# TD2 : correction

## 1 Dérivée de fonctions composées

**Exercice 1.** Trouver la dérivée de $f(x) = (1+3x+x^2)^2$ de trois façons :

1. en utilisant la formule de la composée ;
2. en écrivant $f(x) = (1+3x+x^2)\times(1+3x+x^2)$ et en utilisant la formule de la dérivation du produit ;
3. en développant et en utilisant les fonctions usuelles.

**Solution 1.**

1. On reconnait $f(x) = u(v(x))$ où $u(y) = y^2$ et $v(x) = 1+3x+x^2$. De plus,
$$u'(y) = 2y \text{ et } v'(x) = 3+2x.$$
En utilisant la formule de la dernière ligne du formulaire, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x)\times u'(v(x)) \\ &= (3+2x)\times(2(1+3x+x^2)) \\ &= 2(3+2x)(1+3x+x^2). \end{aligned}$$
2. On reconnait $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = v(x) = 1+3x+x^2$ et en utilisant la formule du produit, on obtient
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (3+2x)(1+3x+x^2) + (1+3x+x^2)(3+2x) \\ &= 2(3+2x)(1+3x+x^2). \end{aligned}$$
3. On développe $f(x) = 1+3x+x^2+3x+9x^2+3x^3+x^2+3x^3+x^4 = 1+6x+11x^2+6x^3+x^4$. Maintenant, on dérive
$$f'(x) = 6+22x+18x^2+4x^3.$$
On vérifie que $2(3+2x)(1+3x+x^2) = 2(3+9x+3x^2+2x+6x^2+2x^3) = 6+22x+18x^2+4x^3$.

**Exercice 2.** Dériver les fonctions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| 1. $f(x) = e^{3x+1}$ | 2. $h(t) = \sqrt{t^2-4}$ | 3. $u(x) = 2^x$ |
| 4. $f(x) = (2x+1)^{1.7}+4$ | 5. $h(x) = \ln(e^x+1)$ | 6. $g(x) = x^x$ |

**Solution 2.**

1. On voit que c'est de la forme $e^{\text{qqch}}$ où le qqch $= 3x+1$. C'est donc une composée avec $u(y) = e^y$ et $v(x) = 3x+1$, ainsi $f(x) = u(v(x))$. On note que
$$u'(y) = e^y \text{ et } v'(x) = 3.$$
Et, donc,
$$f'(x) = v'(x)u'(v(x)) = 3e^{3x+1}.$$
2. C'est là aussi une composé avec $u(y) = \sqrt{y}$ et $v(t) = t^2-4$ dont les dérivées sont $u'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ et $v'(t) = 2t$. Ainsi
$$f'(t) = 2t\frac{1}{2\sqrt{t^2-4}} = \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}.$$

3. On doit d'abord écrire sous la forme $u(x) = e^{x\ln 2}$. On reconnait alors une composée avec $f(y) = e^y$ et $g(x) = x\ln 2$. Ainsi
$$u'(x) = \underbrace{\ln(2)}_{g'(x)} \underbrace{e^{x\ln 2}}_{f'(g(x))} = \ln(2)2^x.$$
4. On a affaire à une somme $f(x) = \underbrace{(2x+1)^{1.7}}_{g(x)} + \underbrace{4}_{h(x)}$. De plus, $h'(x) = 0$. Il reste donc à dériver $g(x)$.
   — Pour dériver $g$, on reconnait que c'est une forme composée avec $u(y) = y^{1.7}$ et $v(x) = 2x+1$ dont les dérivées respectives sont
   $$u'(y) = 1.7y^{1.7-1} = 1.7y^{0.7} \text{ et } v'(x) = 2.$$
   — On en conclut que
   $$f'(x) = g'(x) + 0 = 2 \times 1.7(2x+1)^{0.7} = 3.4(2x+1)^{0.7}.$$
5. On reconnait une composée avec $u(y) = \ln(y)$ et $v(x) = e^x + 1$. Ainsi
$$h'(x) = e^x \times \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1}.$$
6. On écrit d'abord $g(x) = x^x = e^{x\ln x}$. On reconnait maintenant une composée avec $u(y) = e^y$ et $v(x) = x\ln x$.
   — La dérivée de $u$ est $u'(y) = e^y$.
   — Pour $v(x)$, on reconnait le produit de $x$ et de $\ln x$, ainsi la dérivée de $v$ est
   $$v'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$
   — On peut maintenant appliquer la formule de la composée pour $g$, on obtient
   $$g'(x) = (1+\ln x)e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^x.$$

