TD3 : correction

1 Application à l'éco-gestion

Exercice 1. Le prix pour un bien de luxe est $p(x) = 400 - 2x$ où x est le nombre d'unités produites. Quelle quantité doit-on produire pour maximiser le revenu total ?

Solution 1. Le revenu total est $R(x) = xp(x) = 400x - 2x^2$. Ainsi, il faut maximiser $R(x)$. Pour cela, on dérive

$$R'(x) = 400 - 4x.$$

Puis, on regarde quand $R'(x)$ n'existe pas (ici, il existe toujours) et quand $R'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} R'(x) = 0 &\Leftrightarrow 400 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow 400 = 4x \\ &\Leftrightarrow x = 100. \end{aligned}$$

Maintenant, il faut savoir si $x = 100$ est bien un maximum. Pour cela, on peut regarder les variations de $R(x)$ via le signe de $R'(x)$.

$$\begin{aligned} R'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 400 - 4x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 400 \geq 4x \\ &\Leftrightarrow x \leq 100. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut construire un tableau de variations :

x	0		100		$+\infty$
$R'(x)$		$+$	0	$-$	
$R(x)$		↗	$R(100)$	↘	

Cela montre que le maximum est atteint en $x = 100$. Ainsi, la quantité à produire pour maximiser le revenu total est de 100 unités.

Exercice 2. Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût total (en K€) pour produire x hectolitres (hl) est égal à :

$$CT(x) = x^2 - 7x + 5.$$

L'entreprise ne peut produire plus de 8hl par mois. Le prix de vente est de 1000€ l'hectolitre. Tout ce qui est produit est vendu.

1. Quel est le bénéfice pour x hectolitres produits et vendus ?

2. Quelle est la production qui maximise le profit ?
3. Vérifier que $-x^2 + 8x - 5 = -(x - 4 - \sqrt{11})(x - 4 + \sqrt{11})$.
4. Quel est le seuil de rentabilité (plus petite production pour laquelle le bénéfice est nul) ?
5. Le volume total des ventes obtenues sur les n premiers jours du mois est égal à :

$$V(n) = \frac{1}{5}\ln(7n - 1) \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq n \leq 30.$$

Au bout de combien de jours a-t-on atteint le seuil de rentabilité ?

Solution 2. 1. Le bénéfice $B(x)$ en milliers d'euros (ou K€) est

$$B(x) = GV(x) - CT(x)$$

où $GV(x)$ est le gain (en K€) dû aux ventes de $x$hl. Or, chaque hectolitre se vend 1000€, donc $x$hl va se vendre $1000x$€, soit xK€. Donc $GV(x) = x$. Ainsi, le bénéfice est

$$B(x) = x - (x^2 - 7x + 5) = -x^2 + 8x - 5.$$

2. On cherche à maximiser $B(x)$ sur $[0, 8]$.
   — On dérive $B(x)$:
   $$B'(x) = -2x + 8.$$
   — On regarde les valeurs de x dans $[0, 8]$ telles que $B'(x)$ n'existe pas (aucune telle valeur de x) ou telles que $B'(x) = 0$:
   $$\begin{aligned} B'(x) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 8 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \in [0, 8]. \end{aligned}$$
   — On calcule
   $$\begin{aligned} &B(0) = 0 + 0 - 5 = -5, \\ &B(4) = -4^2 + 8 \times 4 - 5 = 16 + 32 - 5 = 11, \\ &B(8) = -8^2 + 8 \times 8 - 5 = 64 - 64 - 5 = -5. \end{aligned}$$
   Le maximum est atteint en $x = 4$. La production qui maximise est donc de 4hl.
3. On développe le membre de droite :
$$\begin{aligned} -(x - 4 - \sqrt{11})(x - 4 + \sqrt{11}) &= -(x^2 - 4x + \sqrt{11}x - 4x + 16 - 4\sqrt{11} - \sqrt{11}x + 4\sqrt{11} - 11) \\ &= -(x^2 - 8x + 5) \\ &= -x^2 + 8x - 5. \end{aligned}$$
4. On cherche à trouver les x tels que $B(x) = 0$ et $B'(x) > 0$. On commence d'abord par chercher les x tels que $B(x) = 0$:
$$B(x) = 0 \Leftrightarrow -(x - 4 - \sqrt{11})(x - 4 + \sqrt{11}) = 0 \Leftrightarrow (x - 4 - \sqrt{11})(x - 4 + \sqrt{11}) = 0.$$

