;t))\,\frac{t^{d-1}}{h(x)}\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty t^{d-1} \left[\int_B f(tx; th(x))\,(1 + \|\nabla h\|^2)^{1/2}\,dx\right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(tu)\,t^{d-1} d\sigma(u)\right] dt\,. \end{aligned}$$

□

Exercice 11.21 1. Rappeler la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt$.

2. Pour $d \geq 2$, déterminer la valeur de $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,dx$ de deux façons :
   — en utilisant le théorème de Fubini
   — en intégrant en coordonnées sphériques.
3. En déduire l'égalité $\omega_d := \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

D Applications

Tous les résultats de cette section peuvent être considérés comme des exercices illustrant la formule de Green.

D.1 Fonctions holomorphes

Nous commençons par retrouver la solution fondamentale pour l'opérateur $\partial/\partial\bar{z}$ obtenue aux exercices 7.21 et 8.25.

Proposition 11.22 *On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ euclidien. On a l'égalité dans $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$:*

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{1}{z} = \pi\delta_0\,.$$

Preuve Soit, pour $\varepsilon > 0$, l'ouvert $V_\varepsilon = \{|z| > \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2$. C'est un ouvert à bord régulier, avec $\partial V_\varepsilon = S(0,\varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$. Le vecteur unitaire normal sortant de V_ε au point $\varepsilon\, e^{i\theta}$ est $-e^{i\theta}$.

Paramétrons le cercle $\partial V_\varepsilon = S(0,\varepsilon)$ par l'application $\theta \mapsto \varepsilon e^{i\theta}$. On a vu en 11.19 que la mesure superficielle σ_ε de $\partial V_\varepsilon = S(0,\varepsilon)$ est $\sigma_\varepsilon = \gamma_*(\varepsilon\, d\theta)$.

La fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$ étant localement intégrable sur $\mathbb{C}$ on a, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{1}{z} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{z}\,\mathbb{1}_{V_\varepsilon}\,,$$

et donc

$$\partial_{\bar{z}}\,\frac{1}{z} = \lim_{\varepsilon\to 0}\partial_{\bar{z}}\,\Big(\frac{1}{z}\,\mathbb{1}_{V_\varepsilon}\Big)\,.$$

La fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe en dehors de l'origine. Elle y vérifie donc $(\partial/\partial\bar{z}))(1/z) = 0$. La formule de Green donne alors, avec la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,(\partial_x + i\partial_y)\,\Big(\frac{1}{z}\,\mathbb{1}_{V_\varepsilon}\Big) &= \frac{1}{2}\frac{1}{z}\,[-(-\cos\theta - i\sin\theta)\sigma_\varepsilon]\\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,\varepsilon\,\gamma_*(d\theta) = \frac{1}{2}\,\gamma_*(d\theta)\,.\end{aligned}$$

On a donc, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle\partial_{\bar{z}}\,\Big(\frac{1}{z}\,\mathbb{1}_{V_\varepsilon}\Big), \varphi\rangle = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \pi\,\varphi(0)\,.$$ □

La formule de Cauchy restitue les valeurs d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un disque, connaissant uniquement sa valeur au bord du disque. La formule de Cauchy-Pompeïu, qui est une généralisation de la formule de Cauchy, s'applique à toute fonction régulière f et fait (donc) également intervenir la valeur de $\partial_{\bar{z}} f$ dans le disque.

Corollaire 11.23 Formules de Cauchy et de Cauchy-Pompeïu
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et Ω un voisinage ouvert du disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset \mathbb{C}$. Soit $C(z_0, r) = \{|z - z_0| = r\}$ le bord de ce disque. Soit $a \in D(z_0, r)$.

1. *Pour une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - a} \, dz \, .$$

2. *Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - a} \, dz - \frac{1}{\pi} \int_{D(z_0,r)} \frac{(\partial_{\bar{z}} f)(z)}{z - a} \, dv_2(z) \, .$$

La première intégrale, “en dz”, est une intégrale de chemin, tandis que v_2 désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Preuve On supposera sans perte de généralité que le disque est centré en $z_0 = 0$. La première assertion est une conséquence immédiate de la seconde, lorsqu'on suppose $\partial_{\bar{z}} f = 0$.

Pour montrer la seconde assertion, on détermine $\partial_{\bar{z}} T$, où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ désigne la distribution à support compact définie par la fonction intégrable $z \mapsto \frac{1}{z-a} \mathbb{1}_{D(0,r)}$.

D'après la proposition 11.22 et le principe de localisation 3.34, cette dérivée $\partial_{\bar{z}} T$ est somme de $\pi \delta_a$, et d'une distribution supportée par le cercle $S(0, r)$ que l'on détermine à l'aide de la formule de Green. En paramétrant le cercle $S(0, r)$ par $\gamma : \theta \mapsto re^{i\theta}$, on a l'égalité

$$\partial_{\bar{z}} T = \pi \delta_a - \frac{1}{2} \frac{1}{z - a} \gamma_*(re^{i\theta} \, d\theta) \, ,$$

soit

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\bar{z}} T, f \rangle &= \pi f(a) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - a} re^{i\theta} \, d\theta \\ &= \pi f(a) - \frac{1}{2i} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z - a} \, dz \, . \end{aligned}$$

Le résultat suit, puisqu'on a également

$$\langle \partial_{\bar{z}} T, f \rangle = -\langle T, \partial_{\bar{z}} f \rangle = - \int_{D(z_0,r)} \frac{(\partial_{\bar{z}} f)(z)}{z - a} \, dv_2(z) \, . \qquad \square$$

D.2 Fonctions harmoniques (équation de Laplace)

Nous avons procédé en raisonnant par homogénéité et invariance par rotation pour produire, au théorème 6.20, des solutions fondamentales E_d pour le laplacien.

Rappelons que l'on a, avec $\omega_d = \sigma(\mathbb{S}^{d-1})$:

$$\begin{aligned}
E_2 : x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\mapsto \frac{1}{2\pi} \log \|x\| \in \mathbb{R} && \text{si } d = 2 \\
E_d : x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} &\mapsto \frac{-1}{(d-2)\omega_d} \|x\|^{2-d} \in \mathbb{R} && \text{si } d \geq 3.
\end{aligned}$$

Nous allons re-démontrer que les fonctions E_d ainsi définies sont des solutions fondamentales du laplacien en procédant comme pour l'opérateur $\partial_{\bar{z}}$ (proposition 11.22), c'est-à-dire par le biais de la formule de Green.

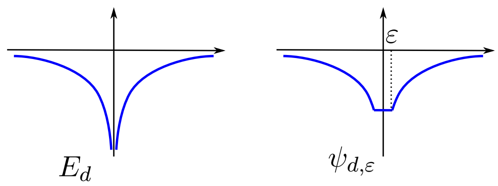
Proposition 11.24 *Les fonctions E_d sont des solutions fondamentales du laplacien sur $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$.*

Preuve Pour $\varepsilon > 0$, on introduit la fonction continue définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\psi_{d,\varepsilon}(x) = \begin{cases} E_d(x) & \text{si } \|x\| \geq \varepsilon \\ E_d(\varepsilon) & \text{si } \|x\| \leq \varepsilon\,. \end{cases}$$

On a noté abusivement $E_d(\varepsilon)$ la valeur commune des $E_d(x)$ lorsque $\|x\| = \varepsilon$.

Pour $d \geq 3$:



Puisque $E_d \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on a convergence au sens des distributions de $\psi_{d,\varepsilon}$ vers E_d lorsque $\varepsilon \to 0$. On aura donc a fortiori $\Delta E_d = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta \psi_{d,\varepsilon}$. On utilise une première fois la formule des sauts pour déterminer les dérivées partielles $\partial_j \psi_{d,\varepsilon}$: il n'y a alors pas de saut, puisque la fonction $\psi_{d,\varepsilon}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. On réapplique la formule des sauts pour calculer les dérivées partielles $\partial_j^2 \psi_{d,\varepsilon}$.

Nous allons mener les calculs lorsque $d = 2$, laissant le cas $d \geq 3$ au lecteur (l'expression de E_d étant différente dans ce cas). Il vient alors, pour $j = 1$ ou 2, puisque $E_2 = (1/2\pi) \log \|x\|$:

$$(2\pi)\, \partial_j \psi_{2,\varepsilon} = \frac{x_j}{\|x\|^2}\, \mathbb{1}_{\|x\| \geq \varepsilon}$$

puis, avec la formule de Leibniz et puisque le vecteur normal unitaire sortant de $V_\varepsilon = \{x\,,\ \|x\| > \varepsilon\}$ au point x est $\nu(x) = -x/\|x\|$:

$$(2\pi)\, \partial_j^2 \psi_{2,\varepsilon} = \{\partial_j^2(E_2)\} \mathbb{1}_{V_\varepsilon} + \frac{x_j^2}{\|x\|^3} \sigma_\varepsilon$$

où σ_ε désigne la mesure superficielle du cercle $S(0, \varepsilon)$ et la dérivée $\{\partial_j^2(E_2)\}$ est la dérivée au sens des fonctions.

En se souvenant de ce que E_2 est harmonique hors de l'origine, il vient

$$(2\pi)\,\Delta\psi_{2,\varepsilon} = \frac{1}{\|x\|}\,\sigma_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\,\sigma_\varepsilon\,,$$

σ étant une mesure (donc une distribution d'ordre 0). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Il suit par, continuité de φ, l'égalité

$$(2\pi)\,\langle \Delta E_2, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{S(0,\varepsilon)} \varphi\, d\sigma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it})\,\varepsilon\, dt \to 2\pi\,\varphi(0)\,.$$

□

Notre autre objectif est de démontrer la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, c'est-à-dire qui satisfont l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Rappelons que les distributions harmoniques sont des fonctions de classe C^∞. On conserve les notations précédentes.

Lemme 11.25 *Soit $d \geq 2$. Pour $R > 0$, on introduit la fonction continue définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par*

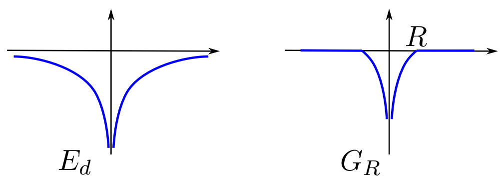
$$G_R(x) = (E_d(x) - E_d(R))\,\mathbb{1}_{B(0,R)}\,.$$

On a alors

$$\Delta G_R = \delta_0 - \frac{\sigma_R}{|\sigma_R|}$$

où σ_R désigne la mesure superficielle de la sphère $S(0,R)$ centrée en 0 et de rayon R, et $|\sigma_R| = \sigma_R(S(0,R))$ sa masse totale.

Pour $d \geq 3$:



Preuve Une distribution est connue lorsqu'elle est connue localement : c'est le principe de localisation, corollaire 3.34. On sait déjà que la restriction de ΔG_R à la boule ouverte $B(0,R)$ est la masse de Dirac en l'origine. On sait aussi que que la restriction de ΔG_R à $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est une distribution supportée par la sphère $S(0,R)$, que l'on doit identifier. On peut donc se contenter de travailler sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Comme à la proposition 11.24, on commence par déterminer les dérivées partielles $\partial_j G$ avec la formule des sauts (sans sauts) puis les $\partial_j^2 G$, de nouveau avec la formule des sauts. □

Corollaire 11.26 Propriété de la moyenne *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et une fonction harmonique $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors la fonction u, qui est de classe C^∞, vérifie la propriété de la moyenne : pour toute boule fermée $\overline{B}(x_0,R) \subset \Omega$, on a l'égalité*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\sigma_R|}\int_{S(x_0,R)} u(p)\, d\sigma_R(p)\,.$$

Preuve On se ramène par translation au cas où $x_0 = 0$. Puisque $G_R \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $u \in \mathcal{E}(\Omega)$, on peut écrire :

$$0 = \langle G_R, \Delta u \rangle = \langle \Delta G_R, u \rangle = u(0) - \frac{1}{|\sigma_R|} \int_{S(x_0,R)} u(p)\, d\sigma_R(p)\,,$$

u étant supposée harmonique. $\square$

Corollaire 11.27 Théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques
Soit $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. On suppose que $u \to 0$ à l'infini. Alors u est identiquement nulle.