**Exercice 3.** Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(s) = \sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+4}}$ 2. $f(x) = x^2e^{-1/x}$ 3. $v(x) = \sqrt{1+xe^{6x^2-3}}$

**Solution 3.** 1. On a affaire à une fonction composée avec $u(y) = \sqrt{y}$ et $v(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4}$.
   — La dérivée de $u$ est $u'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.
   — Pour $v$, on remarque que l'on a affaire à un quotient de la forme $v(s) = \frac{g(s)}{h(s)}$ où $g(s) = s^2+1$ et $h(s) = s^2+4$.
      — On les dérive donc $g'(s) = 2s$ et $h'(s) = 2s$ (aussi),
      — puis on applique la formule pour le quotient
      $$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{g'(s)h(s) - g(s)h'(s)}{h(s)^2} \\ &= \frac{2s(s^2+4) - (s^2+1)2s}{(s^2+4)^2} \\ &= \frac{2s^3+8s-2s^3-2s}{(s^2+4)^2} \\ &= \frac{6s}{(s^2+4)^2}. \end{aligned}$$

— Une fois tout cela fait, on peut tranquillement appliquer notre formule pour la composée

$$f'(s) = v'(s)u'(v(s)) = \frac{6s}{(s^2+4)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+4}}}$$

que l'on peut simplifier en

$$f'(s) = v'(s)u'(v(s)) = \frac{3s}{(s^2+4)^{3/2}(s^2+1)^{1/2}}.$$

2. On a ici affaire en premier lieu à un produit, celui de $u(x) = x^2$ avec $v(x) = e^{-1/x}$.
   — La dérivée de $u$ est $u'(x) = 2x$.
   — Pour celle de $v$ on reconnait une composée, celle de $g(y) = e^y$ et de $h(x) = -\frac{1}{x}$ :
     — On dérive donc : $g'(y) = e^y$ et $h'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$,
     — puis on applique la formule de la composée

$$v'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}.$$

   — Finalement, on réassemble le tout grâce à la formule du produit

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{e^{-1/x}}_{v} + \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}_{v'} = (2x+1)e^{-1/x}.$$

3. Plus difficile et plus long. Vous n'en aurez jamais d'aussi compliqué à calculer dans la suite du cours ni dans le devoir finale. Le résultat final est :

$$v'(x) = \frac{e^{-3/2+6x^2}(1+12x^2)}{2\sqrt{e^3+e^{6x^2}x}}.$$

## 2 Dérivées par morceaux

**Exercice 4.** Pour les deux fonctions $f$ ci-dessous, donner leur dérivée et dire si elles sont dérivables en le point $x_0$ :

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2x+2 & \text{si } x \leq 0, \\ 2e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.
2. $f(x) = (x^3+1)\,\mathbf{1}_{x\leq 1} + 2x\,\mathbf{1}_{x>1}$ et $x_0 = 1$.

**Solution 4.** 1. Pour dériver $f$, on dérive chacune de ces formules sur l'ensemble qui correspond à part le point de jonction (ici : $x_0 = 0$), on a donc

$$f'(x) = \begin{cases} 6x+2 & \text{si } x < 0, \\ 2e^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Pour savoir si la dérivée en $x_0$ existe, il faut vérifier 2 choses :
— les valeurs de $f$ pour ces deux formules coïncident en $x_0$, c'est-à-dire ici :

$$3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2 \text{ et } 2e^0 = 2,$$

comme $2 = 2$, c'est ok ;

— les valeurs de $f'$ pour les deux formules de $f'$ coïncident aussi en $x_0$, c'est-à-dire ici :

$$6 \times 0 + 2 = 2 \text{ et } 2e^0 = 2,$$

là encore, ici, ça marche.

On en conclut que $f$ est aussi dérivable en 0 et que $f'(0) = 2$.