Donc $B(x) = 0$ si et seulement si $x - 4 - \sqrt{11} = 0$ ou $x - 4 + \sqrt{11} = 0$, si et seulement si $x = 4 + \sqrt{11}$ ou $x = 4 - \sqrt{11}$.

$$4 - \sqrt{11} \simeq 0.68 \text{ et}$$
$$4 + \sqrt{11} \simeq 7.32.$$

Les deux valeurs sont positives, calculons maintenant la valeur de la dérivée en ces points :

$$B'(4 - \sqrt{11}) = -2(4 - \sqrt{11}) + 8 = -8 + 2\sqrt{11} + 8 = 2\sqrt{11} > 0 \text{ et}$$
$$B'(4 + \sqrt{11}) = -2(4 + \sqrt{11}) + 8 = -8 - 2\sqrt{11} + 8 = -2\sqrt{11} < 0.$$

Le seuil de bénéfice est donc $4 - \sqrt{11} \simeq 0.68$. Il faut donc produire et vendre 0.68hl pour rentrer dans les frais.
Remarque : le seuil $4 + \sqrt{11} \simeq 7.32$ est le seuil de perte. Ainsi, si on produit plus de 7.32hl et qu'on les vend à 1000€ l'hectolitre, on perd alors forcément de l'argent, on produit alors à perte.

5. On cherche à savoir quelle est la première valeur de n tel que $V(n) \geq 4 - \sqrt{11}$.

$$\begin{aligned} V(n) \geq 4 - \sqrt{11} &\Leftrightarrow \frac{1}{5}\ln(7n-1) \geq 4 - \sqrt{11} \\ &\Leftrightarrow \ln(7n-1) \geq 20 - 5\sqrt{11} \\ &\Leftrightarrow 7n - 1 \geq e^{20-5\sqrt{11}} \\ &\Leftrightarrow 7n \geq e^{20-5\sqrt{11}} + 1 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{e^{20-5\sqrt{11}} + 1}{7} \simeq 4.5. \end{aligned}$$

Ainsi, c'est au cours du 4ème jour que le seuil de rentabilité est atteint.

Exercice 3. Le service R&D d'une entreprise a mis au point de nouveaux sachets à base de matériaux bio-dégradables. Le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de v milliers de sachets est donné par
$$B(v) = (18 - 5v)e^{(v-2)} - 5.$$
La capacité maximale de production est de trois mille sachets.

1. Montrer que la dérivée de B est
$$B'(v) = (13 - 5v)e^{(v-2)}.$$
2. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de mille, deux mille et trois mille sachets.
3. Déterminer le volume des ventes pour réaliser un bénéfice maximal.
4. Quel est alors le bénéfice maximal en euros ?
5. Montrer que le seuil de rentabilité (plus petit volume des ventes pour lequel le bénéfice est positif) est égal à $v \simeq 1,07$ milliers de sachets.

6. Le volume total des ventes obtenues sur les n prochains trimestres est égal à :
$$V(n) = 0,2n^3 - 2n^2 + 9n - 7 \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq n \leq 5.$$
Au bout de combien de trimestres a-t-on atteint le seuil de rentabilité ?

