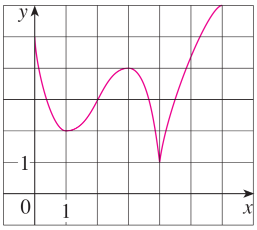
# TD4 : correction

## 1 Interprétation graphique

**Exercice 1.** Pour le graphe représenté ci-après, trouver

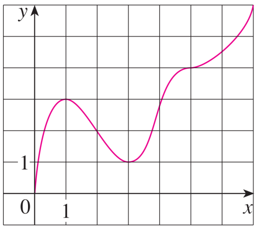
1. les intervalles sur lesquels la fonction est croissante,
2. les intervalles sur lesquels la fonction est décroissante,
3. les intervalles sur lesquels la fonction est concave,
4. les intervalles sur lesquels la fonction est convexe,
5. les coordonnées des points d'inflexion.




**Solution 1.**

1. La fonction est croissante sur l'intervalle $[1;3]$ et sur l'intervalle $[4;6]$.
2. La fonction est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$ et sur l'intervalle $[3;4]$.
3. La fonction est concave sur l'intervalle $[2;4]$ et sur l'intervalle $[4;6]$.
4. La fonction est convexe sur l'intervalle $[0;2]$.
5. La fonction a un point d'inflexion en $(2,3)$.

**Exercice 2.** Mêmes questions que pour l'exercice 1, mais avec le graphe suivant :




**Solution 2.**

1. La fonction est croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et sur l'intervalle $[3;7]$.
2. La fonction est décroissante sur l'intervalle $[1;3]$.
3. La fonction est concave sur l'intervalle $[0;2]$ et sur l'intervalle $[4;5]$.
4. La fonction est convexe sur l'intervalle $[2;4]$ et sur l'intervalle $[5;7]$.
5. La fonction a trois points d'inflexion : $(2,2)$, $(4,3)$ et $(5,4)$.

# 2 Étude de fonctions

**Exercice 3.** Pour chacune des fonctions suivantes, trouver

1. le domaine de définition,
2. les intervalles de croissance et décroissance,
3. les intervalles de concavité et de convexité,
4. les minima et maxima locaux et globaux quand ils existent,
5. les points d'inflexions quand ils existent.
   Astuce : on représentera tout cela via un tableau de variations.
6. Tracer une courbe représentative de la fonction.

a. $f(x) = x^3 - 12x + 2$ b. $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$ c. $f(x) = x\sqrt{6-x}$
d. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$ e. $f(x) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 5) + 3$ f. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

[Indications : b. $6 + x - x^2 = -(x+2)(x-3)$ / e. $x^2 - 8x + 11 = (x - 4 + \sqrt{5})(x - 4 - \sqrt{5})$ et $x^2 - 10x + 19 = (x - 5 + \sqrt{6})(x - 5 - \sqrt{6})$.]

**Solution 3.**

a. Étude de la fonction $f(x) = x^3 - 12x + 2$.

1. Ici, on peut calculer $f$ en toutes valeurs réelles pour $x$, donc le domaine de définition de $f$ est l'ensemble des réels, ce qui se note $D_f = \mathbb{R}$.
2. Pour trouver les intervalles de croissance et décroissance, on calcule d'abord la dérivée de $f$ :
$$f'(x) = 3x^2 - 12,$$
puis on cherche à la factoriser (avec une identité remarquable)
$$f'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x+2)(x-2).$$
Puis, en vertu du fait que si $f'(x) \geq 0$, alors $f$ est croissante et que si $f'(x) \leq 0$, alors $f$ est décroissante. On étudie le signe de $f'$ ce que l'on représente via un tableau de variations

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | ○ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | ○ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | ○ | $-$ | ○ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

On lit donc que $f$ est croissante sur $]-\infty;-2]$ et sur $[2;\infty[$, et décroissante sur $[-2;2]$.

3. Pour la concavité et la convexité, on regarde la dérivée seconde de $f$ (qui est la dérivée de la dérivée) :
$$f''(x) = 6x.$$
Puis en vertu du fait que si $f''(x) \geq 0$, alors $f$ est convexe et que si $f''(x) \leq 0$, alors $f$ est concave. On étudie le signe de $f''$ que l'on représente via un tableau de variations

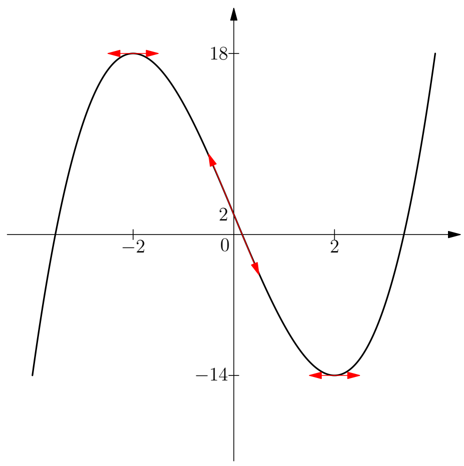
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | concave | | convexe | |

Cela nous permet de conclure que $f$ est convexe sur $[0;+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0]$.

