TD2 : intervalles de confiance 1 (loi des données inconnue et $n \geq 30$)

Rappel :

Données : $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon avec $n \geq 30$.
Niveau de confiance : α.
Loi des données inconnue de moyenne m (inconnue) et d'écart-type σ (inconnu).
Calcul de la moyenne estimée : $\hat{m} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.
Calcul de l'écart-type estimé : $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(X_1-\hat{m})^2+\cdots+(X_n-\hat{m})^2}{n-1}}$.
Par le TCL : $P(-z \leq \frac{m-\hat{m}}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \leq z) \simeq P(-z \leq \mathcal{N}(0,1) \leq z)$.
Donc IC : $m \in \left[\hat{m} - z \times \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}; \hat{m} + z \times \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$ avec probabilité α.

Exercice 1.

1. Trouver z tel que $P(-z \leq \mathcal{N}(0,1) \leq z) = 0.93$. $z \simeq 1.81$.
2. Trouver z tel que $P(-z \leq \mathcal{N}(0,1) \leq z) = 0.97$. $z = 2.17$.

1 Exercices

Exercice 2. Afin d'évaluer la performance du réseau de distribution d'eau vis-à-vis des besoins de ses habitants, un syndicat de communes a mené une étude quantitative : sur un échantillon représentatif de 100 ménages, il a été observé une consommation journalière de 446.5L en moyenne avec un écart-type de 63.8L.

Donner un intervalle de confiance de la consommation journalière moyenne par ménage à 95%.

$$\left[446.5 - 1.96 \times \frac{63.8}{\sqrt{100}}; 446.5 - 1.96 \times \frac{63.8}{\sqrt{100}}\right] = [434; 459]$$

Exercice 3. Une entreprise d'empaquetage de bonbons étudie le nombre de bonbons vendus dans une boîte de 1kg. Pour cela, elle effectue un test sur 20 boîtes. L'estimation ponctuelle du test donne que le nombre moyen de bonbons est de 194.3 par boîte et que l'écart-type est de 9.2 bonbons par boîte.

1. Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne à 87%. **On ne peut pas car $n = 20 < 30$ et les données ne sont pas gaussiennes.**
2. On suppose maintenant que le test est effectué sur 200 boites pour la même moyenne et le même écart-type estimé. Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne à 87%.

$$\left[194.3 - 1.515 \times \frac{9.2}{\sqrt{200}}; 194.3 + 1.515 \times \frac{9.2}{\sqrt{200}}\right] = [193.3; 195.3]$$

Exercice 4. On s'intéresse au nombre de buts marqués lors d'un match de foot par le perdant ou par l'une des deux équipes en cas d'égalité. Pour les 64 matches de la coupe du monde 2022, on obtient

Buts	0	1	2	3
Effectifs	33	23	6	2

Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne à 92%.

$$\hat{m} = \frac{33 \times 0 + 23 \times 1 + 6 \times 2 + 2 \times 3}{64} \simeq 0.64.$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{33 \times (0 - 0.64)^2 + 23 \times (1 - 0.64)^2 + 6 \times (2 - 0.64)^2 + 2 \times (3 - 0.64)^2}{63}}$$

$$= \sqrt{\frac{38.73}{63}} \simeq 0.784.$$

$$\left[0.64 - 1.75 \times \frac{0.784}{\sqrt{64}}; 0.64 + 1.75 \times \frac{0.784}{\sqrt{64}}\right] = [0.4685; 0.8115]$$

Exercice 5. Une entreprise produit des câbles en acier pour les ascenseurs. À partir d'un lot de matières premières, on fabrique 10000 câbles. Des essais de traction sont alors effectués sur un échantillon du lot afin d'estimer la résistance moyenne des câbles (mesurée en Méga-Pascal).