Preuve Conséquence immédiate de la propriété de la moyenne. $\square$

Corollaire 11.28 Principe du maximum
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe et $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ harmonique réelle. On a alors pour tout $x \in \Omega$,

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq \varphi(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi\,,$$

avec égalité dans l'une de ces inégalités si et seulement si φ est constante.

Preuve Quitte à remplacer φ par $-\varphi$, on ne se préoccupe que du sup. Puisque $\overline{\Omega}$ est compact, le sup de φ est atteint en un point de Ω. Soit

$$X = \{x \in \Omega\,,\ \varphi(x) = \sup_{\overline{\Omega}} \varphi\}\,.$$

L'ensemble X est un fermé de Ω car φ est continue. L'ensemble X est un ouvert de Ω : cela suit de la propriété de la moyenne (corollaire 11.26) qui est satisfaite par φ harmonique. Si donc X est non vide, la connexite de Ω assure l'égalité $X = \Omega$. $\square$

En dimension 2, les fonctions harmoniques réelles sont les fonctions qui sont, localement, la partie réelle $u = \operatorname{Re} h$ d'une fonction holomorphe. La propriété de la moyenne, le théorème de Liouville ainsi que le principe du maximum pour la fonction harmonique u en dimension 2 sont également conséquences des propriétés correspondantes pour la fonction holomorphe h, ou bien pour e^h.

En dimension quelconque, ces résultats persistent comme nous venons de le constater, mais nous n'avons plus le recours de l'analyse complexe pour les démontrer.

Exercice 11.29
1. Démontrer qu'une fonction polynomiale (de plusieurs variables) bornée est constante.
2. Redémontrer alors le théorème de Liouville ci-dessus (ainsi que sa version holomorphe) en utilisant la proposition 9.3.

D.3 Problème de Dirichlet

Soit maintenant $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné à bord régulier. Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction harmonique sur V (ou bien de laplacien prescrit), et de valeur au bord imposée. Citons pour mémoire le résultat suivant.

Théorème 11.30 Problème de Dirichlet dans un ouvert borné
Soient $u \in C^\infty(\partial V)$ et $f \in C^\infty(\overline{V})$. Il existe une unique solution $u \in C^\infty(\overline{V})$ du problème avec condition de Dirichlet

$$\Delta\varphi = f \text{ dans } V, \text{ et } \varphi = u \text{ sur } \partial V.$$

L'unicité découle immédiatement du principe du maximum 11.28.

L'existence est nettement plus délicate. Hormis dans le cas où V est une boule, on ne dispose pas d'expression explicite de la solution en fonction des données u et f.

A titre d'illustration des conséquences 11.32 et 11.33 de la formule de Green, nous allons démontrer la formule de représentation intégrale 11.34 pour la solution du problème de Dirichlet. Celle-ci fait intervenir, outre les données u et f, les dérivées normales au bord de la fonction inconnue φ... et ne propose donc pas de piste pour la résolution du problème de Dirichlet.

Définition 11.31 Dérivée normale *Soit f une fonction de classe C^∞ définie au voisinage d'un ouvert V à bord régulier $S = \partial V$. Pour un point $x \in S$, et ν le vecteur normal unitaire sortant de V en ce point, la dérivée normale de f au point x est*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla_x f \cdot \nu = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\,.$$

Proposition 11.32 Intégration par parties

Soient $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier, de mesure superficielle σ et de vecteur unitaire normal sortant ν, et deux fonctions tests $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ où Ω est un voisinage ouvert de $\overline{V}$. On a :

$$\int_V \partial_j\varphi\, dx = \int_{\partial V} \nu_j\, \varphi\, d\sigma$$
$$\int_V (\partial_j\varphi)\, \psi dx = \int_{\partial V} \nu_j\, \varphi\, \psi\, d\sigma - \int_V \varphi\, (\partial_j\psi)\, dx\,.$$

Preuve Pour la première égalité, on écrit

$$\int_V \partial_j\varphi\, dx = \langle \mathbb{1}_V, \partial_j\varphi\rangle = -\langle \partial_j \mathbb{1}_V, \varphi\rangle = \langle \nu_j\sigma, \varphi\rangle = \int_S \nu_j\, \varphi\, d\sigma\,.$$

La seconde s'obtient en appliquant la première au produit $(\varphi\psi)$. □

Corollaire 11.33 *Sous les mêmes hypothèses, on a l'égalité*

$$\int_V (\varphi\,\Delta\psi - \Delta\varphi\,\psi)\,dx = \int_{\partial V} \left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,\psi\right)\,d\sigma\,.$$

Preuve Appliquer la proposition 11.32 à φ et $\partial\psi/\partial x_j$ et consorts. □

Proposition 11.34 *Soient $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné à bord régulier, et $\varphi \in C^\infty(\overline{V})$. On a, pour tout $x \in V$, l'égalité*

$$\varphi(x) = \int_V E_d(y-x)\Delta\varphi(y)\,dy + \int_{\partial V} \varphi(y)\,\frac{\partial E_d}{\partial\nu}(y-x) - E_d(y-x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(y)\,d\sigma\,.$$

Preuve On se ramène par translation au cas où $x = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ petit, on applique la formule de Green (11.33) sur l'ouvert à bord régulier $W_\varepsilon = V \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}$ et pour les fonctions φ et $\psi = E_d$ (qui sont régulières au voisinage de $\overline{W_\varepsilon}$). Puisque E_d est harmonique sur W_ε, il vient

$$\int_V (\varphi\,\Delta\psi - \Delta\varphi\,\psi)\,dx = \int_{\partial V} \left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,\psi\right)\,d\sigma\,.$$

Il s'agit alors d'évaluer, dans l'intégrale qui porte sur le bord ∂W_ε, les contributions de l'intégrale sur la sphère $S(0,\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on revient à l'expression explicite des solutions fondamentales E_d. Les détails de la preuve sont laissés au lecteur. □

D.4 L'équation de Poisson $\Delta T = S$

Théorème 11.35 Equation de Poisson *Soit $d \geq 1$.*

1. *Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe des solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de l'équation $\Delta T = S$. Toutes ces solutions satisfont* $\operatorname{supp}\operatorname{sing} T = \operatorname{supp}\operatorname{sing} S$. *En particulier, T est définie à l'infini par une fonction de classe C^∞.*
2. *Lorsque $d \geq 3$, il existe une unique solution $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de l'équation $\Delta T = S$ qui tende vers 0 à l'infini. C'est $T_0 = S * E_d$.*
3. *Lorsque $d = 3$, on a à l'infini :*

$$T_0(x) = \frac{-q}{4\pi\|x\|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \tag{11.3}$$

où $q = \langle S, \mathbb{1}\rangle$ est la “masse totale” de la distribution S.

Remarque 11.36 Nous allons voir que la propriété d'existence 2. n'est pas satisfaite en dimension $d \leq 2$.

L'équation de Poisson $\Delta T = \delta_0$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ admet pour solution particulière $T_1 = (1/2\pi)\,\log(\|x\|)$. Toute autre solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de cette même équation vérifie $\Delta(T_1 - T) = 0$, la différence $T_1 - T$ est donc définie par une fonction harmonique $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, de classe C^∞.

Si l'on avait $T \to 0$ à l'infini, on aurait $u(x) = (1/2\pi)\log(\|x\|) + o(1)$ lorsque $\|x\| \to \infty$. C'est une contradiction avec la propriété de la moyenne (corollaire 11.26) satisfaite par u. De même en dimension 1. [1]

Remarque 11.37 L'expression (11.3) a un analogue en toute dimension $d \geq 3$. Elle fait alors apparaître la solution fondamentale E_d du laplacien sur $\mathbb{R}^d$. Nous nous sommes limités à la dimension 3, avec $E_3 = \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|}$, car c'est sous cette forme (qui nous est familière) qu'elle intervient en physique. Elle exprime que, à l'infini, le potentiel T_0 se comporte comme le potentiel associé à un charge ponctuelle q.

Preuve 1. Si E_d est la solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^d$ produite au théorème 6.20 ou à la proposition 11.24, la distribution $T = S * E_d$ est bien définie (comme convolée de deux distributions, dont l'une est à support compact), et vérifie $\Delta T = S * \Delta E_d = S$. L'assertion concernant les supports singuliers est connue depuis le théorème 7.27.

2. Montrons l'unicité. Si $T_0, T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sont deux distributions telles que $\Delta T_0 = \Delta T_1$, la distribution $U = T_1 - T_0$ harmonique, donc elle est définie par une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. Si T_0 et T_1 tendent toutes deux vers 0 à l'infini, il en va de même pour U. Puisque U vérifie la propriété de la moyenne, on a $U = 0$ donc $T_0 = T_1$.

Supposons maintenant que $d \geq 3$. Soit alors $T_0 = S * E_d$, que l'on écrit $T_0 = S * (\chi E_d) + S * ((1-\chi)\, E_d)$, où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction plateau que l'on suppose constante égale à 1 au voisinage de l'origine, invariante par rotations, et avec par exemple $\operatorname{supp}\chi = \overline{B}(0,1)$.

La distribution $S * (\chi E_d)$ est à support compact. Il nous reste donc à montrer que la fonction $S * ((1-\chi)\, E_d)$ (convolée d'une distribution à support compact et d'une fonction de classe C^∞) tend vers 0 à l'infini. Soient $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de S, et $B(0,R) \subset \mathbb{R}^d$ un voisinage du support de S.

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$ de norme $\|x\| > R+1$. Avec des constantes c qui sont amenées à changer d'une ligne à l'autre, il vient par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
|S * ((1-\chi)\, E_d)\,(x)| &= c \left| \langle S_y, \frac{1-\chi(x-y)}{\|x-y\|^{d-2}} \rangle \right| \\
&\leq c \sup_{\|y\|<R} \sup_{|\alpha| \leq k} \left| \partial_y^\alpha \left(\frac{1-\chi(x-y)}{\|x-y\|^{d-2}} \right) \right| \\
&= c \sup_{\|y\|<R} \sup_{|\alpha| \leq k} \left| \partial_y^\alpha \left(\frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} \right) \right|
\end{aligned}$$

puisque $\chi(x-y) = 0$ lorsque $\|y\| < R$ (rappelons en effet que $\|x\| > R+1$).

1. Il y a donc une différence de comportement de l'équation de Poisson selon que $d \leq 2$ ou bien $d \geq 3$. Il en va de même pour le mouvement brownien (récurrent lorsque $d \leq 2$, et transient lorsque $d \geq 3$). Ce n'est pas un hasard : le laplacien et le mouvement brownien sont intimement liés...