4. On voit dans le tableau de variations de la question 2 que l'on a un minimum local en 2 et un maximum local en $-2$ valant respectivement $f(2) = 8-24+2 = -14$ et $f(-2) = -8+24+2 = 18$. Il n'existe pas de maximum et minimum globaux car en $-\infty$, $f$ tend vers $-\infty$ et en $+\infty$ vers $+\infty$.

5. On voit dans le tableau de variations de la question 3 qu'il y a potentiellement un point d'inflexion en 0 car on passe de concave à convexe. De plus, comme $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$ existent, alors le point $(0,2)$ est un point d'inflexion.

6. Le graphe correspondant à la courbe :




Remarque : vous n'avez pas besoin d'être aussi précis (en particulier sur la tangente du point d'inflexion).

b. Étude de la fonction $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$.

1. Ici, on peut calculer $f$ en toutes valeurs réelles pour $x$, donc le domaine de définition de $f$ est l'ensemble des réels, ce qui se note $D_f = \mathbb{R}$.
2. Pour trouver les intervalles de croissance et décroissance, on calcule d'abord la dérivée de $f$ :
$$f'(x) = 36 + 6x - 6x^2 = 6(6 + x - x^2),$$
Ainsi, avec l'indication,
$$f'(x) = -6(x + 2)(x - 3).$$
(On peut aussi factoriser en calculant les racines : d'abord le discriminant
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0.$$
Comme $\Delta > 0$, on a deux racines (réelles) qui sont
$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-1)} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-1)} = 3.)$$
Maintenant, on étudie le signe de $f'$ que l'on représente via un tableau de variations. **On n'oublie pas le $-$ du $-6$ dans l'étude du signe.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

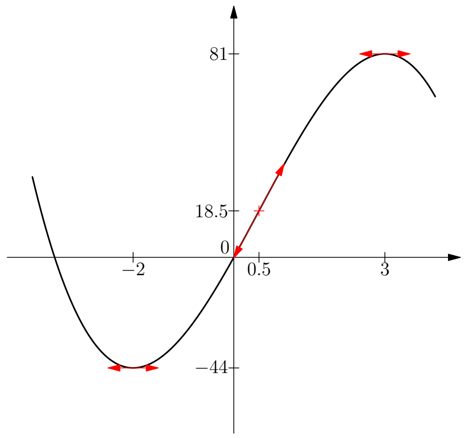
On lit donc que $f$ est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et sur $[3; \infty[$ et croissante sur $[-2; 3]$.
3. Pour la concavité et la convexité, on regarde la dérivée seconde de $f$ :
$$f''(x) = 6 - 12x = 6(1 - 2x).$$
L'étude du signe de $f''$, que l'on représente via un tableau de variations

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f$ | | convexe | | concave | |

permet de conclure que $f$ est convexe sur $]-\infty; 1/2]$ et concave sur $[1/2; +\infty[$.

4. Par lecture dans le tableau de variations de la question 2, on a
   — un minimum local en $-2$ qui vaut $f(-2) = -72 + 12 + 16 = -44$ et
   — un maximum local en 3 qui vaut $f(3) = 108 + 27 - 54 = 81$.

   Il n'y a en revanche pas d'extremum global car la fonction tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers $-\infty$ en $+\infty$.
5. Par lecture dans le tableau de variations de la question 3, le seul point d'inflexion possible est en $1/2$. Comme $f(1/2) = 18 + 3/4 - 1/4 = 18.5$ et $f'(1/2)$ existent, alors $(0.5, 18.5)$ est bien un point d'inflexion.
6. Le graphe de la fonction :




c. Étude de la fonction $f(x) = x\sqrt{6-x}$.

1. Pour pouvoir calculer $f$, il faut que $6 - x \geq 0$ [en effet, on ne peut calculer la racine carrée d'un nombre négatif], ce qui implique que $x \leq 6$. Le domaine de définition est donc $]-\infty, 6]$.
2. Pour trouver les intervalles de croissance et décroissance, on calcule d'abord la dérivée de $f$ :

$$f'(x) = \sqrt{6-x} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{2(6-x) - x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{12 - 3x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}}.$$

   Remarque : pour faire ce calcul, on a utilisé la dérivée du produit de $x$ par $\sqrt{6-x}$ et, pour dériver $\sqrt{6-x}$, on a reconnu la composée de la fonction $\sqrt{y}$ et de $6 - x$.

