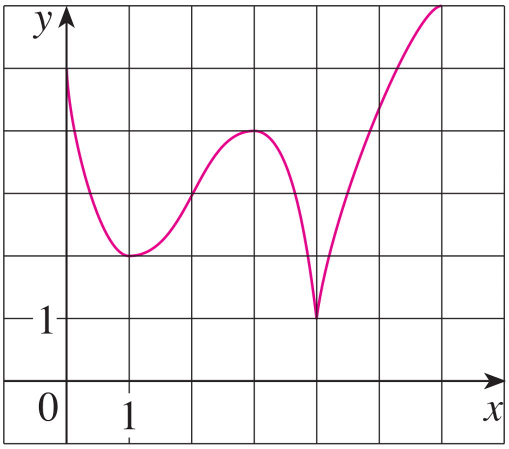
TD4

Ce TD, rédigé par Jérôme Casse, est inspiré d'exercices provenant du livre "Calculus" de James Steward (édition 7), d'un TD de Camille Coron en TC1 et d'un TD de Patrick Pamphile en GEA1.

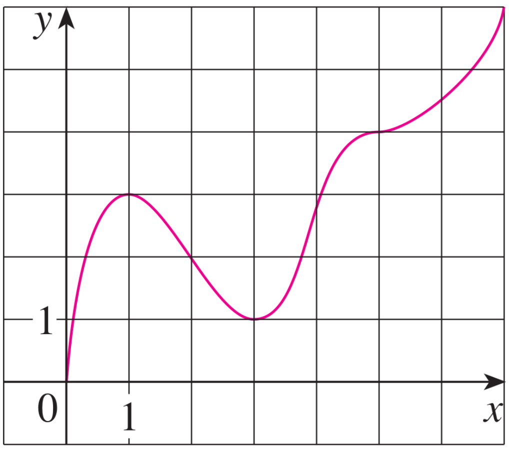
1 Interprétation graphique

Exercice 1. Pour le graphe représenté ci-après, trouver

1. les intervalles sur lesquels la fonction est croissante,
2. les intervalles sur lesquels la fonction est décroissante,
3. les intervalles sur lesquels la fonction est concave,
4. les intervalles sur lesquels la fonction est convexe,
5. les coordonnées des points d'inflexion.



Exercice 2. Mêmes questions que pour l'exercice 1, mais avec le graphe suivant :



2 Étude de fonctions

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, trouver

1. le domaine de définition,
2. les intervalles de croissance et décroissance,
3. les intervalles de concavité et de convexité,
4. les minima et maxima locaux et globaux quand ils existent,
5. les points d'inflections quand ils existent.
   Astuce : on représentera tout cela via un tableau de variations.
6. Tracer une courbe représentative de la fonction.

a. $f(x) = x^3 - 12x + 2$ b. $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$ c. $f(x) = x\sqrt{6-x}$
d. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$ e. $f(x) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 5) + 3$ f. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

[Indications : b. $6 + x - x^2 = -(x+2)(x-3)$ / e. $x^2 - 8x + 11 = (x - 4 + \sqrt{5})(x - 4 - \sqrt{5})$ et $x^2 - 10x + 19 = (x - 5 + \sqrt{6})(x - 5 - \sqrt{6})$.]

3 Applications possibles en éco-gestion

Exercice 4.

1. Si $C(x)$ est le coût de production de x unités, on appelle le coût moyen par unité la fonction $c(x) = C(x)/x$, et le coût marginal la fonction dérivée du coût de production $C'(x)$. Montrer que lorsque le coût moyen par unité est minimum, alors il est égal au coût marginal.
2. Si le coût (en euros) est $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{3/2}$, trouver
   (a) le coût, le coût moyen par unité et le coût marginal pour une production de 100 unités ;
   (b) le niveau de production qui minimise le coût moyen par unité ;
   (c) le coût minimum moyen par unité.

Exercice 5.

1. On rappelle que le profit $P(x)$ pour x unités produites est égal au revenu $R(x)$ moins le coût $C(x)$:
   $$P(x) = R(x) - C(x).$$
   On rappelle aussi que la fonction $R'(x)$ est appelée revenue marginal et $C'(x)$ le coût marginal.
   Montrer que le profit $P(x)$ est maximal quand le revenu marginal est égal au coût marginal.
2. Vérifier que $1200 - 10.8x - 0.012x^2 = -0.012(x - 100)(x + 1000)$.
3. Si $C(x) = 16000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ est le coût de production (en euros) et $p(x) = 1700 - 7x$ la fonction de demande [1] (en euros), trouver le niveau de production qui maximise le profit.

1. La fonction de demande $p(x)$ est le prix auquel un bien doit être vendu si on souhaite vendre exactement x unités du produit. Au-dessus de ce prix, on en vendra moins et, en-dessous de ce prix, on peut en vendre plus.