2. La notation $\mathbf{1}_{x \leq 1}$ signifie que cela vaut 1 si $x \leq 1$ et 0 sinon. On peut donc réécrire la fonction $f$ de la même façon que pour l'exercice précédent :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 1, \\ 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On peut alors dérouler la même méthode que précédemment

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1, \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Puis, pour la dérivée en 1, on vérifie

— la valeur de $f$ en 1 :

$$1^3 + 1 = 2 \text{ et } 2 \times 1 = 2,$$

donc ok ;

— la valeur de $f'$ en 1 :

$$3 \times 1^2 = 3 \neq 2,$$

donc pas ok.

Conclusion : la fonction $f$ n'est pas dérivable en 1.

# 3 Min et Max

**Exercice 5.** Trouver les extrema locaux et globaux de

1. $f(x) = 12 + 4x - x^2$ sur $[0, 5]$,
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $[0.2, 4]$,
3. $f(x) = x - \ln(x)$ sur $[0.5, 2]$,
4. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $[-1, 1]$.

**Solution 5.** 1. Pour ce genre d'exercice,

— On dérive d'abord $f$ :

$$f'(x) = 4 - 2x.$$

— Puis, on cherche les valeurs $x$ tel que

— $f'(x)$ n'existe pas (ici : il n'y en a aucune) ;

— $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

De plus, 2 est bien dans notre intervalle $[0, 5]$. On le garde donc.

— Pour conclure, on calcule $f(x)$ en les valeurs que l'on a gardées et en les extrémités :

$$\begin{aligned} f(0) &= 12 + 4 \times 0 - 0^2 = 12, \\ f(5) &= 12 + 4 \times 5 - 5^2 = 12 + 20 - 25 = 7, \\ f(2) &= 12 + 4 \times 2 - 2^2 = 12 + 8 - 4 = 16. \end{aligned}$$

Cela nous permet de dire que 16 est le maximum global, 7 le minimum global. De plus, en les mettant dans l'ordre qui correspond à leur $x$, on obtient $12 \nearrow 16 \searrow 7$ ce qui permet d'en déduire que 12 et 7 sont des minimums locaux et 16 un maximum local sur $[0, 5]$.

2. On applique exactement la même méthode.
   — La dérivée de $f$ est
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$
   — Les valeurs de $x$ dont on va avoir besoin :
     — $f'(x)$ n'existe pas si $x = 0$ (on ne peut diviser par 0), mais $0 \notin [0.2, 5]$, donc on ne conserve pas la valeur 0.
     — Quand est-ce que $f'(x) = 0$ ?
     $$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$
     La valeur 1 est bien dans notre intervalle $[0.2, 4]$, mais pas $-1$. Au final, on ne conserve que la valeur 1.
     — Calcul de $f(x)$ pour les valeurs intéressantes :
     $$\begin{aligned} f(0.2) &= 0.2 + \frac{1}{0.2} = 0.2 + 5 = 5.2 \\ f(1) &= 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 \\ f(4) &= 4 + \frac{1}{4} = 4 + 0.25 = 4.25. \end{aligned}$$
     Cela nous permet de conclure :
     — Maximum global : 5.2,
     — Minimum global : 2,
     — Maxima locaux : 5.2 et 4.25,
     — Minimum local : 2.
3. Encore,
   — La dérivée de $f$ est
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$
   — Les valeurs de $x$ dont on va avoir besoin :

— $f'(x)$ n'existe pas si $x = 0$ (on ne peut diviser par 0), mais $0 \notin [0.5, 2]$, donc on ne conserve pas la valeur 0.
— Quand est-ce que $f'(x) = 0$ ?

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

La valeur 1 est bien dans notre intervalle $[0.5, 2]$.
— Calcul de $f(x)$ pour les valeurs intéressantes :

$$\begin{aligned} f(0.2) &= 0.5 - \ln(0.5) = 0.5 + \ln(2) \simeq 0.5 + 0.69 = 1.19 \\ f(1) &= 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1 \\ f(4) &= 2 - \ln(2) \simeq 2 - 0.69 = 1.31. \end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure :
— Maximum global : $2 - \ln(2)$,
— Minimum global : 1,
— Maxima locaux : $0.5 + \ln(2)$ et $2 - \ln(2)$,
— Minimum local : 1.