La fonction $x \mapsto \|x\|^{2-d}$ étant homogène de degré $2-d$, ses dérivées d'ordre α sont homogènes d'ordre $2-d-|\alpha| \leq 2-d$. On a donc, lorsque $\|x\| \geq 2R$, et avec des constantes c amenées à changer d'une ligne à l'autre :

$$\begin{aligned}
|S * ((1-\chi)\, E_d)\,(x)| &\leq c \sup_{\|y\|<R} \left| \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} \right| \\
&\leq c\, \frac{1}{(\|x\|-R)^{d-2}} \leq c\, \frac{1}{\|x\|^{d-2}}\,.
\end{aligned}$$

3. On spécialise maintenant à $d=3$, et on reprend les notations précédentes. On a, à l'infini (c'est-à-dire hors de $\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} \chi$) les égalités

$$\begin{aligned}
(S * E_d)(x) &= \langle S_y, \frac{-1+\chi(x-y)}{4\pi\|x-y\|} \rangle \\
&= -\langle S_y, \frac{1}{4\pi\|x\|} \rangle + +\langle S_y, \frac{1}{4\pi\|x\|} - \frac{1-\chi(x-y)}{4\pi\|x-y\|} \rangle\,.
\end{aligned}$$

Le premier terme est le terme significatif, avec

$$\langle S_y, \frac{1}{4\pi\|x\|} \rangle = \frac{1}{4\pi\|x\|}\, \langle S_y, \mathbb{1} \rangle = \frac{q}{4\pi\|x\|}\,.$$

Il nous faut estimer le second terme. On procède comme au point précédent, en estimant de plus

$$\left| \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x\|} \right| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|\,\|x-y\|} \leq \frac{c}{\|x\|^2}$$

lorsque $\|y\| \leq R$ et $\|x\|$ est grand. $\square$

12. Appendice : compléments d'analyse fonctionnelle et de topologie

A Le lemme de Baire et ses conséquences

Dans ce paragraphe, nous démontrons le lemme de Baire ainsi que deux de ses conséquences concernant les applications linéaires continues entre espaces de Banach : les théorèmes de Banach-Steinhaus 12.3, et de l'application ouverte 12.5. Voir le paragraphe C pour la version plus générale du théorème de Banach-Steinhaus utilisée dans les théorèmes 3.31 et 8.27.

A.1 Le lemme de Baire

Théorème 12.1 de Baire *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de X.*

Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est encore une partie dense de X.

Preuve On veut montrer que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est encore dense, c'est-à-dire qu'elle rencontre tout ouvert non vide $V \subset X$. Pour cela, nous allons construire, par approximations successives, un point dans $V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$.

On commence par montrer, par récurrence sur p, que l'ouvert V rencontre chacune des intersections finies $(U_0 \cap \cdots \cap U_p)$.

Amorçons la récurrence. Puisque l'ouvert U_0 est dense, il rencontre V selon un ouvert non vide. Il existe donc une boule $B_f(a_0, r_0) \subset V \cap U_0$ (nous prenons soin de considérer une boule fermée pour la suite des évènements). On peut bien sûr choisir r_0 tel que $0 < r_0 \leq 1$.

Démontrons l'hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$, et supposons que l'on a construit une boule fermée $B_f(a_p, r_p) \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_p)$ avec $0 < r_p \leq 2^{-p}$. L'ouvert U_{p+1} étant dense, son intersection avec la boule ouverte $B(a_p, r_p)$ est un ouvert non vide et l'on construit de nouveau une boule fermée

$$B_f(a_{p+1}, r_{p+1}) \subset B(a_p, r_p) \cap U_{p+1} \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_{p+1}),$$

où l'on peut maintenant choisir r_{p+1} tel que $0 < r_{p+1} \leq 2^{-p-1}$.

Il reste à conclure. Puisque $a_q \in B(a_p, r_p)$ pour tout $q \geq p$, la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. L'espace X étant supposé complet, cette suite converge donc vers un point $\alpha \in X$.

Pour localiser plus précisément la limite α on observe, pour $p \geq n$, que l'on a $a_p \in B_f(a_n, r_n) \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_n)$. Ainsi (c'est là que l'intérêt d'avoir pris une boule fermée apparaît) notre limite α vérifie également $\alpha \in B_f(a_n, r_n) \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_n)$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a finalement $\alpha \in V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$, ce qui achève la démonstration. □

Nous utliserons le lemme de Baire sous sa forme duale.

Corollaire 12.2 *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides de X. Alors, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide dans X.*

A.2 Le théorème de Banach-Steinhaus

Le lemme de Baire, dont la preuve est élémentaire, a néanmoins des conséquences très importantes. L'une d'entre elles est le théorème de Banach-Steinhaus dont nous donnons une première version dans le cadre des espaces vectoriels normés. Voir le corollaire 12.26 pour une version distributions.

La continuité n'est en général pas préservée par convergence simple. Et pourtant, pour des applications *linéaires* définies sur un *espace de Banach* nous avons le résultat suivant.

Théorème 12.3 de Banach-Steinhaus *Soient E un Banach, F un evn et $f_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues. Si cette suite (f_n) converge simplement vers $f : E \to F$, alors les applications linéaires (f_n) sont équicontinues et la limite f est linéaire et continue.*

Preuve La linéarité est préservée par convergence simple, c'est banal. Pour montrer l'équicontinuité des applications linéaires (f_n), et donc la continuité de f, il s'agit de voir que les (f_n) sont uniformément bornées sur un voisinage de l'origine. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, introduisons

$$Z_k = \{x \in E \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\| \leq k\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in E \mid \|f_n(x)\| \leq k\}\,.$$

Chacun des $Z_k \subset E$ est une partie fermée de E, et l'on a $E = \cup_{k\in\mathbb{N}} Z_k$ (chaque suite convergente $(f_n(x))$ étant bornée). Il suit du corollaire 12.2 qu'il existe k_0 pour lequel Z_{k_0} est d'intérieur non vide, et contient donc une boule fermée $B(x_0, r)$.
Par linéarité des (f_n) on en déduit, en écrivant $B(0, r) = B(x_0, r) - x_0$, que

$$\|f_n(x)\| \leq 2k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } \|x\| \leq r$$

et donc, par passage à la limite,

$$\|f(x)\| \leq 2k \text{ pour tout } \|x\| \leq r$$

de sorte que que les (f_n), ainsi que f, sont toutes des applications linéaires continues, de normes au plus $2k/r$. □

A.3 Le théorème de l'application ouverte

Une application bijective et continue n'est pas toujours bicontinue, c'est-à-dire d'inverse continu. Nous allons voir que c'est pourtant le cas pour une application *linéaire* entre deux *espaces de Banach* (théorème 12.6).

Définition 12.4 *Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est ouverte lorsque l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.*

Théorème 12.5 de l'application ouverte

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue.

Si f est surjective, alors c'est une application ouverte.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 12.6 de l'isomorphisme de Banach

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue et bijective.

Alors, f est bicontinue (c'est donc un isomorphisme d'evn).

Preuve du théorème 12.5

• *Première étape : on montre qu'il existe $r > 0$ avec $B_F(0,r) \subset \overline{f(B_E(0,1))}$, où B_E et B_F désignent respectivement des boules de E et de F.*

Puisque f est surjective on a

$$F = f(E) = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{f(B(0,n))}\,.$$

Les parties $\overline{f(B(0,n))}$ étant fermées, et l'espace F étant supposé complet, on peut utiliser le lemme de Baire qui affirme que l'un de ces fermés est d'intérieur non vide. Il existe donc $y \in F$, $\rho > 0$ et un entier n tels que $B(y,\rho) \subset \overline{f(B(0,n))}$. Par linéarité de f, on a $-y \in \overline{f(B(0,n))}$ d'où

$$B(0,\rho) \subset \overline{f(B(0,n))} + \overline{f(B(0,n))} \subset \overline{f(B(0,2n))}\,.$$

Le résultat annoncé suit par homogénéité de f, avec $r = \rho/2n$.

• *Etape 2 : on montre que $B_F(0,r) \subset f(B_E(0,2))$.*

On se débarrasse de l'adhérence dans l'inclusion $B_F(0,r) \subset \overline{f(B_E(0,1))}$, le prix à payer étant d'augmenter le rayon de la boule de départ pour avoir $B_F(0,r) \subset f(B_E(0,2))$. On procède par approximations successives.

Soit donc $z \in F$ avec $\|z\| < r$. La premère étape assure qu'il existe $x_1 \in E$ avec $\|x_1\| < 1$ et $\|z - f(x_1)\| < r/2$.

On construit alors par récurrence une suite $(x_n) \in E$ avec $\|x_n\| < 2^{-n+1}$ et telle que $\|z - f(x_1) - \cdots - f(x_n)\| < 2^{-n}r$.

La série $\sum x_k$ est normalement convergente dans le Banach E, elle converge donc vers $x \in E$. L'inégalité triangulaire assure que $\|x\| < 2$, tandis que la continuité de l'application f assure que $f(x) = z$. □

B Espaces de Fréchet

Les topologies qui font sens sur les espaces fonctionnels ne sont pas toujours des topologies d'espaces de Banach, mais elles en font "souvent" des espaces de Fréchet (exercice 12.18 et exemple 12.24).

B.1 Espaces vectoriels semi-normés

Commençons par un exemple en guise de motivation. On souhaite mettre sur l'espace $E = C^0(\mathbb{R}^d)$ la topologie de la "convergence uniforme sur les parties compactes". Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergera vers $f \in E$ pour cette topologie si et seulement si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, on a

$$p_K(f - f_n) = \sup_K |f_n - f| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

Les applications p_K ne sont pas des normes (une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$ peut être nulle sur K sans être identiquement nulle). Ce sont des semi-normes.

Définition 12.7 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Une semi-norme sur E est une application $p : E \to [0, \infty[$ telle que

1. *$p(0) = 0$*
2. *$p(tx) = |t|\, p(x)$ lorsque $t \in \mathbb{C}$ et $x \in E$*
3. *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.*

Une semi-boule (ouverte) centrée au point x est une partie de la forme

$$B_p(x, r) = \{y \in E\,,\ p(x - y) < r\}\,.$$

On ne demande pas à p d'être définie (i.e. d'être nulle seulement en l'origine).

Définition 12.8 *Un espace vectoriel semi-normé $(E, (p_i)_{i\in I})$ est un espace vectoriel E muni d'une famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$.*

On le munit de la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par les semi-boules $B_{p_i}(x, r)$, avec $i \in I$, $x \in E$ et $r > 0$.

Un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$ est donc une union quelconque d'intersections finies de semi-boules. On a donc (utiliser l'inégalité triangulaire) :

Lemme 12.9 *Dans $(E, (p_i)_{i\in I})$:*

1. *une partie $W \subset E$ est un voisinage du point $x \in E$ si et seulement si W contient une intersection finie de semi-boules centrées en x.*
2. *une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si, pour tout $i \in I$, $p_i(x - x_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Noter que la topologie $\mathcal{T}$ est la plus petite qui rende continues toutes les semi-normes $(p_i)_{i\in I}$: c'est la topologie initiale pour les fonctions $(p_i)_{i\in I}$.

Exemple 12.10 1. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. C'est aussi un espace vectoriel semi-normé... pour l'unique semi-norme N.

2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Sur l'espace $C^0(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω, la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est la topologie associée à la famille de semi-normes définies par $p_K(f) = \sup_K |f|$, indexée par les parties compactes K de Ω.
3. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact. La topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée sur l'espace $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ est associée à la famille de semi-normes définies par $p_\alpha(f) = \sup_K |\partial^\alpha f|$, indexée par les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
4. Sur l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$, la topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée sur chaque compact est associée à la famille de semi-normes définies par $p_{K,\alpha}(f) = \sup_K |\partial^a f|$, indexée par les couples (K, α) où $K \subset \Omega$ est un compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice.
5. Soit $m \in \mathbb{N}$. Sur $C^m(\Omega)$, la topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée sur chaque compact est associée à la famille de semi-normes définies par $p_{K,\alpha}(f) = \sup_K |\partial^a f|$, indexée par les couples (K, α) où $K \subset \Omega$ est un compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice tel que $|\alpha| \leq m$.
6. On munit l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la topologie associée à la famille de semi-normes définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $N_n(\varphi) = \max_{\substack{|\alpha| \leq n \\ |\beta| \leq n}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty$.
7. Soient E un espace vectoriel normé : la topologie associée à la norme est la topologie forte sur E. On note E' le dual continu de E pour la topologie forte.
   (a) La topologie faible-$*$ sur E' est la topologie associée aux semi-normes définies sur E' par $p_x(\ell) = |\ell(x)|$, où $x \in E$.
   (b) La topologie faible sur E est la topologie associée aux semi-normes définies sur E par $q_\ell(x) = |\ell(x)|$, où $\ell \in E'$.