Solution 3. 1. La dérivée de -5 est 0, il nous faut donc calculer la dérivée de $(18-5v)e^{v-2}$. On reconnait le produit de $18-5v$ et de e^{v-2} dont les dérivées respectives sont -5 et e^{v-2}, ainsi
$$B'(v) = -5e^{v-2} + (18-5v)e^{v-2} = (13-5v)e^{v-2}.$$

2. Le bénefice pour la vente de mille sachets est
$$B(1) = (18 - 5 \times 1)e^{1-2} = 13e^{-1} - 5 \simeq -0.21756,$$
c'est-à-dire que l'on fait environ 218€ de *perte*.
Le bénéfice pour la vente de deux mille sachets est $B(2) = (18-5\times 2)e^{2-2} - 5 = 8-5 = 3$k€, on fait donc 3000€ de bénéfice.
Le bénéfice pour la vente de trois mille sachets est $B(3) = (18 - 5 \times 3)e^{3-2} - 5 = 3e - 5 \simeq 3.155$k€, on fait donc environ 3155€ de bénéfice.

3. On veut trouver la valeur de v pour laquelle $B(v)$ est maximal. Pour cela, on regarde la dérivée de B où elle n'existe pas (nulle part) et où elle vaut 0 :
$$\begin{aligned} B'(v) = 0 &\Leftrightarrow (13-5v)e^{v-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 13 - 5v = 0 \text{ ou } e^{v-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 13 - 5v = 0 \text{ (car } e^{v-2} > 0) \\ &\Leftrightarrow v = 13/5. \end{aligned}$$
Maintenant, on peut étudier les variations de B pour vérifier que c'est bien un maximum :
$$\begin{aligned} B'(v) \geq 0 &\Leftrightarrow (13-5v)e^{v-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 13 - 5v \geq 0 \text{ (car } e^{v-2} > 0) \\ &\Leftrightarrow v \leq 13/5. \end{aligned}$$
Ceci signifie que B est croissant sur $[0, 13/5]$ et décroissant sur $[13/5, +\infty)$. On a donc bien un maximum en $13/5 = 2.6$. Il faut donc réaliser 2600 ventes pour atteindre le bénéfice maximal.

4. Le bénéfice maximal est alors $1000B(2.6)$€, or
$$B(13/5) = (18 - 5 \times 13/5)e^{2.6-2} - 5 = (18-13)e^{0.6} - 5 = 5e^{0.6} - 5 = 4.11059.$$
Ainsi, le bénéfice maximal est environ de 4111€.

5. On cherche la première valeur de v telle que
$$B(v) = 0 \text{ et } B'(v) \geq 0.$$
On vérifie
$$B(1.07) \simeq -0.0088.$$
Le premier point est vérifié. Le second aussi car $1.07 < 2.6$ par la question précédente et donc $B'(1.07) > 0$. [Remarque : on peut aussi le calculer $B'(1.07) = (13 - 5 \times 1.07)e^{-0.93} \simeq 3 > 0$.] Ainsi, le seuil de rentabilité est proche de 1.07 millier de sachets.

6. On cherche la valeur de n telle que $V(n) \geq 1.07$ et $V(n-1) < 1.07$. Calculons

$$\begin{aligned} V(1) &= 0.2 - 2 + 9 - 7 = 0.2, \\ V(2) &= 0.2 \times 8 - 2 \times 4 + 9 \times 2 - 7 = 1.6 - 8 + 18 - 7 = 4.6. \end{aligned}$$

Pas besoin d'aller plus loin, le seuil de rentabilité est atteint à la fin du deuxième trimestre.

Exercice 4. Une étude de marché a permis d'établir que pour un prix de vente unitaire de p euros, les quantités vendues $Q(p)$ (en millier d'unités) sont égales à

$$Q(p) = 35 - 5p \text{ pour } p \geq 0.$$

Le coût variable unitaire est d'un euro. On définit la marge sur coût variable comme la différence entre le chiffre d'affaires et le total des coûts variables.

1. Quel doit être le prix de vente pour que la marge sur coût variable soit positive ?
2. Quel doit être le prix de vente pour maximiser la marge sur coût variable ?

Solution 4.