Des essais de traction sur un échantillon de 50 câbles ont donné les résultats suivants :

Résistance d'un câble (en MPa)	1400	1450	1500	1550	1600
Effectifs	7	9	16	11	7

Donner un intervalle de confiance de la résistance moyenne au niveau 99%.

$$\hat{m} = \frac{7 \times 1400 + 9 \times 1450 + 16 \times 1500 + 11 \times 1550 + 7 \times 1600}{50} = 1502.$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{7 \times 102^2 + 9 \times 52^2 + 16 \times 2^2 + 11 \times 48^2 + 7 \times 98^2}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{189800}{49}} \simeq 62.2.$$

$$\left[1502 - 2.576 \times \frac{62.2}{\sqrt{50}}; 1502 + 2.576 \times \frac{62.2}{\sqrt{50}}\right] = [1479; 1525]$$

2 Exercices d'entrainement

Exercice 6. Une entreprise de fabrication de pneus teste 400 de ses pneus. L'estimation ponctuelle du test donne que la durée de vie moyenne d'un pneu est de 43256km et que l'écart-type est de 1243km.

Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne à 96%.

$$\left[43256 - 2.06 \times \frac{1243}{\sqrt{400}}; 43256 + 2.06 \times \frac{1243}{\sqrt{400}}\right] = [43128.0; 43384.0]$$

Exercice 7. BIC teste l'endurance de ses stylos éponymes. Sur 1000 stylos testés, il trouve que la moyenne des longueurs est 2446m et que l'écart-type est de 372m.

Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne à 84%.

$$\left[2446 - 1.41 \times \frac{372}{\sqrt{1000}}; 2446 + 1.41 \times \frac{372}{\sqrt{1000}}\right] = [2429.4; 2462.6]$$

Exercice 8. Une entreprise de bonbons emballe ses bonbons en paquets de petites quantités. Elle réalise un contrôle où elle mesure le nombre de bonbons par paquets. Elle obtient à partir de son échantillon les résultats suivants :

Bonbons dans le paquet	8	9	10	11	12
Effectifs	2	21	45	29	3

Calculer l'intervalle de confiance de la moyenne à 97%.

$$\begin{aligned}
\hat{m} &= \frac{2 \times 8 + 21 \times 9 + 45 \times 10 + 29 \times 11 + 3 \times 12}{100} = \frac{1010}{100} = 10.1. \\
\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{2 \times 2.1^2 + 21 \times 1.1^2 + 45 \times 0.1^2 + 29 \times 0.9^2 + 3 \times 1.9^2}{99}} \\
&= \sqrt{\frac{69}{99}} \simeq 0.83.
\end{aligned}$$

$$\left[10.1 - 2.17 \times \frac{0.83}{\sqrt{100}}; 10.1 + 2.17 \times \frac{0.83}{\sqrt{100}}\right] = [9.92; 10.28]$$

Exercice 9 (Sujet du partiel 2021-2022)**.** Un artisan fabrique et vend des sujets[1] de Noël. Il souhaite estimer sa vitesse de production moyenne. Pour cela, pendant deux semaines de travail, soit 50h de travail, il note le nombre de sujets qu'il a fabriqués dans l'heure. Il regroupe les résultats et obtient le tableau suivant

Nombre de sujets fabriqués dans l'heure	11	12	13	14
Nombre de fois que cela s'est produit	7	23	16	4

.

Donner un intervalle de confiance au niveau 85% du nombre de sujets fabriqués en une heure.

$$\begin{aligned}
\hat{m} &= \frac{7 \times 11 + 23 \times 12 + 16 \times 13 + 4 \times 14}{50} = \frac{617}{50} = 12.34. \\
\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{7 \times 1.34^2 + 23 \times 0.34^2 + 16 \times 0.66^2 + 4 \times 1.66^2}{49}} \\
&= \sqrt{\frac{33.22}{49}} \simeq 0.82.
\end{aligned}$$

$$\left[12.34 - 1.44 \times \frac{0.82}{\sqrt{50}}; 12.34 + 1.44 \times \frac{0.82}{\sqrt{50}}\right] = [12.17; 12.51]$$

1. Les sujets sont des petits objets décoratifs.