Exercice 12.11 Décrire les suites convergentes dans chacun de ces espaces.

Proposition 12.12 *La topologie de $(E, (p_i)_{i \in I})$ est une topologie d'evt (i.e. espace vectoriel topologique).*
Cela signifie qu'elle rend continues les lois d'espace vectoriel

$$s : (x, y) \in E \times E \to x + y \in E \quad \textit{et} \quad m : (t, x) \in \mathbb{K} \times E \to tx \in E\,.$$

Cette topologie est séparée si et seulement si la famille $(p_i)_{i \in I}$ sépare les points : pour tout vecteur non nul $x \in E$, il existe une semi-norme p_i ne s'annulant pas en x.

Preuve La continuité de s provient de l'inégalité triangulaire, et celle de m de l'homogénéité des (p_i), propriétés (3) et (2) de la définition 12.7. $\square$

Proposition 12.13 *Une forme linéaire $\ell : (E, (p_i)_{i\in I}) \to \mathbb{K}$ définie sur un espace semi-normé est continue si et seulement si il existe une constante $c > 0$, et une partie finie $J \subset I$ telles que, pour tout $x \in E$, on ait*

$$|\ell(x)| \leq c \sum_{j\in J} p_j(x) .$$

Preuve Puisque la topologie de $(E, (p_i)_{i\in I})$ est une topologie d'evt, la forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{K}$ est continue si et seulement si elle est continue en l'origine.

Dans ce cas, il existe un voisinage de l'origine sur lequel $|\ell| \leq 1$. D'après le lemme 12.9, il existe a fortiori un réel $\varepsilon > 0$ et une partie finie $J \subset I$ tels que $|\ell| \leq 1$ sur l'ouvert $W_{\varepsilon,J} = \{x \in E \, , \, p_j(x) \leq \varepsilon \text{ pour tout } j \in J\}$. Il suit que $|\ell(x)| \leq 1$ lorsque $\sum_{j\in J} p_j(x) \leq \varepsilon$. On a donc, par homogonéité,

$$|\ell(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon} (\sum_{j\in J} p_j(y))$$

pour tout $y \in E$.

Réciproquement, cette dernière condition assure la continuité de ℓ en l'origine, donc partout. □

Exercice 12.14 **1.** Montrer que l'application linéaire $f : (E, (p_i)_{i\in I}) \to (F, N)$, à valeurs dans un espace normé, est continue si et seulement si il existe $c > 0$ et une partie finie $J \subset I$ telles que, pour tout $x \in E$,

$$N(f(x)) \leq c (\sum_{j\in J} p_j(x)) .$$

2. Montrer que l'application linéaire $f : (E, (p_i)_{i\in I}) \to (F, (q_a)_{a\in A})$, à valeurs dans un espace semi-normé, est continue si et seulement si, pour tout $a \in A$, il existe $c_a > 0$ et une partie finie $J_a \subset I$ telles que, pour tout $x \in E$,

$$q_a(f(x)) \leq c_a (\sum_{j\in J_a} p_j(x)) .$$

Deux normes peuvent définir la même topologie sur un espace vectoriel. De même :

Exemple 12.15 Les familles de semi-normes suivantes définissent la même topologie que celles de l'exemple 12.10.

2. Sur $C^0(\Omega)$, $p_n(f) = \sup_{K_n} |f|$ (pour $n \in \mathbb{N}$) où $K_n \subset K_{n+1}$ est une exhaustion compacte de Ω.
3. Sur $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$, les semi-normes $p_n(f) = \sup_K \sup_{|\alpha|\leq n} |\partial^a f|$.
4. Sur $\mathcal{E}(\Omega)$, les semi-normes $p_n(f) = \sup_{K_n} \sup_{|\alpha|\leq n} |\partial^a f|$.
6. Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, les semi-normes $\tilde{N}_n(\varphi) = \max_{|\beta|\leq n} \|(1 + \|x\|)^n \partial^\beta \varphi\|_\infty$.

Exercice 12.16 Montrer que inégalités (2.1) (sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$) et (8.5) (sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) expriment la continuité des formes linéaires considérées.

Exercice 12.17 Montrer que la topologie de $(E, (p_i)_{i\in I})$ est normable (c'est-à-dire qu'il existe une norme N sur E qui définit la même topologie que les $(p_i)_{i\in I}$)) si et seulement si :

1. cette topologie est séparée
2. il existe une partie finie $J \subset I$ telle que, pour tout $i \in I$, il existe une constante $c(i)$ avec
$$p_i \leq c(i) \sum_{j\in J} p_j \,.$$

La seconde condition dit que toutes les semi-normes de la famille sont contrôlées par un nombre fini d'entre elles.

Exercice 12.18 Montrer que les topologies de l'exemple 12.15 sont toutes séparées, mais qu'aucune d'entre elles n'est normable.

On va cependant voir que les topologies de l'exemple 12.15 sont toutes métrisables.

Proposition 12.19 *Soit $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un espace semi-normé, associé à une famille finie ou dénombrable de semi-normes. On suppose que cet espace est séparé. Alors, il est métrisable. Par exemple, la distance définie par*

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \inf(1, p_n(x - y)) \tag{12.1}$$

est invariante par translation, et définit la même topologie que les $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 12.20 Pour l'espace $C^0(\Omega)$: on voit pourquoi il était intéressant de remplacer la famille non dénombrable de semi-normes (p_K) indexée par tous les compacts de Ω (exemple 2. de 12.10) par la famille dénombrable (p_n) correspondant aux compacts K_n de l'exhaustion (exemple 2. de 12.15). Cela permet en effet de constater que $C^0(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes, est métrisable.

Preuve • La fonction d ainsi définie prend ses valeurs dans $[0, \infty[$, elle est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. La topologie étant supposée séparée, on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (proposition 12.12). Ainsi d est bien une distance.

• Il reste à vérifier que cette distance induit sur E la même topologie que les semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les deux topologies (associées à d ou aux (p_n)) étant invariantes par translation, nous ne considérerons que des voisinages de l'origine.

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de l'origine dans (E, d). Ce voisinage contient une boule $B(0, \varepsilon) = \{x \in E\,,\, d(x, 0) < \varepsilon\}$. On pourra supposer $\varepsilon < 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Puisque $\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \leq 2$ l'intersection $\cap_{n=0}^{N} B_{p_n}(0, \varepsilon/4)$, qui est un voisinage de l'origine pour la topologie semi-normée, est inclus dans $B(0, \varepsilon)$.
La topologie associée aux semi-normes (p_n) est donc plus fine que la topologie associée à la distance d.

Soit alors $\mathcal{W}$ un voisinage de l'origine dans $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Il contient une intersection finie de semi-boules $\cap_{n=0}^{N} B_{p_n}(0, \varepsilon)$, où l'on peut choisir $\varepsilon < 1$. Montrons que la boule $B(0, 2^{-N}\varepsilon)$ (boule pour la distance d) est incluse dans $\mathcal{W}$. Soit $x \in B(0, 2^{-N}\varepsilon)$. On a

$$\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \inf(1, p_n(x)) \leq d(0, x) < 2^{-N}\varepsilon\,.$$

Il suit, pour tout $0 \leq n \leq N$, la majoration $2^{-n} \inf(1, p_n(x)) < 2^{-n}\varepsilon$ et donc $p_n(x) < \varepsilon$.
La topologie associée à la distance d est donc plus fine que celle associée aux semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

B.2 Espaces de Fréchet

Passons aux questions de complétude. Lorsqu'on a introduit en (12.1) une distance compatible avec la topologie semi-normée, on avait une grande marge de manoeuvre sur le choix de cette distance.

Remarque 12.21 Rappelons que lorsqu'on a deux distances équivalentes sur l'ensemble X (i.e. qui définissent la même topologie), l'une peut être complète sans que l'autre le soit.

Par exemple, la distance définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par $d_1(x, y) = |x - y|$ n'est pas complète tandis que celle définie par $d_2(x, y) = |\tan x - \tan y|$ l'est.

Ce phénomène n'apparaît pas lorsque l'on ne considère que des distances invariantes par translation sur un espace vectoriel E. En effet, dans ce cas, une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E, d) est de Cauchy si et seulement si

$$d(x_p, x_q) = d(0, x_p - x_q) \to 0 \text{ lorsque } p, q \to \infty\,,$$

cette dernière condition exprimant que la famille $(x_p - x_q)$ converge vers 0 lorsque $p, q \to \infty$, propriété qui ne dépend que de la topologie de E et pas de la distance qui induit sur E cette topologie.

Définition 12.22 Espaces de Fréchet

Un espace de Fréchet est un espace vectoriel $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ muni d'une famille dénombrable de semi-normes, qui sépare les points, et pour lesquelles la distance associée définie par (12.1) est complète.

Remarque 12.23 Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E,(p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ si et seulement si $p_n(x_k - x_\ell) \to 0$ lorsque $k,\ell \to \infty$, et ce pour chacune des semi-normes p_n.

On laisse au lecteur le soin de vérifier les propriétés suivantes.

Exemple 12.24 Les familles de semi-normes

2. Sur $C^0(\Omega)$: $p_n(f) = \sup_{K_n} |f|$ (pour $n \in \mathbb{N}$) où $K_n \subset K_{n+1}$ est une exhaustion compacte de Ω
3. Sur $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$: $p_n(f) = \sup_K \sup_{|\alpha|\leq n} |\partial^a f|$
4. Sur $C^\infty(\Omega)$: $p_n(f) = \sup_{K_n} \sup_{|\alpha|\leq n} |\partial^a f|$
6. Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: $\tilde{N}_n(\varphi) = \max_{|\beta|\leq n} \|(1+\|x\|)^n \partial^\beta \varphi\|_\infty$

font de chacun de ces espaces un espace de Fréchet.

C Banach-Steinhaus pour les distributions

Dans la preuve du théorème 12.3, on ne s'est pas véritablement servis du fait que l'espace vectoriel E soit un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel *normé* complet. Il suffit en effet que E soit muni d'une topologie associée à une distance qui le rende complet, et qui en fasse un espace vectoriel topologique : un espace de Fréchet fait l'affaire. Ce n'est pas une généralisation de principe ! On verra en effet au corollaire 12.26 qu'elle nous donne des informations sur les suites convergentes de distributions.

Théorème 12.25 Banach-Steinhaus (2)

Soient E un espace de Fréchet, F un espace vectoriel semi-normé et $f_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues. Si cette suite (f_n) converge simplement vers $f : E \to F$, alors les applications linéaires (f_n) sont équicontinues et la limite f est linéaire et continue.

Preuve Notons $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les semi-normes définissant la topologie de E, et $(q_a)_{a\in A}$ celles définissant la topologie de F. Fixons $a \in A$ et introduisons, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$Z_k(a) = \{x \in E \,|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} q_a(f_n(x)) \leq k\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in E \,|\, q_a(f_n(x)) \leq k\}\,,$$

de sorte que $E = \cup_{k\in\mathbb{N}} Z_k(a)$. Chaque application linéaire $f_n : E \to F$ étant continue, ainsi que la semi-norme $q_a : F \to \mathbb{R}$, les $Z_k(a)$ sont des parties fermées de E. Le théorème de Baire assure qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que Z_{k_0} soit d'intérieur non vide. On en déduit qu'il existe une intersection finie de semi-boules centrées en l'origine, soit $W = \cap_{i\leq N} B_{p_i}(0,\varepsilon)$ pour laquelle $p_a(f_n(x)) \leq 2k_0$ pour tout $x \in W$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Il suit par homogénéité des (f_n) que $q_a(f_n(x)) \leq (2k_0/\varepsilon)\sum_{i\leq N} p_i(x)$ pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. □

Corollaire 12.26 Banach-Steinhaus pour les distributions

Soit $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une suite de distributions ($n \in \mathbb{N}$).