Pour étudier le signe de $f'$, on remarque que $\sqrt{6-x}$ est toujours positif, il suffit donc d'étudier le signe de $4-x$.

| $x$ | $-\infty$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

On lit donc que $f$ est croissante sur $]-\infty;4]$ et décroissante sur $[4;6]$.

3. Pour la concavité et la convexité, on regarde la dérivée seconde de $f$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2}\frac{-1\times\sqrt{6-x}-(4-x)\times\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}}{\left(\sqrt{6-x}\right)^2} \\ &= \frac{3}{4}\frac{-2(6-x)+(4-x)}{(6-x)\sqrt{6-x}} \\ &= \frac{3}{4}\frac{-12+2x+4-x}{(6-x)\sqrt{6-x}} \\ &= \frac{3}{4}\frac{x-8}{(6-x)\sqrt{6-x}} \end{aligned}$$

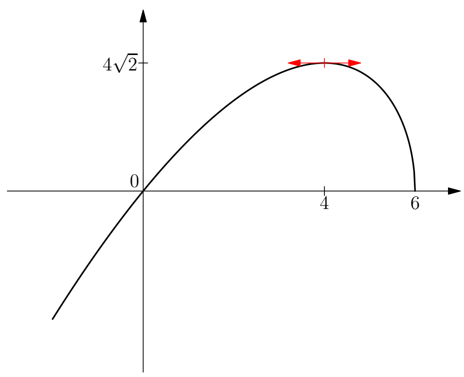
Comme $(6-x)\sqrt{6-x}>0$ si $x<6$ et que $x-8>0$ si $x<6$, on obtient que $f''(x)>0$, donc $f$ est concave sur $]-\infty;6]$.

4. Par lecture dans le tableau de variations de la question 2, on a
   - un maximum local et global en 4 qui vaut $f(4)=4\sqrt{6-4}=4\sqrt{2}$ et
   - un minimum local en 6 qui vaut $f(6)=6\sqrt{6-6}=0$.

   En revanche, on n'a pas de minimum global car la fonction tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

5. On n'a pas de point d'inflexion car pas de changement de concave à convexe ou convexe à concave.

6. Le graphe de la fonction :



d. Les dérivées sont

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 27}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^2(x^4 - 81)}{(x^4 + 27)^2} = \frac{-4x^2(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{(x^4 + 27)^2} = \frac{-4x^2(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{(x^4 + 27)^2}$$

e. Les dérivées sont

$$f'(x) = e^{-x}(x^2 - 8x + 11) = e^{-x}(x - 4 + \sqrt{5})(x - 4 - \sqrt{5})$$

$$f''(x) = -e^{-x}(x^2 - 10x + 19) = -e^{-x}(x - 5 + \sqrt{6})(x - 5 - \sqrt{6})$$

f. Les dérivées sont

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x + 2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2(x - 3)}{x^4}$$

# 3 Applications possibles en éco-gestion

**Exercice 4.**

1. Si $C(x)$ est le coût de production de $x$ unités, on appelle le coût moyen par unité la fonction $c(x) = C(x)/x$, et le coût marginal la fonction dérivée du coût de production $C'(x)$. Montrer que lorsque le coût moyen par unité est minimal, alors il est égal au coût marginal.
2. Si le coût (en euros) est $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{3/2}$, trouver
   (a) le coût, le coût moyen par unité et le coût marginal pour une production de 100 unités ;
   (b) le niveau de production qui minimise le coût moyen par unité ;
   (c) le coût minimum moyen par unité.

**Solution 4.** 1. On sait que quand le coût moyen $c(x)$ est minimal, alors sa dérivée $c'(x)$ est nulle. Maintenant, calculons la dérivée de $c(x) = \frac{C(x)}{x}$. Pour cela, on utilise la formule du produit :

$$c'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Ainsi, quand $c'(x) = 0$, alors $\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = 0$ et donc $C'(x)x - C(x) = 0$. Ce qui signifie, en réécrivant la formule que

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x),$$

autrement dit, la coût marginal $C'(x)$ est égal au coût moyen $c(x)$.

2. (a) Le coût pour 100 est $C(100) = 16000 + 200 \times 100 + 4 \times 100^{3/2} = 16000 + 20000 + 4000 = 40000$ euros ; le coût moyen par unité pour 100 est $\frac{C(100)}{100} = 400$ euros. Pour le coût marginal, on dérive $C$, on obtient ainsi

$$C'(x) = 200 + 4 \times \frac{3}{2} \times x^{1/2} = 200 + 6x^{1/2},$$

ce qui évalué pour 100 unités donne $C'(100) = 200 + 6 \times 10 = 260$ euros.