4. Encore,
— La dérivée de $f$ est

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

— Les valeurs de $x$ dont on va avoir besoin :
— $f'(x)$ n'existe pas si $x^2 + 1 = 0$. Mais comme $x^2 \geq 0$, on a $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ quelle que soit la valeur de $x$. On en conclut que $f'(x)$ existe partout sur l'intervalle $[-1, 1]$.
— Quand est-ce que $f'(x) = 0$ ?

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

La valeur 0 est bien dans notre intervalle $[-1, 1]$.
— Calcul de $f(x)$ pour les valeurs intéressantes :

$$\begin{aligned} f(-1) &= \ln(1 + 1) = \ln(2) \simeq 0.69, \\ f(0) &= \ln(0 + 1) = \ln(1) = 0, \\ f(1) &= \ln(1 + 1) = \ln(2) \simeq 0.69. \end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure :
— Maximum global : $\ln(2)$,
— Minimum global : 0,

- Maxima locaux : $\ln(2)$,
- Minimum local : 0.

**Exercice 6.** Une entreprise a mené une grosse campagne publicitaire pour son produit de pointe. On estime que la demande (en millier d'unités) $x$ jours après le lancement sera de

$$f(x) = (x-2)e^{-\frac{x}{10}} + 6.$$

Quelle sera la demande maximale sur le premier mois (30 jours) ? Aux alentours de quel jour sera-t-elle atteinte ?

**Solution 6.** La traduction en termes mathématiques du problème est le fait que l'on cherche le maximum de $f$ sur l'intervalle $[0, 30]$ (le premier mois) et pour quelle valeur de $x$ ce maximum est atteint. Pour cela, on dérive $f$ :

- il faut d'abord remarquer que $f$ est une somme : celle de $f_1(x) = (x-2)e^{-\frac{x}{10}}$ et de $f_2(x) = 6$.
- La dérivée de $f_2$ est $f_2'(x) = 0$.
- Maintenant, il faut remarquer que $f_1(x)$ est le produit de $g(x) = (x-2)$ et $h(x) = e^{-\frac{x}{10}}$.
- La dérivée de $g'(x) = 1$.
- Maintenant, il faut remarquer que $h(x)$ est la composée de $u(y) = e^y$ et $v(x) = -\frac{x}{10}$. Leurs dérivées respectives sont $u'(y) = e^y$ et $v'(x) = -1/10$.
- On peut maintenant recomposer le tout pour trouver :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \underbrace{\underbrace{1}_{g'(x)} \times \underbrace{e^{-\frac{x}{10}}}_{h(x)} + \underbrace{(x-2)}_{g(x)} \times \underbrace{\underbrace{\frac{-1}{10}}_{v'(x)} \underbrace{e^{-\frac{x}{10}}}_{u'(v(x))}}_{h'(x)}}_{f_1'(x)} + \underbrace{0}_{f_2'(x)} \\
&= e^{-x/10} - \frac{x}{10}e^{-x/10} + \frac{2}{10}e^{-x/10} \\
&= e^{-x/10}\left(1 + \frac{1}{5} - \frac{x}{10}\right) \\
&= e^{-x/10}\left(\frac{6}{5} - \frac{x}{10}\right)
\end{aligned}$$

Maintenant, on cherche quand cette dérivée n'existe pas (elle existe toujours ici) et quand elle s'annule.

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x/10}\left(\frac{6}{5} - \frac{x}{10}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{-x/10} = 0 \text{ ou } \frac{6}{5} - \frac{x}{10} = 0
\end{aligned}$$

Cependant $e^{qqch}$ est toujours strictement positif, donc $e^{-x/10}$ ne peut pas être égal à 0, il ne reste donc plus que la deuxième solution :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{6}{5} - \frac{x}{10} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{60}{5} = 12 \in [0, 30]. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(0) &= (0-2)e^0 + 6 = -2 + 6 = 4 \\ f(12) &= (12-2)e^{-12/10} + 6 = 10e^{-6/5} + 6 \simeq 9 \\ f(30) &= (30-2)e^{-30/10} + 6 = 30e^{-3} + 6 \simeq 7.5. \end{aligned}$$

Conclusion : la demande maximum est de 9000 unités et elle aura lieu le 12ième jour.