On suppose que la suite (T_n) converge simplement vers une application $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ c'est-à-dire qu'on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Alors les T_n sont " équicontinues" : pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une constante $c > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ on ait l'estimation

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \,,$$

et l'application limite T est une distribution.

Preuve Une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution lorsque chacune de ses restrictions aux espaces $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue (K décrivant l'ensemble des parties compactes de Ω), c'est-à-dire lorsqu'elle satisfait la condition (2.1). Nous travaillons donc séparément sur chaque espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Fixons un compact $K \subset \Omega$. La suite des restrictions $T_n : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une suite convergente de formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$, qui est un espace de Fréchet. On peut donc lui appliquer le théorème 12.25 pour obtenir le résultat annoncé. □

On laisse au lecteur le soin de démontrer la version suivante du théorème de l'application ouverte, pour des espaces de Fréchet.

Exercice 12.27 Application ouverte, et isomorphisme de Banach (2)

Soient E et F deux espaces de Fréchet, et soit $f : E \to F$ une application linéaire continue. Montrer les propriétés suivantes.

1. Si l'application linéaire f est surjective, elle est ouverte.
2. Si l'application linéaire f est bijective, elle est bicontinue.

D Evt localement convexes

A titre culturel, nous allons maintenant voir que les espaces vectoriels topologiques dont la topologie peut-être définie par une famille de semi-normes (on dit alors qu'ils sont semi-normables) sont ceux qui admettent "beaucoup" de parties convexes.

Nous évoquerons également le théorème de Hahn-Banach 12.34, qui affirme que les espaces vectoriels semi-normés admettent "beaucoup" de formes linéaires continues.

Commençons par un (contre)-exemple.

Exemple 12.28 • On introduit l'espace

$$L^{1/2} = L^{1/2}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mesurables telles que } \int_0^1 |f|^{1/2} < \infty \}.$$

On le munit de la distance définie par $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|^{1/2}$. Cette distance est invariante par translation, et fait de $L^{1/2}$ un espace vectoriel topologique.

• On va voir que le seul ouvert convexe non vide de cet espace est $L^{1/2}$ tout entier. Il suffit pour cela de montrer, pour chaque $R > 0$, que la boule $B(0,R)$ est contenue dans l'enveloppe convexe de la boule $B(0, R/\sqrt{2})$.
Si $d(f,0) = \delta \in]0,R[$, on choisit $a \in]0,1[$ avec $\int_0^a |f|^{1/2} = \int_a^1 |f|^{1/2} = \delta/2$. On définit alors $f_1 = 2f\mathbb{1}_{[0,a]}$ et $f_2 = 2f\mathbb{1}_{[a,1]}$, de sorte que $f = (1/2)(f_1+f_2)$. Et on observe pour conclure que $d(f_1,0) = d(f_2,0) = \delta/\sqrt{2}$.

• Soit alors $\ell : L^{1/2} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. L'ensemble

$$U = \{f \in L^{1/2}\,,\ |\ell(f)| < 1\}$$

est un ouvert convexe non vide de $L^{1/2}$. D'après ce qu'on vient de voir, $U = L^{1/2}$. La seule forme linéaire continue sur $L^{1/2}$ est donc la forme nulle !

A l'inverse, un espace vectoriel semi-normé possède beaucoup d'ouverts convexes. Et nous allons voir que cette propriété caractérise les espaces semi-normés parmi les espaces vectoriels topologiques.

Définition 12.29 *Un espace vectoriel topologique est localement convexe (evtlc) lorsque l'origine possède une base de voisinages convexes* $(V_j)_{j\in J}$.

Cela signifie que les V_j sont des convexes contenant l'origine, et que tout voisinage de l'origine contient l'un des V_j.

Il suit que tout point de l'espace possède une base de voisinages convexes.

On peut supposer les voisinages V_j ouverts car, si V_j est convexe, son intérieur l'est également.

Lemme 12.30 *Un espace vectoriel semi-normé est localement convexe.*

Preuve Si la topologie de E est définie par une famille de semi-normes, les intersections finies de semi-boules centrées en l'origine sont des convexes qui constituent une base de voisinages de ce point. □

La réciproque est vraie !

Nous nous limiterons désormais aux espaces vectoriels réels (même si le cas complexe n'est beaucoup pas plus compliqué). La preuve repose sur le résultat suivant, qui établit un dictionnaire entre parties convexes et semi-normes.

Proposition 12.31 Jauge d'un convexe

Soit E un espace vectoriel topologique réel, et soit $V \subset E$ un ouvert contenant l'origine, que l'on suppose convexe et symétrique (c'est-à-dire tel que $V = -V$).

Alors la jauge du convexe V, définie par

$$p_V : x \in E \mapsto \inf\{t > 0\,,\ x \in t\,V\} \in [0, \infty[\,,$$

est une semi-norme sur E et on a l'égalité

$$V = \{x \in E\,,\ p_V(x) < 1\}\,.$$

Preuve Puisque V est un ouvert contenant l'origine, et puisque $sx \to 0$ lorsque $s \to 0$ pour tout $x \in E$, la jauge p_V du convexe V est bien définie.

La convexité de l'ouvert V assure que p_V satisfait l'inégalité triangulaire. L'homogénéité de p_V, pour des réels $t > 0$, est immédiate tandis que le fait que $p_V(x) = p_V(-x)$ résulte de la symétrie de V : p_v est donc une semi-norme.

Lorsque $x \in V$ ouvert, on a $(1 + \varepsilon)x \in V$ pour $\varepsilon > 0$ petit, et donc $p_V(x) < 1$. Et, puisque V est un convexe contenant l'origine, la famille $(tV)_{t>0}$ est croissante. Donc si $p_V(x) < 1$, il suit que $x \in V$. □

Exemple 12.32 Si (E, N) est un espace vectoriel normé, la jauge de sa boule unité ouverte $B_N(0, 1)$ est la norme N elle-même.

Plus généralement, si p est une semi-norme continue sur E, la jauge de $B_p(0, 1)$ est p.

Proposition 12.33 *Soit E un espace vectoriel topologique réel.*

Alors E est localement convexe si et seulement si sa topologie peut être définie par une famille de semi-normes.

Preuve Il nous reste à montrer le sens direct (la réciproque est le lemme 12.30). On suppose E localement convexe.

Soit donc $(W_j)_{j\in J}$ une base de voisinages ouverts et convexes de l'origine. A fortiori, la famille $(V_j)_{j\in J}$ définie par $V_j = W_j \cap (-W_j)$ est encore une base de voisinages ouverts et convexes de l'origine, mais on a gagné au change car tous les V_j sont maintenant symétriques.

Soit p_j la jauge du convexe V_j. Nous allons montrer que la topologie de E coïncide avec la topologie définie par cette famille de semi-normes $(p_j)_{j\in J}$.

• Pour chaque semi-boule, on a l'égalité $B_{j,\varepsilon} = \{p_j(x) < \varepsilon\} = \varepsilon V_j$ ouvert de l'espace vectoriel topologique E (puisque V_j est ouvert). La topologie de E est donc plus fine que la topologie associée aux semi-normes $(p_j)_{j\in J}$.

• Soit Ω un voisinage de l'origine. Il existe donc, parmi les ouverts de la base de voisinages $(V_j)_{j\in J}$, un ouvert $V_j \subset \Omega$. Autrement dit $B_{j,1} \subset \Omega$. La topologie associée aux semi-normes $(p_j)_{j\in J}$ est donc plus fine que la topologie de E. □

Contrairement à l'espace $L^{1/2}$ de l'exemple 12.28, les espaces vectoriels semi-normés (ou, ce qui revient au même, les evtlc) possèdent beaucoup de formes linéaires continues. C'est ce que disent le théorème suivant et son corollaire.

Théorème 12.34 Théorème de Hahn-Banach

Soit $(E, (p_i)_{i \in I})$ un espace vectoriel semi-normé réel. Soit $\lambda : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel $F \subset E$.

Alors, λ se prolonge en une forme linéaire continue $\Lambda : E \to \mathbb{R}$.

Il n'y a en général pas unicité du prolongement continu.

Pour une preuve dans le cas normé, voir par exemple ici. La preuve s'adapte facilement au cadre semi-normé.

Corollaire 12.35 *Dans un espace vectoriel E semi-normé séparé, le dual sépare les points : il existe, pour tout $x \in E$ non nul, une forme linéaire continue $\lambda \in E'$ telle que $\lambda(x) \neq 0$.*

13. Appendice : Transformée de Fourier des distributions périodiques

Il sera question dans cet appendice de séries de Fourier.

On choisit ici de se limiter à la dimension 1, mais la dimension supérieure ne recèle aucune difficulté supplémentaire. On va s'intéresser tant à des fonctions périodiques qu'à des distributions périodiques.

Nous commencerons par rappeler la théorie des séries de Fourier dans le cadre le plus élémentaire, c'est-à-dire sur l'espace de Hilbert des fonctions périodiques qui sont de carré intégrable sur une période. Dans ce contexte, tout découle simplement de la notion de base hilbertienne.

On s'intéressera ensuite aux distributions périodiques. On montrera que celles-ci sont tempérées, puis qu'elles se développent en séries de Fourier, et on fera le lien entre leurs coefficients de Fourier et leur transformée de Fourier.

Enfin, on reviendra sur le développement en série de Fourier des fonctions périodique localement intégrables.

Après renormalisation, on supposera que la période est 1. Notons dès maintenant que toutes les "séries" (d'indice de sommation parcourant $\mathbb{Z}$) qui apparaissent dans ce chapitre sont commutativement convergentes (ce sont des familles sommables).

A Séries de Fourier dans $L^2_{(1)}$

Définition 13.1 *On introduit l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 1-périodiques et localement de carré intégrables, soit :*

$$L^2_{(1)} = \{f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}),\ f(x) = f(x+1)\ p.p.\}\,.$$

Muni du produit scalaire défini, pour $f, g \in L^2_{(1)}$, par

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

cet espace est un espace de Hilbert.

Notation 13.2 Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\tilde{e}_n : t \mapsto e^{2i\pi nt}$.

Proposition 13.3 *La famille $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{(1)}$. On a donc, pour toute fonction $f \in L^2_{(1)}$,*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, \tilde{e}_n)\, \tilde{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \tilde{e}_n \quad \textit{et} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\,,$$

où le n-ième coefficient de Fourier de f est défini par

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi nt}\, dt\,.$$

L'application $f \in L^2_{(1)} \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une bijection isométrique entre ces deux espaces de Hilbert.

Preuve Le théorème de Stone-Weierstrass assure que la famille $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale, pour la norme uniforme, dans l'espace $C^0_{(1)} \simeq C^0(\mathbb{S}^1)$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 1-périodiques. L'injection $C^0_{(1)} \hookrightarrow L^2_{(1)}$ étant continue d'image dense, la famille $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est également totale dans $L^2_{(1)}$.

La famille étant orthonormée, c'est une base hilbertienne de $L^2_{(1)}$. □

La (grande) régularité d'une fonction se traduit par la décroissance (rapide) de ses coefficients de Fourier. En particulier :

Proposition 13.4 *Une fonction $f \in L^2_{(1)}$ est (a un représentant) de classe C^∞ si et seulement si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est à décroissance rapide, i.e. si on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lim_{n\to\infty} |n^k|\, |c_n(f)| = 0\,.$$

On a alors, avec convergence normale de chaque dérivée :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \tilde{e}_n\,. \tag{13.1}$$

L'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ réalise une bijection entre les fonctions 1-périodiques de classe C^∞, et les suites à décroissance rapide.