(b) Pour répondre à cette question, on se sert de la question 1. On cherche ainsi pour quelle valeur de $x$, on a $C(x)/x = C'(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{16000 + 200x + 4x^{3/2}}{x} = 200 + 6x^{1/2}.$$

On résoud cette équation, en multipliant par $x$ cela donne

$$16000 + 200x + 4x^{3/2} = 200x + 6x^{3/2}.$$

Ainsi, après simplification, on obtient $2x^{3/2} = 16000$, soit $x^{3/2} = 8000$, donc $x = 8000^{2/3} = 400$. Ainsi la production de production qui minimise le coût moyen par unité est de 400 unités.

(c) Le coût minimum moyen par unité est alors de

$$\frac{C(400)}{400} = \frac{16000 + 200 \times 400 + 4 \times (400)^{3/2}}{400} = 40 + 200 + 4 \times 20 = 320 \text{ euros.}$$

**Exercice 5.**

1. On rappelle que le profit $P(x)$ pour $x$ unités produites est égal au revenu $R(x)$ moins le coût $C(x)$ :
$$P(x) = R(x) - C(x).$$
On rappelle aussi que la fonction $R'(x)$ est appelée revenu marginal et $C'(x)$ le coût marginal.
Montrer que le profit $P(x)$ est maximal quand le revenu marginal est égal au coût marginal.
2. Vérifier que $1200 - 10.8x - 0.012x^2 = -0.012(x - 100)(x + 1000)$.
3. Si $C(x) = 16000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ est le coût de production (en euros) et $p(x) = 1700 - 7x$ la fonction de demande[1] (en euros), trouver le niveau de production qui maximise le profit.

**Solution 5.** 1. Si le profit est maximal, alors $P'(x) = 0$, mais d'autre part $P'(x) = R'(x) - C'(x)$. Ainsi, quand le profit est maximal, on a $R'(x) - C'(x) = 0$, c'est-à-dire que $R'(x) = C'(x)$ ou, en mots, que le revenu marginal $R'(x)$ est égal au coût marginal $C'(x)$.

2. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned} -0.012(x - 100)(x + 1000) &= -0.012(x^2 + 1000x - 100x - 100000) \\ &= -0.012(x^2 + 900x - 100000) \\ &= -0.012x^2 - 10.8x + 1200. \end{aligned}$$

1. La fonction de demande $p(x)$ est le prix auquel un bien doit être vendu si on souhaite vendre exactement $x$ unités du produit. Au-dessus de ce prix, on en vendra moins et, en-dessous de ce prix, on peut en vendre plus.

3. Tout d'abord, le revenu $R(x) = xp(x)$ puisque l'on va vendre $x$ unités au prix de $p(x)$. Ainsi, le profit est de

$$\begin{aligned} P(x) &= xp(x) - C(x) = x(1700 - 7x) - (16000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3) \\ &= -16000 + 1200x - 5.4x^2 - 0.004x^3. \end{aligned}$$

Maintenant, on souhaite maximiser $P$, on cherche donc les valeurs de $x$ pour lesquels $P'(x) = 0$.

$$P'(x) = 1200 - 10.8x - 0.012x^2.$$

D'après la question précédente, $P'(x) = -0.012(x - 100)(x + 1000)$. Les deux racines sont donc $x_1 = 100$ et $x_2 = -1000 < 0$.

Pour savoir qui est le max, on peut soit étudier la fonction sur $[0, \infty[$, soit se rendre compte que si $x > 1700/7 \simeq 242$, alors $p(x) < 0$, autrement dit on vend à perte. On obtient ainsi des bords puisqu'on sait que le maximum va se situer pour une production comprise entre 0 et 1700/7. On calcule ensuite le revenu $R(x)$ pour les valeurs $R(0)$, $R(100)$ et $R(1700/7)$, on obient

$$\begin{aligned} R(0) &= -16000, \\ R(100) &= -16000 + 1200 \times 100 - 5.4 \times 100^2 - 0.004 \times 100^3 \\ &= -16000 + 120000 - 54000 - 4000 = 46000, \\ R(1700/7) &= 16000 + 1200 \times 1700/7 - 5.4 \times (1700/7)^2 - 0.004 \times (1700/7)^3 \\ &\simeq -16000 + 291429 - 318490 - 57294 < 0. \end{aligned}$$

Le revenu est donc maximal pour une production de 100 unités.