1. La marge sur coût variable en fonction du prix est égale à

$$M(p) = p \times Q(p) - 1 \times Q(p) = (p-1)(35-5p) = 5(p-1)(7-p).$$

On souhaite trouver les valeurs de p telles que $M(p) \geq 0$. Comme $5 > 0$, il suffit que $(p-1)(p-7) \geq 0$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &p - 1 \geq 0 \text{ et } 7 - p \geq 0, \text{ ou bien} \\ &p - 1 \leq 0 \text{ et } 7 - p \leq 0. \end{aligned}$$

[Pourquoi ? car le produit de 2 nombres est positif si les 2 nombres sont de même signe (donc tous les deux positifs ou tous les deux négatifs).] En résolvant chaque ligne, on trouve comme solution

$$\begin{aligned} &p \geq 1 \geq 0 \text{ et } 7 \geq p, \text{ ou bien} \\ &p \leq 1 \text{ et } 7 \leq p. \end{aligned}$$

On ne garde que la première ligne, donc $1 \leq p \leq 7$. La deuxième amène à une contradiction car alors $7 \leq 1$. Ainsi, il faut que le prix soit compris entre 1 et 7 euros.

2. On applique la méthode pour trouver le maximum de M sur $[1, 7]$:
   — On dérive $M(p)$

$$\begin{aligned} M'(p) &= 5\left(1 \times (7-p) + (p-1) \times (-1)\right) \\ &= 5\left(7 - p - p + 1\right) = 5(8-2p) = 10(4-p). \end{aligned}$$

   — La seule valeur intéressante est $p = 4$.
   — On calcule $M(4) = 5 \times 3 \times 3 = 45$, et on sait que $M(1) = M(7) = 0$. Le maximum est donc atteint en $p = 4$, le prix de vente qui maximise la marge sur coût variable est donc de 4€.

Exercice 5. Un constructeur vend 1000 télévisions par semaine à 450€ chacune. Une étude de marché montre que, pour toute réduction de 10€ du prix, le nombre de télévisions vendues augmente de 100 par semaine.

1. Quelle est la fonction de la demande en fonction du prix ?
2. À quel prix le constructeur devrait vendre ses télévisions pour maximer les revenus ?

Solution 5.

1. $Q(p) = ap + b$ avec $Q(450) = 1000$ et $a = -100/10 = -10$, donc $b = 1000 + 4500 = 5500$. Faire un petit dessin.
2. Les revenus en fonction du prix sont $R(p) = p \times Q(p) = -10p^2 + 5500p$.
   — On dérive $R(p)$
   $$R'(p) = -20p + 5500.$$
   — On a $R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{5500}{20} = 275$.
   — On calcule $R(275) = 275 \times (-10 \times 275 + 5500) = 756250$. On a $R(0) = 0$ et $R(450) = 450 \times 1000 = 450000 < 756250$. Le maximum est donc atteint en $p = 275$, le prix de vente qui maximise les revenus est donc de 275€.

Exercice 6. Un gérant d'un complexe immobilier de 100 appartements sait d'expérience que tous les logements sont occupés si le prix des loyers est de 800€ par mois. Une étude de marché montre qu'à chaque augmentation du loyer de 10€, un appartement deviendra vacant.

1. Quel prix de loyer maximise le bénéfice ?
2. Combien d'appartements sont alors occupés ?

Solution 6.

1. Le nombre d'appartements occupés en fonction du loyer est $Q(p) = ap+b$ avec $Q(800) = 100$ et $a = -\frac{1}{10}$, donc $b = 100 + 80 = 180$. Le bénéfice est $B(p) = p \times Q(p) = -\frac{1}{10}p^2 + 180p$.
   — On dérive $R(p)$
   $$R'(p) = -\frac{1}{5}p + 180.$$
   — On a $R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 5 \times 180 = 900$.
   — On calcule $R(900) = 900 \times (-\frac{900}{10} + 180) = 990$. On a $R'(p) \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 900$. Le maximum est donc atteint en $p = 900$, le loyer qui maximise le bénéfice est donc de 900€ par mois.
2. On a $Q(900) = -\frac{900}{10} + 180 = 90$. Il y aurait donc 90 appartements occupés.