Preuve Si en effet $f \in L^2_{(1)}$ est de classe C^∞, une intégration par parties donne, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{(2i\pi n)^k} c_n(f^{(k)})\,.$$

Il suit que $|n^k\, c_n(f)| \leq (2\pi)^{-k} \|f^{(k)}\|_{L^1([0,1])}$. On a donc montré que la suite $(n^k c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Ces suites tendent donc également vers 0 lorsque $|n| \to \infty$.

Si réciproquement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite à décroissance rapide, la suite $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^∞ définies par

$$s_N = \sum_{|n|\leq N} c_n \tilde{\mathrm{e}}_n$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ ainsi que chacune de ses dérivées. Sa limite est donc une fonction de classe C^∞ et 1-périodique, de coefficients de Fourier les $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Le résultat annoncé suit car une fonction $f \in L^2_{(1)}$ est déterminée par ses coefficients de Fourier. □

B Distributions périodiques

Définition 13.5 *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est 1-périodique si on a l'égalité $\tau_1 T = T$ (et donc $\tau_k T = T$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).*

Exemple 13.6 Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_n S$ définit une distribution périodique.

En particulier, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ définit une distribution 1-périodique.

A l'inverse, nous allons décomposer une distribution 1-périodique comme somme des translatées sous $\mathbb{Z}$ d'une distribution à support compact. Pour ce faire, il nous faudra utiliser une "partition de l'unité périodique" de classe C^∞.

Cette partition de l'unité remplacera la famille $\tau_p(\mathbb{1}_{[0,1[}) = \mathbb{1}_{[p,p+1[}$, de somme $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p(\mathbb{1}_{[0,1[}) = 1$, qui constitue une partition de l'unité tout à fait acceptable lorsque nous travaillons avec des fonctions mesurables mais qui ne convient pas dans ce nouveau contexte.

Lemme 13.7 Partition de l'unité périodique régulière

Il existe une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p \chi = 1$.

Preuve Soit une fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $h \geq 0$, et $h > 0$ sur l'intervalle $[0,1]$. On pose $s = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p h$, de sorte que s est une fonction de classe C^∞, qui est 1-périodique et strictement positive. On pose alors $\chi = h/s \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec, puisque s est 1-périodique :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p \chi = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p(h/s) = (1/s) \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p h = 1.$$ □

Proposition 13.8 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 1-périodique.*

1. *Il existe une distribution à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ pour laquelle $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p S$, la convergence étant au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*
2. *La distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est tempérée et la convergence de la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p S$ a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

Preuve **1.** On commence par montrer que $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p S$, la convergence étant au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test telle que $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p\chi = 1$ (lemme 13.7). On a donc, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, (\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p\chi)\varphi\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\langle T, (\tau_p\chi)\varphi\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\langle(\tau_p\chi)T, \varphi\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\langle\tau_p S, \varphi\rangle\,,$$

où l'on a posé $S = \chi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, de sorte que $(\tau_p\chi)\,T = (\tau_p\chi)\,\tau_p T = \tau_p S$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On a pu échanger sans vergogne le signe distribution et la somme $\sum_{p\in\mathbb{Z}}$ car, φ et χ étant toutes deux à support compact, cette somme est en fait une somme finie.

2. On montre maintenant que la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p S$ converge au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sa limite T sera donc une distribution tempérée.

Il suffit pour cela de montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la famille $(\langle\tau_p S, \varphi\rangle)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable, ou encore que la famille $(\langle S, \tau_p\varphi\rangle)_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Sa somme est alors $\langle T, \varphi\rangle$.

Si S est d'ordre k et de support $\operatorname{supp} S \subset\,]-N, N[$, il existe des constantes c (amenées à changer d'une ligne à l'autre) telles que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout entier p tel que $|p| > N$:

$$\begin{aligned}
|\langle S, \tau_p\varphi\rangle| &\leq c \sum_{j\leq k} \sup_{|y|\leq N} |\tau_p\varphi^{(j)}(y)| \\
&\leq c \sum_{j\leq k} \sup_{|y|\leq N} |\varphi^{(j)}(y-p)| \\
&= c \sum_{j\leq k} \sup_{|y|\leq N} |y-p|^{-2}(|y-p|^2\,|\varphi^{(j)}(y-p)|) \\
&\leq c\,\frac{1}{(|p|-N)^2} N_{k+2}(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\sum_{p\in\mathbb{Z}} |\langle\tau_p S, \varphi\rangle)| < \infty$. □

Remarque 13.9 On peut démontrer dès maintenant que la transformée de Fourier $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de notre distribution périodique est de la forme $\hat{T} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_{2\pi n}$, pour une famille de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous préciserons ce résultat au théorème 13.16.

Cette première assertion résulte des propriétés fonctionnelles de Fourier (proposition 8.32). En effet, T étant 1-périodique, la relation $\tau_1 T - T = 0$ se transforme par Fourier en $(e^{-i\xi} - 1)\,\hat{T} = 0$. Le résultat suit de ce que la fonction $\xi \mapsto e^{-i\xi} - 1$ n'a que des zéros simples, en chaque point du réseau $2\pi\mathbb{Z}$, du théorème de structure des distributions à support ponctuel, et de l'exercice suivant.

Exercice 13.10 Soient $(a_j)_{1\leq j\leq k}$ des complexes. Montrer que la distribution $x\,(\sum_{j=1}^{k} a_j\delta_0^{(j)})$ n'est nulle que si tous les a_j sont nuls.

L'égalité (13.2) préfigure (13.3), et nous servira dans sa preuve.

Lemme 13.11 Périodiser une fonction test
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on introduit la fonction $\Phi = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p\varphi$. Alors Φ est de classe C^∞ et 1-périodique, et l'on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'égalité

$$c_n(\Phi) = \hat{\varphi}(2\pi n) \tag{13.2}$$

entre les coefficients de Fourier de Φ et les valeurs de la transformée de Fourier de φ aux points du réseau $2\pi\mathbb{Z}$.

Preuve La somme $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p\varphi$ est localement finie, donc Φ est bien définie. De plus, Φ est une fonction de classe C^∞ et 1 périodique avec pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(\Phi) &= \int_0^1 \Phi(t)\, e^{-2i\pi nt}\, dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p\varphi(t) \right) e^{-2i\pi nt}\, dt \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \tau_p\varphi(t)\, e^{-2i\pi nt}\, dt \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi(t-p)\, e^{-2i\pi nt}\, dt \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_{-p}^{-p+1} \varphi(t)\, e^{-2i\pi nt}\, dt = \hat{\varphi}(2\pi n) \end{aligned}$$

la somme $\sum \tau_p\varphi$ sur l'intervalle compact $[0,1]$ étant en fait une somme finie puisque φ est à support compact, ce qui permet d'échanger somme et intégrale. □

Lemme 13.12 *Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} S$. Avec les notations du lemme 13.11 on a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'égalité*

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle S, \Phi\rangle\,.$$

Preuve En changeant l'indice de sommation p en $-p$, il vient simplement pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \langle \tau_p S, \varphi\rangle = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \langle S, \tau_p\varphi\rangle = \langle S, \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p\varphi\rangle = \langle S, \Phi\rangle\,.$$

Puisque S et φ sont à support compact, toutes les sommes qui apparaissent sont des sommes finies, ce qui justifie les calculs par linéarité. □

C Séries de Fourier de distributions périodiques

Définition 13.13 *Une suite de complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente s'il existe une constante $c > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ avec*

$$|c_n| \leq c\,(1 + |n|)^k$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On a vu à la proposition 13.4 que, lorsque la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est à décroissance rapide, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \tilde{\mathrm{e}}_n$ converge dans $\mathcal{C}^\infty_{(1)}$. Lorsque la suite est à croissance lente, on a le résultat suivant.

Proposition 13.14 *Si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de complexes à croissance lente, la série trigonométrique*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\tilde{\mathrm{e}}_n$$

converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et définit une distribution 1-périodique.

Preuve Soit $k \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que $|c_n| \leq c\,(1 + |n|)^k$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On observe que la série de fonctions

$$\sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{(2i\pi n)^{k+2}}\,\tilde{\mathrm{e}}_n : x \mapsto \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{(2i\pi n)^{k+2}}\,e^{2i\pi n x}$$

converge normalement, donc uniformément, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et définit une fonction continue 1-périodique

$$f = \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{(2i\pi n)^{k+2}}\,\tilde{\mathrm{e}}_n\,.$$

L'opérateur de dérivation sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est linéaire, donc commute aux sommes finies, et continu. Il suit que la série $c_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n\,\tilde{\mathrm{e}}_n$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution 1-périodique $c_0 + (T_f)^{(k+2)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. □

Remarque 13.15 Au sens des distributions tempérées, l'expression $n^k e^{2i\pi n x}$ est donc "petite" lorsque n est grand (puisque la série converge), même si l'exposant k est grand : il y a "insensibilité aux hautes fréquences".

Théorème 13.16 *1. Toute distribution 1-périodique $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ s'écrit d'une unique façon en somme d'une série trigonométrique*

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\tilde{\mathrm{e}}_n$$

convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, où la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente. Les complexes $c_n = c_n(T)$ sont les "coefficients de Fourier de T".

2. La transformée de Fourier de T est alors égale à

$$\hat{T} = (2\pi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(T)\, \delta_{2\pi n}\,.$$

3. Lorsqu'on écrit $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p S$, où $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est une distribution à support compact (proposition 13.8), on a

$$c_n(T) = \hat{S}(2\pi n)\,. \tag{13.3}$$

L'application $T \mapsto (c_n(T))_{n\in\mathbb{Z}}$ réalise une bijection entre les distributions 1-périodiques, et les suites à croissance lente.

Preuve **2.** Supposons avoir écrit $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(T)\, \tilde{\mathrm{e}}_n$, comme somme d'une série convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. D'après les propriétés fonctionnelles de Fourier (proposition 8.32) et l'exemple 8.34, on a :

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathrm{e}}_n) = \mathcal{F}(\tilde{\mathrm{e}}_n\, \mathbb{1}) = \tau_{2\pi n}\, \hat{\mathbb{1}} = (2\pi)\, \tau_{2\pi n}\delta_0 = (2\pi)\, \delta_{2\pi n}\,.$$

Il suit alors de la continuité de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (proposition 8.31) l'égalité $\hat{T} = (2\pi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(T)\, \delta_{2\pi n}$.

1. et 3. L'unicité d'une telle écriture résulte du point **2.**

Montrons l'existence. Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact telle que $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tau_p S$ (par exemple $S = \chi T$ convient, où χ est comme dans le lemme 13.7).

On montre en un premier temps l'égalité $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle S, \tilde{\mathrm{e}}_{-n}\rangle\, \tilde{\mathrm{e}}_n$, où la convergence est au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. D'après les propositions 13.4 et 13.8 et le lemme 13.11, puis la proposition 8.44, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle = \langle S, \Phi\rangle &= \langle S, \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\Phi)\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\Phi)\, \langle S, \tilde{\mathrm{e}}_n\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\pi n)\, \langle S, \tilde{\mathrm{e}}_n\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle S, \tilde{\mathrm{e}}_{-n}\rangle\, \langle \tilde{\mathrm{e}}_n, \varphi\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{S}(2\pi n)\, \langle \tilde{\mathrm{e}}_n, \varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

On a utilisé la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\Phi)\tilde{\mathrm{e}}_n$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ pour échanger cette somme infinie et la distribution S, puis le changement d'indice $n \leftrightarrow -n$. Ceci montre la convergence, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{S}(2\pi n)\, \tilde{\mathrm{e}}_n$ vers T.

La suite définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $c_n = \hat{S}(2\pi n)$ est à croissance lente (proposition 8.44). La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\tilde{\mathrm{e}}_n$ converge donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et l'on vient de voir que sa somme est T. □

Exemple 13.17 Le peigne de Dirac, et la formule de Poisson

On introduit le peigne de Dirac $T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_p$. C'est une distribution 1-périodique, associée à la distribution à support compact $S = \delta_0$. Il vient ici $c_n(T) = \langle S, \tilde{e}_{-n}\rangle = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et le théorème 13.16 donne sur cet exemple l'égalité

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx}\,, \tag{13.4}$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Par continuité de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et en utilisant les propriétés fonctionnelles de Fourier 8.32, on obtient

$$\mathcal{F}(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\tilde{e}_n) = (2\pi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}\,.$$

D'où, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(p) = (2\pi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi n)\,.$$

D Séries de Fourier dans $L^1_{(2\pi)}$

Pour nous conformer à une habitude plus répandue dans ce contexte, nous changeons notre choix de normalisation et considérons désormais des fonctions 2π-périodiques.

Proposition 13.18 *Soit $L^1_{(2\pi)}$ l'espace des fonctions localement intégrables et 2π-périodiques. Muni de la norme définie, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, par*

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} |f(t)|\,dt\,,$$

l'espace $L^1_{(2\pi)}$ est un espace de Banach.

L'opération de convolution définie (pour tout $a \in \mathbb{R}$) pour $f, g \in L^1_{(2\pi)}$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(g)\,g(x-t)\,dt$$

fait de $L^1_{(2\pi)}$ une algèbre commutative, pour laquelle on a

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1\,.$$

Preuve Les preuves de ces assertions sont semblables à celles valables dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. □

Définition 13.19 *Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier de $f \in L^1_{(2\pi)}$ est défini (pour tout $a \in \mathbb{R}$) par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,.$$

Contrairement à ce qui se passait dans l'espace de Hilbert $L^2_{(1)}$ (ou $L^2_{(2\pi)}$), ce coefficient $c_n(f)$ ne peut pas être interprété comme un produit scalaire. Le lemme de Riemann-Lebesgue affirme néanmoins que $c_n(f) \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$, et ce pour toute $f \in L^1_{(2\pi)}$.

Définition 13.20 *Soit $f \in L^1_{(2\pi)}$. La série de Fourier de f est la série (formelle) de fonctions*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \mathrm{e}_n : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}\,.$$

L'écriture de la série de Fourier de $f \in L^1_{(2\pi)}$ ne préjuge pas de la convergence de cette série, en quelque sens que ce soit. Néanmoins :

Proposition 13.21 *Soient $f \in L^1_{(2\pi)}$ et T_f la distribution 2π-périodique associée à f. On a alors, avec les notations du théorème 13.16, l'égalité $c_n(T_f) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et la série de Fourier de f converge donc vers T_f dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

Preuve Reprenons (aux normalisations près) les notations et les résultats de la section précédente.

Puisque la distribution T_f considérée est associée à une fonction, on peut simplement utiliser les translatées de la fonction $\mathbb{1}_{[0,2\pi[}$ pour obtenir une partition de l'unité périodique (voir la paragraphe précédent le lemme 13.7).

On écrit alors $T_f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tau_{2\pi p} S$, où $g = f\, \mathbb{1}_{[0,2\pi[}$ et $S = T_g$. On a donc égalité des coefficients de Fourier de la distribution T_f (au sens du théorème 13.16) et de ceux de la fonction localement intégrable périodique f (au sens de la définition 13.20) puisque, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(T_f) = \frac{1}{2\pi} \langle T_g, \mathrm{e}_{-n} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f\, \mathbb{1}_{[0,2\pi[}, \mathrm{e}_{-n} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = c_n(f)\,.$$

Le théorème 13.16 affirme donc que la série de Fourier de la fonction $f \in L^1_{(2\pi)}$ converge vers T_f dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées. □

Peut-on espérer mieux ? Il est en effet naturel de se demander si la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1_{(2\pi)}$ converge vers f dans cet espace. Ce n'est pas le cas en général ! On peut par en effet montrer qu'il existe des fonctions $f \in L^1_{(2\pi)}$ dont la série de Fourier ne converge pas dans l'espace $L^1_{(2\pi)}$. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 13.22 Séries de Fourier dans $L^1_{(2\pi)}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $f \in L^1_{(2\pi)}$, on introduit la n-ième somme partielle de sa série de Fourier, définie par

$$S_n(f) = \sum_{|k|\leq n} c_k(f)\mathrm{e}_k \,.$$

1. On introduit le noyau de Dirichlet $D_n = \sum_{|k|\leq n} \mathrm{e}_n : x \mapsto \sum_{|k|\leq n} e^{ikx}$. Montrer, pour $x \not\equiv 0[2\pi]$, l'égalité

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \,.$$

2. Montrer que $\|D_n\|_1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
3. Pour $f \in L^1_{(2\pi)}$ et $n \in \mathbb{N}$ montrer l'égalité

$$S_n(f) = D_n * f \,.$$

4. Montrer que la norme de l'opérateur de convolution défini par

$$\Gamma_n : f \in L^1_{(2\pi)} \mapsto D_n * f \in L^1_{(2\pi)}$$

est $\|\Gamma_n\| = \|D_n\|_1$.
On pourra tester l'opérateur Γ sur une approximation de l'unité $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans l'algèbre de convolution $L^1_{(2\pi)}$, par exemple $\rho_k = (2k)\mathbb{1}_{[-1/k,1/k]}$.
5. Déduire alors du théorème de Banach-Steinhaus 12.3 qu'il existe des fonctions $f \in L^1_{(2\pi)}$ pour lesquelles la suite $(S_n(f))$ n'est pas bornée dans $f \in L^1_{(2\pi)}$.

14. Appendice : Espaces de Sobolev

Ce chapitre constitue une toute petite initiation aux espaces de Sobolev, qui avaient déjà été évoqués au chapitre 5 dans le cadre de la dimension 1.

A Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$

Proposition 14.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev d'ordre m sur Ω est*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\,,\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\}\,.$$

La norme définie sur $H^m(\Omega)$ par

$$u \mapsto \|u\|_{H^m} = \big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_2^2\big)^{1/2}$$

en fait un espace de Hilbert. Le produit scalaire associé est

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u\, \overline{\partial^\alpha v}\,.$$

Preuve Même preuve que pour la proposition 5.6. □

Lorsque l'ouvert Ω est $\mathbb{R}^d$ tout entier, on peut définir les espaces de Sobolev à travers la transformée de Fourier.

Proposition 14.2 *On a l'égalité*

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,,\ (1+\|\xi\|^2)^{m/2}\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}\,.$$

De plus, la norme $\|\ \|_{H_m}$ est équivalente à la norme hilbertienne définie sur $H^m(\mathbb{R}^d)$ par

$$u \mapsto \|(1+\|\xi\|^2)^{m/2}\,\hat{u}\|_2\,,$$

de produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^m \hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,.$$

Preuve On note $\xi = (\xi_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^d$. On observe qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ et tout multi-indice $|\beta| \leq m$, on a

$$|\xi^\beta|^2 \leq (1 + \|\xi\|^2)^m \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \,.$$

Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. D'après le théorème de Plancherel 8.43 et le théorème d'inversion de Fourier 8.37, cela revient à demander que $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ou encore que $|\xi|^{2\alpha} \, |\hat{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$.

D'où l'équivalence des définitions, et des normes. □

Cette définition alternative, à travers la transformée de Fourier, des espaces de Sobolev d'ordre entier sur $\mathbb{R}^d$ ouvre le chemin pour définir les espaces de Sobolev d'ordre non entier... toujours sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 14.3 *Soit $s \in \mathbb{R}$. On introduit l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^d$, défini par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,,\ (1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}\,.$$

La norme hilbertienne définie sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ par $u \mapsto \|(1+\|\xi\|^2)^{s/2}\, \hat{u}\|_2$ en fait un espace de Hilbert.

L'application $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \mapsto \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d, (1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\, dx)$ est donc une isométrie entre ces deux espaces de Hilbert.

Remarque 14.4 Lorsque $s \geq 0$, les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont des fonctions. Lorsque $s < 0$, un élément $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ n'est pas toujours associé à une fonction, mais sa transformée de Fourier $\hat{u}$ est une fonction.

Exemple 14.5 • La fonction constante $\mathbb{1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ n'appartient à aucun $H^s(\mathbb{R}^d)$ car sa transformée de Fourier n'est pas une fonction.

• On a $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $s < -d/2$.

• Il suit plus généralement des estimées obtenues dans la preuve de la proposition 8.44 que, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution à support compact d'ordre au plus k, on a $T \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -k - d/2$.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Proposition 14.6 *Pour $s_1 < s_2$, on a $H^{s_2}(\mathbb{R}^d) \subset H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$.*

Pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$.

Intéressons nous maintenant à la régularité des distributions appartenant aux espaces de Sobolev. On avait vu en dimension 1 que $H^1(I) \subset C^0(I)$. En dimension supérieure, ce résultat ne persiste pas tel quel.

Exercice 14.7 On note $\| \ \|$ la norme canonique de $\mathbb{R}^3$, et $r : x \mapsto \|x\|$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau constante égale à 1 au voisinage de l'origine. Montrer que la distribution associée à la fonction $\chi \log r$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Définition 14.8 *Soit, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'espace*[1]

$$C_0^k(\mathbb{R}^d) = \{u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \textit{ de classe } C^k \textit{ telles que } (\partial^\alpha u)(x) \overset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \textit{ si } |\alpha| \leq k\}\,.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on le munit de la norme définie par $\|u\| = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_\infty$.

Proposition 14.9 Injection de Sobolev
Pour $s > k + d/2$, on a une injection continue $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C_0^k(\mathbb{R}^d)$. Il suit que

$$\cap_{s>0} H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\,.$$

Preuve Soient $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, où $s > 0$, et un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha\, \hat{u}$$

est alors une fonction, avec par Cauchy-Schwarz :

$$\|\xi^\alpha \hat{u}\|_1 \leq \|\frac{\xi^\alpha}{(1+\|\xi\|^2)^{s/2}}\|_2 \, \|(1+\|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u}\|_2 \leq c\,\|u\|_{H^s}\,,$$

où $c = \|\frac{\xi^\alpha}{(1+\|\xi\|^2)^{s/2}}\|_2 < \infty$ lorsque $2|\alpha| - 2s + d < 0$, i.e. si $s > |\alpha| + d/2$.

Lorsque $s > k + d/2$, il suit du théorème d'inversion de Fourier 8.37 et de la continuité de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable (corollaire 8.39) que l'on a $\partial^\alpha u \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq k$, et donc que $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$ (proposition 7.10). □

Remarque 14.10 La famille des espaces de Sobolev $(H^s(\mathbb{R}^d))_{s\in\mathbb{R}}$ est une famille décroissante d'espaces de Hilbert, dont les éléments sont "de plus en plus réguliers" lorsque s croît.

Remarque 14.11 Soit $s > 0$. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert. A ce titre, le théorème de représentation de Riesz l'identifie naturellement à son dual continu $(H^s(\mathbb{R}^d))'$. Mais l'application

$$T \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \overset{\simeq}{\to} \left[u \in H^s(\mathbb{R}^d) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \hat{T}\hat{u} \in \mathbb{C}\right] \in (H^s(\mathbb{R}^d))'$$

est un isomorphisme d'espace de Hilbert. D'où également une identification naturelle entre le dual $(H^s(\mathbb{R}^d))'$ et l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.

On retrouve, par dualité à partir de la proposition 14.9, le fait qu'une distribution à support compact d'ordre au plus k est dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s > k + d/2$.

1. Attention, cette notation est loin d'être universelle. Bien souvent, $C_0^\infty(\Omega)$ désignera plutôt l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$...

B Régularité elliptique dans les Sobolev

On a vu à la proposition 14.6 que si $P(\partial)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre m, on a $P(\partial) : H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^d)$. On a, réciproquement, le résultat suivant.

Proposition 14.12 Régularité elliptique
Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, que l'on suppose elliptique d'ordre m.

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée telle que $P(\partial)u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$. Alors, on a $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Puisque l'on a supposé que $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ (pour une valeur de σ qui peut être très négative !), nous savons que $\hat{u}$ est définie par une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Il reste donc juste à vérifier que la fonction $x \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{(s+m)/2}\hat{u}$ est de carré intégrable à l'infini.

On a supposé $P(\partial)u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, soit $(1 + \|\xi\|^2)^{s/2}P(i\xi)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. L'opérateur $P(\partial)$ étant elliptique, le lemme 9.11 assure l'existence d'une constante $c > 0$ et d'un rayon $R > 0$ tels que $|P(i\xi)| \geq c\|\xi\|^m$ dès que $\|\xi\| \geq R$. Le résultat suit. $\square$

Exercice 14.13 Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ différente d'un réel positif. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que l'équation $(\Delta + \lambda \mathrm{Id})\, u = v$ admet une unique solution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, puis que u appartient à l'espace de Sobolev $H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$.

La proposition 14.12 indique que les espaces de Sobolev sont bien adaptés à l'étude de la régularité des solutions d'une équations aux dérivées partielles. Ce n'était pas le cas des espaces "naïfs" $C^k(\mathbb{R}^d)$. En effet :

Proposition 14.14 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution à support compact. On suppose que $\Delta T \in C^0(\mathbb{R}^d)$. Alors $T \in C^1(\mathbb{R}^d)$.*

Si $d \geq 2$, il existe par contre des distributions $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\Delta T \in C^0(\mathbb{R}^d)$, mais qui ne sont pas définies par une fonction de classe C^2.

L'opérateur Δ est elliptique d'ordre 2. Pour autant, la proposition précédente montre que l'on ne gagne pas deux degrés de régularité entre ΔT et T lorsqu'on travaille dans les espaces C^k.
Il est donc plus judicieux, lorsqu'on s'intéresse à ces propriétés de régularité elliptique, de travailler dans les espaces de Sobolev (proposition 14.12). Ou alors dans les espaces $C^{k,\alpha}$ (constitués des fonctions de classe C^k dont les dérivées k-ièmes satisfont de plus une condition de Hölder d'ordre α) : nous n'irons pas plus loin dans cette direction.

Preuve Soient $j \in \mathbb{N}$ et $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact. On notera $\mathcal{D}^j_K(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^j sur $\mathbb{R}^d$, de support inclus dans K.

• Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta T = f$, où $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^d)$ est une fonction continue à support compact.

Si E désigne la solution fondamentale du laplacien introduite en 6.20, on a donc $T = \Delta T * E$, et donc $\partial_j T = (\Delta T) * (\partial_j E)$ pour tous $1 \leq j \leq d$. On vérifie que chaque dérivée $\partial_j E$ est définie par une fonction localement intégrable, multiple de $x \mapsto x_j \|x\|^{-d}$ (procéder avec la formule des sauts, comme dans la preuve de la proposition 11.24). La convolée de la fonction continue à support compact ΔT avec la fonction localement intégrable $\partial_j E$ est une fonction continue. On conclut, avec la proposition 7.10, que T est définie par une fonction C^1.

• Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ la boule unité fermée. Soit l'espace

$$F = \{u \in \mathcal{D}^1_K(\mathbb{R}^d)\,,\ \Delta u \in \mathcal{D}^0_K(\mathbb{R}^d)\}$$

constitué des fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ à support inclus dans K, et dont le laplacien au sens des distributions est défini par une fonction continue.

On vérifie facilement, en utilisant la continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, que la norme définie sur F par

$$\|u\|_F = \sup_K |u| + \sum_j \sup_K |\partial_j u| + \sup_K |\Delta u|$$

en fait un espace de Banach.

L'injection naturelle $j : \mathcal{D}^2_K \hookrightarrow F$ est une application linéaire continue, lorsqu'on munit $\mathcal{D}^2_K$ de sa norme naturelle définie par

$$\|u\|_{C^2} = \sup_K \sup_{|\alpha| \leq 2} |\partial^\alpha u|\,.$$

Supposons par l'absurde que toutes les fonctions $u \in F$ soient des fonctions de classe C^2. On aurait alors l'égalité ensembliste $F = \mathcal{D}^2_K$, et l'application j serait alors une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach, et donc une application bicontinue (corollaire 12.6). Il existerait donc une constante $c > 0$ avec $\|u\|_{C^2} \leq c\,\|u\|_F$ pour tout fonction $u \in \mathcal{D}^2_K$. On va voir que ce n'est pas possible.

Soit notre fonction harmonique favorite $\Psi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto x_1^2 - x_2^2 \in \mathbb{R}$ (par exemple), soit $\chi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur la boule $B(0, 1/2)$, et introduisons la fonction $f = \chi\Psi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ qui est harmonique sur $B(0, 1/2)$.

Soient les fonctions $s_n \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ définies par $s_n(x) = \sum_{j=1}^n 4^{-j} f(2^j x)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), de sorte qu'on a, pour tout $1 \leq j \leq d$:

$$\|s_n\|_\infty \leq (\sum_{j=1}^n 4^{-j})\,\|f\|_{L^\infty(K)} \leq \|f\|_{L^\infty(K)}$$

$$\|\partial_j s_n\|_\infty \leq (\sum_{j=1}^n 2^{-j})\,\|Df\|_{L^\infty(K)} \leq \|Df\|_{L^\infty(K)}\,,$$

et avec
$$(\partial_1^2 s_n)(0) = n\,(\partial_1^2\Psi)(0) = 2n\,.$$
Le laplacien de f étant supporté par la couronne $\{1/2 \leq \|x\| \leq 1\}$, on a
$$\|\Delta s_n\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} \|\Delta(4^{-j} f(2^j\cdot)))\|_\infty = \|\Delta f\|_\infty\,.$$
Les normes des fonctions (s_n) dans l'espace C^2 ne sont dont pas uniformément contrôlées par leurs normes dans F, ce qui conclut la preuve. □

C Le problème de Dirichlet

Définition 14.15 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$.*

Exemple 14.16 On a (mais c'est exceptionnel !) l'égalité $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$. La preuve de cette assertion, par troncature et régularisation, est laissée au lecteur.

On a vu que les éléments de $H^1(\Omega)$ n'étaient, en dimension $d \geq 2$, pas toujours définis par des fonctions continues (contrairement à la dimension 1). Lorsque Ω est un ouvert borné à bord régulier, il faudra cependant continuer à penser que $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in H^1(\Omega)$ "qui s'annulent au bord $\partial\Omega$ de Ω". On a en effet le résultat suivant, a priori très surprenant puisqu'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ n'est définie que presque partout, et que le bord $\partial\Omega$ d'un ouvert à bord régulier est de mesure nulle...

Théorème 14.17 Théorème de trace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné à bord régulier. Il existe une application "valeur au bord" , qui est linéaire est continue, soit
$$\tau : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \sigma)\,,$$
telle que pour toute fonction $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, on ait l'égalité $\tau(u) = u_{|\partial\Omega}$.

On a alors $H_0^1(\Omega) = \mathrm{Ker}(\tau)$.

De plus, pour $u, v \in H^1(\Omega)$, la formule d'intégration par parties 11.32 devient
$$\int_\Omega (\partial_j u)\, v dx = \int_{\partial\Omega} (\tau u)\,(\tau v)\,\nu_j\, d\sigma - \int_\Omega u\,(\partial_j v)\, dx\,.$$

Elements de preuve On commence par montrer que l'espace $\mathcal{D}_{|\Omega}$ (restriction à Ω des fonctions C^∞ ou, ce qui revient au même puisque Ω est borné, des fonctions tests, sur $\mathbb{R}^d$) est dense dans $H^1(\Omega)$. Ce résultat généralise à la dimension quelconque le corollaire 5.14.

On montre ensuite que l'application trace (définie ici au sens classique) $\tau : u \in \mathcal{D}_{|\Omega} \mapsto u_{|\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega, \sigma)$ est continue lorsque $\mathcal{D}(\Omega)$ est muni de la norme H^1. Cette application se prolonge alors pour donner l'application τ de l'énoncé.

La formule de Green suit par densité de $\mathcal{D}_{|\Omega}$ dans $H^1(\Omega)$, et continuité des trois termes de l'égalité.

De même, il suit immédiatement l'inclusion $H_0^1(\Omega) \subset \mathrm{Ker}(\tau)$. L'inclusion réciproque demande un peu de travail. □

Indépendamment de ce théorème de trace, on va démontrer le résultat suivant.

Théorème 14.18 Problème de Dirichlet

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert quelconque, $f \in L^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$ un réel positif. Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation

$$-\Delta u + \lambda u = f.$$

Preuve Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Dire que u est solution de l'équation $-\Delta u + \lambda u = f$ est équivalent à dire qu'on a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u + \lambda u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

soit, puisque $u, \partial_j u \in L^2(\Omega)$:

$$\sum_{j=1}^{d} \int_\Omega (\partial_j u)\,(\partial_j \varphi) + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi\,,$$

ou bien encore qu'on a, pour toute $v \in H_0^1(\mathbb{R}^d)$, l'égalité

$$\sum_{j=1}^{d} \int_\Omega (\partial_j u)\,(\partial_j v) + \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega fv\,.$$

L'application semi-linéaire $(w, v) \mapsto \sum_{j=1}^d \int_\Omega \overline{(\partial_j w)}\,(\partial_j v) + \lambda \int_\Omega \overline{w} v$ est un produit scalaire $(\,,)_\lambda$ sur $H_0^1(\Omega)$, dont la norme associée est équivalente à la norme induite par la norme $\|\ \|_{H^1}$ et qui en fait donc un espace de Hilbert.

Pour ce produit scalaire, la forme linéaire $v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega fv \in \mathbb{C}$ est continue et elle est donc représentée, à travers le produit scalaire $(\,,)_\lambda$, par un élément $w \in H_0^1(\Omega)$. Son conjugué $u = \overline{w} \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution au problème de Dirichlet étudié. □

D Les espaces $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

On peut regretter que l'énoncé de régularité elliptique 14.12 soit global, ce qui semble être contre-nature. En effet, on peut faire mieux ! Nous citons les résultats suivants uniquement à titre culturel, sans démonstration donc.

On a pu définir naïvement les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre entier $m \in \mathbb{N}$ sur tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (14.1). Lorsqu'on a défini les espaces de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$ non entier, on est passés par l'intermédiaire de la transformation de Fourier et il a fallu se limiter à $\Omega = \mathbb{R}^d$. Cela mène a la définition suivante.

Définition 14.19 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et un réel $s > 0$. L'espace $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est constitué des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui sont "localement H^s", c'est-à-dire telles que $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Dans cette définition, on a prolongé φu par 0 hors de Ω.

La première propriété est de nature à nous rassurer sur le bien-fondé de la définition précédente.

Proposition 14.20 *Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.*

Passons aux propriétés de régularité des fonctions de $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Théorème 14.21
1. *Pour $s > k + d/2$, on a*
$$H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^k(\Omega) \subset H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,.$$
2. *Si la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre au plus k, et si $s < -k - d/2$, on a $T \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*
3. *Si $k \in \mathbb{N}$ avec $T \in H^{-k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, alors T est d'ordre au plus k.*

Il suit que $\cap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, et que $\cup_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est l'ensemble des distributions d'ordre fini sur Ω.

Terminons par un résultat de régularité elliptique.

Théorème 14.22
1. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞ sur Ω. Alors si $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on a $P(\partial)u \in H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*
2. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, elliptique d'ordre m. Si $P(\partial u) \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on a $u \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Exercice 14.23 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Soient $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\lambda > 0$. Montrer que l'unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ du problème de Dirichlet $-\Delta u + \lambda u = f$ est une fonction régulière $u \in C^\infty(\Omega)$.

Index